Белорусский национальный технический университет, Минск

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ В СИСТЕМЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ANSYS

Али М. Абед Аль-Зобайде, Пронкевич С.А., Мартыненко И.М.

The article is considered the problem of calculating the thermal conductivity of three-layer system by the analytical method and FEA calculation in the ANSYS.

Развитие информационных технологий привело к существенному изменению методов проведения расчётов во всех областях техники и технологии. Метод конечных элементов (МКЭ), который является основой системой инженерного анализа (CAE), стал доступен не только специалистам – профессионалам, но входит в разряд обычных инструментов инженеров – проектировщиков и исследователей.

МКЭ – один из наиболее гибких и универсальных методов решения широкого круга задач механики сплошной среды, тепло- и массообмена, электро- и магнитостатики и многих других задач науки и техники.

Однако, при работе с программами, реализующими расчеты с помощью МКЭ, необходима достаточно высокая, в данной расчетной области, подготовка пользователей, которые могут осуществить оценку достоверности полученных результатов и условий, при которых обеспечивается получение достоверных результатов.

В прямых задачах теплообмена требуется рассмотреть поле температур в области, состоящей из отдельных однородных слоев при различных граничных условиях.

Решение прямой задачи получается путем решения дифференциального уравнения теплопроводности при заданных коэффициентах теплопроводности α

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (1)$$

Для получения аналитического решения уравнения (1) необходимо задать следующих краевых (граничных) условия: а) начальное распределение температуры в теле и б) температура на наружной поверхности. Последнее граничное условие может быть задано тремя способами:

Граничные условия первого рода, в которых задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени: $T_m = f(x, y, z, \tau)$; частный случай T_m = const.

Граничные условия второго рода, в которых задается величина теплового потока для каждой точки поверхности тела и для любого момента времени: $q_c = f(x, y, z, \tau)$; частный случай q_c = const.

Граничные условия третьего рода, в которых задается температура окружающей среды T_{cp} и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания. Для его описания используется, как известно, закон Ньютона – Римана: плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела T_m и окружающей среды

$$T_{cp}\colon\ q = a(T_{cp} - T_m),$$

где α– коэффициент теплоотдачи.

В результате решения дифференциального уравнения (1) должна быть найдена такая функция, которая одновременно удовлетворяла бы этому уравнению и краевым условиям. Если решение уравнения (1) производится с помощью рядов

Фурье, то его можно представить в виде:

$$T = bx + c + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos m_n x + p_n \sin m_n x\right) e^{-am_n^2 \tau} \qquad (2)$$

где b и c определяются из условий стационарности режима (при $\tau = \infty$); p_n и m_n - из граничных и A_n – из начальных (при $\tau = 0$) условий.

Здесь предполагается, что задача одномерная.

Пусть толщина неограниченной плоского слоя составляет 2 δ ($l = \delta$). Если за начало отсчета температуры окружающей среды t_f и избыточную температуру слоя обозначить буквой $\theta = t_f - t_w$, то дифференциальное уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Граничные условия: при $x = \pm\, \delta$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \pm \frac{a\theta}{\lambda_{cm}}$$

И начальное условие: при $\tau = 0$

$$\theta = \theta`$$

При решении технических задач в большинстве случаев достаточно знать температуру на поверхности θ_w и в средней плоскости стенки θ_o (или в промежуточных слоях).

Для стационарной задачи уравнение (1) примет вид

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (3)$$

Рассмотрим случай стационарного распределения тепла в трехслойном однородном теле. Для этого в выделим один слой.

Для каждого слоя задана толщина δ (рисунок 1). Коэффициент теплопроводности материала слоя постоянен и равен λ. Считается, что на наружных поверхностях температуры постоянны и равны T_1 и T_2. Температура изменяется только в направлении оси x, перпендикулярной плоскости стенки.

