УДК 517.983

Решение одного интегрального уравнения с нормированной функцией Бесселя в ядре

Скоромник О.В.
Полоцкий государственный университет

Рассматривается интегральное уравнение

$$\left(A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f\right)(x) \equiv \int_0^x \frac{\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left(\lambda\left(x^\sigma - t^\sigma\right)\right)\sigma t^{\sigma-1} f(t)dt = g(x), \quad x > a,$$

с действительными параметрами $\sigma > 0, \lambda > 0, 0 < \alpha < 1, \beta$, содержащее нормированную функцию Бесселя $\bar{J}_\nu(z)$ [1, § 37.1] в ядре.

Получено решение рассматриваемого уравнения в пространстве $L_p(a,b)$ – суммируемых функций на $[a,b] \subset R$:

$$f(x) = \left\{\left(A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda}\right)^{-1} g\right\}(x) = \left(A_{a+;\sigma}^{-\alpha,\lambda} g\right)(x) = A_{a+;\sigma}^{2-\alpha,\lambda}\left(I_{a+;x^\sigma}^{-2} + \lambda^2\right)g(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2}\left(\lambda\left(x^\sigma - t^\sigma\right)\right)\left(\frac{d^2}{\sigma t^{\sigma-1} dt^2} + \lambda^2\right) g(t)dt.$$

Введем пространства: $AC([a,b])$ – абсолютно непрерывных функций и $\mathrm{I}_{a+}^\alpha(L_p(a,b)) := \left\{g = \mathrm{I}_{a+}^\alpha f,\ f \in L_p(a,b), 1 \le p < \infty\right\}$ [1, §§ 1, 2].

Теорема. Пусть задано уравнение $\left(A_{a+;\sigma}^{\alpha,\lambda} f\right)(x) = g(x)$, $0 \le a < x < b < \infty, 0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0, \lambda > 0$; $g(x)$ – заданная на $[a,b]$ функции; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a > 0$ полагается, что $f(x) = g(x) = 0$ при $0 < x < a$), тогда его решение *f* в классе $L_p(a,b)$, $b < \infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I_{a+;x^\sigma}^\alpha\left(L_p(a,b)\right)$, $p \ge 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (1), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a,b])$, $g(a) = 0$.

Доказанное утверждение обобщает результаты, полученные ранее для соответствующего интегрального уравнения первого рода [1, § 37.1].

Литература

Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987–688с.