УДК 539.374

ВЛИЯНИЕ ПОВТОРНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА УРОВЕНЬ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ИХ ПОСЛЕДУЮЩУЮ РЕЛАКСАЦИЮ

Ковтанюк Л.В., Терлецкий И.А.

Sequence of quasistatic solutions of boundary value problems about the viscoelastic deforming, origin and development of plastic flow with the subsequent unloading in a material with a spherical concavity by the viscoelastoplastic body model are given. Before plastic flow origin and at an unloading the material is necessary the linear viscoelastic one, the viscous dissipative mechanism is saved and at plastic flow too. The principal attention is given conditions of repeated plastic flow origin and influence one on total distribution of residual stresses.

Повторное пластическое течение, то есть пластическое течение при снятии внешних нагружающих усилий в окрестностях сферических и цилиндрических полостей изучалось в [1-3]. Одномерные задачи формирования полей остаточных напряжений в окрестностях вырожденных неоднородностей среды рассматривались ранее в [1-5]. Наиболее близкой к настоящей публикации является работа [2], в которой в рамках модели упругопластической среды типа Прандтля – Рейса [6], то есть без учета вязких свойств среды, рассмотрена, по существу, та же задача. Насколько важно учитывать вязкие свойства деформированной среды и с какой целью? В работе [3] указано свойство идеальной упругопластической среды проявлять эффект приспособляемости к эксплуатационным нагрузкам по типу «нагрузка – разгрузка». Данный эффект расчетно проявился на вполне аналогичной рассматриваемой задаче с тем лишь условием, что деформации в материале могут быть большими, то есть в теории больших упругопластических деформаций. Этот эффект заключен в том, что после каждой разгрузки размеры полости (дефекта сплошности) оставались теми же, что и после первой разгрузки; одинаковыми после каждой разгрузки оставались и уровень и распределение остаточных напряжений. Попытка выхода из такой парадоксальной ситуации была предпринята в [4] за счет учета вязких свойств деформированной среды. Оказалось, что в таком случае может происходить последовательное уменьшение в размерах полости за счет учета вязкости на стадиях деформирования, предваряющих пластическое течение, и увеличение за счет учета вязкости в процессе пластического течения. Однако такие выводы были сделаны в предположении несжимаемости среды. Здесь же данное ограничение снимается, хотя в целях получения аналитического решения приходится ограничиться малостью деформаций.

1. Вязкоупругое деформирование. Полагаем, что полый шар нагружается давлением на внешней поверхности $r = R_0$, а его внутренняя граница $r = r_0$ остается свободной от нагрузки. До достижения предельного состояния по напряжениям материал шара остается вязкоупругим, а по выходу напряженного состояния на поверхность нагружения начинается его пластическое течение. Таким образом, полагаем, что деформации d_{ij} складываются из упругих e_{ij} и пластических p_{ij}:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad \varepsilon_{ij} = \dot{d}_{ij} = \frac{dd_{ij}}{dt} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}. \tag{1.1}$$

Упругие деформации и скорость их изменения задают напряжения в среде

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \xi\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta\varepsilon^e_{ij}. \tag{1.2}$$

Зависимостями (1.2), где λ, μ – параметры Ламе, ξ, η – объемная и сдвиговая вязкость, задается линейный вязкоупругий материал Фойгта. При достижении напряженным состоянием поверхности нагружения

$$\Phi=(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2+(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})^2+(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr})^2-8k^2=0 \tag{1.3}$$

в материале начинается пластическое течение. В (1.3) принята сферическая система координат r, φ, θ. В дальнейшем принимается условие принципа максимума Мизеса, следствием которого становится ассоциированный закон пластического течения.

Если, в силу особенности задаваемой нагрузки

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_0}=f(t), \qquad \sigma_{rr}\big|_{r=r_0}=0 \tag{1.4}$$

учесть сферическую симметрию задачи, то уравнение равновесия

$$\sigma_{rr,r}+\frac{2}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})=0 \tag{1.5}$$

в случае, пока пластическое течение не началось, перепишется в перемещениях

$$(\lambda+2\mu)\left(u''+2\frac{u'}{r}-2\frac{u}{r^2}\right)+(\xi+2\eta)\frac{d}{dt}\left(u''+2\frac{u'}{r}-2\frac{u}{r^2}\right)=0\,. \tag{1.6}$$

В (1.6) $u=u_r(r,t)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений; штрихом обозначена частная производная функции по r.

Решением уравнения (1.6) при начальном условии

$$u\big|_{t=0}=0 \tag{1.7}$$

является функция

$$u(r,t)=c_1(t)r+\frac{c_2(t)}{r^2}. \tag{1.8}$$

Тогда для компонент тензора напряжений согласно (1.2) получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=(3\lambda+2\mu)c_1+(3\xi+2\eta)\dot{c}_1-\frac{4}{r^3}(\mu c_2+\eta\dot{c}_2)\\ \sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=-\frac{6}{r^3}(\mu c_2+\eta\dot{c}_2).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Для определения неизвестных функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$ воспользуемся условиями (1.4), согласно которым

$$\begin{gathered}(3\lambda+2\mu)c_1+(3\xi+2\eta)\dot{c}_1=f(t)\frac{R_0^3}{R_0^3-r_0^3}\\ \mu c_2+\eta\dot{c}_2=f(t)\frac{R_0^3r_0^3}{4(R_0^3-r_0^3)}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Для компонент напряжений согласно (1.10) найдем

$$\sigma_{rr}=f(t)\frac{R_0^3(r^3-r_0^3)}{r^3(R_0^3-r_0^3)}, \qquad \sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=-\frac{3}{2}f(t)\frac{R_0^3r_0^3}{r^3(R_0^3-r_0^3)}. \tag{1.11}$$

Для нахождения функций $c_1(t)$ и $c_2(t)$ уравнения (1.10) необходимо проинтегрировать, поэтому надо задать конкретный вид функции $f(t)$. Выберем ее в простейшем виде $f(t)=-\beta t$, тогда учитывая условие (1.7), получим

$$\begin{gathered}c_1(t)=\frac{\beta}{\gamma_0r_0^3(3\lambda+2\mu)}\left(\frac{1-e^{-dt}}{d}-t\right), \qquad c_2(t)=\frac{\beta}{4\gamma_0\mu}\left(\frac{1-e^{-bt}}{b}-t\right)\\ b=\frac{\mu}{\eta}, \qquad d=\frac{3\lambda+2\mu}{3\xi+2\eta}, \qquad \gamma_0=\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{R_0^3}.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Момент начала пластического течения $t=t_0$ определим, воспользовавшись условием пластичности (1.3).

В нашем случае оно впервые выполнится на внутренней поверхности $r=r_0$ в виде

$$\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)\Big|_{r=r_0,t=t_0}=2k.$$

в момент времени $t_0=\dfrac{1}{q}\left(1-\dfrac{r_0^3}{R_0^3}\right)$, $q=\dfrac{3\beta}{4k}$.

