УДК 539.3
УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОЙ ПАНЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Косых Э.Г.

Рассмотрена цилиндрическая упругая панель переменной жесткости в потоке воздуха скорости *V*. Исследована статическая неустойчивость панели решением краевой задачи, сводящейся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Введение. Предложенные в [1] матричные функции:

$$Com(E,x) = I + \sum_{1}^{n}(-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{\sum k_i} x^m \sum_{\sum k_i = m} \prod^{n} E_{k_i} a_{ni},$$

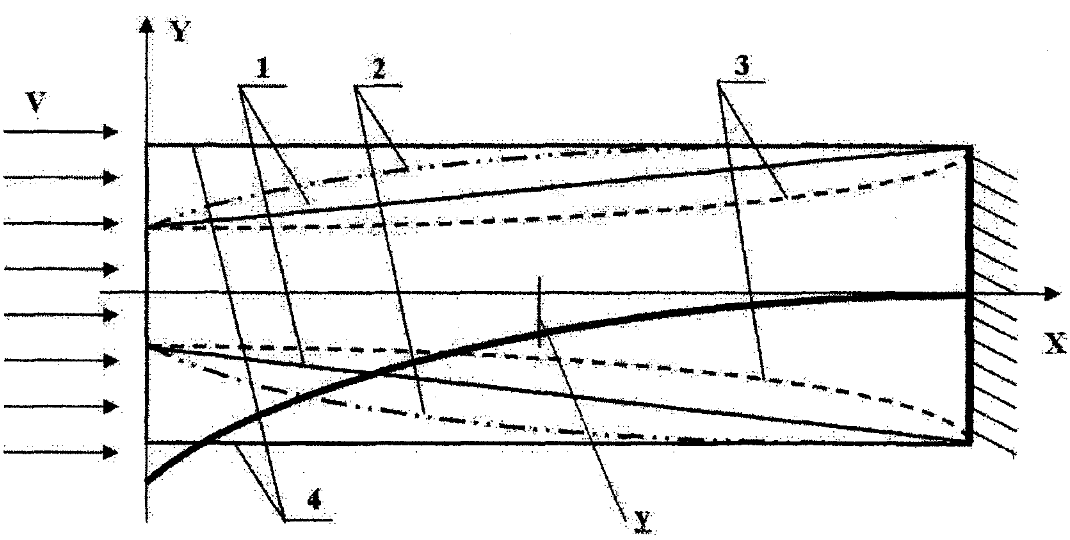
$$Sim(E,x) = xI + \sum_{1}^{n}(-1)^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{\sum k_i} x^m \sum_{\sum k_i = m} \prod^{n} E_{k_i} a_{ni}.$$

позволяют получать замкнутые аналитические решения краевых задач, сводящихся к системам линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, являясь их фундаментальными решениями. Величины E, E_{k_i} – это матрица системы дифференциальных уравнений и соответствующие матричные коэффициенты при ее разложении в степенной ряд. Скалярные множители a_{ni}, b_{ni} определены формулами:

$$a_{ni} = \{k_i!(2n-1+\sum k_j)(2n+\sum k_j)\}^{-1},$$

$$b_{ni} = \{k_i!(2n+\sum k_j)(2n+1+\sum k_j)\}^{-1}.$$

Постановка задачи. Рассмотрим упругую пластинку, жестко опертую вдоль одной из длинных кромок и свободную вдоль другой. Поток воздуха направлен параллельно невозмущенной срединной поверхности пластинки, как это изображено на рисунке 1.



