

## ОЦЕНКА УСИЛИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА УСТАНОВЛЕННЫЙ ПРОТЕЗ, ПРИ ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И СТАПЕДОТОМИИ В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОДВИЖНОСТИ ПРОТЕЗА

Славашевич И.Л.

*Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy in the case of unlimited mobility of the prosthesis. The basic goal of this study is to clear up the strain-stress state of the reconstructed eardrum and evaluate forces acting on the embedded prosthesis from the both cochlear liquid and the round window membrane. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.*

Перфорация тимпанальной мембраны, вызванная воспалительными процессами, может приводить к серьезным негативным последствиям, вплоть до полной потери слуха. Тимпаноластика – реконструктивное хирургическое вмешательство на ухе, выполняемое с целью создания воздухоносной барабанной полости, включающее реконструкцию слуховых косточек (оссикулопластику) и барабанной перепонки (мирингопластику). Процесс отложения солей в области среднего уха может стать причиной такой патологии, как отосклеротический анкилоз суставов слуховых косточек (существенным увеличением жесткости тканей сустава), из-за чего слуховые косточки теряют подвижность в этом суставе. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедотомии, которая предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке стремени, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпаноластику и стапедотомию [2]. В данном случае используют протез типа TORP [3], основание которого упирается в восстановленную тимпанальную мембрану (ТМ), а конец ствола, введенного через перфорацию в стремени, покоится в кохлеарной жидкости улитки.

Целью данной работы является оценка усилия, действующего на стержень протеза со стороны кохлеарной жидкости улитки, обеспечивающего устойчивое положение протеза, а также определение напряженно-деформированного состояния (НДС) реконструированной ТМ. Излишние напряжения в ТМ приводят к смещению спектра собственных частот восстановленной колебательной системы [4]. Степень искажения собственных частот может быть значительной и приводить к заметной потере порога восприимчивости звукового сигнала. Аналогичные задачи об оценке НДС в среднем ухе при различных технологиях реконструкции ТМ ранее рассматривались в работах [5-8].

Восстановленную тимпанальную мембрану будем моделировать как изотропную упругую пластинку радиуса  $a$ , которая жестко соединена с недеформируемым (абсолютно твердым) основанием протеза типа TORP (рисунок 1). Данный протез состоит из круглой пластинки радиуса  $b$  и жестко сопряженного с ней под некоторым углом  $\gamma$  стержня длиной  $l$ .

В работе [7] показано, что наиболее предпочтительной техникой установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является такая техника, когда основание протеза размещается на восстановленной ТМ как можно ближе к центру.

Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, при этом ТМ рассматриваем как кольцевую пластинку с внутренним и

внешним радиусами  $b$  и  $a$  соответственно. Пусть перфорация подножной пластинки стремени выполняется в месте, где ее толщина минимальна (рисунок 2). Тогда, протез будет иметь две степени свободы: поступательное движение вдоль своего ствола и поворот.

Введем глобальную декартову систему координат  $Oxyz$ , связанную с центром ТМ (см. рисунок 1). Здесь ось  $Oz$  направим в сторону внешнего края, а ось  $Oy$  – по линии “*malleus manubrium*”, то есть вдоль линии сопряжения молоточка с тимпанальной мембраной в норме.

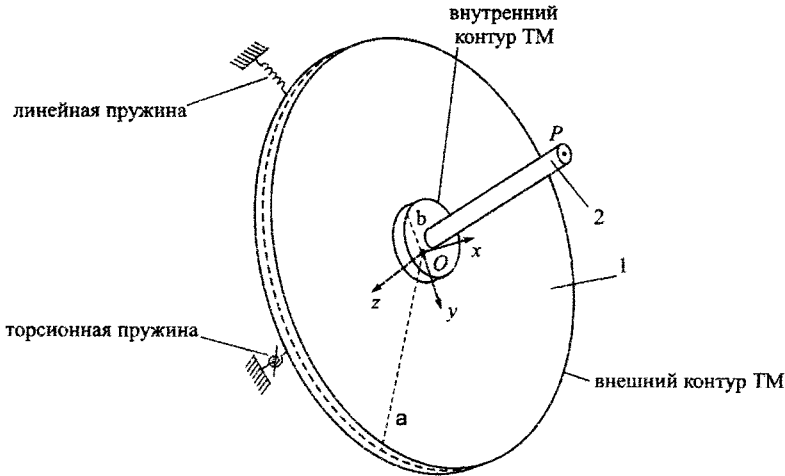


Рисунок 1 – Реконструированная ТМ радиуса  $a$  (1) и протез типа TORP (2)