2. Развивающее пластическое течение. При дальнейшем увеличении внешней нагрузки со значения f_0 развивающаяся в окрестности внутренней сферической поверхности область пластического течения будет ограничена поверхностями $r=r_0$ и $r=r_1$ $(r_0<r_1)$. В слое $r_1\le r\le R_0$ материал деформируется вязкоупруго. Таким образом, граница $r=r_1(t)$ является движущейся границей развивающейся области пластического течения. Примем, что внешняя нагрузка изменяется по закону

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_0}=f(t)+f_1(t),\qquad f_1(t_0)=0. \tag{2.1}$$

В области вязкоупругого деформирования $r_1\le r\le R_0$ остаются справедливыми зависимости (1.8), (1.9), в которых функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ заменим их текущими значениями $b_1(t)$ и $b_2(t)$, учитывая, что

$$b_1(t_0)=c_1(t_0),\qquad b_2(t_0)=c_2(t_0). \tag{2.2}$$

В области пластического течения $r_0\le r\le r_1$ из уравнения равновесия (1.7), учитывая условие

$$\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)\Big|_{r_0\le r\le r_1(t)}=2k$$

для компонент напряжений получим

$$\sigma_{rr}=4k\ln\frac{r_0}{r},\qquad \sigma_{\varphi\varphi}=2k\left(2\ln\frac{r_0}{r}-1\right). \tag{2.3}$$

Воспользовавшись граничным условием (2.1) и условием равенства компонент напряжений (1.11) и (2.3) на упругопластической границе $r=r_1(t)$, определим компоненты напряжений в области обратимого деформирования и получим уравнения для определения функций $b_1(t)$, $b_2(t)$ и $r_1(t)$:

$$\sigma_{rr}=f(t)+f_1(t)+\frac{\beta}{q}\left(\frac{r_1^3}{r^3}-\frac{r_1^3}{R_0^3}\right),\qquad \sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2k\frac{r_1^3}{r^3}$$

$$(3\lambda+2\mu)b_1+(3\xi+2\eta)\dot b_1=f(t)+f_1(t)-\frac{\beta}{q}\frac{r_1^3}{R_0^3}, \tag{2.4}$$

$$\mu b_2+\eta\dot b_2=-\frac{k}{3}r_1^3,\qquad 4k\ln\frac{r_0}{r_1}=\frac{4k}{3}\left(1-\frac{r_1^3}{R_0^3}\right)+f(t)+f_1(t).$$

Ясно, что система для определения функций $b_1(t)$, $b_2(t)$ и $r_1(t)$, состоящая из двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения, имеет аналитическое решение не для любой функции $f_1(t)$. Такое решение можно получить, задавая, например, $f_1(t)$ в виде

$$f_1(t)=\frac{\beta\left(r_1^3(t)-r_0^3\right)}{qR_0^3} \tag{2.5}$$

или, что то же, принять закон движения упругопластической границы $r=r_1(t)$ форме

$$r_1(t)=r_0e^{\frac{\beta}{4k}(t-t_0)}. \tag{2.6}$$

С учетом (2.5) и (2.6) для функций $b_1(t)$, $b_2(t)$ и компоненты σ_{rr}, используя начальные условия (2.2), получаем

$$b_1(t)=F\left[e^{-d(t-t_0)}\left(\frac{1}{dt_0}-\frac{q}{d}\right)-\frac{e^{-dt}}{dt_0}-q\left(t-t_0-\frac{1}{d}\right)-1\right]$$

$$b_2(t)=\frac{k}{3(\mu+q\eta)}\left(r_0^3e^{-b(t-t_0)}-r_1^3\right)+\frac{kr_0^3}{3\mu}\left(e^{-b(t-t_0)}\left(\frac{\eta}{\mu t_0}-1\right)-\frac{\eta}{\mu t_0}e^{-bt}\right) \tag{2.7}$$

$$\sigma_{rr}=4k\left(\ln\frac{r_0}{r_1}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{r_1^3}{r^3}\right)\right),\qquad F=\frac{4k}{3(3\lambda+2\mu)}.$$

С другой стороны, компоненты напряжений в области пластического течения $r_0\le r\le r_1$ согласно (1.3) можно выразить через обратимые деформации:

$$\sigma_{rr}=(\lambda+2\mu)e_{rr}+2\lambda e_{\varphi\varphi}+(\xi+2\eta)\dot e_{rr}+2\xi\dot e_{\varphi\varphi}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}=2(\lambda+\mu)e_{\varphi\varphi}+\lambda e_{rr}+2(\xi+\eta)\dot e_{\varphi\varphi}+\xi\dot e_{rr} \tag{2.8}$$
$$\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2\mu(e_{rr}-e_{\varphi\varphi})+2\eta(\dot e_{rr}-\dot e_{\varphi\varphi})$$

Сравнивая зависимости для σ_{rr} (2.3) и (2.8) и для $\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}$ (2.4) и (2.8) для определения компонент упругих деформаций в области пластического течения получим систему дифференциальных уравнений

$$(\lambda+2\mu)e_{rr}+2\lambda e_{\varphi\varphi}+(\xi+2\eta)\dot e_{rr}+2\xi\dot e_{\varphi\varphi}=4k\ln\frac{r_0}{r}$$
$$\mu(e_{rr}-e_{\varphi\varphi})+\eta(\dot e_{rr}-\dot e_{\varphi\varphi})=k. \tag{2.9}$$

Решением системы (2.9) являются функции

$$e_{rr}=3F\ln\frac{r_0}{r}+\frac{3\lambda}{2\mu}F+\frac{2}{3}z(r)e^{-bt}+g(r)e^{-dt},\quad e_{\varphi\varphi}=e_{rr}-\frac{k}{\mu}-z(r)e^{-bt}, \tag{2.10}$$

где $z(r)$, $g(r)$ – неизвестные функции.

Следуя [7, 4], найдем перемещения в области пластического течения. Согласно выражениям (1.1) для приращений деформаций справедливы зависимости

$$dd_{rr}=de_{rr}+dp_{rr},\qquad dd_{\varphi\varphi}=de_{\varphi\varphi}+dp_{\varphi\varphi}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения $\varepsilon_{ij}^p=\delta\dfrac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}$, учитывая, что поверхность нагружения Φ задана в виде (1.15), получим

$$\frac{dp_{rr}}{2}=-dp_{\varphi\varphi}=-dp_{\theta\theta}=d\delta,\qquad \varepsilon_{rr}^p+2\varepsilon_{\varphi\varphi}^p=0. \tag{2.11}$$

