

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Мармыш Д.Е.

Solution of the problems of contact stresses determination for an arbitrary distribution of the normal load, as well as for any form of contact area in analytical form is generally not possible. Therefore such problems are usually solved by various types of numerical methods as for example boundary element method.

Numerical and analytical calculation of contact stresses using boundary element method is presented. Partition of the contact area had a form of linear elements loaded by uniformly distributed normal and tangential forces.

Задача о сосредоточенной силе, приложенной к поверхности упругой изотропной полуплоскости, известна как задача Фламана [1]. Решение задачи для упругой полуплоскости $z \leq 0$ для некоторого распределения поверхностных усилий может быть получено с помощью принципа суперпозиции (рисунок 1).

Компоненты напряженного состояния в точке $A(x, z)$ определяются путем умножения нагрузки $p(x)$ или $q(x)$ на функцию влияния $G_{ij}^{(n)}$ или $G_{ij}^{(t)}$ для нормального или касательного нагружения соответственно и интегрирования по отрезку $[a; b]$ распределения нагрузки.

$$\sigma_{ij}(x, z) = \int_a^b p(s) \cdot G_{ij}^{(n)}(x-s, z) ds + \int_a^b q(s) \cdot G_{ij}^{(t)}(x-s, z) ds, \quad (1)$$

где $i, j = x, z$

Для произвольного распределения на границе усилий $p(x)$ и $q(x)$ интегралы типа (1) не имеют аналитических выражений. Однако функции $p(x)$ и $q(x)$ могут быть аппроксимированными равномерными распределениями вдоль отрезков. Для подобных кусочно-непрерывных функций интегралы типа (1) уже могут быть вычислены. Таким образом, возникает задача определения напряженно-деформированного состояния при действии равномерно распределенных нагрузок.

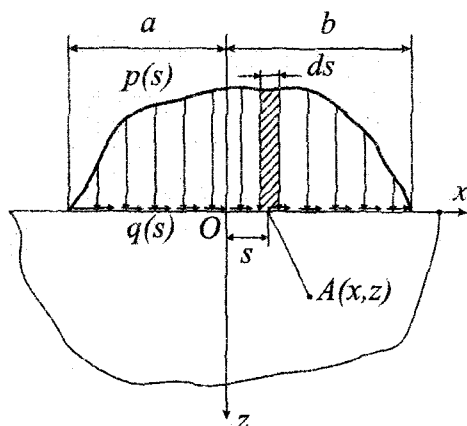


Рисунок 1 – Распределенная нагрузка

Рассмотрим случай, когда полоса $a \leq x \leq b$ нагружена только равномерным нормальным давлением интенсивности p_0 , тогда интегрируя выражения (1) для

$p(s) = p_0 = const$ и $q(s) = 0$, получим следующие фундаментальные решения компонент напряжений от равномерного нагружения отрезка (см. рисунок 2):

$$G_{xx}^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{z(b-x)}{c_b} - \frac{z(a-x)}{c_a} - \operatorname{arctg} \frac{b-x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{z} \right],$$

$$G_{zz}^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{z(a-x)}{c_a} - \frac{z(b-x)}{c_b} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{b-x}{z} \right], \quad (2)$$

$$G_{xz}^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{c_a} - \frac{1}{c_b} \right].$$

где $c_a = (a-x)^2 + z^2$, $c_b = (b-x)^2 + z^2$.

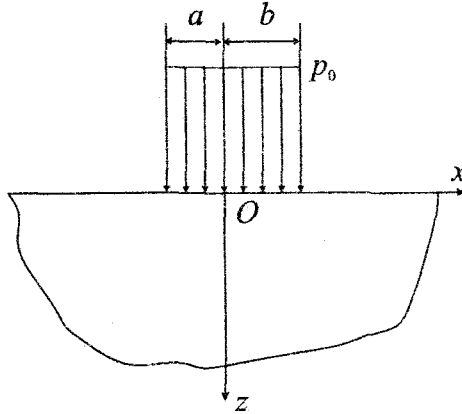


Рисунок 2 – Постоянные нормальные усилия вдоль полосы конечной ширины

В случае нагружения полуплоскости только равномерно распределенными касательными усилиями $q(x) = q_0 = const$, выражения для функций влияния будут иметь следующий вид:

$$G_{xx}^{(r)} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{z^2}{c_b} - \frac{z^2}{c_a} + \ln \frac{c_b}{c_a} \right],$$

$$G_{zz}^{(r)} = -\frac{z^2}{\pi} \left[\frac{1}{c_a} - \frac{1}{c_b} \right], \quad (3)$$

$$G_{xz}^{(r)} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{z(b-x)}{c_b} - \frac{z(a-x)}{c_a} - \operatorname{arctg} \frac{b-x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{z} \right].$$

Следует отметить то, что решения задачи Фламана являются сингулярными, в то время как решения задачи для равномерно распределенной нагрузки представляют собой непрерывные ограниченные функции во всей полуплоскости $z \leq 0$.

