

## ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Ерохина Е.Н.

*An axially symmetric problem of loading a thick soil plate with a cylindrical aperture or a cylindrical soil pipe is solved. It is assumed, material is elastic out of a plastic strain range. A closed system of equations is constructed to detect the plastic strain range boundary for different material parameters and external loads.*

Рассматривается цилиндрическая труба внутреннего радиуса  $a$  и внешнего радиуса  $b$  (рисунок 1) из связного сыпучего материала, нагруженная равномерно распределенным давлением  $P_a$  по внутренней и  $P_b$  по внешней границам.

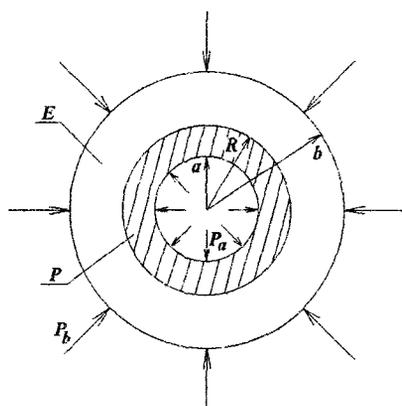


Рисунок 1 – Схематичное изображение области пластического и упругого деформирования материала под действием внутреннего и внешнего нагружений

Предполагается (см. [1]), что при определенных значениях внешних нагрузок в среде возникают области упругого деформирования, граница между которыми заранее неизвестна. Задача для области пластического деформирования рассматривается в напряжениях для случая плоской деформации.

Уравнение равновесия в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  для плоской осесимметричной задачи записывается в виде (см. [2], [3], [4]):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (1)$$

Условие пластичности для сжимаемого связного сыпучего материала [5]:

$$\Phi = I_{2\sigma'} - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I_{1\sigma}^2 = 0, \quad (2)$$

где  $I_{2\sigma'} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $Y$  – предел текучести,  $\alpha$  – коэффициент внутреннего трения,  $f$  – коэффициент трения качения структурных элементов среды,  $I_{1\sigma}$  – первый инвариант тензора напряжений.

Условие пластичности (2) в компонентах напряжений в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$(3f^2 - 3\alpha^2 + 1)(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2) + (6f^2 - 6\alpha^2 - 1)(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_r \sigma_z + \sigma_\theta \sigma_z) - 6\alpha Y(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) - 3Y^2 = 0, \quad (3)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

В случае плоской деформации для поперечных деформаций выполняется  $\varepsilon_z^p = 0$ , откуда следует:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} = 2(3f^2 - 3\alpha^2 + 1)\sigma_z + (6f^2 - 6\alpha^2 - 1)(\sigma_r + \sigma_\theta) - 6\alpha Y = 0. \quad (4)$$

Полученная система дифференциального уравнения (1) и двух конечных уравнений (3), (4) для компонент тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  является замкнутой. В качестве граничных условий для этой системы берутся:

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_a, \quad (5)$$

$$\sigma_r|_{r=R} = \sigma_r^e|_{r=R}, \quad (6)$$

где  $R$  – радиус границы пластической области. Система трех уравнений сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для  $\sigma_r$  путем исключения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  с помощью (3), (4):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E\sigma_r + F \pm 2\sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{Nr}, \quad (7)$$

где  $E = 18(\alpha^2 - f^2)$ ,  $F = 6\alpha Y$ ,  $K = 9(-3f^4 + 6f^2\alpha^2 - f^2 - 3\alpha^4 + \alpha^2)$ ,  
 $L = 6\alpha Y(3f^2 - 3\alpha^2 + 1)$ ,  $M = (-3\alpha^2 - 36\alpha^2 f^2 + 15f^2 + 36f^4 + 1)Y^2$ ,  
 $N = 12f^2 - 12\alpha^2 + 1$ .

Напряжение  $\sigma_\theta$  определяется из (3) следующим образом:

$$\sigma_\theta = \frac{P\sigma_r + F \pm 2\sqrt{K\sigma_r^2 + L\sigma_r + M}}{Nr}, \quad (8)$$

где  $P = -6f^2 + 6\alpha^2 + 1$ .