Согласно второй зависимости (2.11) в случае сферической симметрии при использовании условия пластичности (1.15) материал является пластически несжимаемым. Интегрируя по времени первое соотношение (2.11), найдем

$$p_{rr}=-2p_{\varphi\varphi}. \tag{2.12}$$

Условие (2.12) согласно выражениям (1.1) и (1.5) может быть переписано в следующем виде:

$$e_{rr}+2e_{\varphi\varphi}=u'+\frac{2u}{r}. \tag{2.13}$$

Из второго соотношения (2.10) и (2.13) следуют зависимости

$$e_{rr}=\frac{1}{3}\left(u'+\frac{2u}{r}+\frac{2k}{\mu}+2z(r)e^{-bt}\right),\quad e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{3}\left(u'+\frac{2u}{r}-\frac{k}{\mu}+2z(r)e^{-bt}\right). \tag{2.14}$$

Подстановка последних зависимостей в первое уравнение (2.9) позволяет получить уравнение для перемещений в области необратимого деформирования

$$(3\lambda+2\mu)\left(u'+2\frac{u}{r}\right)+(3\xi+2\eta)\frac{d}{dt}\left(u'+2\frac{u}{r}\right)=4k\left(3\ln\frac{r_0}{r}-1\right). \qquad (2.15)$$

Решением уравнения (2.15) является функция

$$u=3Fr\ln\frac{r_0}{r}+w(r)e^{-dt}+\frac{h(t)}{r^2}. \qquad (2.16)$$

где $h(t)$, $w(r)$ – неизвестные функции. Из первых зависимостей (2.10) и (2.14) при учете (2.16) следует

$$g(r)=\frac{1}{3}\left(w'(r)+\frac{2w(r)}{r}\right). \qquad (2.17)$$

Согласно (1.1), (2.10), (2.15) и (2.17) определим компоненту p_{rr} пластических деформаций

$$p_{rr}=-\frac{2}{3}F\frac{\lambda+2\mu}{\mu}-\frac{2h(t)}{r^3}+\frac{2}{3}\left(w'(r)-\frac{w(r)}{r}\right)e^{-dt}-\frac{2}{3}z(r)e^{-bt}. \qquad (2.18)$$

В области обратимого деформирования для компонент обратимых деформаций $e_{rr}=u'=b_1(t)-\dfrac{2b_2(t)}{r^3}$, $e_{\varphi\varphi}=\dfrac{u}{r}=b_1(t)+\dfrac{b_2(t)}{r^3}$ следуют зависимости

$$e_{rr}+2e_{\varphi\varphi}=3b_1(t), \qquad e_{rr}-e_{\varphi\varphi}=-\frac{3b_2(t)}{r^3}. \qquad (2.19)$$

Условие непрерывности компонент обратимых деформаций на границе $r=r_1(t)$ и равенства (2.10) и (2.19) позволяют определить неизвестные функции $z(r)$, $g(r)$ на упругопластической границе

$$g(r_1)=b_1(t)+F\left(3\ln\frac{r_1}{r_0}+1\right)e^{dt}, \qquad z(r_1)=-\left(\frac{k}{\mu}+\frac{3b_2(t)}{r_1^3}\right)e^{bt}. \qquad (2.20)$$

Учитывая равенства (2.7) и (2.6), из (2.20) получаем

$$g(r)=F\left[e^{dt_0}\left(\frac{1}{dt_0}+\frac{q}{d}\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}-1\right)\right)-\frac{1}{dt_0}\right]$$

$$z(r)=\frac{k\eta}{\mu}\left[e^{bt_0}\left(\frac{q}{\mu+q\eta}-\frac{1}{\mu t_0}\right)+\frac{1}{\mu t_0}\right]\frac{r_0^3}{r^3}-\frac{q}{\mu+q\eta}e^{bt_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}. \qquad (2.21)$$

Из уравнения (2.17), учитывая зависимость (2.21) для функции $g(r)$, найдем функцию $w(r)$ с точностью до неизвестной постоянной h_0

$$w(r)=Fr\left[e^{dt_0}\left(\frac{1}{dt_0}-\frac{q}{d}\right)-\frac{1}{dt_0}+\frac{q^2e^{dt_0}}{d(d+q)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\right]+\frac{h_0}{r^2}. \qquad (2.22)$$

Неизвестную функцию $h_1(t)=h(t)+h_0e^{-dt}$ определим из условия непрерывности перемещений в области обратимого деформирования (1.10) с найденными функциями $b_1(t)$ и $b_2(t)$ (2.7) и в области пластического течения (2.16) с известной функцией $w(r)$ (2.22) на упругопластической границе $r=r_1(t)$

$$h_1(t) = Fr_1^3\left[3\ln\frac{r_1}{r_0} - e^{-dt}\left(e^{dt_0}\left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d}\right) - \frac{1}{dt_0}\right) - \frac{q^2 e^{-d(t-t_0)}}{d(d+q)}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\right] + \tag{2.23}$$
$$+ b_1(t)r_1^3 + b_2(t).$$

Подстановка найденных функций $z(r)$, $w(r)$ и $h_1(t)$ в выражения (2.16) и (2.18) позволяет найти окончательные зависимости для компонент пластических деформаций и перемещений в области пластического течения

$$p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi} = A + A_1\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}} e^{-d(t-t_0)} + A_2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}} e^{-b(t-t_0)} +$$
$$+\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\left(A_3 + A_4 e^{-d(t-t_0)}\right), \quad A = -F\frac{3(\lambda+2\mu)}{2\mu}, \qquad A_1 = \frac{2Fq}{d+q}$$
$$A_2 = \frac{2kq\eta}{3\mu(\mu+q\eta)}, \quad A_3 = 2F\left[q\left(t - t_0 - \frac{1}{d}\right) + 1 - 3\ln\frac{r_1}{r_0}\right] + \frac{2k}{3(\mu+q\eta)} \tag{2.24}$$
$$A_4 = \frac{Fq^2}{d(d+q)}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}.$$
$$u = Fr\left[3\ln\frac{r}{r_0} + \left(e^{dt_0}\left(\frac{1}{dt_0} - \frac{q}{d}\right) - \frac{1}{dt_0}\right)e^{-dt} - A_3\frac{r_1^3}{2r^2}\right] +$$
$$+\frac{k\eta r_0^3}{3\mu r^2}\left[e^{-b(t-t_0)}\left(\frac{1}{\mu t_0} - \frac{q}{\mu+q\eta}\right) - \frac{1}{\mu t_0}e^{-bt}\right] + \frac{Fq^2 e^{-d(t-t_0)}}{d(d+q)}\left[r\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}} - \frac{r_1^3}{r^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right].$$