Будем считать, что ввод протеза приводит к деформациям и вызывает появление мембранных усилий. Тогда в качестве уравнений равновесия восстановленной ТМ, рассмотрим уравнение равновесия кольцевой пластинки, которые в полярной системе координат  $Or\phi$  имеют вид [9]:

$$D\Delta^2 w = P_s, \quad r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

где

$$T_1 = K \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad T_2 = K \left( \nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)$$

– мембранные усилия в ТМ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  – жесткости пластины,  $E, \nu$  –

модуль Юнга, коэффициент Пуассона,  $h$  – толщина хрящевой пластины,  $W$  и  $U, V$  – нормальное и тангенциальные (радиальное и трансверсальное) перемещения точек ТМ соответственно,  $P_s$  – разность статического атмосферного давления и давления в

полости среднего уха, а  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$  – оператор Лапласа в полярной системе координат  $r, \phi$  (рисунок 3) [7].

После фиксации протеза в полости среднего уха, внутренний контур восстановленной ТМ совершит некоторое перемещение и поворот. Основание протеза (т.е. внутренний контур ТМ) переместится вдоль оси  $Oz$  на величину  $w_p$ , совершит некоторое тангенциальное перемещение  $u_p$  в плоскости ТМ, однако данное перемещение является очень малым, и поворот вокруг некоторой оси  $Oz$  на угол  $\theta$ .

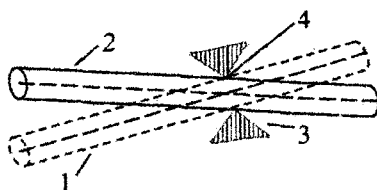


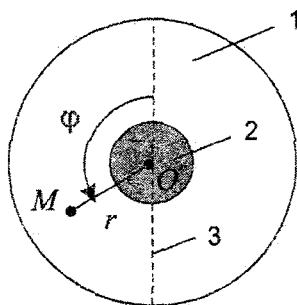
Рисунок 2 – Ствол протеза, введенный в отверстие (перфорацию) подножной пластинки стремени, его начальное положение (1), 2 – конечное положение протеза, 3 – подножная пластина стремени, 4 – перфорация в подножной пластинке

Предполагая прочное склеивание основания протеза с мембраной, а также учитывая, что протез моделируется нами как абсолютно твердое тело, на внутреннем контуре будем рассматривать условия жесткой заделки. Принимаем во внимание мембранные усилия в ТМ действующие вдоль внутреннего контура на протез. В результате условия жесткой заделки ТМ с протезом примут вид [10]:

$$w|_{r=b} = w_p + b \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=b} = \sin \theta \cos \varphi, \quad (2)$$

$$u_1|_{r=b} = u_p \cos \varphi + b(1 - \cos \theta) \cos \varphi, \quad u_2|_{r=b} = u_p \sin \varphi.$$

Оставаясь в рамках модели, согласно которой восстановленная ТМ рассматривается как кольцевидная пластинка, контактирующая по внутреннему контуру с основанием протеза, в качестве уточняющих условий сопряжения ТМ и протеза можно рассмотреть условия упругой заделки.



1 – ТМ; 2 – основание протеза; 3 – линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза

Рисунок 3 – Полярная система координат с центром в точке O

Оставаясь в рамках модели, согласно которой восстановленная ТМ рассматривается как кольцевидная пластинка, контактирующая по внутреннему контуру с основанием протеза, в качестве уточняющих условий сопряжения ТМ и протеза можно рассмотреть условия упругой заделки.

На внешнем контуре ( $r=a$ ) ТМ рассмотрим условия упругой заделки [11]

$$(k_1 w + Q)|_{r=a} = 0, \quad (k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1)|_{r=a} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad v|_{r=a} = 0.$$

где  $k_1$  и  $k_t$  – коэффициенты жесткости распределенных линейных и торсионных пружин, моделирующих тимпанальное кольцо [11].

