Белорусский государственный университет, Минск

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ПОРОДНЫЙ МАССИВ С ПОДЗЕМНЫМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Журавков М.А., Круподеров А.В., Гайко Н.В.

The model problem of spreading waves in a viscoelastic medium with spherical cavity caused by dynamical load applied to the surface of sphere is considered in this article. The solution is carried out in compliance with the principle of elastic and viscoelastic problems. For a qualitative analysis we use the asymptotic expansion for the integrand obtained for the radial stress. Some examples of calculations of the action impulse and a series of random impulses are represented. From the results one can see that the nature of spreading of disturbances can vary greatly depending on the applied load.

Модельные задачи, заключающиеся в исследовании состояния области вязкоупругой среды со сферической полостью, в случае воздействия на внутреннюю границу полости динамической нагрузки, представляют собой важный класс задач подземной геомеханики. Так, на базе таких задач можно исследовать некоторые типы газодинамических явлений в массивах соляных пород. Следующий класс прикладных задач, которые можно решать на основе рассматриваемых модельных задач – принудительное разрушение некоторых областей породного массива.

Рассмотрим наиболее типичную модельную задачу из рассматриваемого класса задач: распространение волн деформаций в массиве в случае воздействия динамического распределенного по внутренней поверхности полости радиуса R однородного давления интенсивности p. Так как в этом случае имеет место распространение сферических волн, то все искомые компоненты напряженно-деформированного состояния среды зависят только от радиальной координаты r. Задача является сферически симметричной.

Основное дифференциальное уравнение для радиального перемещения упругой среды при отсутствии вязкости имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r^2}u=\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где u – компонента перемещения, r – радиальная координата, t – время, ρ – плотность, μ – модуль сдвига, k – модуль объемного сжатия, $\lambda = k-(2/3)\mu$ – постоянная Ламе.

Нормальное радиальное напряжение σ_{rr}, обозначаемое здесь σ, определяется в форме [2]:

$$\sigma=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\lambda\frac{u}{r}. \tag{2}$$

Решение динамической задачи для вязкоупругого материала можно получить из решения соответствующей задачи для упругого тела, применением одностороннего преобразования Фурье к решению, полученному для упругого материала, заменой упругих постоянных соответствующими вязкоупругими комплексными модулями или податливостями и последующим обращением преобразования.

В соответствии с этим, применим к уравнению (1) одностороннее преобразование Фурье, имеющего вид

$$\bar{f}(\omega)=\int_0^\infty e^{-i\omega t}f(t)dt.$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}-(\frac{2}{r^2}+\omega^2 a^2)\bar{u}=0, \qquad (3)$$

где

$$a=\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}. \qquad (4)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид [1]:

$$\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_1 K_{3/2}(\omega r a)+C_2 I_{3/2}(\omega r a)\right], \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя порядка ν первого и второго рода соответственно.

Из условия ограниченности перемещений на бесконечности в качестве искомого решения будем рассматривать распространяющуюся наружу волну, имеющую вид

$$\bar{u}=C_1\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{\omega r a})}{\sqrt{r}\sqrt{\omega r a}}e^{-\omega r a}. \qquad (6)$$

Тогда получаем

$$\bar{\sigma}=-C_1\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(4\mu+4ar\mu\omega+\omega^2 r^2 a^2(\lambda+2\mu))}{r^{3/2}(ar\omega)^{3/2}}e^{-\omega r a}. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, когда в момент времени, принятый за начало, т.е. $t=0$, на поверхность полости радиуса R, воздействует импульсное давление $I\delta(t)$. В этом случае граничное условие имеет вид

$$\sigma_{r=R}=-I\delta(t).$$

Применяя одностороннее преобразование Фурье, получаем:

$$\bar{\sigma}=-I \text{ при } r=R. \qquad (8)$$

С учетом граничного условия (8) находим константу интегрирования C_1:

$$C_1=\frac{Ie^{\omega R a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R^3(a\omega)^{3/2}}{4\mu+4aR\mu\omega+\omega^2 R^2 a^2(\lambda+2\mu)}.$$

Следовательно,

$$\bar{\sigma}=-I\frac{R^3(4\mu+4ar\mu\omega+\omega^2 r^2 a^2(\lambda+2\mu))}{r^3(4\mu+4aR\mu\omega+\omega^2 R^2 a^2(\lambda+2\mu))}e^{-\omega(r-R)a}.$$