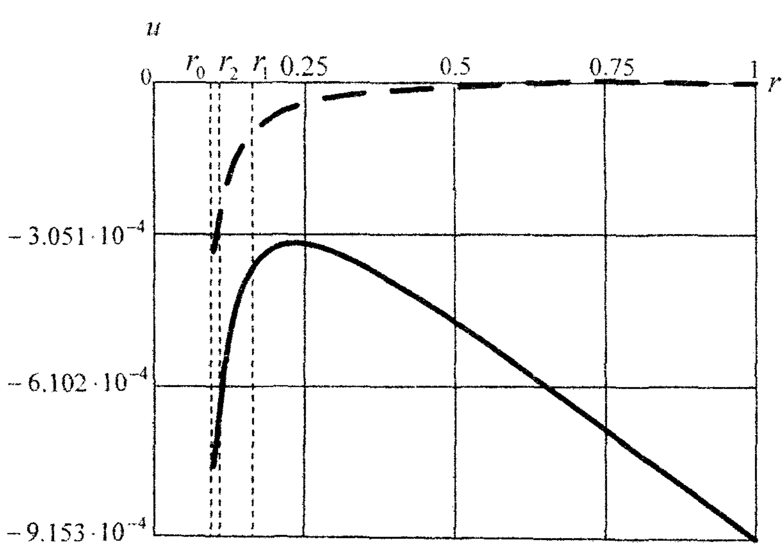

Рисунок 1

Перемещения $u \to \dfrac{u(r)}{R_0}$ (сплошная линия) и компоненты напряжений $\sigma \to \dfrac{\sigma_{rr}}{\lambda+2\mu}$ (сплошная линия) и $\dfrac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\lambda+2\mu}$ (штриховая линия) в зависимости от радиуса $r \to \frac{r}{R_0}$ приведены на риснках 1 и 2 соответственно в конечный момент нагрузки $\tau_1 = \frac{\mu}{\xi} t_1 = 253.02 \left(\frac{r_1(t_1)}{R_0} = 0.17 \right)$. Значения постоянных выбирались следующие: $\frac{\lambda}{\mu} = 4.1$, $\frac{k}{\mu} = 0.00377$, $\xi_0 = \frac{kR_0}{\xi v_0} = 4.92 \cdot 10^{-6}$ $\left(v_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \right)$, $\frac{\eta}{\xi} = 2.09$, $\beta_0 = \frac{\beta \xi_0}{\mu^2} = 3.8 \cdot 10^{-18}$ (ρ – плотность).

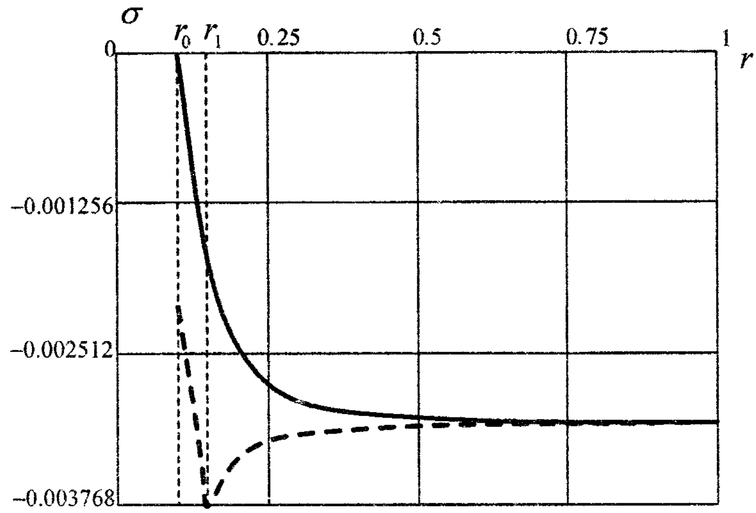

Рисунок 2

3. Процесс разгрузки. Процесс разгрузки свяжем с краевым условием

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_0} = f_2(t) = -p + p_1(t), \qquad (3.1)$$

где p – значение давления в конечный момент нагрузки $t = t_1$. Функция $p_1(t)$ определена при $t \geq t_1$:

$$p_1(t_1) = 0, \qquad p_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > t_1$$

Как известно $[1-5]$, значительный уровень нагружающего давления p в процессе разгрузки может вызвать повторное пластическое течение, связанное с выходом напряженного состояния при $r = r_0$ на поверхность нагружения (1.3), только теперь при растягивающих внутренних усилиях

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\Big|_{r=r_0, t=t_2} = -2k\,. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим далее этот общий случай, полагая, что на первом этапе разгрузки в интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$ пластическая область не развивается, и в материале присутствуют две области: область с не изменяющимися накопленными необратимыми деформациями $r_0 \leq r \leq r_1(t_1) = r_1 = const$ и область, где необратимые деформации отсутствуют $r_1 \leq r \leq R_0$, а на втором этапе при $t \geq t_2$ от границы $r = r_0$ развивается область пластического течения $r_0 \leq r \leq r_2(t)$.

Рассмотрим первый этап, полагая

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R_0} = f_2(t) = -p[1 - \alpha(t - t_1)], \qquad \alpha = const\,. \qquad (3.3)$$

В области $r_1 \leq r \leq R_0$, аналогично соотношениям (1.8), (1.9), используя условие (3.3), получаем

$$u(r,t)=a_1(t)r+\frac{a_2(t)}{r^2},\quad \sigma_{rr}=f_2(t)-\left(\frac{4}{r^3}-\frac{4}{R_0^3}\right)(\mu a_2+\eta\dot{a}_2)$$

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=-\frac{6}{r^3}(\mu a_2+\eta\dot{a}_2) \tag{3.4}$$

$$(3\lambda+2\mu)a_1+(3\xi+2\eta)\dot{a}_1=f_2(t)+\frac{4}{R_0^3}(\mu a_2+\eta\dot{a}_2).$$

В области $r_0\le r\le r_1$ в материале присутствуют накопленные необратимые деформации, которые в процессе разгрузки не изменяются и определяются выражением из (2.24) при $t=t_1$. Используя зависимости (1.1) в виде $e_{rr}=u'-p_{rr}$, $e_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}-p_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r}+\frac{p_{rr}}{2}$, соотношения (2.8) можно записать в форме

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=\lambda\left(u'+2\frac{u}{r}\right)+2\mu(u'-p_{rr})+\xi\frac{d}{dt}\left(u'+2\frac{u}{r}\right)+2\eta\frac{d}{dt}(u'-p_{rr})\\ \sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=2\mu\left(u'-\frac{u}{r}-\frac{3}{2}p_{rr}\right)+2\eta\frac{d}{dt}\left(u'-\frac{u}{r}-\frac{3}{2}p_{rr}\right).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Условие равновесия (1.5), записанное с использованием соотношений (3.5), приводит к уравнению для определения перемещений в области с накопленными необратимыми деформациями

