

1) Белорусский национальный технический университет, Минск

2) Филиал ГОУВПО «Московский энергетический институт  
(Технический университет)», Смоленск

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ ЗВЕНЬЕВ ЭКЗОСКЕЛЕТА ПРИ ДВИЖЕНИИ

Чигарев А.В.<sup>1)</sup>, Борисов А.В.<sup>2)</sup>

В работе рассмотрена модель синхронизации движений ног человека в виде стержневой многозвенной системы. Показано, что подобное явление действительно имеет место, и оно частично объясняет стабильность установившейся походки человека.

**Ключевые слова:** экзоскелет, синхронизация движений, опорно-двигательный аппарат, управление движением, устойчивость.

При решении задач управления движением экзоскелета и синтеза его устойчивых периодических походок, возник вопрос об исследовании возможной синхронизации движения нижних конечностей при ходьбе. Это необходимо для того, чтобы упростить систему управления движением при устоявшейся походке человека в экзоскелете, и, следовательно, снизить энергозатраты вычислительной системы экзоскелета на управление.

Синхронизация это свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного существования, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас крайне слабые взаимные связи [1]. Математически явление синхронизации следует из свойства нелинейных дифференциальных уравнений определенного вида допускать устойчивые периодические решения.

Рассмотрим модель нижних конечностей человека и корпус для исследования вопроса о возможной синхронизации ног при ходьбе. Здесь возникает слабая связь между нижними конечностями, совершающими колебательные периодические решения и их точкой подвеса, связанной с корпусом, на которую они воздействуют и которая осуществляет некоторую передачу воздействия от одной ноги к другой и обратно. Сами ноги непосредственно между собой не связаны.

В первом приближении рассмотрим модель синхронизации однозвенных нижних конечностей. В такой постановке эта задача похожа на задачу о синхронизации маятников, подвешенных на общем основании. Впервые наблюдал это явление и описал Х. Гюйгенс [4]. Постановка и решение данной задачи о синхронизации маятниковых часов, закрепленных на общем легком подвесе приводятся в работе В. Блехмана [1].

Модифицируем данную задачу применительно к нашему случаю. Пусть два маятника с сосредоточенными массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены в общей точке на основании массой  $m_0$  (рисунок 1).

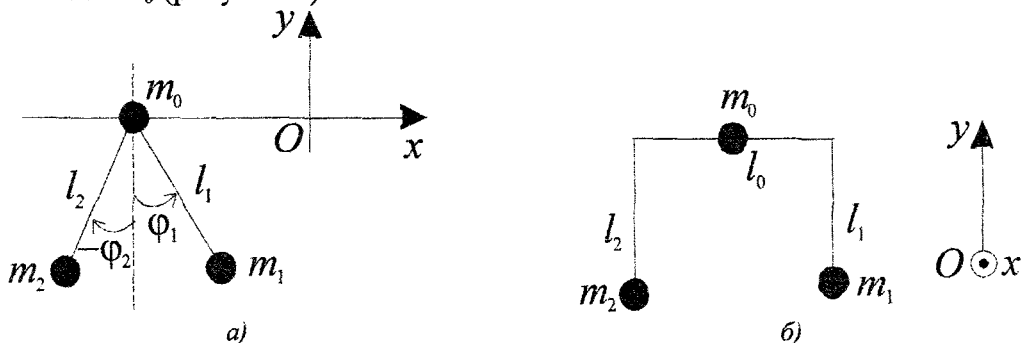


Рисунок 1 – Два звена близких друг к другу по параметрам, совершающих колебания в противофазе  
(а – вид в профиль; б – вид в анфас)

В модели маятники колеблются в разных плоскостях, параллельных между собой, но они связаны между собой с помощью стержня. Если рассматривать движение в плоскости, проходящей через центр масс, то эта связь не влияет на движение в плоскости, а только синхронизирует.

На рисунке 1 угол отсчитывается от вертикали против часовой стрелки. Длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$ . Каждое звено имеет одну степень свободы. Это углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые примем за обобщенные координаты. Основание имеет также одну степень свободы для поступательного движения в горизонтальном направлении – координату  $x$ , которую также примем за обобщенную координату. Предполагаем, что все обобщенные координаты являются функциями времени:  $x = x(t)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ .

Координаты сосредоточенных масс в выбранной системе координат записываются так:

$$\begin{aligned} C_0 &= (-x; 0), & C_1 &= (-x + l_1 \sin \varphi_1; -l_1 \cos \varphi_1), \\ C_2 &= (-x + l_2 \sin \varphi_2; -l_2 \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда кинетическая энергия данной системы тел имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \left( (m_1 + m_2 + m_0) \dot{x}^2 + l_1^2 m_1 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 m_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) - \dot{x} (l_1 m_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \quad (2)$$

Потенциальная энергия складывается из энергии силы тяжести и энергии упругости основания:

$$\Pi = -g(l_1 m_1 \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \cos \varphi_2) + \frac{1}{2} c_x x^2, \quad (3)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $c_x$  – жесткость упругой системы.

