

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.

In given article the algorithm is developed and numerical realization of the integrated equations of a problem of non-stationary thermoelasticity is spent. Research of the is intense-deformed condition of a penetrative punch is conducted at non-stationary temperature to loading.

Введение. Потребности современной техники часто требуют исследования напряженно-деформированного состояния конструкций, которые подвергаются воздействию механических нагрузок и изменяющихся во времени температур. Вопрос о нестационарных температурных воздействиях на элементы конструкций становится актуальным еще и потому, что механизмы могут эксплуатироваться в условиях неравномерного нагрева, который вызывает значительные температурные напряжения и в сочетании с напряжениями, вызванными действием физической природы, часто становится причиной частичного или полного вывода механизмов из строя. Сложность форм применяемых конструкций и их отдельных элементов наряду со сложным характером упомянутых воздействий требуют разработки новых средств и методов расчета на прочность для получения данных об их поведении при эксплуатации еще на этапе проектирования. Все это требует решения нестационарных задач термоупругости, связанных со строгим удовлетворением граничных условий по всей границе области при произвольном распределении в ней температуры. В инженерной практике существуют различные методы исследования напряженно-деформированного состояния. В настоящее время наиболее распространенными являются численные методы и в особенности метод конечных элементов (МКЭ). На основе его созданы различные программные продукты, реализующие широкий класс задач механики деформируемого твердого тела. В данной работе используется другой из эффективных численных методов – метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) теории потенциала, который обладает некоторыми преимуществами в сравнении с МКЭ [1, 2]. Основными преимуществами применяемого метода по сравнению с другими существующими является необходимость дискретизации только границы области, при этом сохраняется высокая точность решения при уменьшении затрат машинного времени. Одним из важнейших недостатков метода ГИУ является отсутствие программных комплексов, ограничивающие его использование в инженерных расчетах.

В данной работе рассматривается комплексное решение нестационарной задачи термоупругости с использованием численного решения методом ГИУ и последующим представлением результатов с помощью Microsoft Excel.

1. Постановка и методика численного решения задачи. Численное решение задачи термоупругости проводится в 2 этапа. На первом этапе решается задача теплопроводности по определению температурных полей. Для реализации этой задачи решается классическое уравнение теплопроводности твердого тела

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях. В (1): t – время, $T=T(t,x,y,z)$ – искомая температура, a – коэффициент температуропроводности материала, x,y,z – координаты расчетной точки тела.

Для решения задачи теплопроводности методом потенциала решение разыскивается в виде потенциалов простого (2) или двойного слоев (3), которые вне точек

поверхности, по которой проводится интегрирование, являются решениями уравнения теплопроводности:

$$V(x, t) = \int_0^t ad\tau \left[\int_L T(x, t, y, \tau) v(y, \tau) \right] dl, \quad (2)$$

$$W(x, t) = \int_0^t ad\tau \left[\int_L \frac{\partial T}{\partial n} \mu(y, \tau) \right] dl. \quad (3)$$

где x, y – текущая и параметрическая точки интегрирования, μ, v – плотности потенциала двойного и простого слоя соответственно.

Потенциал (3) используется в случае реализации задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода, выражение (2) – в случае решения краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода.

При задании на поверхности тела граничных условий первого рода $F = F(y, t)$, что соответствует рассматриваемой задаче, получено интегральное уравнение для определения плотности теплового потока двойного слоя $\mu(y, \tau)$:

$$\pm \frac{1}{2} \mu(x, t) + \frac{4a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\left(\sqrt{2a(t-\tau)}\right)^5} \int_L K(y, x, t-\tau) \mu(y, \tau) dl = F(y, t). \quad (4)$$

Ядро $K(y, x, t-\tau) = e^{\left(\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)} [c \cdot I_1(B) - b \cdot I_0(B)]$ интегрального уравнения представляет собой произведение показательной функции на функцию Бесселя первого рода. Знак «+» используется для внутренней задачи, «-» – для внешней.

Уравнение (4) является линейным интегральным уравнением второго рода. В результате решения этого уравнения определяется плотность μ потенциала двойного слоя, что позволяет найти распределение температуры в любой точке рассматриваемой области L в данный момент времени путем подстановки данной плотности в выражение (3) потенциала двойного слоя. Необходимо отметить также, что ядро уравнения (4) имеет сингулярную особенность в точке $x = y, t = \tau$.

На втором этапе решается задача термоупругости:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = \rho \ddot{u}_i + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_j - X_i, \quad (5)$$

с соответствующими краевыми условиями.