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\left(u''+2\frac{u'}{r}-2\frac{u}{r^2}\right)+(\xi+2\eta)\frac{d}{dt}\left(u''+2\frac{u'}{r}-2\frac{u}{r^2}\right)=\\ =\frac{12F}{r_0}e^{-d(t_1-t_0)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}-1}-\frac{4k\eta(b-q)}{r_0(\mu+q\eta)}e^{-b(t_1-t_0)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}-1}-\frac{9F(\lambda+2\mu)}{r}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Решением уравнения (3.6) является функция

$$\begin{gathered}u=Fr(1-3\ln r)+q_1r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1}+q_2r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1}+s(r)e^{-at}+x_1(t)+\frac{x_2(t)}{r^2},\\ q_1=\frac{4F\mu q^2}{3d(\lambda+2\mu)(d+q)}e^{-d(t_1-t_0)},\quad a=\frac{\lambda+2\mu}{\xi+2\eta}\\ q_2=\frac{4k\eta q^2}{9b(\lambda+2\mu)(\mu+q\eta)}e^{-b(t_1-t_0)}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из условия совпадения перемещений (2.25) и (3.7) в момент времени $t=t_1$ в (3.7) можно исключить неизвестную функцию $s(r)$. Тогда зависимость (3.7) перепишется в форме

$$\begin{gathered}u=Fr(1-3\ln r)+q_1r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1}+q_2r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1}+\\ +e^{-a(t-t_1)}r_0\left(q_3\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1}-q_2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1}\right)+y_1(t)r+\frac{y_2(t)}{r^2}\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$y_1(t)=e^{-a(t-t_1)}\left[F\left(3\ln r_0-1+e^{-d(t-t_1)}\left(\frac{1}{dt_0}-\frac{q}{d}\right)-\frac{e^{-dt_1}}{dt_0}\right)-x_1(t_1)\right]+x_1(t),$$

$$y_2(t)=e^{-a(t-t_1)}\left[h_1(t_1)-x_2(t_1)\right]+x_2(t),\quad q_3=q_1\frac{3\lambda+2\mu}{2\mu}.$$

Подстановка компонент пластических деформаций и перемещений (3.8) в зависимости для компонент напряжений (3.5) приводит к соотношениям

$$\sigma_{rr}=(3\lambda+2\mu)y_1(t)+(3\xi+2\eta)\dot{y}_1(t)-\frac{4}{r^3}(\mu y_2(t)+\eta\dot{y}_2(t))+H_4\frac{r_1^3}{r^3}+$$

$$+4k\left(\frac{1}{3}-\ln r\right)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(H+H_1e^{-a(t-t_1)}\right)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(H_2+H_3e^{-a(t-t_1)}\right)$$

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(M+M_1e^{-a(t-t_1)}\right)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(M_2+M_3e^{-a(t-t_1)}\right)+ \tag{3.9}$$

$$+2k+M_4\frac{r_1^3}{r^3}-\frac{6}{r^3}(\mu y_2(t)+\eta\dot{y}_2(t))$$

$$H=(3\lambda+2\mu)q_2,\quad H_1=-lq_2,\quad H_2=(3\lambda+2\mu)q_1,\quad H_3=lq_3$$

$$H_4=4\mu F\left[3\ln\frac{r_1}{r_0}-q\left(t_1-t_0-\frac{1}{d}\right)-1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\frac{q^2}{d(d+q)}e^{-d(t_1-t_0)}\right]-$$

$$-\frac{4k\mu}{3(\mu+q\eta)},\quad M=\frac{6b}{q}\mu q_2-\frac{2kq\eta}{\mu+q\eta}e^{-b(t_1-t_0)},\quad M_1=\frac{3b}{2q}lq_2$$

$$M_2=\frac{3d}{2q}\mu q_1,\quad M_3=-\frac{3d}{2q}lq_3,\quad M_4=\frac{3}{2}H_4,\quad l=\frac{4(\lambda\eta-\mu\xi)}{\xi+2\eta}.$$

Используя второе граничное условие из (1.4), получим

$$\sigma_{rr}=4k\ln\frac{r_0}{r}+H_4\left(\frac{r_1^3}{r^3}-\frac{r_1^3}{r_0^3}\right)+\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}-1\right)\left(H+H_1e^{-a(t-t_1)}\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}-1\right)\left(H_2+H_3e^{-a(t-t_1)}\right)-4\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)(\mu y_2+\eta\dot{y}_2) \tag{3.10}$$

$$(3\lambda+2\mu)y_1+(3\xi+2\eta)\dot{y}_1=4k\left(\ln r_0-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{r_0^3}(\mu y_2+\eta\dot{y}_2)-$$

$$-H-H_2-e^{-a(t-t_1)}(H_1+H_3)-H_4\frac{r_1^3}{r_0^3}.$$

Из условия равенства напряжений σ_{rr} (3.4) и (3.10) на границе $r=r_1$ следует уравнение

$$\mu(y_2-\gamma a_2)+\eta(\dot{y}_2-\gamma\dot{a}_2)=\gamma_1\left(f_2(t)-Ne^{-a(t-t_1)}-N_1\right)$$

$$\gamma=\frac{r_0^3(r_1^3-R_0^3)}{R_0^3(r_1^3-r_0^3)},\qquad \gamma_1=\frac{r_0^3r_1^3}{4(r_1^3-r_0^3)} \tag{3.11}$$

$$N = H_1\left(\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}} - 1\right) + H_3\left(\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}} - 1\right)$$

$$N_1 = 4k\ln\frac{r_0}{r_1} + H\left(\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}} - 1\right) + H_2\left(\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}} - 1\right) + H_4\left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^3}\right).$$

Решение уравнения (3.11) получаем в виде

$$y_2(t) = \gamma a_2(t) - \frac{\gamma_1}{\mu}\left(N_1 - f_2(t) - \frac{\alpha p}{b}\right) + \frac{\gamma_1 N}{\eta(a-b)}e^{-a(t-t_1)} + N_2 e^{-b(t-t_1)}$$

$$N_2 = y_2(t_1) - \gamma a_2(t_1) + \frac{\gamma_1}{\mu}\left(N_1 + p - \frac{\alpha p}{b}\right) - \frac{\gamma_1 N}{\eta(a-b)}. \tag{3.12}$$

Функции $y_2(t_1)$ и $a_2(t_1)$, также как и далее функции $y_1(t_1)$ и $a_1(t_1)$ являются известными функциями согласно условию совпадения перемещений в области $r_1 \le r \le R_0$ в момент времени $t = t_1$ и условиям из (3.8). Из третьей зависимости (3.4) и второго соотношения (3.10), используя (3.12), получаем уравнение

$$(3\lambda + 2\mu)\left(y_1 - \gamma\frac{R_0^3}{r_0^3}a_1\right) + (3\xi + 2\eta)\left(\dot{y}_1 - \gamma\frac{R_0^3}{r_0^3}\dot{a}_1\right) = \frac{R_0^3}{r_1^3 - r_0^3}f_2(t) +$$

$$+ N_3 e^{-a(t-t_1)} + N_4, \qquad N_3 = -\frac{r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}N - H_1 - H_3 \tag{3.13}$$

$$N_4 = 4k\left(\ln r_0 - \frac{1}{3}\right) - \frac{r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}N_1 - H - H_2 - H_4\frac{r_1^3}{r_0^3}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y_1(t) = \frac{r_1^3 - R_0^3}{r_1^3 - r_0^3}a_1(t) + \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\left[N_4 + \frac{R_0^3}{r_1^3 - r_0^3}\left(f_2(t) - \frac{ap}{d}\right)\right] +$$