В системе действуют вращающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  в точках подвеса звеньев, которые, аналогично работе [3] будем задавать в виде:

$$M_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1, \quad M_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2. \quad (4)$$

Имеются и силы сопротивления движению  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , которые будем аппроксимировать следуя работе [1], следующим образом:

$$K_0 = -k_0 \dot{x}, \quad K_1 = -k_1 \dot{\varphi}_1, \quad K_2 = -k_2 \dot{\varphi}_2. \quad (5)$$

где  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  – коэффициенты вязкого сопротивления колебаниям основания и звеньев соответственно.

Используя формализм Лагранжа, получаем уравнения движения для рассматриваемой модели.

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_0) \ddot{x} - \ddot{\varphi}_1 l_1 m_1 \cos \varphi_1 - \ddot{\varphi}_2 l_2 m_2 \cos \varphi_2 + \\ + \dot{\varphi}_1^2 l_1 m_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 m_2 \sin \varphi_2 + c_x x = -k_0 \dot{x}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \dot{x} l_1 m_1 \cos \varphi_1 + l_1 m_1 g \sin \varphi_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1 - k_1 \dot{\varphi}_1, \quad (7)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - \dot{x} l_2 m_2 \cos \varphi_2 + l_2 m_2 g \sin \varphi_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2 - k_2 \dot{\varphi}_2. \quad (8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений даже в такой простейшей постановке является существенно нелинейной и ее аналитическое решение получить не представляется возможным [7]. Также на практике весьма затруднительно ее исследование на устойчивость. Поэтому, проведем ее численное решение в СКМ Mathematica<sup>1</sup> [5].

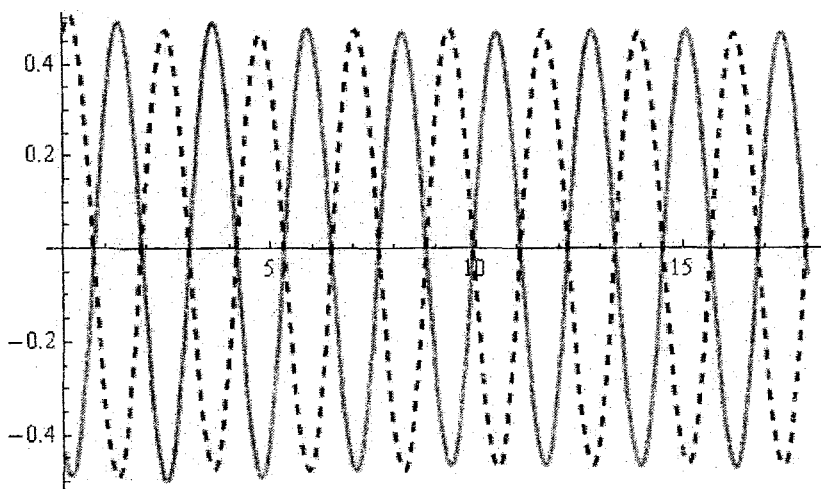
Для численного решения используем значения соответствующих звеньев для человека, определенные нами ранее [2, 6]. Масса звена предполагается равной массе

<sup>1</sup> Лицензионная версия данной программы приобретена за счет средств Гранта Президента Российской Федерации, номер МК-2524.2008.1

всей ноги, т.е. сумме масс стопы, голени и бедра, длина сумме длин указанных звеньев. Масса точки крепления ног – это масса корпуса и рук.

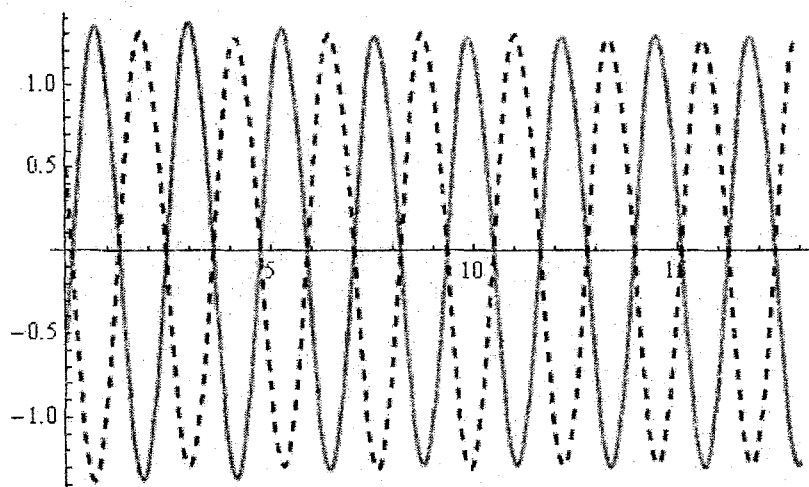
Синхронизация имеет место при совместных колебаниях в противофазе, что реализуется при ходьбе человека (рисунок 2 а, б). При этом взяты, в согласии с теорией синхронизации, незначительно отличающиеся начальные условия для звеньев.