Как уже отмечалось, ввод протеза вызовет перемещение и поворот внутренней кромки кольцевой пластинки. Данные перемещения приведут к тому, что в реконструированной ТМ появятся моменты и перерезывающие силы, которые будут значительными вдоль обоих краев. Именно эти силы и моменты обеспечивают фиксацию и определенную ориентацию протеза в полости среднего уха. Обозначим через

$M_1, H_1, Q_1$  изгибающий момент, крутящий момент и перерезывающую силу, соответственно, действующие на линии  $r = \text{const}$ .

В линейной теории пластин моменты и перерезывающие силы находятся по формулам [9]:

$$Q = \left( Q_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right),$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$H = (1 - \nu) D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right),$$

$$M_1 = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)$$
(4)

Условием равновесия протеза является равенство нулю главных векторов действующих на него сил и моментов. Действующие на протез силы и моменты приведены на рисунке 4. В нашей модели с учетом сделанных предположений имеем три уравнения:

$$Q_p \cos \gamma + T_p \sin \gamma - F_{st} = 0,$$

$$T_p \cos \gamma + R - Q_p \sin \gamma = 0,$$

$$M_p - R(l - \delta) = 0.$$
(5)

Здесь  $F_{st} = k\delta$  – сила, являющаяся мерой взаимодействия с внутренним ухом и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна,  $R$  – сила реакции стенки в высверленном отверстии в подножной пластинке стремени, а  $Q_p, T_p, M_p$  – равнодействующие перерезывающих, мембранных сил и изгибающих моментов, возникающих вдоль внутреннего контура  $r=b$  со стороны ТМ,  $\delta$  – длина части ствола протеза, вошедшей в кохлеарную жидкость,  $k = 8\pi T_0 (S/S_0)^2$  – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость - мембрана круглого окна»,  $S_0 = \pi R_0^2$  – площадь круглого окна,  $T_0$  – сила натяжения мембраны круглого окна [12].

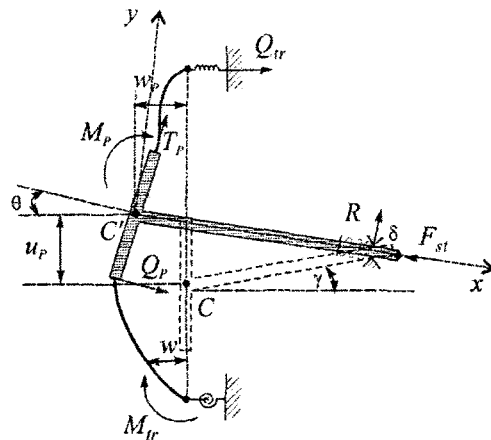


Рисунок 4 – Механическая модель колебательной системы “ТМ-протез”

Нормальный прогиб и тангенциальное перемещение связаны следующими соотношениями:

$$(x_s + w_p)^2 + (y_s + u_p)^2 = (l - \delta)^2,$$
(6)

$$u_p^2 + w_p^2 = (l - \delta)^2 + l_0^2 + 2l_0(l - \delta) \sin \theta,$$

где  $x_s, y_s$  – координаты срединной точки подножной пластинки стремени,  $l_0$  – расстояние от центра основания протеза до подножной пластинки стремени,  $\theta$  – угол поворота протеза в полости среднего уха.

Найдем главные векторы сил и моментов, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенных перерезывающих сил и соответствующих моментов по всему внутреннему контуру ТМ:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\varphi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \varphi + S \sin \varphi]_{r=b} d\varphi, \quad (7)$$

$$M_p = M_{pM} + M_{pH} + M_{pQ}.$$

где

$$M_{pM} = b \sin \theta \int_0^{2\pi} [M_1]_{r=b} \sin \varphi d\varphi, \quad M_{pQ} = b^2 \int_0^{2\pi} [Q_1]_{r=b} \sin \varphi d\varphi$$

$$M_{pH} = b^2 \sin \theta \int_0^{2\pi} [H]_{r=b} \cos \varphi d\varphi -$$

результатирующие составляющие изгибающего и крутящего моментов, а также момента перерезывающих сил, действующих по контуру  $r = b$ . Найденные силовые факторы  $Q_p, T_p, M_p$  являются функциями неизвестных параметров  $w_p, u_p, \theta$ .

Решив уравнение (1) с граничными условиями (2), (3), можно найти усилия и моменты (7), действующие на протез со стороны ТМ, как функции параметров  $w_p, u_p, \theta$ . Дальнейшее рассмотрение трех скалярных уравнений (5) позволяет найти все неизвестные величины  $w_p, u_p, \theta$ , характеризующие напряженно-деформированное состояние и пространственную конфигурацию реконструированного среднего уха.