Решение (5) разыскивается в виде, предложенном Гудьером:

$$u_i = u_i^0 + u_i^T, \quad (6)$$

где u_i^0 – решение однородного дифференциального уравнения, а u_i^T – частное решение уравнения (5), которое разыскивается в виде градиента некоторой бигармонической функции

$$u_i^T = \text{grad} W. \quad (7)$$

Функция W удовлетворяет уравнению (7) в виде:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (T - T_0). \quad (8)$$

Для определения напряжений используется формула:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T, \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right)$ – температурные добавки напряжений, σ_{ij}^0 соответствует u_{ij}^0 .

Окончательно с учетом (8) выражения для температурных добавок перемещений и напряжений имеют вид:

$$u_i^T(x) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} r \beta_i (2 \ln r - 1) - T(y) [2\beta_i \cos \varphi + n_i(y)(2 \ln r - 1)] \right\} dl_y, \quad (10)$$

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E\alpha}{4\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} [\delta_{ij}(1+2 \ln r) - 2\beta_i \beta_j] + \right. \\ \left. + T(y) \frac{1}{r} [n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2\beta_i \beta_j \cos \varphi - \delta_{ij} \cos \varphi] \right\} dl_y. \quad (11)$$

Система сингулярных интегральных уравнений относительно плотности $v_i(y)$ имеет вид:

$$\mu_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \mu_i(y) \cos \psi [(1-2\nu) + 2\beta_i^2] + \mu_i(y) \{ (1-2\nu) [n_j(x)\beta_i - \right. \\ \left. - n_i(x)\beta_j] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi \} \right\} \frac{dl_y}{r(x,y)} = P_{np}, \quad (12)$$

где $P_{np} = P_i^0 + P_i^T$ – приведенная нагрузка, равная сумме механической и температурной поверхностной нагрузки.

Численная реализация интегральных уравнений термоупругости также построена на базе метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса.

В результате замены интегралов в (12) конечными суммами получается алгебраическая система уравнений:

$$X + QY = p, \quad (13)$$

где X и Y – столбцы неизвестных плотностей, p – столбец свободных членов.

По найденным значениям плотностей могут быть определены все компоненты тензора напряжений и деформаций в произвольной точке рассматриваемой области.

Порядок решения задачи следующий. Основными исходными данными задачи по расчету напряжений при плазменном упрочнении, помимо уравнений (1) и (5) с соответствующими начальными и граничными условиями, являются: количество точек разбиения границы области, количество шагов по времени, коэффициенты линейного теплового расширения α , температуропроводности, Пуассона, размеры массивов плотностей, координаты точек границы области. На 1-м этапе решается уравнение (1), в результате решения которого находится распределение температуры в любой точке упрочняемого тела в требуемый момент времени. Далее определяются температурные добавки перемещений u_i^T , напряжений σ_{ij}^T и фиктивная температурная нагрузка p_i^T . На 2-м этапе решается система (12) относительно плотности потенциала μ , после чего определяются перемещения и напряжения по формулам (6) и (9) соответственно.

Для численного решения построенных интегральных уравнений аппроксимируется геометрия рассматриваемой области и входящие в ГИУ краевые функции. Дискретные представления границы тела осуществляются в случае плоской задачи с использованием одномерных конечных элементов различной формы. В ходе пошагового продвижения по времени находятся неизвестные граничные перемещения и напряжения [5].

Для реализации алгоритма составлена программа на алгоритмическом языке «FORTRAN».