Используя обратное преобразование Фурье

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty e^{i\omega t}\bar{f}(\omega)d\omega\right],$$

получим

$$\sigma=-\frac{1}{\pi}\frac{R^3}{r^3}I\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{i\omega t}\frac{4\mu+4ar\mu\omega+\omega^2 r^2 a^2(\lambda+2\mu)}{4\mu+4aR\mu\omega+\omega^2 R^2 a^2(\lambda+2\mu)}e^{-\omega(r-R)a}d\omega\right\}. \qquad (9)$$

Решение для вязкоупругого материала получается заменой $\lambda+2\mu$ и 2μ соответствующими комплексными модулями девиатора Y_S и объемного расширения Y_ν:

$$\mu\to\frac{1}{2}Y_S,\ \lambda\to\frac{1}{3}(Y_\nu-Y_S).$$

Т.е. $\lambda+2\mu \to \frac{1}{3}(Y_v+2Y_S),\ 2\mu \to Y_S$.

Если $J(i\omega)$ обозначает комплексную податливость $3(Y_v+2Y_S)^{-1}$, то из формулы (4) найдем $a=\sqrt{\rho J(i\omega)}$, а интеграл (9) видоизменяется и дает напряжение в вязкоупругой среде в следующей форме

$$\sigma=-\frac{1}{\pi}\frac{R^3}{r^3}I\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{i\omega t}\frac{6Y_S(1+\omega r\sqrt{\rho J(i\omega)})+3\rho\omega r^2}{6Y_S(1+\omega R\sqrt{\rho J(i\omega)})+3\rho\omega R^2}e^{-\omega\sqrt{\rho J(i\omega)}(r-R)}d\omega\right\}. \tag{10}$$

Основные связи уравнения для вязкоупругого материала имеют вид [2]:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{и}\ P(D)\sigma=Q(D)\varepsilon, \tag{11}$$

где $P(D)$ и $Q(D)$ – многочлены одного порядка (это означает, что материал при простом растяжении имеет мгновенную деформацию) с постоянными коэффициентами от оператора $D\equiv\frac{d}{dt}$.

Исключим σ и ε:

$$\sigma=\frac{Q(D)}{P(D)}\varepsilon=\frac{Q(D)}{P(D)}\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow Q(D)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho P(D)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Leftrightarrow \rho D^2P(D)=Q(D)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\rho\, p_n\frac{\partial^{n+2}u}{\partial t^{n+2}}=q_n\frac{\partial^{n+2}u}{\partial x^2\partial t^n}, \tag{12}$$

где p_n и q_n – коэффициенты при членах высших степеней.

Характеристическим уравнением для уравнения (12) будет уравнение

$$\rho\, p_n(dt)^n(dx)^2=q_n(dt)^{n+2}\Leftrightarrow \rho\, p_n(dx)^2=q_n(dt)^2.$$

Отсюда получаем, что линии $r-R\pm\sqrt{\frac{q_n}{\rho\, p_n}}t=const$ при $x=r-R$ являются характеристиками уравнения для вязкоупругого материала, аналогично уравнению (1). Фронт любого возмущения перемещается со скоростью $\sqrt{q_n/(\rho\, p_n)}$.

В общем случае для вязкоупругих материалов, имеющих мгновенную упругость, необходимо применить асимптотическое разложение для подынтегральных функций напряжения (10). Таким образом, при $i\omega\to\infty$ асимптотическое разложение имеет вид

$$\frac{6Y_S(1+\omega r\sqrt{\rho J(i\omega)})+3\rho\omega r^2}{6Y_S(1+\omega R\sqrt{\rho J(i\omega)})+3\rho\omega R^2}\approx\frac{R}{r}+\frac{2\lim\limits_{\omega\to\infty}Y_S\sqrt{\rho\lim\limits_{\omega\to\infty}J}}{r\rho}\left(\frac{R}{r}-1\right)\frac{1}{\omega}+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right).$$

Комплексную податливость можно выразить в виде $J(i\omega)=P(i\omega)/Q(i\omega)$. Имеем

$$J(i\omega)=\frac{p_n(i\omega)^n+p_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\ldots+p_0}{q_n(i\omega)^n+q_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\ldots+q_0},$$

отсюда

$$\sqrt{\rho J(i\omega)} \approx \left[(1+f)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}f-\frac{1}{8}f^2+\ldots\right] \approx \sqrt{\rho\frac{p_n}{q_n}}\left\{1-\frac{i}{2\omega}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}-\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{p_{n-1}^2}{p_n^2}-3\frac{q_{n-1}^2}{q_n^2}+2\frac{p_{n-1}q_{n-1}}{p_nq_n}-4\frac{p_{n-2}}{p_n}+4\frac{q_{n-2}}{q_n}\right)+O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)\right\}.$$

Комплексная податливость $J(i\omega)$ может быть представлена в виде суммы действительной и мнимой частей

$$J(i\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega),$$

где $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$ – действительные функции угловой частоты ω.