This is  $\varphi_1 = \varphi_1[t]$  and  $\varphi_2 = \varphi_2[t]$



a)

This is  $\varphi_1' = \varphi_1'[t]$  and  $\varphi_2' = \varphi_2'[t]$



b)

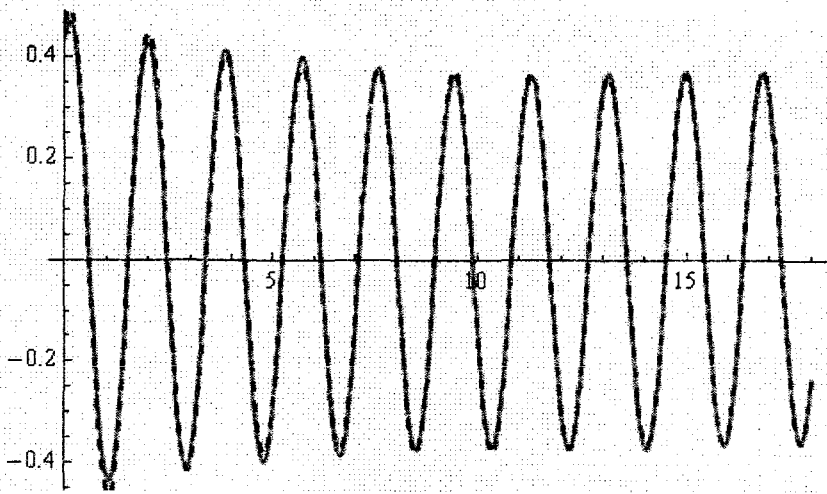
Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 2 – Зависимости угла поворота звена а) и угловой скорости б) от времени при колебаниях в противофазе

Как видно по графику, колебания практически сразу синхронизируются и далее происходят согласованно.

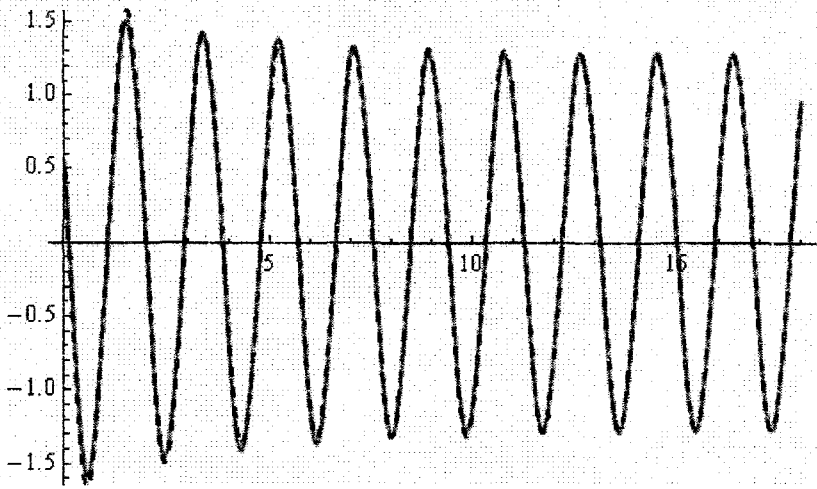
В одной фазе визуальную синхронизацию оценить легче (рисунок 3), но при этом подобные движения нельзя реализовать при ходьбе.

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_2=\varphi_2[t]$



a)

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$



b)

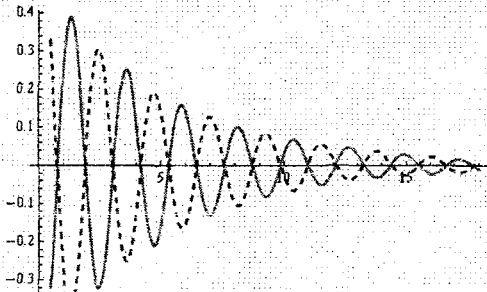
Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 3 – Зависимости угла поворота звена (a) и угловой скорости (b) от времени при колебаниях в одной фазе

Как видно по рисункам, после начала движения имеются небольшие различия в угловой координате и угловой скорости, связанные с заданием различных начальных условий. Затем, с течением времени, наступает практически полная синхронизация, которая может длиться неограниченное время.

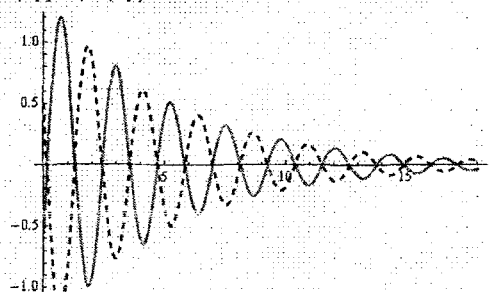
Рассмотрим случай, когда вынуждающие воздействия отсутствуют. В этом случае имеются затухающие колебания обоих звеньев, но при этом сохраняется эффект синхронизации (рисунок 4).

