УДК 51 (07.07)

Нестандартные приемы решения уравнений

Ковалёнок Н.В., Пинчукова С.П.
Белорусский национальный технический университет

Суть метода симметризации – использование подстановки, которая симметризует отдельные пары слагаемых, делает их „похожими”, отличающиеся лишь знаком. Обычно это удаётся, если имеется центр симметрии характерных для данного уравнения значений x.

Пример 1. Решить уравнение $(x+1)^4+(x+3)^4=2$.
Решение: в нашем случае нули слагаемых $(x+1)^4$ и $(x+3)^4$., т.е. - 1 и -3, симметричны относительно числа -2. Тогда выгодна подстановка x = t – 2. Её применение, приведёт к взаимному уничтожению слагаемых с нечётными степенями $(t-1)^4+(t+1)^4=2$.
Используя формулу $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+\ +b^4$, получим $2t^4+12t^2=0$. Отсюда заключаем, что t = 0 и, следовательно, x = -2 – единственный корень данного уравнения.

Метод корней квадратных уравнений заключается в преобразовании этого уравнения в квадратное относительно новой переменной.

Пример 2. Решить уравнение $x^4-2\sqrt{3}x^2-x+3-\sqrt{3}=0$.
Решение. Пусть $t=\sqrt{3}$., тогда $t^2=3$. Следовательно, данное уравнение после замены $\sqrt{3}$ на t, а чисел 3 – на t^2 можно представить, расположив его члены по убыванию степени t следующим образом
$t^2-(2x^2+1)t+(x^4-x)=0$.
Дискриминант равен $(2x+1)^2$; $t_1=x^2+x+1$, $t_2=x^2-x$.
Осталось решить квадратные уравнения:
$x^2+x+1=\sqrt{3}$, $x^2-x=\sqrt{3}$.

Метод геометрической прогрессии – является приёмом, основанным на применении формулы:

$$a+aq+aq^2+\cdots.+aq^{n-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}\ (q\neq 1)\ (*).$$

Пример 3. Решить уравнение $8x^3+4x^2+2a+1=0$.

Решение: Пусть a = 1, q = 2x. В силу (*) данное уравнение равносильно
$\frac{16x^4-1}{2x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}16x^4-1=0\\ 2x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(4x^2-1)(4x^2+1)=0\\ x\neq 0{,}5\end{cases} \Rightarrow x=-0{,}5.$$