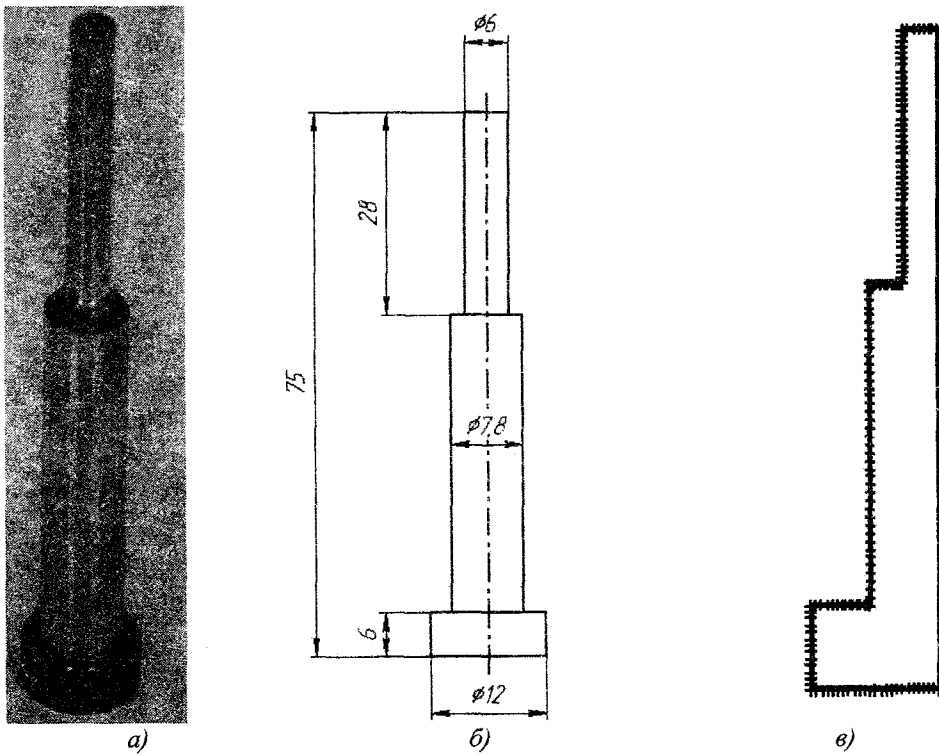
2. Численное моделирование температурных полей и термонапряжений.

Реализацию алгоритма рассмотрим на примере решения нестационарной задачи термоупругости при поверхностной плазменной закалке верхнего торцевого сечения пуансона (температура $T=650^{\circ}\text{C}$ действовала в течение 10 с). Материал – сталь X12M, теплоемкость $c = 750 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$,

коэффициент температурного расширения $\alpha = 15 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ [3, 4]. Граничные условия

соответствовали случаю приложения конвекции по внешним поверхностям модели (коэффициент конвекции $1000 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$). К верхней грани пуансона прикладывалась температура 650°C . При статическом анализе нижняя грань пуансона считалась неподвижной.

Чертеж пуансона, его гранично-элементная модель показаны на рисунке 1.



а – внешний вид; б – схема; в – гранично-элементная модель

Рисунок 1 – Пуансон

Достоинством гранично-элементной модели является возможность разбивать только внешнюю границу (рисунок 1в), что позволяет значительно упростить расчет. Кроме того, вследствие симметрии имеется возможность рассматривать половину поперечного сечения, которое аппроксимировалось граничными элементами. Наружный контур разбивался равномерно 50 граничными элементами на длине 28 мм и 50 граничными элементами на длине 31 мм. В непосредственной близости к внутреннему углу для повышения точности расчетов применяется неравномерное разбиение, которое реализуется введением соответствующих коэффициентов.

На рисунках 2-6 приведены типичные поля температур, напряжений и перемещений для моментов времени 1 с и 10 с.

Таблица 1

Результаты расчета температур вдоль оси вращения в зависимости от координаты

$x, \text{см}$	$T, ^\circ\text{C}$ ($t=1\text{с}$)	$T, ^\circ\text{C}$ ($t=10\text{с}$)
0	650	650
3	647	650
6-24	642	650
27	623	642
30	578	623
33	485	591
36	333	516
39	200	431
42	100	336
45	30	240
48	22	126
51	22	78
54	22	40
57	22	33
60	22	22

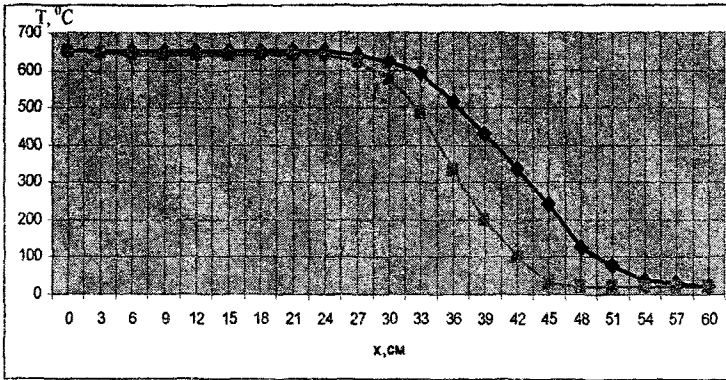


Рисунок 2 – Зависимость температуры от координаты в вдоль оси вращения в различные моменты времени