$$+ \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d-a)}e^{-a(t-t_1)} + N_5 e^{-d(t-t_1)} \tag{3.14}$$

$$N_5 = y_1(t_1) - \gamma a_1(t_1)\frac{R_0^3}{r_0^3} - \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\left[N_4 - \frac{R_0^3}{r_1^3 - r_0^3}p\left(1 + \frac{a}{d}\right)\right] -$$

$$- \frac{N_3}{(3\xi + 2\eta)(d-a)}.$$

Из условия равенства перемещений (3.4) и (3.8) при $r = r_1$, используя найденные зависимости (3.12) между функциями $a_2(t)$ и $y_2(t)$ и (3.14) между функциями $a_1(t)$ и $y_1(t)$, функцию $a_1(t)$ можно выразить через $a_2(t)$

$$a_1(t) = -\frac{1}{R_0^3}a_2(t) + \gamma_2\left(N_6 + N_7 f_2(t) + N_5 r_1 e^{-d(t-t_1)} + \frac{N_2}{r_1^2}e^{-b(t-t_1)}\right) \tag{3.15}$$

$$N_6 = 3Fr_1 \ln\frac{r_0}{r_1} + q_1 r_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1} + q_2 r_0\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1} - \frac{\gamma}{\mu r_1^2}\left(N + \frac{\alpha}{b}p\right) -$$

$$-\frac{r_1}{3\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{r_1^3 - r_0^3}\left(\frac{R_0^3 p\alpha}{d} + r_1^3 N + H + H_2 + H_4\frac{r_1^3}{r_0^3}\right)\right)$$

$$N_7 = \frac{r_1}{r_1^3 - r_0^3}\left(\frac{R_0}{3\lambda+2\mu} + \frac{r_0^3}{4\mu}\right), \qquad \gamma_2 = \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1\left(R_0^3 - r_0^3\right)}.$$

Подстановка зависимости (3.15) в третье соотношение (3.4) приводит к дифференциальному уравнению для функции $a_2(t)$

$$3(\lambda+2\mu)a_2 + 3(\xi+2\eta)\dot{a}_2 = -R_0^3\left(N_8 + N_9 f_2(t) + N_{10} r_1 e^{-b(t-t_1)}\right). \tag{3.16}$$

$$N_8 = -\gamma_2\left((3\lambda+2\mu)N_6 + (3\xi+2\eta)\alpha p N_7\right)$$

$$N_9 = 1 - (3\lambda+2\mu)\gamma_2 N_7, \qquad N_{10} = \frac{\gamma_2}{r_1^2} N_2\left(3\lambda+2\mu - b(3\xi+2\eta)\right).$$

Решением уравнения (3.16) является функция

$$a_2(t) = -\frac{R_0^3}{3(\xi+2\eta)}\left[\frac{1}{a}\left(N_8 + N_9 f_2(t)\right) + N_{10}\frac{e^{-b(t-t_1)}}{a-b} - N_9\frac{\alpha p}{a^2}\right] + N_{11}e^{-a(t-t_1)} \tag{3.17}$$

$$N_{11} = a_2(t_1) + \frac{R_0^3}{3(\xi+2\eta)}\left[\frac{1}{a}\left(N_8 - N_9 p\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)\right) + \frac{N_{10}}{a-b}\right].$$

Таким образом, по известной функции $a_2(t)$ из соотношений (3.15), (3.14) и (3.12) находим $a_1(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Значение t_2, при котором выполнится условие (3.2), найдется из (3.9).

С момента времени $t = t_2$, как уже упоминалось, в материале наряду с областями обратимого деформирования $r_1 \le r \le R_0$ и с не изменяющимися необратимыми деформациями $r_2(t) \le r \le r_1$ развивается область пластического течения $r_0 \le r \le r_2(t)$.

В области обратимого деформирования справедливы зависимости (3.4) с текущими значениями $\tilde{a}_1(t)$ и $\tilde{a}_2(t)$ функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$; в области с накопленными пластическими деформациями – соотношения (3.8) для перемещений и (3.9) для напряжений с текущими значениями $\tilde{y}_1(t)$ и $\tilde{y}_2(t)$ функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. При этом

$$\tilde{a}_1(t_2) = a_1(t_2), \quad \tilde{a}_2(t_2) = a_2(t_2), \quad \tilde{y}_1(t_2) = y_1(t_2), \quad \tilde{y}_2(t_2) = y_2(t_2) \tag{3.18}$$

В области повторного пластического течения согласно уравнению равновесия (1.7) и условию (3.2) для компонент напряжений получаем зависимости

$$\sigma_{rr} = -4k\ln\frac{r_0}{r}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k\left(2\ln\frac{r}{r_0} + 1\right). \tag{3.19}$$

Из условия равенства разности компонент напряжений (3.9) и (3.19) на границе $r = r_2(t)$ получим уравнение для определения функции $\tilde{y}_2(t)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(M + M_1 e^{-a(t-t_1)}\right) + \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(M_2 + M_3 e^{-a(t-t_1)}\right) + \\ + 2k + M_4\frac{r_1^3}{r_2^3} - \frac{6}{r^3}\left(\mu\tilde{y}_2(t) + \eta\dot{\tilde{y}}_2(t)\right) = -2k.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Получить аналитическое решение уравнения (3.20) можно, если, как и при нагружении, задать закон движения упругопластической границы $r = r_2(t)$ в форме

$$r_2(t)=r_0e^{\varepsilon(t-t_2)},\quad \varepsilon=const. \tag{3.21}$$

Тогда, учитывая начальные условия (3.18), найдем

$$\begin{gathered}\widetilde{y}_2(t)=\frac{r_1^3}{6\eta}\left(\frac{4k}{3\varepsilon+b}e^{3\varepsilon(t-t_2)}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}e^{b_1(t-t_2)}\left(\frac{M}{b_1+b}+\frac{M_1e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{b}_1}\right)+\frac{M_4}{b}+\right.\\ \left.+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}e^{d_1(t-t_2)}\left(\frac{M_2}{d_1+b}+\frac{M_3e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{d}_1}\right)\right)+F_4e^{-b(t-t_2)}\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$F_4=\widetilde{y}_2(t_2)-\frac{r_1^3}{6\eta}\left(\frac{4k}{3\varepsilon+b}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{M}{b_1+b}+\frac{M_1e^{-a(t_2-t_1)}}{\widetilde{b}_1}\right)+\frac{M_4}{b}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{M_2}{d_1+b}+\frac{M_3e^{-a(t_2-t_1)}}{\widetilde{d}_1}\right)\right),\quad b_1=3\varepsilon\left(\frac{b}{q}+1\right)=3\varepsilon B,\quad d_1=3\varepsilon\left(\frac{d}{q}+1\right)=3\varepsilon D$$