Решение краевой задачи (1), (2) и (3) можно представить в виде:

$$w = w_0(r) + w_c(r) \cos \varphi,$$

$$u = u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad (8)$$

$$v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi.$$

Подставляя соотношения (8) в уравнения (1), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_0}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_0}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_0}{dr} &= \frac{P_s}{D}, \\ \frac{d^4 w_c}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_c}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 w_c}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{dw_c}{dr} - \frac{3}{r^4} w_c &= 0, \\ r \frac{d^2 u_0^c}{dr^2} + \frac{du_0^c}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} u_0^c + \frac{1+\nu}{2} \frac{dv_0^s}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} v_0^s &= 0, \\ \frac{1-\nu}{2} r \frac{d^2 v_0^s}{dr^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{dv_0^s}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} v_0^s - \frac{1+\nu}{2} \frac{du_0^c}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} u_0^c &= 0, \\ r \frac{d^2 u_0^s}{dr^2} + \frac{du_0^s}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} u_0^s - \frac{1+\nu}{2} \frac{dv_0^c}{dr} + \frac{3-\nu}{2r} v_0^c &= 0, \\ \frac{1-\nu}{2} r \frac{d^2 v_0^c}{dr^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{dv_0^c}{dr} - \frac{3-\nu}{2r} v_0^c + \frac{1+\nu}{2} \frac{du_0^s}{dr} + \frac{3-\nu}{2r} u_0^s &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из данной системы находим решения для нормального прогиба и тангенциальных смещений в виде:

$$w_0 = C_{0,1}^0 r^2 + C_{0,2}^0 r^2 \ln r + C_{0,3}^0 \ln r + C_{0,4}^0 + \frac{P_s}{64D} r^4,$$

$$w_c = C_{1,1}^c r + C_{1,2}^c r \ln r + C_{1,3}^c r^3 + C_{1,4}^c + \frac{1}{r},$$

$$u_0(r) = C_{0,1} r + C_{0,2} \frac{1}{r}, \quad v_0(r) = C_{0,3} r + C_{0,4} \frac{1}{r},$$

$$u_0^c(r) = (1 - 3\nu)C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3 - \nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1 - \nu^2) - C_{1,4},$$

$$v_0^c(r) = (5 + \nu)C_{1,1} r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3 - \nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1 + \nu) + C_{1,4}, \quad (10)$$

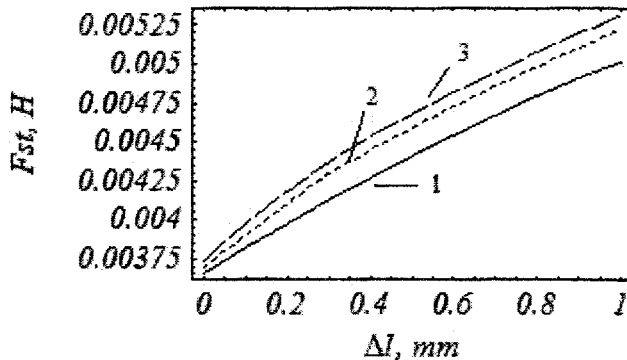
$$u_0^s(r) = (1 - 3\nu)C_{1,5} r^2 + C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3 - \nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1 - \nu^2) - C_{1,8},$$

$$v_0^s(r) = -(5 + \nu)C_{1,5} r^2 - C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3 - \nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1 + \nu) - C_{1,8}.$$

Подставляя соотношения (10) в граничные условия (2), (3), получим значения неизвестных постоянных, которые в силу громоздкости здесь не приводятся; отметим лишь, что  $C_{0,1} = C_{0,2} = C_{0,3} = C_{0,4} = 0$  и  $C_{1,5} = C_{1,6} = C_{1,7} = C_{1,8} = 0$ .

Подстановка соотношений (7) в уравнения (5) с учетом (8), (10) приводит к трем уравнениям относительно трех параметров  $u_p$ ,  $w_p$ ,  $\theta$ , характеризующих ориентацию протеза в полости среднего уха и напряженно-деформированное состояние реконструированной ТМ. Вычислив перемещения  $u_p$ ,  $w_p$ , можно найти и напряжения в восстановленной барабанной перепонке.