Следовательно,

$$\sqrt{\rho J(i\omega)} \approx \alpha - \frac{i\beta}{\omega} + \frac{\gamma}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{13}$$

Тогда

$$\alpha = \sqrt{\rho\frac{p_n}{q_n}} = \sqrt{\rho\lim_{\omega\to\infty} J_1}, \tag{14}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\rho\frac{p_n}{q_n}}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}-\frac{q_{n-1}}{q_n}\right) = \frac{\rho}{2\alpha}\lim_{\omega\to\infty}\omega J_2 \tag{15}$$

и

$$\gamma = \frac{\rho}{2\alpha}\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\left(J_1-\frac{p_n}{q_n}\right)+\frac{\beta^2}{2\alpha}. \tag{16}$$

Теперь применим асимптотическое разложение для выражения $e^{-\omega\sqrt{\rho J(i\omega)}x}$, где $x = (r-R)$:

$$e^{-\omega\sqrt{\rho J(i\omega)}x} \approx \exp\left[-\omega x\left(\alpha-\frac{i\beta}{\omega}+\frac{\gamma}{\omega^2}+O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)\right)\right] \approx \exp\left[-x\left(\alpha\omega - i\beta+\frac{\gamma}{\omega}+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right)\right].$$

Таким образом, асимптотическое разложение для подынтегральной функции в выражении (10) получим в виде

$$\frac{1}{r}e^{i\omega(t-\beta)(R-r)}e^{(\alpha\omega+\gamma/\omega)(R-r)}\left\{R+\frac{1}{\omega}\frac{2}{\rho}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\omega}\right)\lim_{\omega\to\infty}Y_S\left(\frac{R}{r}-1\right)+O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)\right\}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что нормальный импульс, приложенный к сферической полости в вязкоупругом материале и который имеет мгновенную упругость, распространяется радиально наружу со скоростью $1/\alpha$ и амплитудой, пропорциональной величине $(1/r)e^{(\alpha\omega+\gamma/\omega)(R-r)}$. Затухающий импульс следует непосредственно за волной конечной амплитуды, которая имеет на переднем фронте волны величину, равную

$$\frac{2}{\rho}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\omega}\right)\lim_{\omega\to\infty}Y_S\left(\frac{R}{r}-1\right)e^{(\alpha\omega+\gamma/\omega)(R-r)}.$$

В качестве примера рассмотрена модельная задача, когда связь между компонентами напряженного и деформированного состояний описывается элементом Кельвина-Фойгта (комбинация упругого и вязкого элементов, соединенных параллельно) [2]. Считаем, что начальные возмущения отсутствуют. Для численных расчетов вместо преобразования Фурье удобнее использовать преобразование Лапласа [3], так как характер трансформант тот же самый, но для последнего существует довольно хорошо зарекомендовавшие себя алгоритмы численного обращения [3].