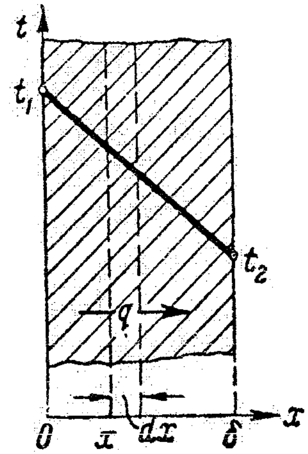


Рисунок 1 – Однородная плоская стенка

Согласно закону Фурье количество переданного тепла пропорционально падению температуры, времени и площади сечения. При отнесении количества переданного тепла к единице площади и единице времени закономерность имеет вид:

$$q = -\lambda\, grad\, T\,. \qquad (5)$$

Для случая передачи тепла через однородную стенку закон Фурье (5) примет вид:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \tag{6}$$

Интегрируя уравнение (6) получаем:

$$T = -\frac{q}{\lambda} x + C. \tag{7}$$

Уравнение (7) можно получить интегрируя уравнение (5).

Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий: при $x = 0$; $T = T_1$. Подставляя эти значения в уравнение (4) получим, что $C = T_1$.

При $x = \delta$, $T = T_2$, следовательно

$$T_2 = -\frac{q}{\lambda}\delta + T_1. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно определить величину теплового потока q:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta T. \tag{9}$$

Подставляя значения из формул (8) и (9) в уравнение (7) получим уравнения температурной кривой:

$$T_x = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x. \tag{10}$$

Из уравнения (7) видно, что при постоянном значении коэффициента теплопроводности закон изменения температуры описывается линейным законом. Графиком изменения температуры является прямая.

При решении температурной задачи для стенки, состоящей из нескольких однородных слоев с различными свойствами (коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость) необходимо учитывать условия на границах областей:

по закону сохранения энергии количество тепла, отводимое с единицы поверхности одной подобласти вследствие теплоотдачи, должно равняться теплу, подводимому к единице поверхности второй подобласти вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, т.е. тепловой поток должен быть постоянен и для всех слоев одинаков. Т.о. для каждого слоя имеет место:

$$\frac{\lambda_i}{\delta_i}\frac{dT_i(x)}{dx} = \frac{\lambda_{i+1}}{\delta_{i+1}}\frac{dT_{i+1}(x)}{dx}, \tag{11}$$

где λ_i, λ_{i+1} – коэффициенты теплопроводности в i и $i+1$ области. δ_i, δ_{i+1} – толщина i и $I+1$ области. Предполагается, что границы областей плотно прилагаются друг к другу и соприкасающиеся поверхности имеют общую температуру: $T(x-0) = T(x+0)$.

Рассмотрим трехслойную систему (рисунок 2).

Два слоя бетона и утеплитель в промежутке между слоями бетона. Расчетная теплопроводность керамзитобетона составляет 0.41 Вт/(м-°С) – 0.52 Вт/(м-°С) и т.д. Теплопроводность утеплителя составляет 0.05 Вт/(м-°С). Толщина стены составляет 0,5 м. На поверхностях стены заданы следующие краевые условия:

Температура на одной из границ составляет 0 С°. на другой – 18 С° (внутренняя температура).

Требуется определить зависимость изменения температуры от толщины стенки.

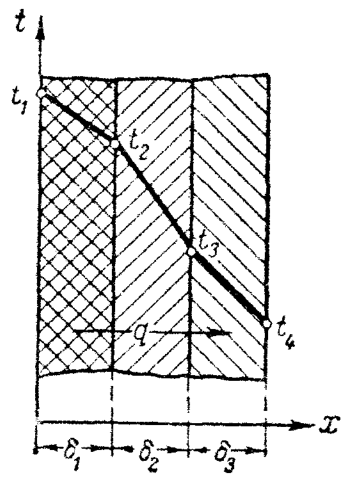


Рисунок 2 – Расчетная схема распределения температуры в сечении стены

Обозначим $k_i = \frac{\lambda_i}{\delta_i}$ – тепловую проводимость стенки.

Для первого слоя коэффициент теплопроводности составляет $\lambda_1 = 0{,}52$ Вт/(m C), толщина $\delta_1 = 0{,}2$; для второго слоя $\lambda_2 = 0{,}05$ Вт/(m C), $\delta_2 = 0.1$; для третьего слоя $\lambda_3 = 0{,}52$ Вт/(m C), $\delta_3 = 0{,}2$.