Рассмотрим задачу определения напряженного состояния полуплоскости при действии на нее нормальных $p(x)$ и касательные $q(x)$ усилий распределенных на отрезке $[-a; a]$ по эллиптическому закону

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad q(x) = q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (4)$$

Непосредственное интегрирование выражений (1) для распределений вида (4) в аналитическом виде затруднено, поэтому задачу будем решать следующим образом: разобьем отрезок $-a \leq x \leq a$ на несколько граничных элементов и, будем считать, что на i -ом отрезке действует равномерная нагрузка интенсивности p_i и q_i . По

формулам (2)–(3) можно найти функции влияния для каждого отдельно взятого отрезка. Далее умножая найденные функции влияния на интенсивности p_i и q_i и суммируя результаты по каждому отрезку, получим искомые компоненты напряжений [2].

Некоторые результаты реализации данного алгоритма представлены на рисунке 3. На рисунке хорошо видны характерные для эллиптического нагружения распределения напряжений в окрестности приложения усилий (разбиение отрезка $-a \leq x \leq a$ проводилось на 20 граничных элементов и $p_0 = q_0$).

Описанный выше метод построения решения достаточно прост и эффективен для оценки напряженного состояния полуплоскости. Однако большое количество реальных объектов нельзя рассматривать как бесконечные тела. Для выпуклых тел конечных размеров можно также использовать решения задачи Фламана (решения Кельвина для тел произвольной формы), однако в данном случае при построении решения для выполнения граничных условий необходимо добавить этап определения соответствующих фиктивных нагрузок на границе [2].

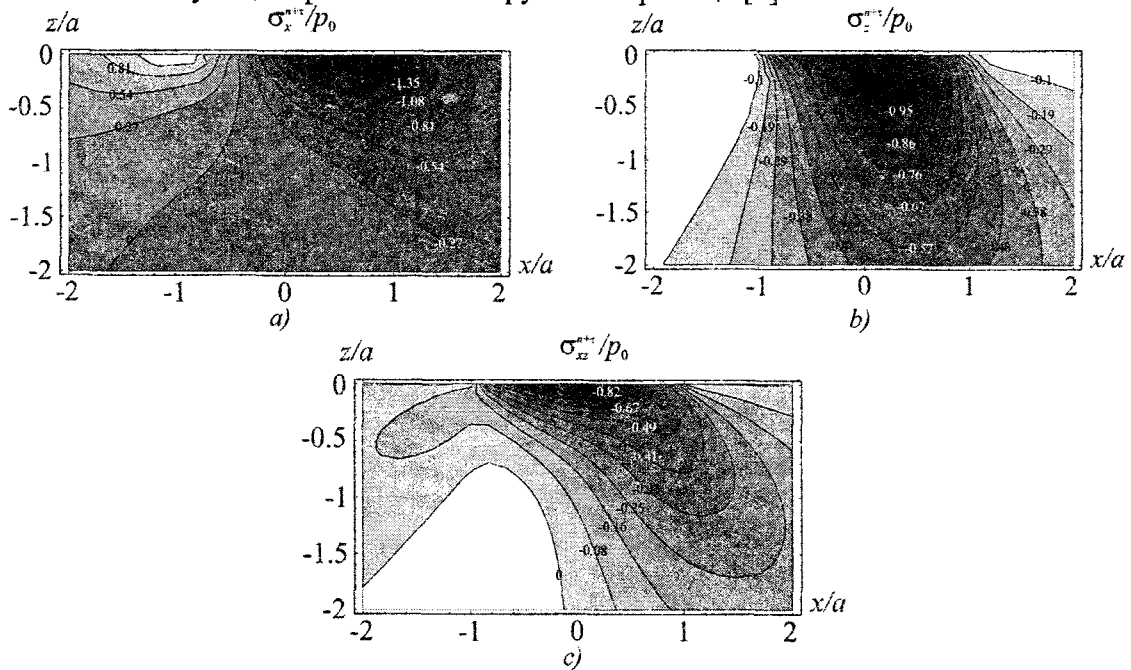


Рисунок 3 – Графики распределения нормальных напряжений а) $\sigma_{xx}^{(n+\tau)}$ и б) $\sigma_{zz}^{(n+\tau)}$ и в) касательного напряжения $\sigma_{xz}^{(n+\tau)}$ от совместного действия нагрузок

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется полоса шириной h , верхняя граница полосы нагружена нормальной распределенной нагрузкой $p(x)$, а нижняя граница свободна (см. рис. 4). Этой задаче соответствуют следующие граничные условия [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{z=0} = \sigma_{xy}|_{z=-h} = 0, \\ \sigma_{zz}|_{z=0} = \begin{cases} -p(x), & x \in [a; b] \\ 0 & x \notin [a; b] \end{cases} \\ \sigma_{zz}|_{z=-h} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

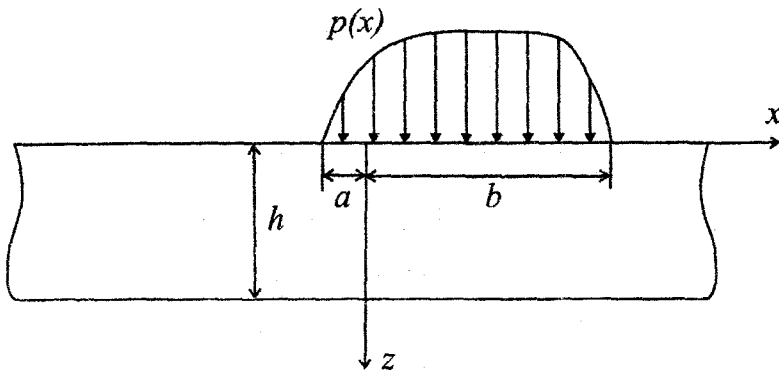


Рисунок 4 – Полоса с распределенной по верхней границе нагрузкой

Задача была решена для равномерного нагружения интенсивности p_0 и эллиптического нагружения вида (4) распределенный по отрезку $[-a; a]$.

