Перечисление задач можно продолжить, что только убеждает в необходимости знать и уметь применять на практике понятие центра масс.

УДК 51. (07.07)

Использование принципа Дирихле

Сенькова Е.В., Чернявская С.В.
Белорусский национальный технический университет

Использование принципа Дирихле является эффективным методом решения задач и дает часто наиболее простое и изящное решение.

Задача 1. В 25 коробках лежат шарики нескольких цветов. Известно, что при любом k ($1 \le k \le 25$) в любых k коробках лежат шарики k+1 различных цветов. Докажите, что шарики одного из цветов лежат во всех коробках.

Решение: Обозначим коробки b(1)…b(25) . Общее число цветов равно 26. Если рассмотреть все коробки, кроме b(i), то общее число цветов в них равно 25. Следовательно, есть цвет, присутствующий только в коробке b(i), назовем его c(i). Поскольку общее число цветов – 26, остался ровно один цвет c, отличный от всех c(i). Если в какой-то коробке b(k) нет шариков этого цвета, то в ней есть шарики цвета b(k), что противоречит условию (в b(k) должны быть шарики двух цветов. Значит, шарики цвета c есть во всех коробках.

Задача 2. Какое наибольшее число точек можно разместить в квадрате со стороной 1 таким образом, чтобы все расстояния между этими точками были не менее 0,5 (“ в квадрате”означает “внутри квадрата или на его границе”)

Решение: Решение состоит из двух частей: доказательства того факта, что некоторое количество точек размещать должным образом возможно, а также того факта, что большего количества точек размещать таким образом нельзя. Легко понять, как разместить 9 точек в соответствии с требованием условия задачи: одну точку разместить в центре квадрата, четыре – в его вершинах и еще четыре – на серединах сторон квадрата. К этому размещению десятую точку добавить уже нельзя, так как круги радиуса 0,5 с центрами в первых 9 точках накрывают весь квадрат. Однако, приведенные соображения нельзя считать решением задачи. Действительно, возможно существуют и другие способы размещения 9 точек, при этом возможно будет добавить к ним еще и 10 точку, не нарушая условия задачи. Именно здесь пригодятся соображения, связанные с принципом Дирихле. Действительно, разобьем квадрат на 9 равных квадратиков со стороной ⅓. Если в единичном квадрате размещено 10 точек, то хотя бы две из них попадут в один и тот же квадратик. Расстояние между любыми двумя точками квадратика не превышает длины его диагонали 0,16, но 0,16<0,5. Следовательно, можно разместить только 9 точек. Ответ: 9.