УДК 539.3; 622.833

Белорусский государственный университет, Минск

ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАССИВОВ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Журавков М.А., Макаева Т.А.

The article shows the possible ways of building mechanical and mathematical models of the behavior of deformable elastic media with regard to their internal structure. The constructions are made in the framework of continuum mechanics to static problems of deformation of elastic bodies. A significant factor in this is that the internal structure of the accounting environment does not allow a physical equations describing the behavior of the environment (the connection between the components of the stress-strain state), using Hooke's law in standard form. The results performed on the basis of the proposed model, the numerical analysis of the stress-strain state of the model structure (plate) and then comparing the results with the behavior of structures whose state is described by the classical Hooke's elastic model.

Введение. В настоящее время в большинстве случаев при решении задач из различных разделов и областей механики используются модели, в которых объект/тело рассматривается в приближении (квази)сплошной непрерывной средой, что подразумевает выполнение определенным образом усреднения по пространству свойств среды и параметров деформирования. В таких моделях учет наличия структурных неоднородностей разного масштабного уровня выполняется специальными методами и подходами, например введением специальных непрерывных функций, описывающих изменение физико-механических свойств тела [1]. В то же время исследования последних лет убедительно показали, что при деформировании объектов сложного внутреннего строения существенную роль играют локальные деформации, обусловленные относительными перемещениями и деформациями его структурных составляющих.

Очевидно, что структура/микроструктура среды существенным образом влияет на характер ее деформирования и напряжённое состояние (композиционные материалы, горные породы, мелкозернистые материалы, наноструктуры и т.д.). Так, при разработке моделей разрушения геоматериалов, искусственных композитов необходимо принимать в расчет возможность образования блочной структуры, учитывать ее тип, соотношения размеров блоков и их ориентировку в пространстве, характер и тип деформирования как отдельных блоков, так и межблокового пространства.

Новые структуры в породных массивах могут формироваться и проявляться, например, при наступлении предельного состояния в породной толще [1, 2]. Деформирование такой среды в дальнейшем во многом определяется образовавшейся внутренней структурой. Например, блочная структура в массиве может образовываться таким образом, что сплошность массива при этом в целом сохраняется. В дальнейшем деформация такого объекта происходит за счет скольжения блоков друг относительно друга и, может быть, их поворотов.

При возникновении блочной структуры сопротивление породного массива деформированию уменьшается, но, все же, остается конечным. Очевидно, что в этом новом состоянии массива связь между напряжениями и деформациями отлична от общепринятой в механике деформируемого твердого тела «классической» Следовательно, необходимы новые формы математической записи соотношений между компонентами НДС тела.

В настоящее время активно развиваются новые направления современной механики, требующие при построении механико-математических моделей для описания соответствующих механических процессов, обязательного учета внутренней структуры среды/материалов. В данном контексте в первую очередь следует выделить создание новых материалов с заданными свойствами, причем как на макро-, так и микро- и нано- уровнях. Естественно, актуальным является построение моделей, описывающих процессы разрушения тел и их напряженно-деформированное состояние с учетом образования новой внутренней структуры.

Расчёты, выполняемые на основе классической модели деформирования упругих тел, не содержат (микро)структурных параметров, и поэтому, при применении проведённых расчётов к реальным задачам имеет место так называемая «неустранимая погрешность». При этом уточнение численных алгоритмов решения сложных задач не ведёт к уменьшению погрешности математической модели упругого деформирования по отношению к реальным объектам.

Для построения математических моделей деформирования материалов с учётом (микро)структуры используют различные подходы. Так, один из возможных подходов состоит в представлении физических законов в дискретном виде, их разложении в ряды Тейлора с учётом величин до некоторого порядка по характерному размеру (микро)структуры. Другой способ состоит в представлении математической модели, заданной в дифференциальной форме, в разностном виде на сетке с шагом h, и построении разностного аналога непрерывной задачи с учётом величин до некоторого порядка N^*.

