УДК 517.925, 530.145

Связь уравнения Клейна-Гордона с обыкновенными дифференциальными уравнениями

Самодуров А.А., Федорако Е.И.
Белорусский государственный университет,
Белорусский национальный технический университет

В работе [1] была установлена связь между решением уравнения Лиувилля

$$U_{xy} = K\exp U$$

и уравнением, описывающим явление, происходящее в условиях спонтанного высвечивания – сверхизлучательной лавины (СИЛ)

$$z''_{xx} + \alpha z'_x + K\exp z + \gamma = 0\,. \tag{1}$$

Покажем, что решения уравнения (1) связаны с решениями уравнения Клейна–Гордона

$$U_{xz} = G(U)\,. \tag{2}$$

Для этого в уравнении (2) выполним замену переменных:

$$U = z + p(x,y),\; x_1 = p_1(x,y),\; y_1 = y\,, \tag{3}$$

где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция, $p(x,y)$ и $p_1(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

В результате выполнения замены придем к уравнению (1), где

$$f(x,z) = \frac{p''_{1xy}}{p'_{1x}\cdot p'_{1y}}\,,\; \Phi(y,z) = \frac{F\left(z+p(x,y)\right)}{p'_{1x}\cdot p'_{1y}}\,,\; F(x,y) = \frac{p''_{xy}}{p'_{1x}\cdot p'_{1y}}\,.$$

Тогда если $z_0(x,y)$ – решение уравнения (1), то $U_0 = z_0 + p(x,y)$ является решением уравнения (2) при выполнении соотношений (3).

Таким образом, все решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида (1) находятся среди решений уравнений в частных производных (2) с точностью до замены переменных.

Решения уравнения (2) для различных видов правой части известны и приведены в пособии [2].

Литература

1. Самодуров А.А. О связи уравнения Лиувилля с уравнением сверхизлучательной лавины. //Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. №2. С. 337.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.