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_2=\varphi_2[t]$



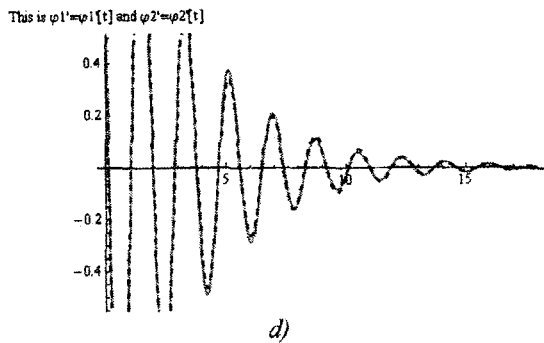
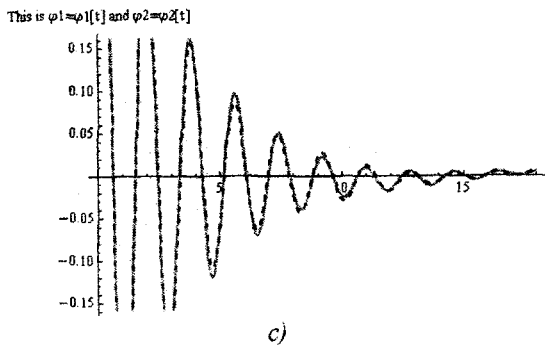
a)

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$



b)

Рисунок 4 – Зависимости угла поворота звена (a), (c) и угловой скорости (b), (d) от времени при затухающих колебаниях: для колебаний в противофазе (a), (b), и в одной фазе (c), (d) (начало)

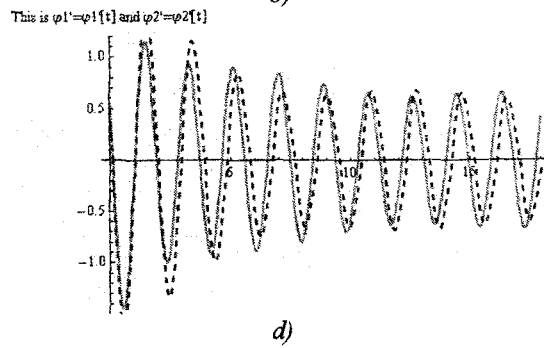
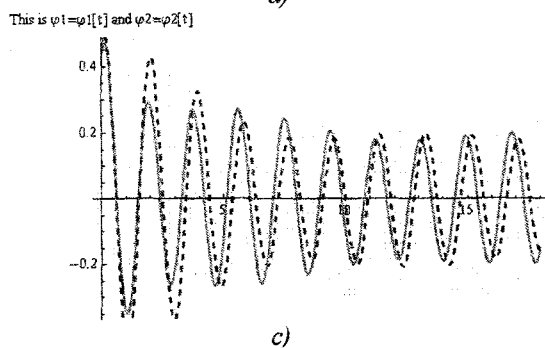
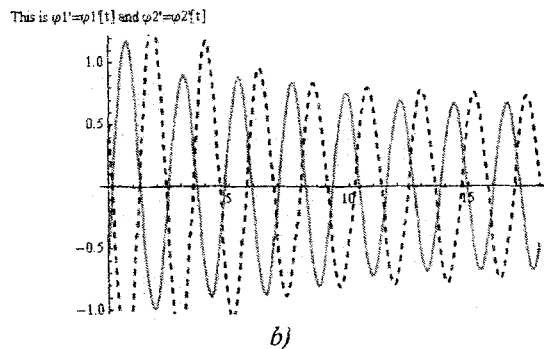
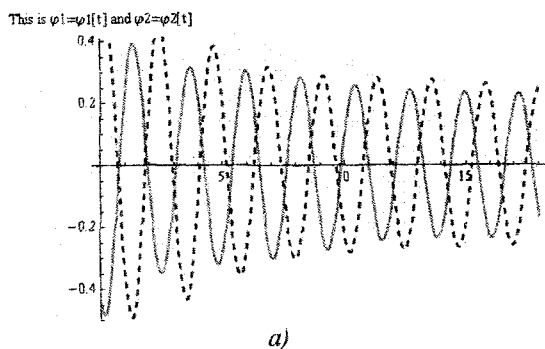


Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 4 – Зависимости угла поворота звена (а), (с) и угловой скорости (б), (д) от времени при затухающих колебаниях: для колебаний в противофазе (а), (б), и в одной фазе (с), (д) (окончание)

Здесь также имеет место синхронизация колебаний во время затухания движений ног.

Рассмотрим случай, когда вынуждающая сила действует только на одно звено (рисунок 5), т.е. второе звено является пассивным элементом.