В данной работе рассмотрены возможные пути построения механико-математических моделей, описывающих НДС деформируемых твердых упругих сред с учетом их внутренней структуры. Построения выполнены в рамках механики сплошных сред для статических задач деформирования упругих тел.

Моделирование поведения материала блочной структуры. Рассмотрим механико-математическую модель, описывающую поведение породных массивов блочной структуры. Области в породной толще, в которых формируется блочная структура и где, в общем случае, упругие соотношения между напряжениями и деформациями не выполняются, определяются на основе определенных предельных условий. В выделенных областях строятся разрешающие системы уравнений, отличные от разрешающей системы уравнений для упругой задачи.

Построение механико-математических моделей, позволяющих изучать НДС массивов в зонах образования блочных структур, не является однозначной задачей и подходов к формированию таких моделей может быть достаточно много вследствие большого количества определяющих факторов и показателей, а так же принятых гипотез и допущений.

При моделировании деформаций блочной структуры можно выделить несколько классов задач. В данном случае рассмотрим деформирование блочной структуры в целом как сплошной твердой деформируемой структуры с различными внутренними связями между элементами. При этом для данной задачи элементами являются отдельные блоки, а связями – межблоковые промежутки. Существенным моментом при моделировании является выбор поведения собственно блоков и межблокового пространства. Очевидно, что вариантов движения блоковой структуры и взаимодействия блоков в этой структуре может быть несколько. Существенным моментом при моделировании является выбор поведения собственно блоков и межблокового пространства. Блоки могут выбираться как жесткие тела, либо как упругие. В свою очередь межблоковое пространство может рассматриваться как жесткое или упругое сцепление между соседними блоками. В связи с этим, большое значение имеет знание свойств межблоковых промежутков с целью прогнозирования значений коэффициентов трения при возможных подвижках, вызывающих необратимые деформации массива.

Таким образом, для описания деформирования блочной структуры массива горных пород необходимо:

- знать физико-механические свойства отдельных элементов;

- знать физико-механические свойства межблоковых промежутков;
- определить условия статического (или динамического) равновесия системы блоков при заданном виде нагружения;
- установить порядок приложения нагрузок (или догружения) не только в каждой граничной точке множества блоков, но и внутри боковой структуры на межблоковых промежутках.

Следует при этом отметить, что траектория нагружения системы блоков может быть зарегистрирована только на внешних, но не на внутренних межблочных границах.

Очевидно, что вариантов движения блоковой структуры и взаимодействия блоков в этой структуре может быть несколько. Наиболее естественным является, конечно, подход, при котором трение между блоками рассматривается в том виде, в каком оно есть на самом деле. Однако в этом случае возникает необходимость использования методов теории вероятностей, в связи с тем, что набор блоков содержит хотя и счетное, но огромное число элементов. Кроме того, вариантов формирования блоков тоже бесконечно много. Поэтому даже возможностей современной вычислительной техники недостаточно для решения задачи в такой постановке.

Итак, рассматривается деформирование блочной структуры в целом как сплошной твердой деформируемой структуры с различными внутренними связями между элементами. При этом элементами являются отдельные блоки, а связями – межблоковые промежутки. Считаем, что блоки намного «жестче», чем прослойки. Поэтому можно считать, что блочная структура вначале деформируется за счет деформации прослоек.

Механическая модель элемента такой среды представляет собой подобие кубика Рубика – она состоит из связной совокупности жестких недеформируемых параллелепипедов с мягкими деформируемыми прокладками.

Математическая модель описанной структуры массива горных пород на стадии проявления блочной структуры (проявление линий скольжения) без нарушения сплошности массива в целом состоит из уравнений равновесия Коши, уравнений неразрывности, граничных условий и физических уравнений, определяющих связь между напряжениями и деформациями.