Решение задачи состоит из следующих двух основных этапов:

1) на первом этапе определяем напряжения на глубине $z = -h$ из решения задачи для полуплоскости;

2) на втором этапе принимаем в качестве фиктивных граничных условий $\bar{\sigma}$ найденные напряжения и решаем заново задачу уже при $\sigma_{zz}|_{z=-h} = -\bar{\sigma}$.

На рисунке 5 показаны картины распределений нормального напряжения σ_{zz} в полосе высотой $h/a = 1$, а на рисунке 6 – распределение σ_{zz} вдоль оси z .

Как видно из рисунка 6, распределение нормального напряжения σ_{zz} вдоль оси z имеет характер близкий к линейному, как в случае равномерного нагружения, так и в случае эллиптического нагружения вида (4).

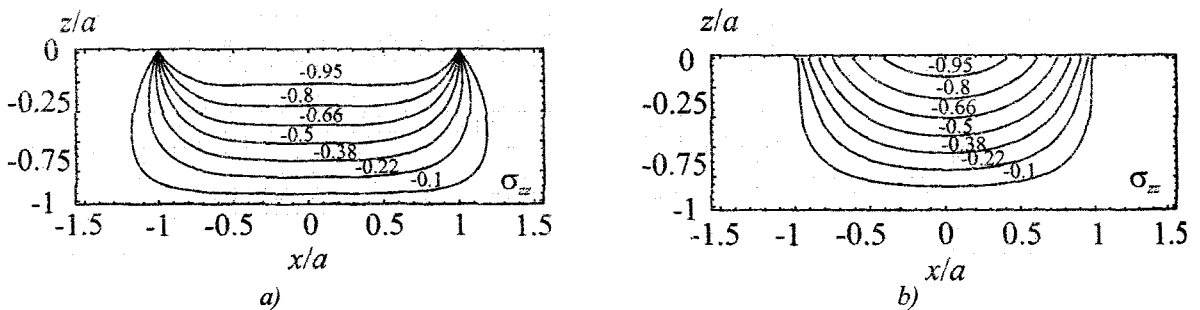


Рисунок 5 – Распределение нормального напряжения σ_{zz} при действии
а) равномерного нагружения; б) эллиптического нагружения

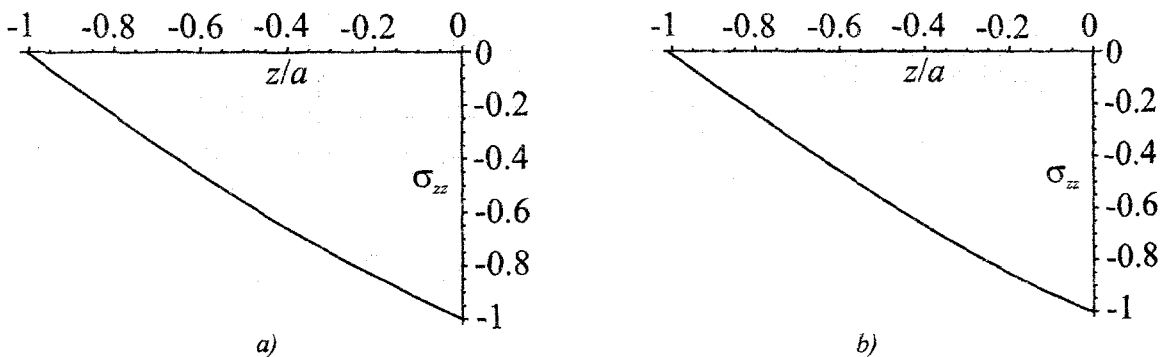


Рисунок 6 – Распределение напряжения σ_{zz} вдоль оси z
при а) равномерном нагружении; б) эллиптическом нагружении

Таким образом, предложен подход, основанный на методе граничных элементов, для численно-аналитического определения напряженно-деформированного состояния твердого тела при любом распределении нормальных и касательных усилий.

Эффективность предложенного подхода по сравнению с применением численного интегрирования хорошо видна при получении компонент напряженно-деформированного состояния в области приложения нагрузки, где численное интегрирование производить достаточно сложно из-за наличия особенностей в подынтегральном выражении. Также метод является более эффективным и по сравнению с конечно-элементным методом, т.к. размерность задачи снижается на единицу.

Данный подход применим для определения напряженного состояния при любых распределениях нормальных и касательных усилий

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
2. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

Поступила 31.10.11