

академика С.П. Королёва. Диплом 3 степени.

3. Декабрь 2016. Центр Подготовки Космонавтов имени Ю.А. Гагарина. Звездный городок. Всероссийский конкурс научно-технических и художественных проектов по космонавтике «Звёздная эстафета». Диплом 2 степени.

УДК 51 (07.07)

Тригонометрические уравнения со сложным аргументом

Кленовская И.С., Якимович В.С.

Белорусский национальный технический университет

Очень часто на выпускных экзаменах или на ЦТ появляются тригонометрические уравнения, в которых для нахождения решения требуется отбор корней. К таким уравнениям относятся тригонометрические уравнения, в которых сложный аргумент - сложная функция (иногда тригонометрическая) от x .

Пример. Решить уравнение: $\cos(4 \sin x) = \cos(4 \cos x)$.

Решение. Воспользуемся формулой разности косинусов. Заметим, что данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = \frac{1}{2} \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi n, n \in \mathbb{Z}$ имеет решения тогда и только тогда,

когда выполняется неравенство $-1 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \pi n \leq 1$ или $-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq n \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Последнему неравенству удовлетворяет лишь одно целое значение $n=0$.

Аналогично, решая уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4} \pi k, k \in \mathbb{Z}$, получим $k=0$.

Таким образом, получаем совокупность уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{2}, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{2}, t \in \mathbb{Z}$.