Соотношения, определяющие связь между напряжениями и деформациями для массива блочной структуры могут быть записаны в следующем виде [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \lambda_1 \sigma_x \\ \varepsilon_y = \lambda_2 \sigma_y \\ \varepsilon_z = \lambda_3 \sigma_z \\ \varepsilon_{xy} = \lambda_4 \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \lambda_5 \tau_{yz} \\ \varepsilon_{xz} = \lambda_6 \tau_{xz} \end{cases}, \tag{1а}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x - \varepsilon_y = \lambda_1 (\sigma_x - \sigma_y) \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y = \lambda_2 (\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_z = \lambda_3 \sigma_z \\ \varepsilon_{xy} = \lambda_4 \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \lambda_5 \tau_{yz} \\ \varepsilon_{xz} = \lambda_6 \tau_{xz} \end{cases} \tag{1б}$$

где $\lambda_i = \text{const}$ – податливости межблоковых прослойков.

Законы деформирования массива вида (1) отражают модель поведения массива горных пород в случае образования в нем блочной структуры для трехмерного случая. Этот закон справедлив при выполнении условий, когда влияние компонент напряжений на сдвиговые процессы по сравнению с нормальными нагрузками пренебрежимо мало.

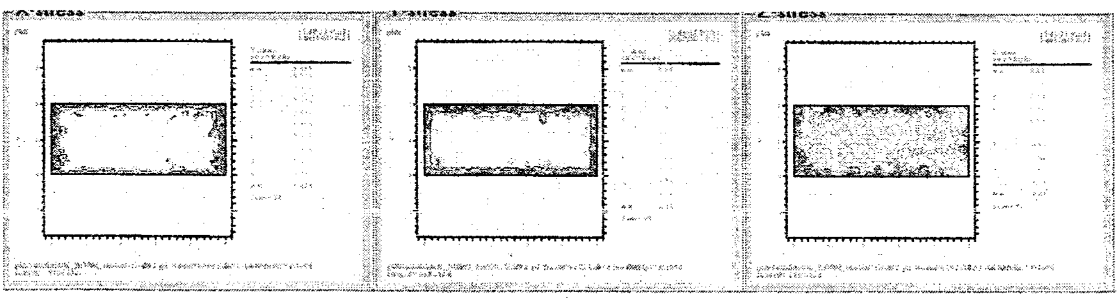
Решение модельной задачи. В качестве иллюстрации рассмотрим решение модельной задачи исследования НДС конструкции в виде плиты, лежащей на жестком основании и сжимаемой по двум боковым граням равномерно распределенной нагрузкой. В качестве физических соотношений, определяющих поведение среды, принимаются уравнения (1).

Разрешающая система уравнений модельной задачи МДТТ состоит из трех дифференциальных уравнений равновесия Коши, шести физических уравнений (1), шести соотношений сплошности между компонентами перемещений и компонентами деформаций и соответствующих граничных условий. Решение системы разрешающих уравнений строилось численно. Расчеты выполнялись в специализированном программном пакете для решения дифференциальных уравнений FlexPDE.

Далее, в качестве примера получения конкретного решения, приведены некоторые результаты расчетов при следующих значениях исходных параметров: длина плиты – 5 м, ее ширина – 2 м, высота – 0.1м.; интенсивность нагрузки, действующей на боковых гранях $F=10^6$ Н/м^2; E (модуль Юнга)=$1.75\cdot10^9$ Н/м^2; ν (коэффициент Пуассона)=0,29; C_1 (коэффициент, обратный λ_1) = $E/2$; C_2 (коэффициент, обратный λ_2) = E; C_3 (коэффициент, обратный λ_3) = E; C_4 (коэффициент, обратный λ_4) = $2G$. Остальные коэффициенты λ_i определяются аналогичным образом. Здесь, как обычно, $G=E/(2\cdot(1+\nu))$ – модуль сдвига. Отметим, что для данной численной модели в физических соотношениях (1) значение податливостей породы λ_2 и λ_3 в направлениях, перпендикулярных слоям, были приняты в два раза меньшими значению податливости массива вдоль направления слоев λ_1.