$$\widetilde{b}_1=b_1+b-a,\qquad \widetilde{d}_1=d_1+b-a.$$

Из условия равенства компоненты напряжений σ_{rr} (3.9) и (3.19) получаем уравнение для определения функции $\widetilde{y}_1(t)$

$$(3\lambda+2\mu)\widetilde{y}_1(t)+(3\xi+2\eta)\dot{\widetilde{y}}_1(t)=8k\varepsilon(t-t_2)+4k\left(\frac{1}{3}+\ln r_1+\ln\frac{r_1}{r_0}\right)+$$

$$+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}e^{b_2(t-t_2)}\left(L+L_1e^{-a(t-t_1)}\right)+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}e^{d_2(t-t_2)}\left(L_2+L_3e^{-a(t-t_1)}\right)$$

$$L=\frac{2M}{3}-H,\quad L_1=\frac{2M_1}{3}-H_1,\quad L_2=\frac{2M_2}{3}-H_2,\quad L_3=\frac{2M_3}{3}-H_3$$

$$b_2=3\varepsilon\frac{b}{q},\qquad d_2=3\varepsilon\frac{d}{q}$$

решение которого имеет вид

$$\begin{gathered}\widetilde{y}_1(t)=\frac{e^{b_2(t-t_2)}}{3\xi+2\eta}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{L}{b_2+d}+\frac{L_1e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{b}_2}\right)+\\ +\frac{e^{d_2(t-t_2)}}{3\xi+2\eta}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{L_2}{d_2+d}+\frac{L_3e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{d}_2}\right)+\\ +3F\left(\ln\frac{r_1}{r_0}+\ln r_1+\frac{1}{3}+2\varepsilon(t-t_2)-\frac{2\varepsilon}{d}\right)+F_3e^{-d(t-t_2)}\end{gathered} \tag{3.23}$$

$$F_3=-3F\left(\ln\frac{r_1}{r_0}+\ln r_1+\frac{1}{3}-\frac{2\varepsilon}{d}\right)-\frac{1}{3\xi+2\eta}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{L}{b_2+d}+\frac{L_1e^{-a(t_2-t_1)}}{\widetilde{b}_2}\right)+$$

$$-\frac{1}{3\xi+2\eta}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{L_2}{d_2+d}+\frac{L_3e^{-a(t_2-t_1)}}{\widetilde{d}_2}\right)+\widetilde{y}_1(t_2)$$

$$\widetilde{b}_2=b_2+d-a,\qquad \widetilde{d}_2=d_2+d-a.$$

Условие равенства разностей компонент напряжений (3.4) и (3.9) при $r=r_1$ приводит к уравнению

$$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(M+M_1e^{-a(t-t_1)}\right)+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(M_2+M_3e^{-a(t-t_1)}\right)+$$

$$+2k+M_4=\frac{6}{r_1^3}\left(\mu\widetilde{a}_2(t)+\eta\dot{\widetilde{a}}_2(t)-\mu\widetilde{y}_2(t)-\eta\dot{\widetilde{y}}_2(t)\right).$$

Из данного уравнения найдем функцию $\widetilde{a}_2(t)$:

$$\widetilde{a}_2(t)=\frac{r_1^3}{6\eta}\left(\frac{4k}{3\varepsilon+b}e^{3\varepsilon(t-t_2)}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}e^{b_1(t-t_2)}\left(\frac{M}{b_1+b}+\frac{M_1e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{b}_1}\right)-\frac{2k}{b}-\right.$$

$$-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{M}{b}+\frac{M_1e^{-a(t-t_1)}}{b-a}\right)+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}e^{d_1(t-t_2)}\left(\frac{M_2}{d_1+b}+\frac{M_3e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{d}_1}\right)- \tag{3.24}$$

$$\left.-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{M_2}{b}+\frac{M_3e^{-a(t-t_1)}}{b-a}\right)\right)+F_5e^{-b(t-t_2)}$$

$$F_5=\widetilde{a}_2(t_2)-\frac{r_1^3}{6\eta}\left(\frac{4k}{3\varepsilon+b}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{M}{b_1+b}+\frac{M_1e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{b}_1}\right)-\frac{2k}{b}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\left(\frac{M}{b}+\frac{M_1e^{-a(t-t_1)}}{b-a}\right)+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{M_2}{d_1+b}+\frac{M_3e^{-a(t-t_1)}}{\widetilde{d}_1}\right)-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\left(\frac{M_2}{b}+\frac{M_3e^{-a(t-t_1)}}{b-a}\right)\right).$$

Через известные функции $\widetilde{a}_2(t)$, $\widetilde{y}_1(t)$ и $\widetilde{y}_2(t)$ функция $\widetilde{a}_1(t)$ находится из условия равенства перемещений (3.4) и (3.8) на границе $r=r_1$:

$$\widetilde{a}_1(t)=\widetilde{y}_1(t)+\frac{\widetilde{y}_2(t)-\widetilde{a}_2(t)}{r_1^3}+F(1-3\ln r_1)+q_1\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}+q_2\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}+e^{-a(t-t_1)}\left(q_3\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}-q_2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right).$$

Для области пластического течения $r_0\le r\le r_2(t)$ аналогично зависимостям (2.10), (2.16) и (2.17) получим

$$e_{rr}=-3F\ln\frac{r_0}{r}+\frac{3\lambda}{2\mu}F+\frac{2}{3}z_1(r)e^{-bt}+g_1(r)e^{-dt},\quad e_{\varphi\varphi}=e_{rr}+\frac{k}{\mu}-z_1(r)e^{-bt} \tag{3.25}$$

$$u=3Fr\ln\frac{r_0}{r}+w_1(r)e^{-dt}+\frac{\widetilde{h}(t)}{r^2},\qquad g_1(r)=\frac{1}{3}\left(w_1'(r)+\frac{2w_1(r)}{r}\right),$$

где $z_1(r)$, $\widetilde{h}(t)$, $w_1(r)$ – неизвестные функции. Из условия (2.13) найдем

$$g_1(r_2)=e^{-dt}\left(e^{-a(t-t_1)}\left(q_3D\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}-q_2B\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right)+\tilde{y}_1(t)-\right.$$
$$\left.-F\left(3\ln\frac{r_2}{r_0}+1+3\ln r_2\right)+q_1D\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}+q_2B\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right). \tag{3.26}$$

Учитывая закон движения упругопластической границы $r=r_2(t)$ (3.21) и выражение (3.23) для функции $\tilde{y}_1(t)$, получим

$$g_1(r)=e^{dt_2}\left(e^{-a(t_2-t_1)}\left(q_3D\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}-q_2B\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right)\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d-a}{\varepsilon}}+\right.$$
$$\left.+\left(q_1D\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}+q_2B\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}\right)\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d}{q}}-6F\frac{\varepsilon}{d}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d}{\varepsilon}}\right)+$$
$$+\frac{e^{dt_2}}{3\xi+2\eta}\left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d+b_2}{\varepsilon}}\left(\frac{L}{b_2+d}+\frac{L_1e^{-a(t_2-t_1)}}{\tilde{b}_2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d+d_2}{\varepsilon}}\left(\frac{L_2}{d_2+d}+\frac{L_3e^{-a(t_2-t_1)}}{\tilde{d}_2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}}\right)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\right)+F_5e^{dt_2}. \tag{3.27}$$