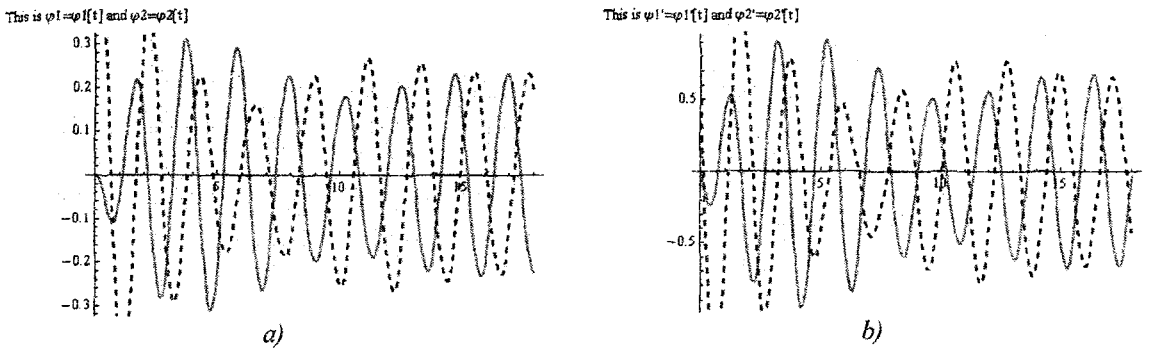
Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 5 – Зависимости угла поворота звена (а), (с) и угловой скорости (б), (д) от времени при колебаниях с одним вынуждающим моментом, приложенным к первому звену для колебаний в противофазе (а), (б), и в одной фазе (с), (д)

При колебаниях в противофазе и в фазе наблюдается эффект поддержания колебаний и второго звена, к которому не подводится внешняя энергия, а диссипация энергии присутствует. Однако для поддержания устойчивых незатухающих колебаний (рисунок 5) в этом случае необходимо прикладывать к первому маятнику десятикратный момент силы, в сравнении с тем, который был приложен к двум маятникам (см. рисунок 2). В случае приложения меньших усилий колебания являются затухающими, хоть и не так быстро, как при отсутствии воздействия в предыдущем случае. Однако, при этом, частично разрушается полностью синхронное движение звеньев. Это очень похоже на импульсное управление ходьбой человека, когда после

толчка переносная нога движется по инерции. Видимо, здесь имеет также место и явление синхронизации движений ног человека при ходьбе.

Если второе звено в начальный момент покоится и к нему не прикладывается вынуждающее воздействие, то в нем все равно возбуждаются колебания, за счет колебаний первого звена (рисунок 6).



Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 6 – Зависимости угла поворота звена (а), (с) и угловой скорости (b), (d) от времени при колебаниях с одним вынуждающим моментом, приложенным к первому звену для колебаний с покоящимся вторым звеном

Оказывается, что возбуждаемые во втором звене колебания находятся в большей степени в противофазе друг к другу, явление синхронизации при этом также слабо выражено.

Для ходьбы человека в экзоскелете необходима модель с двухзвенными нижними конечностями, состоящими из бедра и голени каждая. Рассмотрим модель, соответствующую двум двухзвенным ногам человека (рисунок 7). Подобной модели ранее в литературе нами встречено не было.

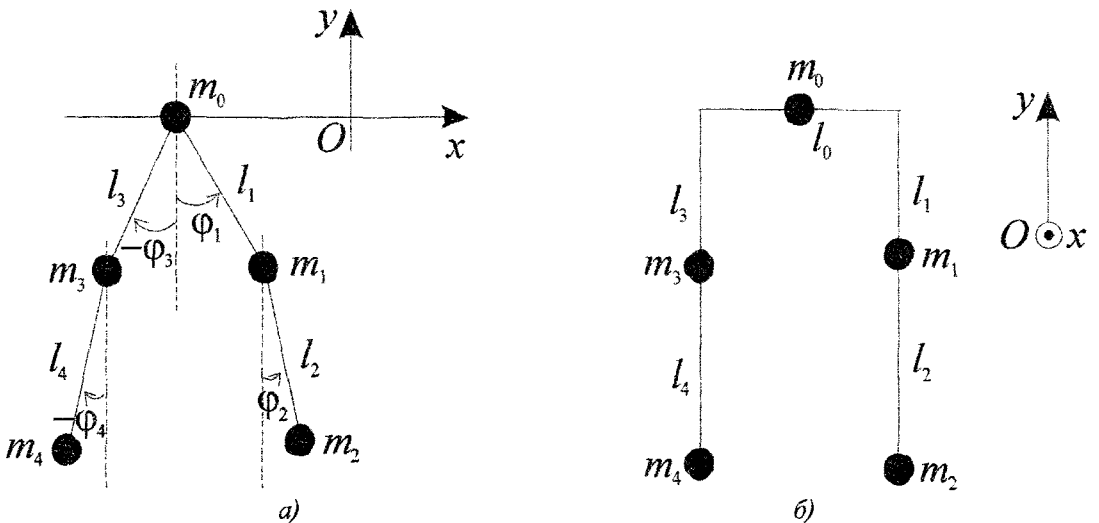


Рисунок 7 – Два двухзвенных звена близких друг к другу по параметрам, совершающих колебания в противофазе (а – вид в профиль; б – вид в анфас)

Составляя уравнения движения описанным выше способом и следуя обозначениям (см. рисунок 7), получаем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих движения в данной системе тел.