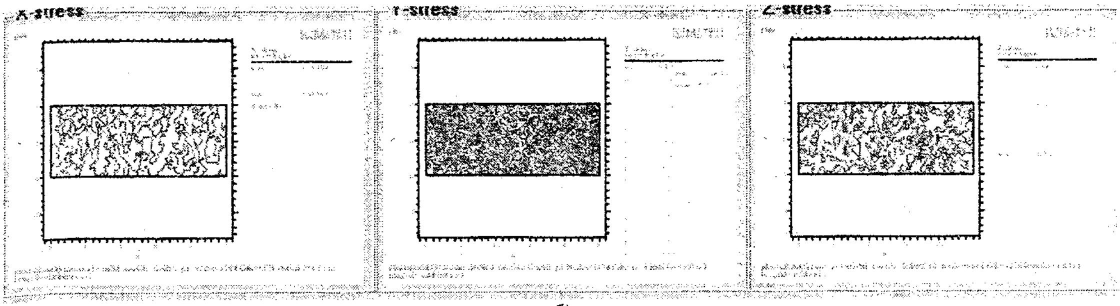
Интересным, на наш взгляд, представляется сравнение полученного решения с решением подобной задачи, в которой в качестве физических уравнений, описывающих связь между компонентами напряженного и деформированного состояния, вместо соотношений (1) принят закон Гука. Для модельной задачи в упругой постановке физико-механические характеристики материала были взяты следующие: $F=10^6$ Н/м^2; $E=1.75\cdot10^9$ Н/м^2; ν=0,29.

На рисунках 1 – 4 приведены некоторые характерные результаты расчетов для двух рассмотренных модельных задач. На рисунках с аббревиатурой «*а*» приведены результаты для модели, в которой в качестве физических соотношений взят закон Гука, с аббревиатурой «*б*» – результаты расчетов для модели, в которой в качестве физических соотношений взяты уравнения (1*а*), а с аббревиатурой «*в*» – результаты расчетов для модели, в которой в качестве физических соотношений взяты уравнения (1*б*).

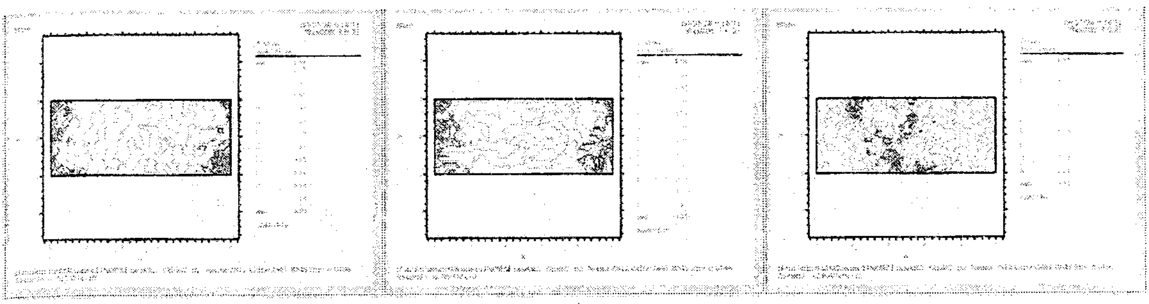


а)

Рисунок 1 – Картины распределения соответственно напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на верхней грани плиты (начало)

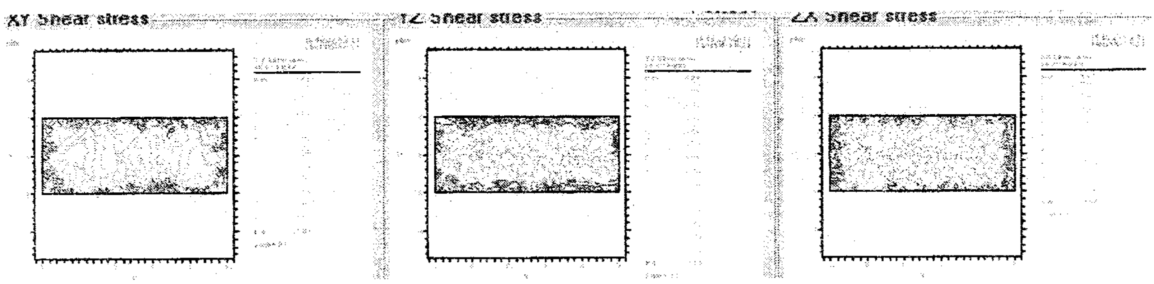


б)

