УДК 539.8

Белорусский национальный технический университет, Минск

ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОСТИ С УЧЕТОМ ЕЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Куриленко А.В.

The article deals with stress-strain state bones with respect to initial curvature.

При совершенствовании методов лечения переломов шейки тазобедренного сустава и разработке новых эндопротезов возникает необходимость исследования напряженного состояния элементов тазобедренного сустава, прочности и долговечности имплантатов, реакции системы "имплантат-кость" при различных видах нагрузки.

В данной работе в первом приближении решим задачу об изгибе кости, которая имеет первоначальную малую кривизну и находится в плоскости ее искривления. Нас интересует влияние первоначальной кривизны кости на ее напряженно-деформированное состояние (НДС).

Выделим бесконечно малый элемент дуги кости (рисунок 1) [1].

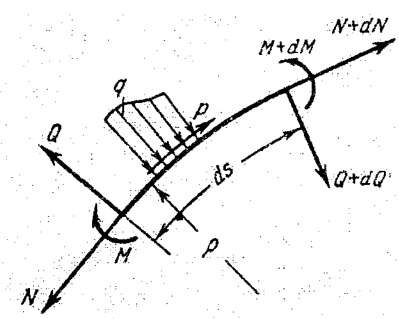

Рисунок 1 – Элемент дуги кости

Составим условия его равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial s} - \dfrac{Q}{\rho} + p = 0; \\ \dfrac{\partial Q}{\partial s} + \dfrac{N}{\rho} + q = 0; \\ \dfrac{dM}{ds} - Q = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь N и Q – нормальная и поперечная сила; M – изгибающий момент; p и q – тангенциальная и радиальная нагрузка; ρ – радиус кривизны; s – координата, отсчитываемая вдоль дуги кости. В нашем случае полагаем $p = q = 0$.

Обозначим через v – перемещение сечения стержня вдоль радиуса кривизны, по направлению к центру кривизны, а через u – перемещение по касательной в направлении положительного отсчета s. Эти направления будем считать связанными с недеформированным стержнем и первоначальным положением сечения.

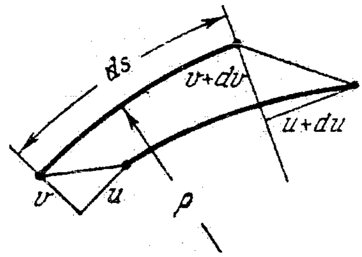

Рисунок 2

Из рисунка 2 определим деформацию удлинения оси кости:

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} - \frac{v}{\rho}, \tag{2}$$

и угол поворота элемента по отношения к первоначальному его положению:

$$\theta = \frac{dv}{ds} + \frac{u}{\rho}. \tag{3}$$

Отсюда можно получить величину дополнительного искривления оси кости χ:

$$\chi = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{u}{\rho}\right). \tag{4}$$

Так как в упругом стержне малой кривизны внутренние усилия зависят от деформаций, также как и в упругом прямом стержне:

$$N = \varepsilon EF, \; M = -\chi EJ, \tag{5}$$

где F – площадь, а J – момент инерции сечения кости, E – модуль упругости.
Таким образом,

$$\begin{gathered} N = EF\left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{\rho}\right), \\ M = -EJ\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{\rho}\right), \\ Q = -\frac{d}{ds}\left[EJ\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{\rho}\right)\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя N и Q в первые два уравнения системы (1) и преобразовав с учетом $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d}{d\varphi}$, получим:

$$\begin{cases} u'' - v' + \frac{k^2}{4}\left(v''' + u''\right) = 0, \\ -\frac{k^2}{4}\left(v'''' + u'''\right) + \left(u' - v\right) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $k = \frac{r}{R}$, $\rho = R$ – радиус кривизны кости, r – радиус сечения кости; $u = u(\varphi)$, $v = v(\varphi)$, штрихом обозначены производные по φ.

Взяв производную по φ второго уравнения системы (7) и вычитая полученное значение из первого уравнения системы (7), получим соотношение $w'' + w = 0$, где обозначено $v''' + u'' = w$. Решив это дифференциальное уравнение, получим:

$$w = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi. \tag{8}$$

Дважды проинтегрировав выражение $(v'+u)''=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi$ перепишем исходную систему (7) в виде:

$$\begin{aligned} v'+u &= -C_1\sin\varphi - C_2\cos\varphi + C_5\varphi + C_6 \\ u'-v &= \frac{k^2}{4}\left(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Взяв производную по φ второго уравнения системы (9) и прибавляя полученное значение к первому уравнению системы (9), сведем ее к виду:

$$u''+u=-C_1\left(\frac{k^2}{4}+1\right)\sin\varphi - C_2\left(\frac{k^2}{4}+1\right)\cos\varphi + C_5\varphi + C_6. \tag{10}$$

Решив (10) и подставив полученный результат в (9) окончательно находим:

$$\begin{aligned} u &= \frac{C_1}{2}\left(\frac{k^2}{4}+1\right)\varphi\cos\varphi - \frac{C_2}{2}\left(\frac{k^2}{4}+1\right)\varphi\sin\varphi + C_3\cos\varphi + C_4\sin\varphi + C_5\varphi + C_6 \\ v &= \frac{C_1}{2}\left(\frac{k^2}{4}+1\right)(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - \frac{C_2}{2}\left(\frac{k^2}{4}+1\right)(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) - \\ &- \frac{k^2}{4}\left(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi\right) - C_3\sin\varphi + C_4\cos\varphi + C_5. \end{aligned} \tag{11}$$

Входящие в решение (11) произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 C_5, C_6 определяются из граничных условий.

Граничные условия задачи имеют вид:

$$u\big|_{\varphi=-\gamma} = v\big|_{\varphi=-\gamma} = 0\,;\ \left(v''+u'\right)\big|_{\varphi=\pm\gamma} = 0\,; \tag{12}$$

$$\left(u'-v\right)\big|_{\varphi=\gamma} = \frac{GR\cos\gamma}{EA}\,;\ \left(u\sin\varphi - v\cos\varphi\right)\big|_{\varphi=\gamma} = 0$$

Выпишем второе соотношение из граничных условий (12)

$$\begin{cases} -C_1\cos\gamma + C_2\sin\gamma + C_5 = 0 \\ -C_1\cos\gamma - C_2\sin\gamma + C_5 = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2 = 0,\quad C_5 = C_1\cos\gamma\ . \tag{13}$$

Третье соотношение из (12) приобретает вид: $\frac{\mathrm{k}^2}{4}C_1 = -\frac{GR}{EA}$, отсюда определяем:

$$C_1 = -\frac{4GR}{k^2EA},\quad C_2 = 0,\quad C_5 = -\frac{2GR\cos\gamma}{k^2EA}. \tag{14}$$

Из выражения (6), подставляя в них найденные значения коэффициентов C_1, C_2, C_5 получим формулы для определения внутренних усилий в кости:

$$N = -G\cos\varphi,\quad M = GR(\cos\varphi - \cos\gamma),\quad Q = G\sin\varphi \tag{15}$$

Определяя затем из оставшихся граничных условий коэффициенты C_3, C_4, C_6, и подставив их в (11) можно найти перемещения u и v.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын, А.Ф. Устойчивость равновесия упругих систем / А.Ф. Ржаницын. – М., 1955. – 475 с.

Поступила 21.11.11