$$\begin{aligned}
 (m_0 + 2(m_1 + m_2))\ddot{x} - \ddot{\varphi}_1 l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_1 - \ddot{\varphi}_2 l_2 m_2 \cos \varphi_2 - \\
 - \ddot{\varphi}_3 l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_3 - \ddot{\varphi}_4 l_2 m_2 \cos \varphi_4 + \\
 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 m_2 \sin \varphi_2 +
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dot{\varphi}_3^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_4^2 l_2 m_2 \sin \varphi_4 + c_r \dot{x} = -k_0 \dot{x}, \\
 & (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \ddot{x} l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\
 & + l_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + l_1 (m_1 + m_2) g \sin \varphi_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1 - k_1 \dot{\varphi}_1,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x} l_2 m_2 \cos \varphi_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \\
 & - l_1 l_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + l_2 m_2 g \sin \varphi_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2 - k_2 \dot{\varphi}_2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

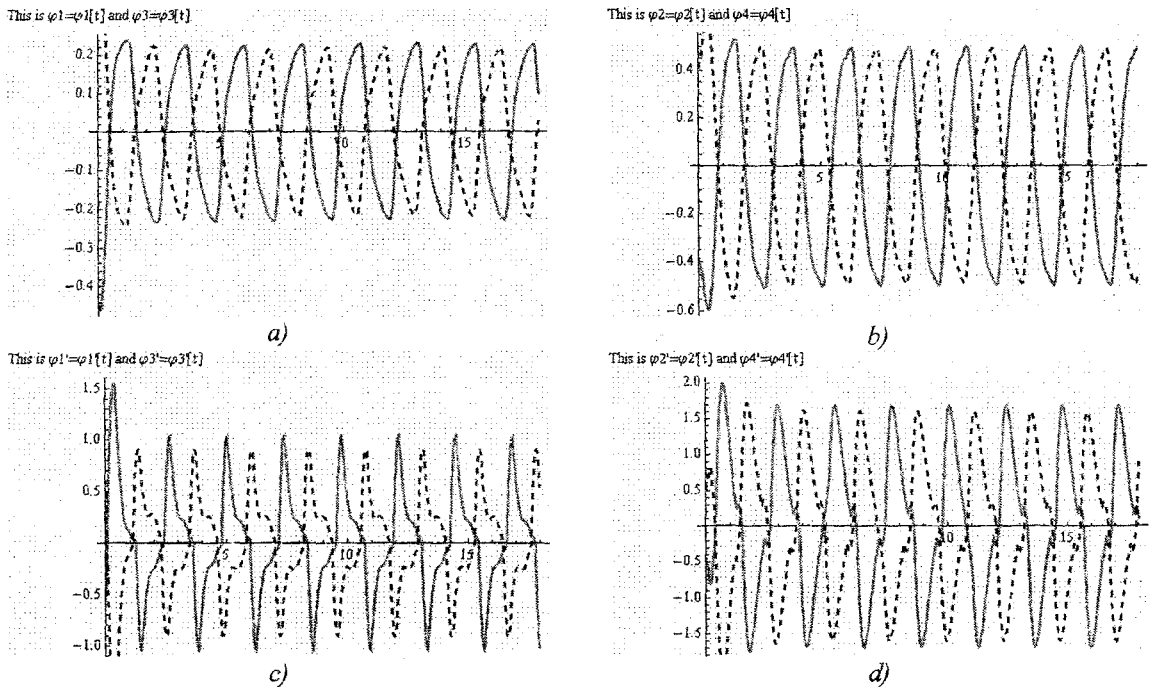
$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x} l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_3 + l_2 m_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + \\
 & + l_2 m_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 + l_1 (m_1 + m_2) g \sin \varphi_3 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_3 - k_1 \dot{\varphi}_3,
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_4 - \ddot{x} l_2 m_2 \cos \varphi_4 + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_3 - \\
 & - l_1 l_2 m_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_3^2 + l_2 m_2 g \sin \varphi_4 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_4 - k_2 \dot{\varphi}_4.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Полученная система дифференциальных уравнений также является существенно нелинейной и ее аналитическое решение получить не представляется возможным. Поэтому, проведем ее численное решение в СКМ Mathematica.

Для численного решения используем значения соответствующих звеньев для испытуемого человека, определенные ранее. Масса звена предполагается равной массе соответствующих звеньев ноги. Масса точки подвеса – это масса корпуса и рук.

Синхронизация многозвенной конечности имеет место при совместных колебаниях в противофазе, что реализуется при ходьбе человека (рисунок 8 а, б). При этом взяты в согласии с теорией синхронизации незначительно отличающиеся начальные условия.