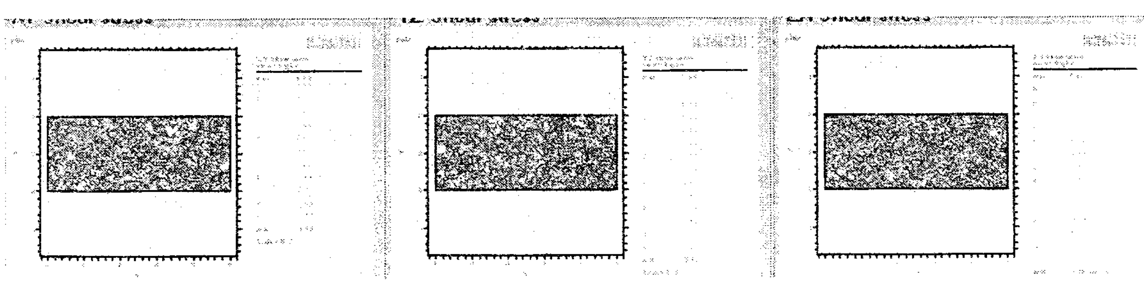


в)

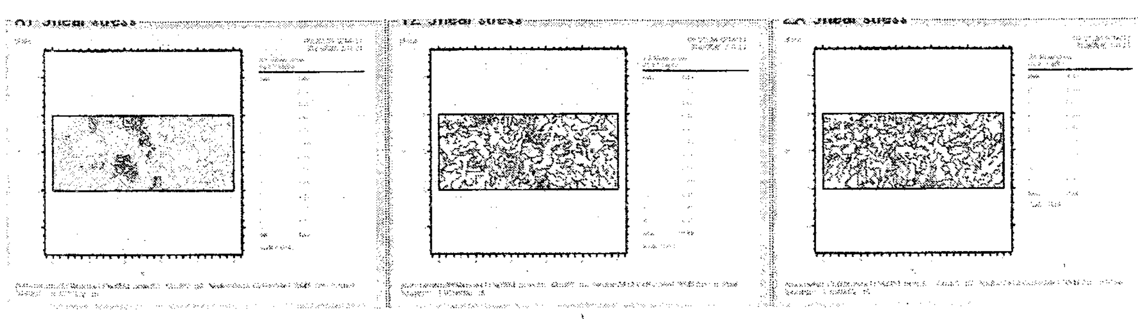
Рисунок 1 – Картины распределения соответственно напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ на верхней грани плиты (окончание)



а)

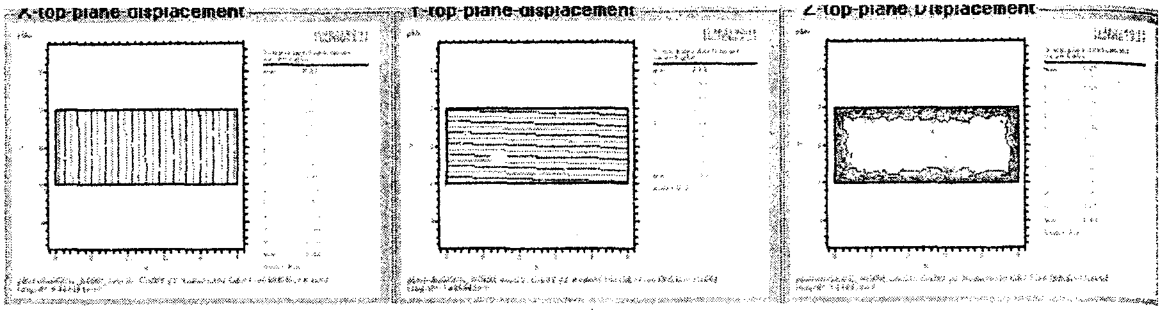


б)

