УДК 517.8

Вывод формулы символического представления центральных разностей любого порядка посредством степенных операторов бесконечно высокого порядка

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

На основании символического равенства сдвига пространства функций $f(x+a)=e^{\pi d_x}*f(x)$ (1) составим для произвольной функции центральную разность первого порядка. В результате получим:

$$\Delta_1 f(x)=\frac{f(x+a)-f(x-a)}{2}=\frac{e^{ad_x}*f(x)-e^{-ad_x}*f(x)}{2}=$$

$$=\left(\frac{e^{ad_x}-e^{ad_x}}{2}\right)*f(x)=Shad_x*f(x)\cdot$$

Тогда центральная разность 2-го порядка будет равна

$$\Delta_2 f(x)=\frac{1}{2}[\ \frac{f(x+2a)-f(x)}{2}-\frac{f(x)-f(x-2a)}{2}\ ]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2ad_x}*f(x)+e^{-2ad_x}*f(x)}{2}-f(x)\ \right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2ad_x}+e^{-2ad_x}}{2}*f(x)-f(x)\ \right]=\frac{1}{2}\left(ch2ad_x-1\right)*f(x)=$$

$$=Sh^2ad_x*f(x).$$

Далее находим центральную разность 3-го порядка

$$\Delta_3 f(x)=\frac{1}{8}[f(x+3a)-3f(x+a)+3f(x+a)-f(x-3a)]=$$

$$=\frac{1}{4}(sh(3ad_x)-3sh(ad_x))*f(x)=sh^3ad_x*f(x).$$

При выводе этой формулы было использовано соотношение (1), а также формула $sh(3ad_x)-3shad_x=4sh^3(ad_x)$, которую легко доказать:

$$sh(3\alpha)-3sh(\alpha)=sh(\alpha)ch(2\alpha)+ch(\alpha)sh(2\alpha)-3sh(\alpha)=$$

$$=sh(\alpha)[ch(2\alpha)-1]+2sh(\alpha)[ch^2(\alpha)-1]=2sh^3(2\alpha)+2sh^3(2\alpha)=4sh^3(\alpha)$$

Далее методом математической индукции можно доказать $\Delta_n f(x)=sh^n(ad_x)*f(x).$ Только что выведенная новая формула имеет большое научное и практическое приложение.