УДК 519.711.3; 621.001.63

Вычисление собственных функций и значений симметричной матрицы на основе операторов вращения

Демко В.М.
ОИПИ НАН Беларуси

При реализации методов диагонализации симметричных матриц, в частности, QL-алгоритма [1], используются преобразования подобия сложной структуры, которые затруднительно использовать в приложениях.

В данной работе предлагается алгоритм вычисления собственных функций и значений персимметричной матрицы на основе операторов вращения, представляющих собой прямую сумму матриц вращения.

Процедура синтеза собственного преобразования для персимметричной матрицы P размерности $N=2^{\alpha}$ состоит из m шагов ($m=log_2N$). На каждом шаге последовательно выполняются следующие операции: 1) персимметричная матрица P с помощью оператора H преобразуется к блочно-диагональному виду

$$H^T PH = \left[\begin{array}{c:c} P_1 & 0 \\ \hdashline 0 & P_2 \end{array}\right] = P_1 \oplus P_2,\ H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n,\ H_i = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix},$$

где P_1, P_2 - матричные блоки размером $n=N/2$. Причем матрица P_1 является персимметричной, а матрица P_2 приводится к симметричной форме относительно побочной диагонали путем умножения ее слева и справа на ортогональную матрицу $F_n = Q_n T_n$, где

$$Q_n = \sqrt{2}/2 \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{array}\right], \quad T_n = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_k & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_k \\ 0 & c_k & \cdots & 0 & 0 & \cdots & s_k & 0 \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_k & s_k & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & s_k & -c_k & \cdots & 0 & 0 \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ 0 & s_k & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -c_k & 0 \\ s_k & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_k \end{array}\right],$$

$c_k = cos(k\pi/N)$, $s_k = sin(k\pi/N)$, $k = \overline{1,\ N/4-1}$.

2) процедура повторяется до получения диагональной матрицы.

Таким образом, собственное преобразование имеет факторизованную структуру в виде произведения операторов вращения $H_n,\ Q_n,\ T_n$.

Литература

Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. – М.: Мир, 1983. – 382 с.