Дальнейший расчет проводиться при следующих исходных данных

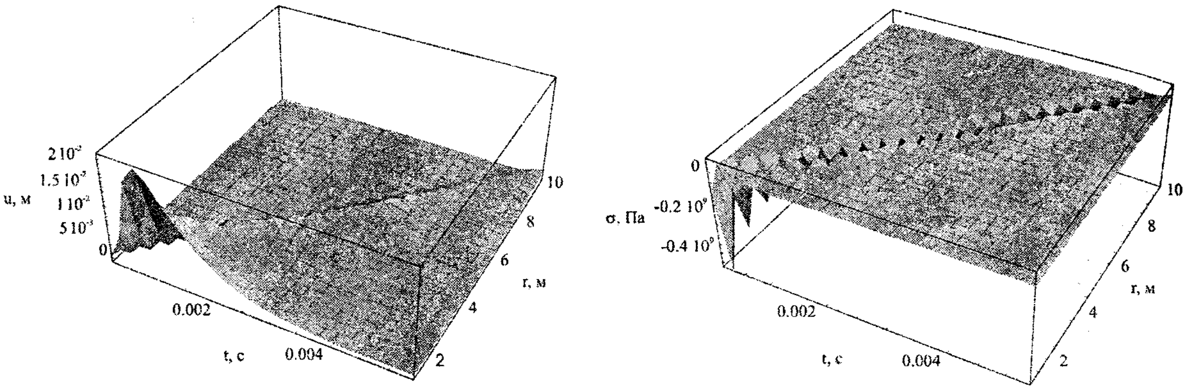
$$E = 10^{10}\,\text{Па}, \nu = 0.3, \eta = 10^6\,\text{Па}\cdot\text{с}, \rho = 1000\,\text{кг/м}^3, R = 1\,\text{м}, P = 10^9\,\text{Н/м}^2.$$

Воздействие нагрузки от времени задается в виде «треугольного» импульса вида

$$I(t) = PI_1(t/a), \tag{18}$$

где $I_1(t) = tH(t) - 2(t-1/2)H(t-1/2) + (t-1)H(t-1)$, P – амплитуда импульсной нагрузки, H – функция Хевисайда.

Зависимости перемещений и напряжений вязкоупругой среды от времени t и радиальной координаты r, полученные в итоге решения задачи для таких начальных условий, представлены соответственно на рисунке 1*а* и рисунке 1*б*.



а) *б)*

Рисунок 1 – Пространственно-временная зависимость радиального перемещения (а) и радиального напряжения (б)

В качестве модификации предыдущей задачи рассмотрим поведение среды под воздействием серии случайных импульсов.

Действующая периодическая нагрузка имеет вид

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} P_k I_1(t - t_k),$$

где P_k – амплитуда k-го импульса.

Тогда формула для перемещения примет вид

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{N} U(r, t - t_k),$$

где N – число импульсов, t_k – момент времени действия k-го импульса, U – функция перемещения от действия одного импульса.

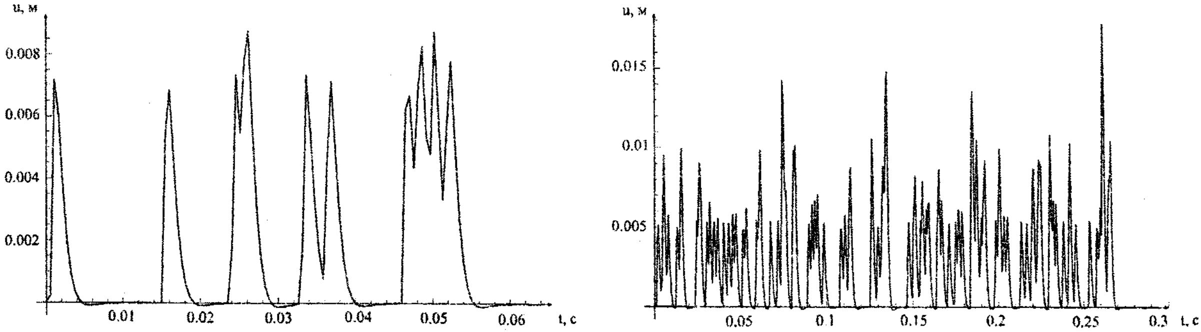


Рисунок 2 – Зависимость перемещений от времени при воздействии 10 и 100 случайных импульсов

Рисунок 2 показывает, что характер перемещений в пространстве со сферической полостью, на поверхности которой действует импульсная нагрузка, может достаточно сильно изменяться в зависимости от внешнего нагружения. Волна деформаций может иметь скачки амплитуды, которые в свою очередь могут превышать величину критических перемещений.

Выводы. Построено аналитическое решение задачи о распространении волн деформаций в вязкоупругом массиве горных пород вследствие воздействия на внутреннюю поверхность сферической полости динамической равномерно распределенной нагрузки. Данное решение может быть обобщено на более сложные типы краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волны в сплошных средах / А.Г. Горшков [и др.]. – ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
2. Bland, D.R. The theory of linear viscoelasticity / D.R. Bland. – PERGAMON PRESS, 1960 – 199 с.
3. Abate, J. A unified framework for numerically inverting Laplace transform / J. Abate, W. Whitt. – 2006.
4. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 – 712 с.

Поступила 31.10.11