При выполнении расчетов использовались следующие значения параметров:  $a = 5$  мм,  $b = 1.5$  мм,  $h = 0.3$  мм,  $E = 3.4$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0.4$ ,  $\gamma = 5\pi/18$ ,  $k_l = 0.075$  Н мм<sup>-2</sup>,  $k_t = 6.5 \cdot 10^{-5}$  Н,  $x_s = 3.637$  мм,  $y_s = -1.500$  мм,  $R_0 = 10^{-3}$  м. На рисунке 5 представлены зависимости величины силы  $F_{st}$  и смещений  $w_p$  и  $u_p$  от приращения длины протеза  $\Delta l = l - l_0$  при различных значениях силы натяжения  $T_0$  мембраны круглого окна.



$$1 - T_0 = 10^{-5} \text{ Н/м}, \quad 2 - T_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}, \quad 3 - T_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}$$

Рисунок 5 – Характеристики напряженно-деформированного состояния

Как видно из рисунка, с увеличением силы натяжения мембраны круглого окна, усилие, а также перемещения возрастают. Также видно, что зависимости всех анализируемых величин от приращения длины протеза носят характер, близкий к линейному, что дает возможность легко определять длину вводимого протеза. Заметим, что усилия  $F_{st}$ , действующие на протез со стороны кохлеарной жидкости, на порядок ниже аналогичных сил, возникающих в случае, когда перфорация выполня-

ется в месте, где толщина подножной пластины максимальна, а также сил, возникающих в звене «протез-стремля» для всех ранее рассмотренных технологий реставрации ТМ [6-8]. Низкая жесткость рассмотренной здесь реконструированной колебательной системы объясняется тем, что она полностью определяется силой упругого противодействия мембраны круглого окна [2]. Таким образом, если учесть, что у некоторых людей почти вся жесткость системы в норме приходится на связку овального окна стремени, а не на силу противодействия со стороны мембраны круглого окна, то возникает проблема устойчивости установленного протеза. Данная задача будет решена путем введения модифицированного протеза, то есть вместо протеза TORP будем рассматривать его модификацию, заключающуюся в установке на створке протеза усиливающей пружинки изготовленной из титана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Вульштейн, Х. Слухулучшающие операции / Х. Вульштейн. – М: Медицина, 1972.
3. <http://www.kurz.med.com/>
4. Любина, Е.А. Влияние сил натяжения восстановленной барабанной перепонки, вызванных введением протеза, на собственные частоты колебательной системы реконструированного среднего уха / Е.А. Любина, Г.И. Михасев // Механика-2007: Сб. Науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике (под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого), Минск, 16-18 окт., 2007г. – Минск: ОИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 399–405.
5. Славашевич, И.Л. Оценка усилий, действующих на установленный протез типа TORP, при тимпаностапедопластике среднего уха / И.Л. Славашевич, Г.И. Михасев // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – Вып. № 25. – С. 252–257.
6. Ермоченко, С.А. Расчет напряженно-деформированного состояния среднего уха при его тотальной реконструкции с учетом влияния остатков тимпанической мембраны / С.А. Ермоченко, Г.И. Михасев, Л.Г. Петрова // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 3(41). – С. 24-36.
7. Mikhasev, G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus – incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology, Nov2009; doi:10.1093/imammb/dqp020. – P. 1-24.
8. Михасев, Г.И. Статическая модель среднего уха, подвергнутого реконструкции с использованием технологии тимпаноластики «large island». Часть II: напряженно-деформированное состояние / Г.И. Михасев, С.А. Ермоченко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 3(2.8). – С. 86-90.
9. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
10. Mikhasev, G. Evaluation of the Strain-Stress State of the Middle Ear Subjected to Total Reconstruction / G. Mikhasev, I. Slavashevich, S. Ermochenko // GAMM 2010 – 81<sup>st</sup> Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics. – March 22-26, 2010, Karlsruhe, Germany. – Abstracts at [http://www.gamm2010.uni-karlsruhe.de/abstracts/Short-2\\_gimikhasev.pdf](http://www.gamm2010.uni-karlsruhe.de/abstracts/Short-2_gimikhasev.pdf).
11. Wada, H. Three-Dimensional Finite-Element Method (FEM) Analysis of the Human Middle Ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery. (ed. by K.-B. Huttenbrink). Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. – 1997. – P. 76–81.
12. Чигарев, А.В. Биомеханика: учебник / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.