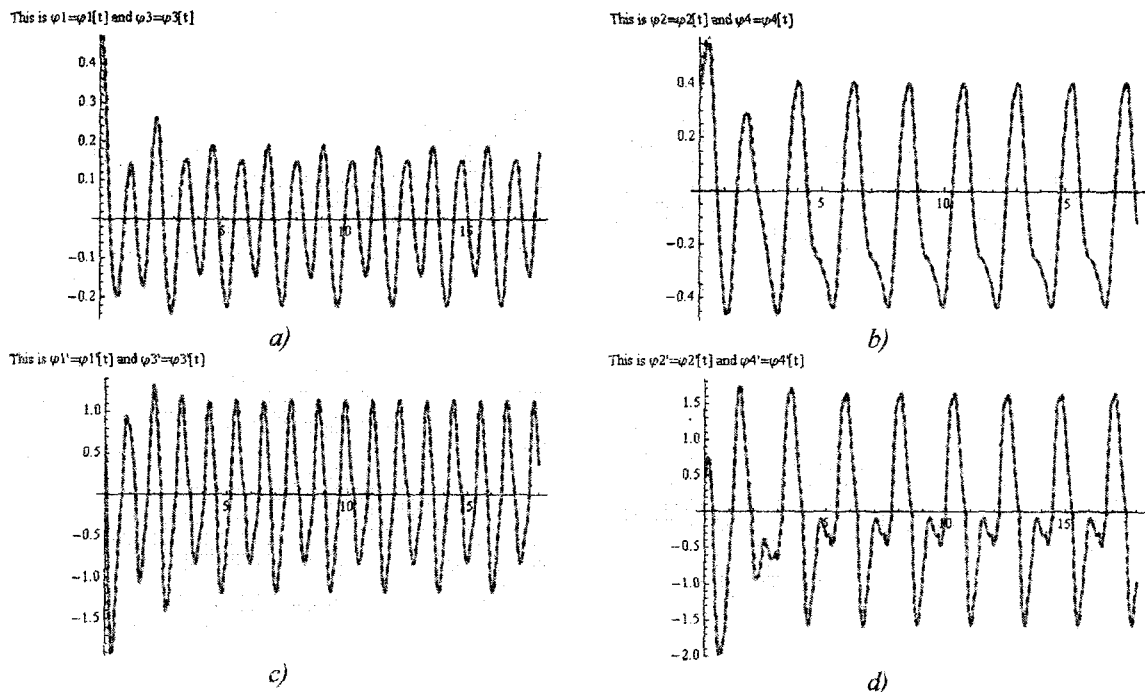


Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 8 – Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (б) от времени при колебаниях в противофазе

Как видно по графику, колебания практически сразу синхронизируются и далее происходят согласованно. Однако, вид колебаний изменяется, в сравнении с однозвенной моделью (см. рисунок 2). Особенно различия проявляются для угловых скоростей.

В одной фазе визуальную синхронизацию оценить легче (рисунок 9), но при этом подобные движения нельзя реализовать при ходьбе.

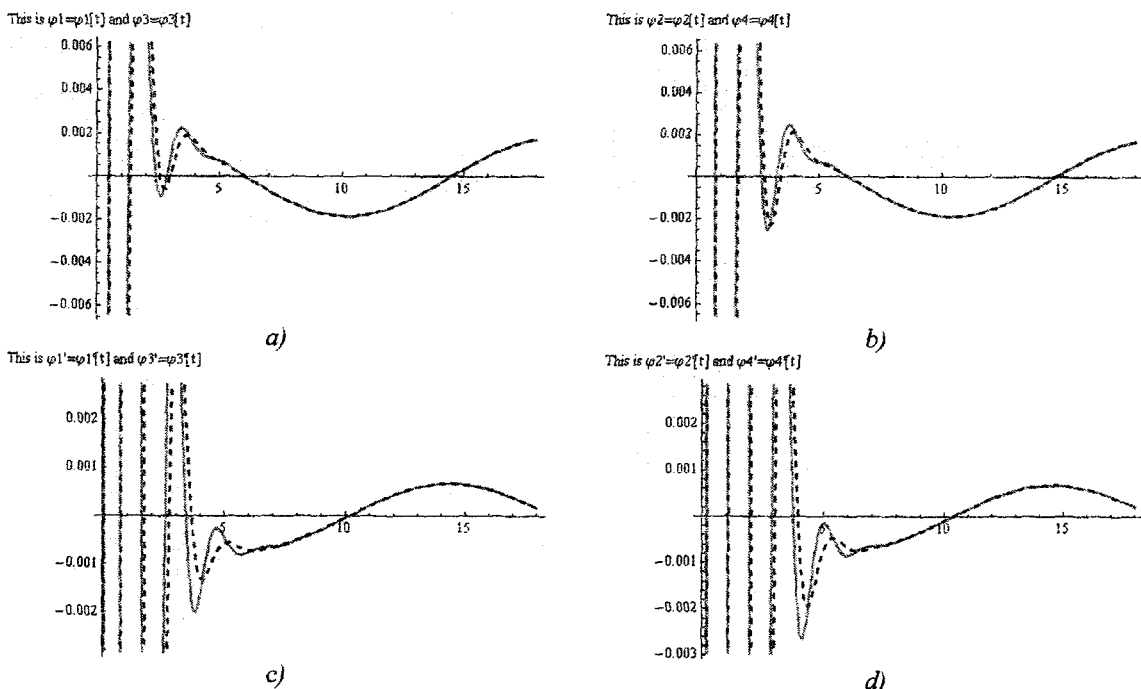


Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 9 – Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (b) от времени при колебаниях в одной фазе

Как видно по рисункам, с течением времени наступает практически полная синхронизация колебаний.