Напряжения в упругой зоне определяются в виде [6]:

$$\sigma_r^e = \frac{\sigma_r R^2 + P_b b^2}{R^2 - b^2} - \frac{(\sigma_r + P_b)b^2 R^2}{(R^2 - b^2)r^2}, \quad (9)$$

$$\sigma_\theta^e = \frac{\sigma_r R^2 + P_b b^2}{R^2 - b^2} + \frac{(\sigma_r + P_b)b^2 R^2}{(R^2 - b^2)r^2}. \quad (10)$$

В случае толстой пластины в выражениях (17) следует положить  $b \rightarrow \infty$ . Для определения границы раздела зон пластического и упругого деформирования используется условие:

$$\sigma_\theta^e|_{r=R} = \sigma_\theta|_{r=R}. \quad (11)$$

При этом выражение для  $\sigma_\theta^e$  находится из (10), напряжение в пластической зоне  $\sigma_\theta$  вычисляется из (8) после решения дифференциального уравнения (7) пошаговым алгоритмом Эйлера. Алгоритм определения границы зоны пластического деформирования был реализован следующим образом. Начиная с внутренней границы  $r = a$  с шагом  $h$  производился расчет радиального напряжения  $\sigma_r$  и окружного напряжения  $\sigma_\theta$  в пластической зоне, и на каждом  $i$ -ом шаге  $r_i = a + h \cdot i$  вычислялось упругое напряжение  $\sigma_\theta^e$  по формуле (10), где в качестве давления на внутренней границе  $r_i$  использовалось пластическое радиальное напряжение. В случае совпадения вычисленного окружного упругого напряжения  $\sigma_\theta^e$  с окружным пластическим напряжением  $\sigma_\theta$  с погрешностью  $\varepsilon$  значение  $r_i$  принималось за границу пластической зоны:

$$\|\sigma_{\theta}^e - \sigma_{\theta}\|_{r=R} \leq \varepsilon. \quad (12)$$

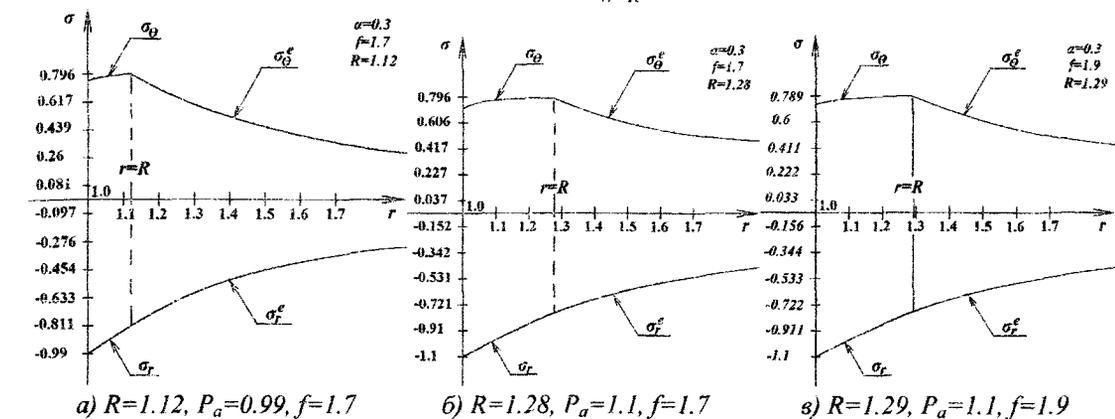


Рисунок 2 – Графики поведения окружного и радиального напряжений в пластической и упругой зонах при различных значениях внутреннего давления.

На рисунке 2 (а, б) представлены графики зависимости окружного и радиального напряжений от радиуса  $r$  в случае изменения внутреннего давления, из которых следует, что увеличение внутреннего давления при неизменном внешнем давлении ведет к увеличению зоны пластического деформирования. На рисунке 2, в представлено распределение напряжений и положение упругопластической границы  $r = R$  при большем значении коэффициента трения качения  $f$ , что ведет к увеличению радиуса упругопластической границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Спорыхин, А.Н. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А.Н. Спорыхин, А.В. Ковалев, Ю.Д. Щеглова. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. – 129 с.
2. Ивлев, Д.Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т.1. Теория идеальной пластичности. / Д.Д. Ивлев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 448 с.
3. Ивлев, Д.Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д.Д. Ивлев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
4. Соколовский, В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
5. Валюхов, С.Г. Микрополярная модель связных сыпучих материалов / С.Г. Валюхов, Н.Д. Вервейко, О.А. Смотрова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1999. – 87 с.
6. Аменадзе, Ю.А. Теория упругости / Ю.А. Аменадзе – М.: Высшая школа, 1976. – 227 с.

Поступила 25.10.11