УДК 539.3

Белорусский национальный технический университет, Минск

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ И ОБЩИМ РЕШЕНИЕМ В ФОРМЕ П.Ф.ПАПКОВИЧА-Г.Д.ГРАДСКОГО ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А.

In speaking of operator method of solving problems of elasticity as a generalization of the method Papkovich-Gradsky.

Уравнение равновесия упругой изотропной среды перемещениях массовых сил имеют вид:

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u+(\gamma-1)\partial_x\Theta=0\\&\nabla^2 v+(\gamma-1)\partial_y\Theta=0\\&\nabla^2 w+(\gamma-1)\partial_z\Theta=0\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\Theta=\partial_x u+\partial_y v+\partial_z w$ – объемное расширение; $\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y=\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z=\dfrac{\partial}{\partial z}$;

$\nabla^2=\partial_x^2 u+\partial_y^2 v+\partial_z^2 w$ – оператор Лапласа; ν – коэффициент Пуассона.

В [1] дано операторное решение этой задачи для слоя перпендикулярного оси z.

$$\begin{aligned}u_1&=\partial_1\left[\gamma\sin z\nabla_1+(\gamma-1)(z\nabla_1\cos z\nabla_1-h\nabla_1 ctg\, h\nabla_1\sin z\nabla_1)f_1(x;y)\right]\\v_1&=\partial_2\left[\gamma\sin z\nabla_1+(\gamma-1)(z\nabla_1\cos z\nabla_1-h\nabla_1 ctg\, h\nabla_1\sin z\nabla_1)f_1(x;y)\right]\\w_1&=-\nabla_1\left[\cos z\nabla_1+(\gamma-1)(z\nabla_1\sin z\nabla_1+h\nabla_1 ctg\, h\nabla_1\cos z\nabla_1)f_1(x;y)\right]\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $2h$ – высота слоя, $\nabla_1=\sqrt{\partial_x^2+\partial_y^2}$, $f_1(x;y)$ – произвольная функция.

Полагая операторный коэффициент равным $h\nabla_1 ctg\, h\nabla_1=A$ и обозначая гармоническую функцию $\sin z\nabla_1 f_1(x;y)=F_1(x;y;z)(\nabla^2 F_1=0)$, перепишем (2) в виде:

$$\begin{aligned}u_1&=\partial_x\left[\gamma F_1+(\gamma-1)(zF'_{1z}-AF_1)\right]\\v_1&=\partial_y\left[\gamma F_1+(\gamma-1)(zF'_{1z}-AF_1)\right]\\w_1&=\partial_z\left[-\gamma F_1+(\gamma-1)(zF'_{1z}-AF_1)\right]\end{aligned}\tag{3}$$

здесь штрихом F'_{1z} обозначена производная по z.

Осуществляя циклическую перестановку переменных x,y,z и индексов 1,2,3 получим еще два решения для слоев перпендикулярных осям x,y.

$$\begin{aligned}u_2&=\partial_x\left[\gamma F_2+(\gamma-1)(yF'_{2x}-AF_2)\right]\\v_2&=\partial_y\left[-\gamma F_2+(\gamma-1)(yF'_{2x}-AF_2)\right]\\w_2&=\partial_z\left[\gamma F_2+(\gamma-1)(yF'_{2x}-AF_2)\right]\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}u_3&=\partial_x\left[-\gamma F_3+(\gamma-1)(xF'_{3y}-AF_3)\right]\\v_3&=\partial_y\left[\gamma F_3+(\gamma-1)(xF'_{3y}-AF_3)\right]\\w_3&=\partial_z\left[\gamma F_3+(\gamma-1)(xF'_{3y}-AF_3)\right]\end{aligned}\tag{5}$$

Складывая решения (3), (4), (5) получим

$$u = u + u_1 + u_2 + u_3 = \gamma\left(F'_{1x} + F'_{2x} + F'_{3x}\right) + (\gamma - 1)\left[zF''_{1xz} + yF''_{2xy} + xF''_{3xx} - A\left(F'_{1x} + F'_{2x} + F'_{3x}\right)\right]$$

Аналогично

$$\begin{aligned} v &= \gamma\left(F'_{1y} + F'_{2y} - F'_{3y}\right) + (\gamma - 1)\left[zF''_{1yz} + yF''_{2yy} + xF''_{3xy} - A\left(F'_{1y} + F'_{2y} + F'_{3y}\right)\right] \\ w &= \gamma\left(-F'_{1z} + F'_{2z} - F'_{3z}\right) + (\gamma - 1)\left[zF''_{1zz} + yF''_{2yz} + xF''_{3xz} - A\left(F'_{1z} + F'_{2z} + F'_{3z}\right)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначая $F'_{1z} = \psi_3$, $F'_{2y} = \psi_2$, $F'_{3x} = \psi_1$, $\psi_0 = F_1 + F_2 + F_3$ – гармоническая скалярная функция и поделив на $-(\gamma - 1)$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} u &= 4(1-\upsilon)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x}(\psi + B\psi_0) \\ v &= 4(1-\upsilon)\psi_2 - \frac{\partial}{\partial y}(\psi + B\psi_0) \\ w &= 4(1-\upsilon)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}(\psi + B\psi_0) \end{aligned}$$

Здесь $\psi = x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3$, $\psi_0 = \int\psi_1 dx + \int\psi_2 dy + \int\psi_3 dz$, $B = A - 2(1 - v)$, v – коэффициент Пуассона.

По существу полученное решение (6) есть обобщение или разновидность общего решения в форме П.Ф.Папковича-Г.Д.Гродского. И все же для дальнейшего их использования при построении общих решений задач теории упругости новые формулы представляют несомненный интерес. Кстати здесь дан косвенный ответ на долгое время обсуждаемый вопрос: сколько необходимо брать гармонических функций при решении конкретных задач? Было выяснено не только то обстоятельство что их три (для каждого слоя по одной),но они допускают еще воздействие на них оператором А.Помимо этого из общего уравнения были выделены уравнения для трех слоев по-отдельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, В.А.Операторный метод решения задач теории упругости: монография / В.А. Акимов. – Минск: Технопринт, 2003. – 101 с.

Поступила 07.11.11