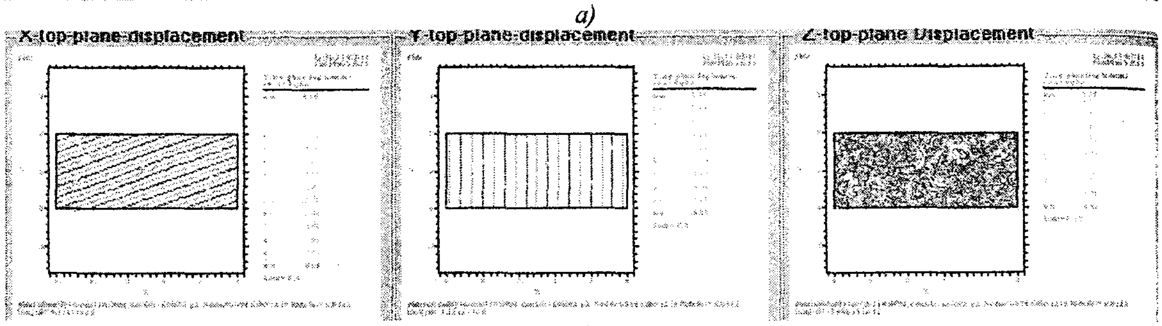


в)

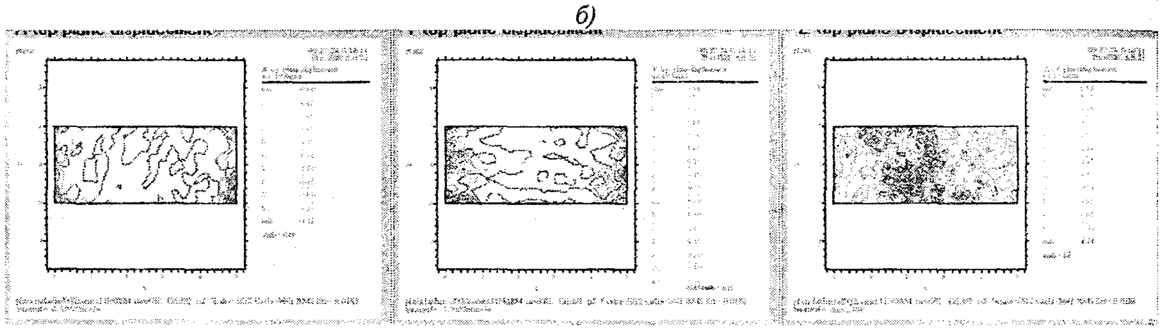
Рисунок 2 – Картины распределения соответственно напряжений $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ на верхней грани плиты



а)

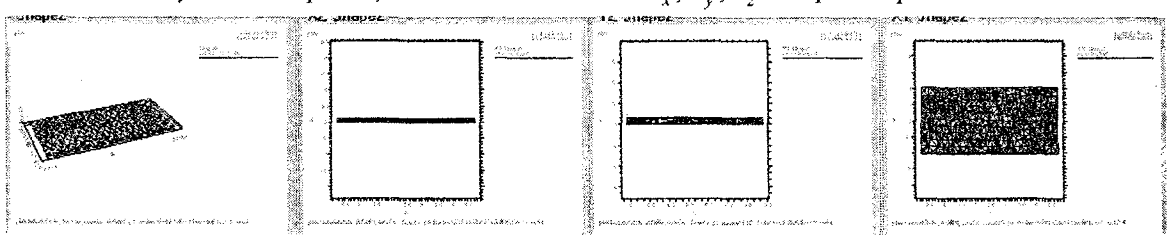


б)