Цифры отмечают панели разных профилей: 1, 2, 3 – переменной жесткости, 4 – постоянной. При этом 1 – профиль линейно изменяющейся жесткости, 2 – выпуклая форма профиля, 3 – вогнутая
Рисунок 1 – Схема нагружения. Стрелками изображен поток, набегающий со скоростью V на панель

Прежде всего, отметим, что в работе ставилась цель получить решение для критической скорости потока при учете переменной жесткости панели. То есть, если для панели постоянных размеров цилиндрическая жесткость $D_0 = const$, например, для профиля под номером 4 рисунка 1, то для профилей 2 или 3 можно принять в модельной задаче:

$$D(x) = D_0 \times \frac{1+\delta+\lambda}{1-\delta(x^{2n}-1)+\lambda(x-1)^{2n}} \tag{1}$$

Полагая различные значения параметров δ, λ получим конкретные профили панели. Так, если $\delta = 0$, $\lambda \neq 0$, то получим профиль 2 на рисунке 1. Если положить $\delta \neq 0$, $\lambda = 0$, то получим профиль 3. Профиль «близкий» к 1 можно получить подбором комбинации этих параметров. Следует обратить внимание еще на одну проблему, связанную с давлением потока на искривленную поверхность пластинки. В задаче для панели постоянной жесткости давление потока рассматривается на срединной поверхности. На рисунке 1 это сплошная кривая, отмеченная значением перемещения – литера y, и в соответствии, например, с «поршневой теорией» это давление пропорционально местному углу атаки и скорости потока. В общем случае переменной жесткости необходимо различать угол атаки на внешней поверхности панели от угла на срединной поверхности. В обсуждаемой задаче принята классическая модель. Тогда проявление аэроупругой неустойчивости, которую можно назвать дивергенцией, связано с существованием ненулевого решения краевой задачи:

$$\begin{gathered} (D(x)\,Y'')'' + sY' = 0 \\ Y'' = 0;\quad Y''' = 0 \text{ при } x = 0 \\ Y = 0;\quad Y' = 0 \text{ при } x = 1 \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь штрихи и их количество указывают на дифференцирование и порядок производных, постоянная $s = KV/D_0$ представляет собой величину, зависящую от скорости потока V, постоянной K, а также параметров пластинки D_0. Далее остановимся подробнее на случае, когда $D = const$.

Решение краевой задачи. В матричной форме дифференциальное уравнение представим системой двух уравнений второго порядка

$$\begin{gathered} Y_1'' - Y_2 = 0 \\ Y_2'' + sY_1' = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

или в векторной форме

$$(Y)'' + B \times (Y)' + A \times (Y) = 0;$$

здесь матрицы А и В имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим инвариант преобразования

$$E = (V') \times \left(A - \frac{1}{2}B' - \frac{1}{4}B^2 \right) \times (V).$$

Здесь $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}sx & 1 \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}sx & 1 \end{pmatrix}$ прямая и обратная матрицы преобразования, то есть $V \times V' = 1$.

Итак,

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно

$$E = V' \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times V,$$

то есть

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}s \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4}s^2 & 0 \end{pmatrix} X^2.$$

Решение системы уравнений представим в матричных функциях

$$(Y) = Com(E,x) \times (C) + Sim(E,x) \times (D). \qquad (3)$$

Здесь векторы–столбцы (C), (D) имеют компоненты: C_1, C_2, D_1, D_2 соответственно. Это решение преобразованного уравнения, то есть начального уравнения относительно «физической» функции – в данном случае функции поперечного перемещения при изгибе. Будем помечать ее индексом «0» – Y_0. Пусть для функции Y_0 поставлена граничная задача: Y_0 – суть решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$Y_0''(0) = Y_0'''(0) = 0; \qquad Y_0(1) = Y_0'(1) = 0.$$

Полученное нами решение – это решение преобразованного уравнения с помощью замены переменной $Y_0 = V \times Y$, где V – суть решение уравнения

$$2V' + BV = 0.$$

Соответственно необходимо преобразовать граничные условия, тогда

$$(Y) = (V')(Y_0), \qquad (Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}sx & 1 \end{pmatrix} (Y_0),$$

$$(Y)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}s & 0 \end{pmatrix} (Y_0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}sx & 1 \end{pmatrix} (Y_0)'.$$