Интегрирование уравнения (4) для каждого слоя дает следующие уравнения:

$$T_1(x) = \frac{C_1}{\lambda_1}x + C_2 \quad 0 \le x \le \delta_1$$
$$T_2(x) = \frac{C_3}{\lambda_2}x + C_4 \quad \delta_1 < x \le \delta_2 \qquad (12)$$
$$T_3(x) = \frac{C_5}{\lambda_3}x + C_6 \quad \delta_2 < x \le \delta_3$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – постоянные интегрирования.

На стенках между слоями должны выполниться условия равенстве теплового потока согласно уравнению (11):

$$k_1 \frac{dT}{dx} = k_2 \frac{dT}{dx}$$
$$k_2 \frac{dT}{dx} = k_3 \frac{dT}{dx}. \qquad (13)$$

Решая систему алгебраических уравнений (12)-(13), с учетом граничных условий:

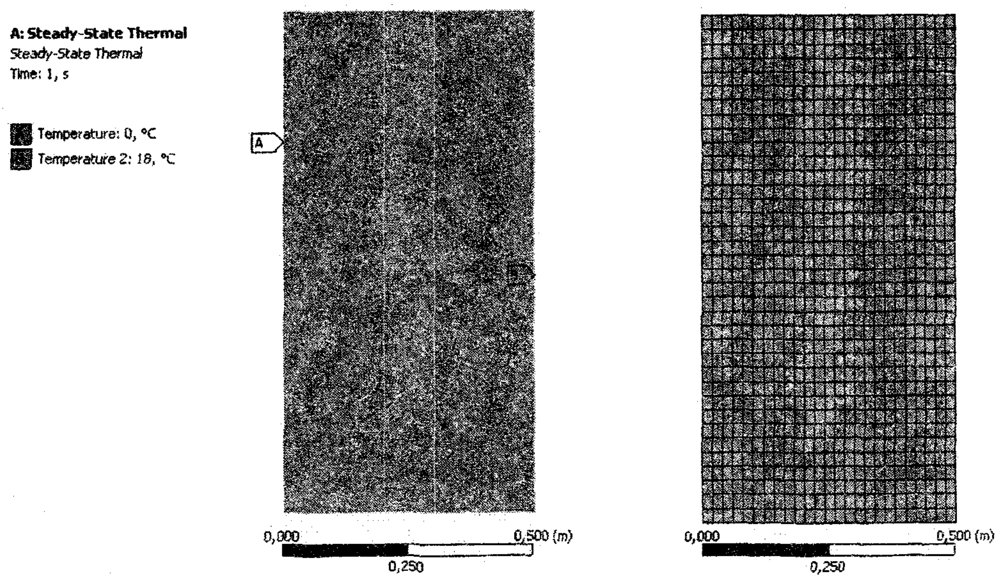
$$x = 0, \quad T = T_1$$
$$x = \delta_4, \quad T = T_4.$$

Найдем коэффициенты интегрирования C_i в законах распределение температур, и построим график.

Для каждого слоя получен закон изменения температуры для заданных граничных условий:

$$T_1(x) = \frac{4.51}{\lambda_1}x \quad 0 \le x \le \delta_1$$
$$T_2(x) = \frac{5.87}{\lambda_2}x - 21.75 \quad \delta_1 \le x \le \delta_2$$
$$T_3(x) = \frac{11.74}{\lambda_3}x + 6.71 \quad \delta_2 \le x \le \delta_3.$$

Рассмотрим решение данной задачи в системе конечно-элементного моделирования ANSYS. На рисунке 3, *а* представлена геометрическая модель трехслойной системы. При моделировании участки, выполненные из различных типов материалов, необходимо создавать отдельно.



(а) (б)

Рисунок 3 – Геометрическая модель (а), на которой показаны граничные условия, и конечно-элементная модель (б) трехслойной системы

Для проведения расчета необходимо геометрическую модель «разбить» на конечные элементы, т.е. создать конечно-элементную сетку, имеющую те же границы, что и геометрическая модель (рисунок 3, *б*). В системе ANSYS для проведения температурного расчета служат специальные конечные элементы, имеющие в качестве свободы узла значение в нем температуры. Контактные элементы, создаваемые между участками имеют тип Bonded, т.е. тела неразрывно сцеплены между собой. Также необходимо задать коэффициент теплопроводности материалов из которых выполнены составляющие модели.