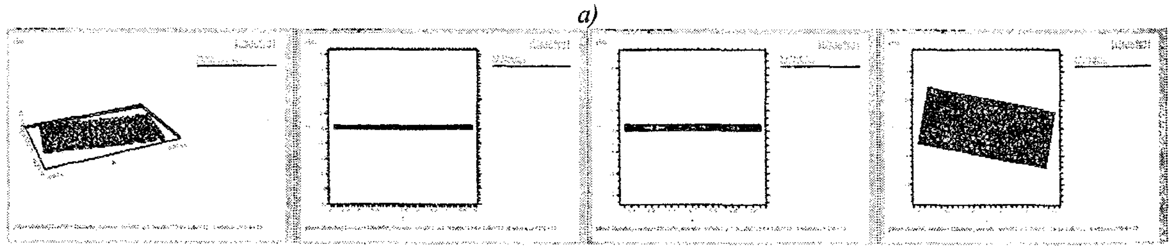


в)

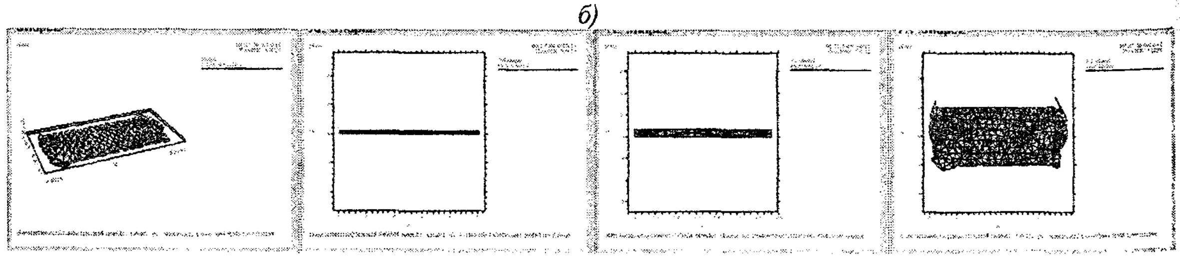
Рисунок 3 – Перемещения соответственно u_x, u_y, u_z на верхней грани плиты



а)



б)



в)

Рисунок 4 – Общий вид модельных конструкций и их проекции на соответствующие плоскости после деформирования

Как следует из результатов моделирования, деформационное состояние конструкции, состоящей из «блочных элементов», существенным образом отличается от НДС модели, закон поведения внутренних элементов которой описывается законом упругости Гука.

Так, например, плита из материала, в котором в качестве физических соотношений взят закон Гука, сжимается по оси действия боковой сжимающей нагрузки и расширяется в перпендикулярном направлении. В то же время плита, состоящая из блочных элементов («б»), в процессе сжатия вдоль одной оси сжимается в обоих направлениях и, кроме того, испытывает сдвиг. Величина сдвига зависит от характеристик, связывающих компоненты НДС в уравнениях (1а), рисунок 4.

Выводы. В статье рассмотрены механико-математические модели, описывающие поведение деформируемых твердых сред с учетом их внутренней структуры. Модели построены в рамках механики сплошных сред для статических задач деформирования упругих тел. Существенным обстоятельством при этом является, что учет внутренней структуры среды не позволяет в качестве физических уравнений, описывающих поведение среды (связь между компонентами НДС), использовать закон Гука в стандартном виде. Приводятся результаты выполненного, на основе предложенной модели, численного анализа НДС модельной конструкции (плиты) и сравнение полученных результатов с поведением конструкции, состояние которой описывается классической упругой моделью Гука. Рассмотренная в статье модель поведения массива позволяет учесть образование блочной структуры в первоначально сплошном массиве. Варьирование параметрами податливости λ_i позволяет рассматривать различные варианты формирования новой среды. Используя предложенную модель, описывающую поведение среды после образования в ней блочной структуры, и задавая различные значения параметров λ_i, можно выполнить модельные исследования и изучить поведение среды при различных качественных изменениях ее структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов) / М.А. Журавков. – Минск: БГУ, 2002. – 456 с.
2. Компьютерное моделирование в геомеханике / М.А. Журавков [и др.]; под общ. ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2008. – 443 с.
3. Чанышев, А.И. Математические модели блочных сред в задачах механики. Ч.1. Деформация слоистой среды / А.И. Чанышев, Л.Л. Ефименко // ФТПРПИ. – 2003. – № 3. –С. 72–84.

Поступила 02.11.11