Из (3.25) и (3.27) определим функцию $w_1(r)$ с точностью до неизвестной постоянной $\tilde{h}_0$

$$w_1(r)=3re^{dt_2}\left(e^{-a(t_2-t_1)}\left(\frac{q_3D\varepsilon\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}}{3D\varepsilon+d-a}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+\frac{d-a}{\varepsilon}}-\frac{q_2B\varepsilon\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}}{3B\varepsilon+d-a}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+\frac{d-a}{\varepsilon}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{q_3D\varepsilon\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}}{3D\varepsilon+d}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+\frac{d}{\varepsilon}}-\frac{q_2B\varepsilon\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}}{3B\varepsilon+d}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+\frac{d}{\varepsilon}}-\frac{6F\varepsilon^2}{d(d+3\varepsilon)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d}{a}}+\frac{F_5}{3}\right)+$$
$$\frac{3re^{dt_2}}{3\xi+2\eta}\left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d+b_2}{\varepsilon}}\left(\frac{L\varepsilon}{(b_2+d)(b_2+d+3\varepsilon)}+\frac{L_1\varepsilon e^{-a(t_2-t_1)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}}}{\tilde{b}_2\left(\tilde{b}_2+3\varepsilon\right)}\right)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}}+\right.$$

$$+\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{d+d_2}{\varepsilon}}\left(\frac{L_2\varepsilon}{(d_2+d)(d_2+d+3\varepsilon)}+\frac{L_3\varepsilon e^{-a(t_2-t_1)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\frac{a}{\varepsilon}}}{\widetilde{d}_2\left(\widetilde{d}_2+3\varepsilon\right)}\right)\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}}\Bigg)+\frac{\widetilde{h}_0}{r^2}.$$

Неизвестную функцию $\widetilde{h}_1(t)=\widetilde{h}(t)+\widetilde{h}_0e^{-dt}$ определим из условия непрерывности перемещений в области с накопленными пластическими деформациями $r_2(t)\le r\le r_1$ (3.8) и в области пластического течения $r_0\le r\le r_2(t)$ (3.25) на границе $r_2(t)$

$$\widetilde{h}_1(t)=r_2^3\left(F\left(1-3\ln r_2-3\ln\frac{r_2}{r_0}\right)+q_1\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1}+q_2\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1}+\widetilde{y}_1(t)+\frac{\widetilde{y}_2(t)}{r_2^3}+\right.$$

$$\left.+e^{-a(t-t_1)}\left(q_3\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3d}{q}+1}-q_2\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{\frac{3b}{q}+1}\right)-\frac{w_1(r_2)}{r_2}+\frac{\widetilde{h}_0}{r_2^3}\right).$$

Неизвестная функция $z_1(r)$ находится из условия непрерывности компонент обратимых деформаций (3.25) в области $r_0\le r\le r_2(t)$ и (2.10) в области $r_2(t)\le r\le r_1$ при $r=r_2(t)$, учитывая закон движения (3.21).

Перемещения и компоненты напряжений в конечный момент разгрузки $(f_2(\tau_k)=0)$ $\tau_k=6692.8$ иллюстрируют рисунок 1 (штриховая линия) и рисунок 3 соответственно.

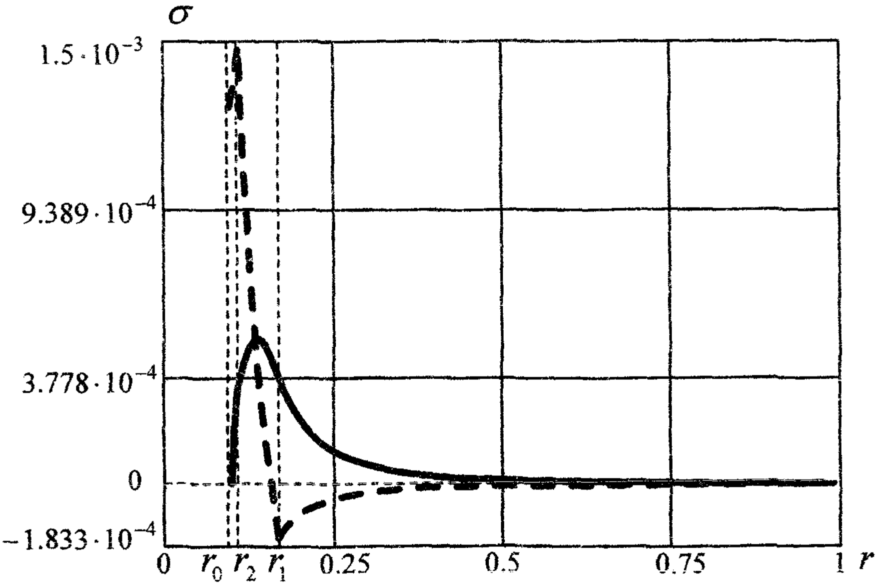

Рисунок 3

Отметим, что в рамках рассмотренной модели практически остаются незаметными изменения в размерах полости и в уровне остаточных напряжений в процессах ползучести и релаксации напряжений, последующих после снятия внешней нагрузки (при $t\to\infty$). Экспериментально отмечаемые эффекты заметного изменения остаточных деформаций и напряжений могут быть промоделированы только в рамках нелинейной теории [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А.А. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды / А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, М.В. Полоник // ДАН. – 2000. – Т. 375, № 6. – С. 767–769.
2. Буренин, А.А. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде / А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк // Проблемы механики неупругих деформаций. Сборник статей, посвященный 70-летию Д.Д. Ивлева. – М.: Физматлит. – 2001. – С. 74–94.
3. Буренин, А.А. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды / А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, М.В. Полоник // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 2. – С. 316–325.
4. Буренин, А.А. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала / А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, Е.В. Мурашкин // Прикл. механика и техн. физика. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 110–119.
5. Ковтанюк, Л.В.Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде / Л.В. Ковтанюк, Е.В. Мурашкин // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 1, вып. 2. – С. 94–104.
6. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
7. Ивлев, Д.Д. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев // Успехи механики деформируемых сред (к 100-летию со дня рождения академика Б.Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.
8. Горелов, В.И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов / В.И. Горелов // Прикл. механика и техн. физика. – 1984. – № 5. – С. 157–158.
9. Бажин, А.А. Моделирование процесса релаксации остаточных напряжений в металлоизделиях под действием интенсивных эксплуатационных нагрузок / А.А. Бажин, Е.В. Мурашкин // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: сб. ст. – Вып. 3, ч. 1. – Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2009. – С. 98–106.

Поступила 01.11.11