Зависимость $T=f(t)$ на средней грани пуансона

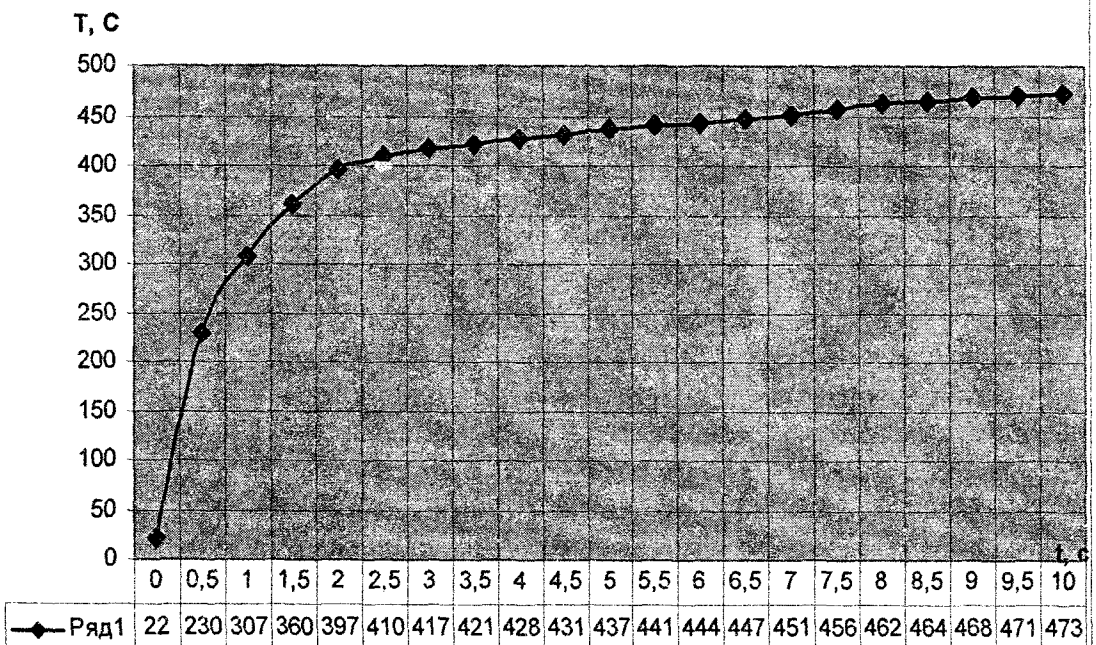


Рисунок 3 – Зависимость температуры от времени на средней грани пуансона

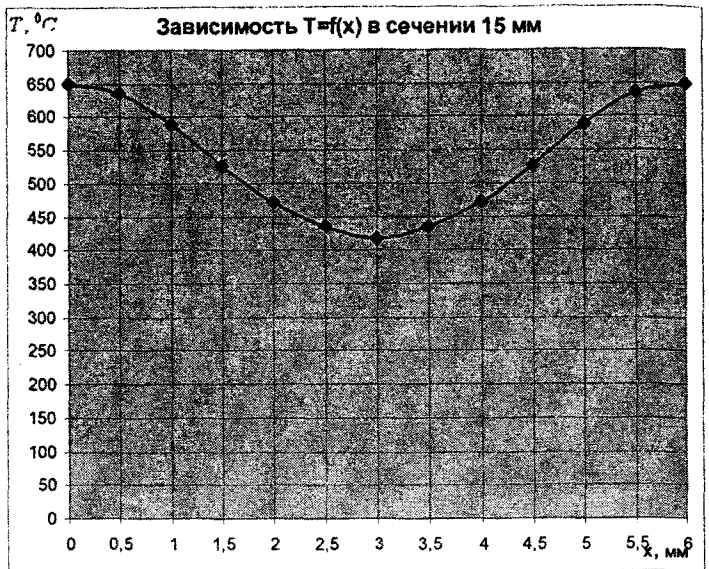
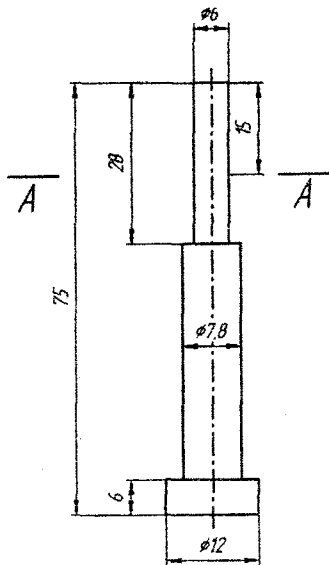


Рисунок 4 – Зависимость температуры от радиуса в сечении $x=15$ мм в момент времени $t=0,5$ с (сечение А-А)

