УДК 517.5

Использование комплексного анализа в операторном методе

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим символический оператор дифференцирования бесконечного высокого порядка, содержащий мнимую единицу:

$T_l = \sin ld_x = -ish(ild_x) = -\dfrac{i}{2}(e^{ild_x} - e^{-ild_x})$, где обозначено $d_x = \dfrac{d}{dx}$ – операция дифференцирования, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Теперь введем еще один прямой $V_n = 1 + (id_x)^2 / \delta_n^2 = 1 - d_x^2 / \delta_n^2$ и обратный ему оператор $V_n^{-1}\left[f(x)\right] = \dfrac{f(x)}{1+(id_x)^2} = \dfrac{f(x)}{1 - d_x^2/\delta_n^2}$.

На основе принципа суперпозиций устанавливаем свойства операторов $D_0 = T_l / ld_x$ и $D_1 = T_l V_n^{-1}$ в основном классе гиперболических функций:

1. $D_0 = \dfrac{\sin(ld_x)}{ld_x}$:

$D_0\left[\mathrm{s}h\delta_m x\right] = 0$, $D_0\left[\mathrm{c}h\delta_m x\right] = 0$, $D_0[C] = C.$

2. $D_1 = \dfrac{\sin(ld_x)}{1 - d_x^2/\delta_n^2}$:

$$D_1\left[\mathrm{s}h\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2}\mathrm{c}h\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}$$

$$D_1\left[\mathrm{c}h\delta_m x\right] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1} l\delta_n}{2}\mathrm{s}h\delta_n x & \text{при } m \neq n \\ 0 & \text{при } m = n \end{cases}$$

$D_1[C] = 0$ независимо от m и n

Аналогичным образом устанавливаются свойства оператора $D_2 = ld_x D_1$

Используя предложенный комплексный подход, теперь произвольную гладкую функцию можно разложить в гиперболический ряд. Отличительной особенностью полученного результата является логическая непротиворечивость проведения математических выкладок при переходе в операторных формулах от вещественного переменного к комплексному.