Результаты расчета в системе ANSYS показаны на рисунке 4.

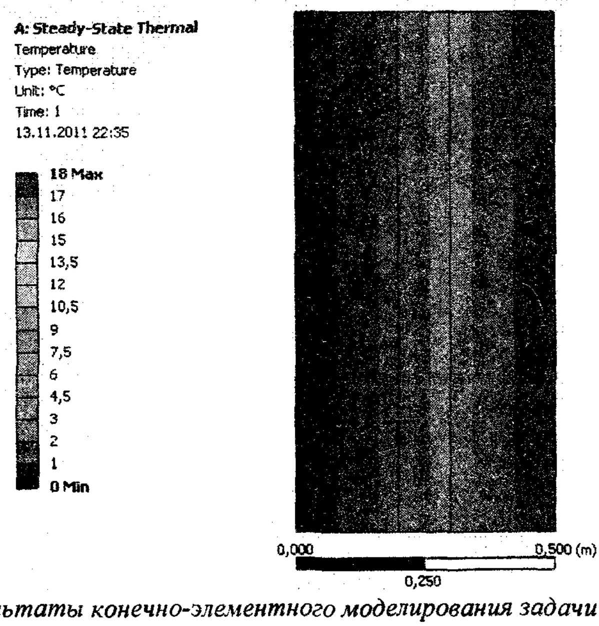


Рисунок 4 – Результаты конечно-элементного моделирования задачи теплопроводности в системе ANSYS

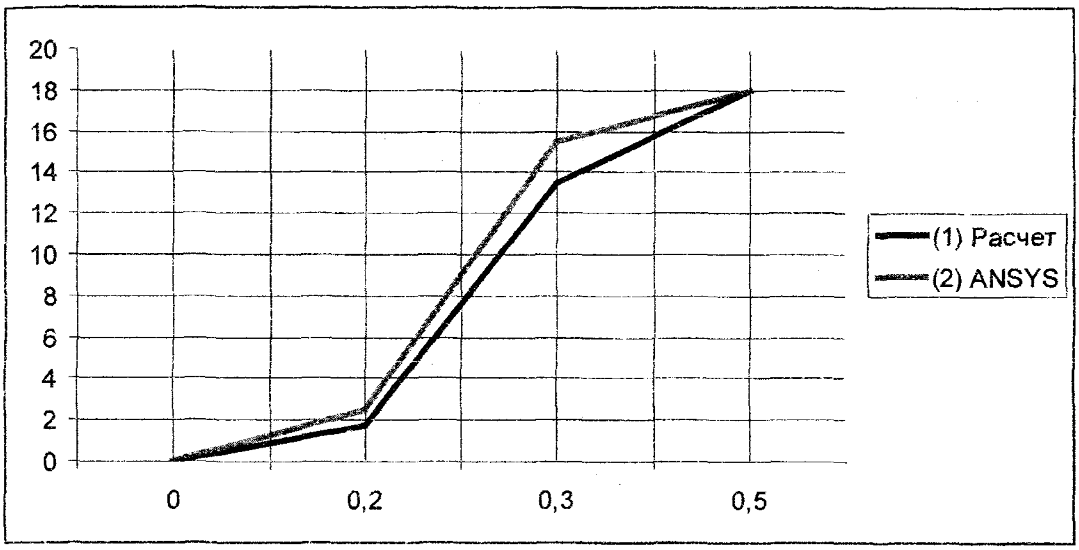


Рисунок 5 – График изменения температуры, полученный аналитически (1) и в системе ANSYS (2).

Заключение. В статье рассмотрена задача расчета теплопроводности трехслойной системы аналитическим методом и в системе ANSYS. Расхождение результатов составляет около 5%, что для численного решения вполне приемлемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 488 с.
2. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев. – Л. Государственное энергетическое издательство, 1949 – 396 с.

Поступила 14.11.11