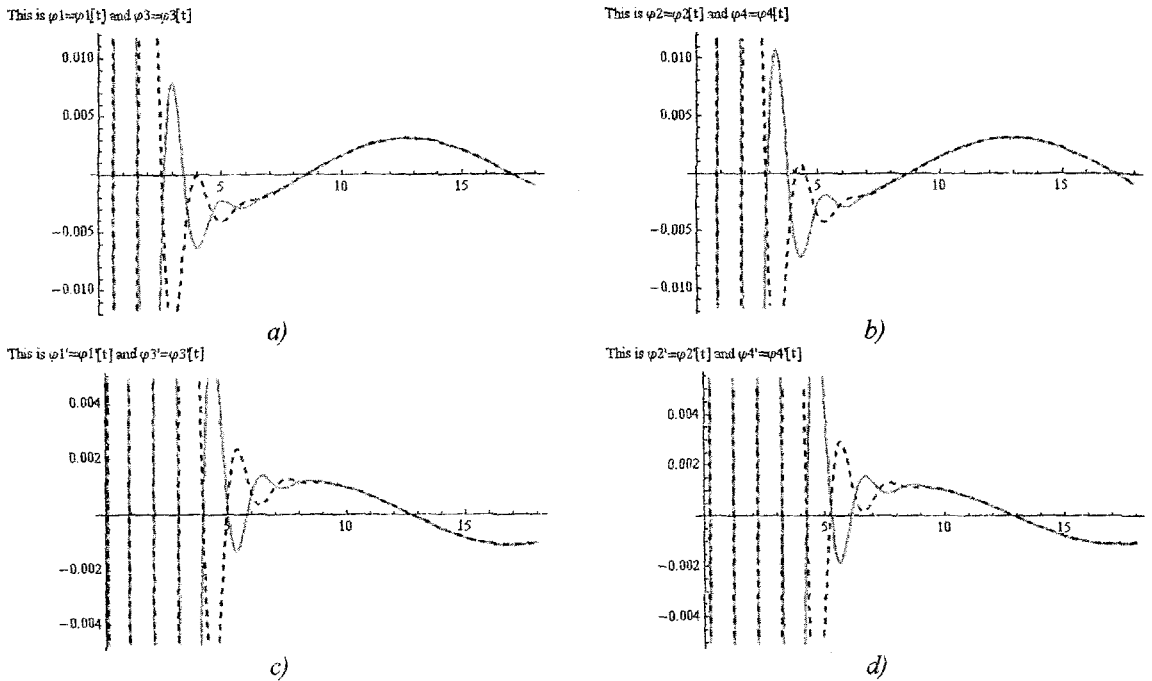
Рассмотрим случай, когда вынуждающие воздействия отсутствуют. В этом случае имеются затухающие колебания всех звеньев, и сохраняется эффект синхронизации (рисунок 10).



Пунктиром обозначены зависимости для первого звена

Рисунок 10 – Зависимости угла поворота звена (а), (b) и угловой скорости (c), (d) от времени при затухающих колебаниях для колебаний в одной фазе





Пунктиром обозначены зависимости для первого звена  
 Рисунок 11 – Зависимости угла поворота звена а), б) и угловой скорости с), д) от времени при затухающих колебаниях для колебаний в противофазе

Здесь также имеет место синхронизация колебаний во время их затухания.

Таким образом, исследовано явление синхронизации нижних конечностей человека при ходьбе. Показано, что синхронизация имеет место, причем в различных случаях, как от устойчивой походки с постоянным подведением энергии к системе, так и в случае затухающих колебаний. Установлен эффект возбуждения и поддержания колебаний покоящейся ноги человека, при движении только одной нижней конечности и, после некоторого времени, установления устойчивых колебаний обеих ног.

Полученные результаты частично объясняют стабильность установившейся походки человека. Они могут быть применены к созданию экзоскелетов и антропоморфных роботов со сниженным энергопотреблением и более простой системой управления в случае установившегося движения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман, И.И. Синхронизация динамических систем / И.И. Блехман. – М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит-ы, 1971. – 894 с.
2. Борисов, А.В. Методы определения длин конечностей и звеньев человека с расчетом инерционных характеристик А.В. Борисов // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ 5-6 января 2004 года. – Т. 4. Педагогика и методика. – Москва-Луганск: Изд-во МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ; Смоленск: Инга, 2004. – С. 77–90.
3. Бутенин, Н.В. К теории принудительной синхронизации / Н.В. Бутенин // Сб. «Памяти А.А. Андропова». – М.: Изд-во АН СССР, 1955.
4. Гюйгенс, Х. Три мемуара по механике: пер. с латин. / Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1951.
5. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 6.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев, А.И. Кравчук, А.С. Кравчук. – Минск: Технопринт, 2008. – 136 с.
6. Чигарев, А.В. Биомеханика: учебник / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
7. Чигарев, А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 425 с.