Граничные условия для полученного решения примут вид

$$Y''(0) = Y_0''(0); \; Y'''(0) = \tfrac{1}{2}sY_0(0) + Y_0'''(0);$$

$$Y(1) = Y_0(1); \qquad Y'(1) = Y_0'(1).$$

То есть

$$Y''(0) = 0; \qquad Y'''(0) = \tfrac{1}{2}sY_0(0); \; Y(1) = Y'(1) = 0.$$

Определимся с постоянными интегрирования решения, используя граничные условия. Для этого представим решение (3) в явной матричной форме

$$(Y) = \begin{pmatrix} 1 + C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 1 + C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & x + S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Здесь функции $C_{ij}(x)$, $S_{ij}(x)$ – скалярные компоненты матричных функций Com и Sim соответственно, равные нулю вместе со своими производными при $x = 0$.

$$C_{ij}(0) = S_{ij}(0) = C'_{ij}(0) = S'_{ij}(0) = 0.$$

Матричное решение представим в скалярном виде четырех уравнений

$$Y_1(x) = (1 + C_{11})C_1 + C_{12}C_2 + (x + S_{11})D_1 + S_{12}D_2,$$

$$Y_2(x) = C_{21}C_1 + (1 + C_{22})C_2 + S_{21}D_1 + (x + S_{22})D_2,$$

$$Y_1'(x) = C'_{11}C_1 + C'_{12}C_2 + (1 + S'_{11})D_1 + S'_{12}D_2,$$

$$Y_2'(x) = C'_{21}C_1 + C'_{22}C_2 + S'_{21}D_1 + (1 + S'_{22})D_2.$$

Из второго и четвертого уравнений и граничных условий при $x = 0$ следует

$$Y_2(0) = C_2 = 0\,;\; Y_2'(0) = D_2 = \frac{1}{2} s C_1 .$$

Тогда из оставшихся двух уравнений – первого и третьего получим, с учетом граничных условий однородную систему уравнений относительно оставшихся постоянных C_1 и D_1

$$Y_1(1) = \left(1 + \frac{1}{2} s S_{12}(1) + C_{11}(1)\right) C_1 + \left(1 + S_{11}(1)\right) D_1 = 0\,,$$

$$Y_1'(1) = \left(C_{11}(1) + \frac{1}{2} s S_{12}'(1)\right) C_1 + \left(1 + S_{11}'(1)\right) D_1 = 0\,.$$

Наряду с тривиальным решением этой системы уравнений: $C_1 = D_1 = 0$, возможно ненулевое решение, если определитель системы равен нулю

$$Det(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} s S_{12}(1) + C_{11}(1) & 1 + S_{11}(1) \\ C_{11}(1) + \frac{1}{2} s S_{12}'(1) & 1 + S_{11}'(1) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Решаем уравнения $Det(s) = 0$ при удержании в разложении функций *Com* и *Sim* четырех «базовых» членов, что соответствует представлению тригонометрических функций степенным рядом с удержанием четырех членов:

$$Cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8\,,$$

$$Sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9\,.$$

Корень уравнения находится в интервале (6.01 – 6.1), что соответствует критической скорости обтекания, приводящей к дивергенции

$$V_{crit} = 6{,}03 \frac{D}{K}\,. \qquad (4)$$

Величина, равная кубическому корню из V_{crit} по сути есть одно из собственных значений краевой задачи в скалярной форме. В данном случае имеется замкнутое решение $\sqrt{s} = 1{,}845$. В предложенном решении получено значение $\sqrt{s} = 1{,}82$, что дает нижнюю оценку с ошибкой 1,4%. Сравнивая с этим решением точное решение (4), полученное в первом приближении отметим, что оценка снизу критической скорости составит всего 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косых, Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости / Э.Г. Косых // Вестник СамГУ. — 2008. — 8/1(67). — С. 390–400.

Поступила 01.11.11