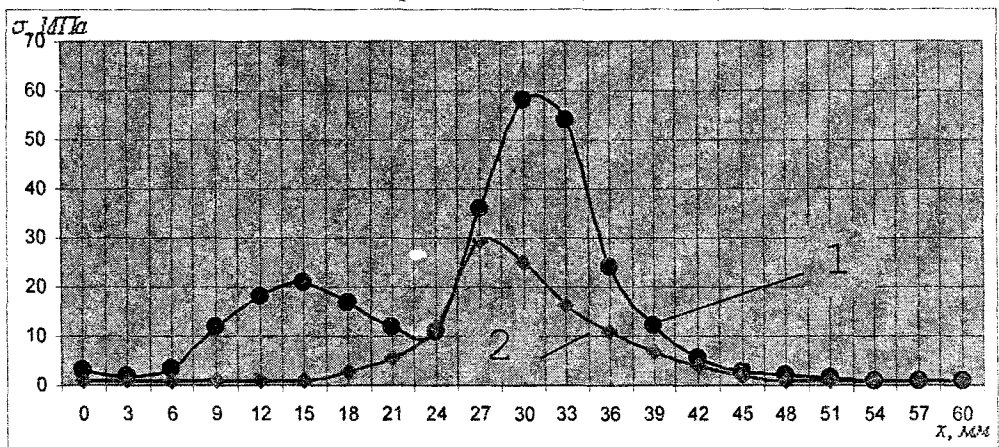


Рисунок 5 – Зависимость суммарных напряжений от координаты вдоль оси симметрии 1 – $t = 1$ с, 2 – $t = 10$ с

На оси симметрии вблизи изменения диаметра пуансона происходит резкий рост эквивалентных напряжений. В момент времени $t = 1$ с опасными являются точки на оси посередине рабочей части длиной 28 мм и в непосредственной близости от перепада диаметра при расстоянии от свободного торца 30 мм на утолщенной части пуансона диаметром 7,8 мм, где температурные напряжения достигают 59 МПа. При $t = 10$ с опасными являются точки на части с диаметром 6 мм при расстоянии 26...27 мм. Это объясняется геометрией пуансона.

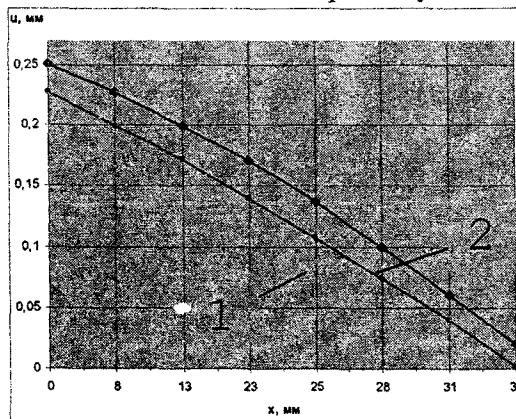


Рисунок 6 – Суммарные перемещения в сечении в различные моменты времени 1 – $t = 1$ с, 2 – $t = 10$ с

Кроме того, проведены исследования термонапряжений и перемещения в различные моменты времени в точках на наружном контуре. Результаты показывают, что опасными являются точки в местах изменения диаметра с 6 до 7,8 мм.

Рассмотренные программы представляют возможность пользователю вести анализ полей температур и термонапряжений для тел с произвольной геометрией границы области и различными краевыми условиями, в т.ч. и многосвязных областей. Имеется возможность редактирования исходных данных и варьирования параметров нагрева и свойств материала, а также использования движущихся источников тепла.

Следует отметить, что разработанная программа позволяет решать задачи при одновременном действии механической нагрузки и нестационарных полей температур.

Заключение. В данной статье разработан алгоритм и проведена численная реализация интегральных уравнений задачи нестационарной термоупругости [5]. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния пробивного пуансона при нестационарном температурном нагружении. Построены графики распределения температуры в зависимости от координат и времени. Получены зависимости распределения компонентов напряжения и перемещения.

Полученные результаты нестационарного температурного анализа могут быть непосредственно использованы для определения оптимальных режимов работы плазмотронов и других высококонцентрированных источников нагрева, позволяющих проводить поверхностную обработку металлоизделий высокотемпературной плазменной струей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы граничных элементов / К. Бреббия [и др.]. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Кундас, С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей: монография / С.П. Кундас. – Минск: Бестпринт, 2005. – 313 с.
4. Карслоу, Б. Теплопроводность твердых тел / Б. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
5. Веремейчик, А.И. Граничные интегральные уравнения двумерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости / А.И. Веремейчик // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск: Технопринт, 2001. – С. 99–103.

Поступила 06.01.12