Белорусский национальный технический университет, Минск

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРА С 4 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

The feature of the kinematic analyses of the manipulator with 4 degree of freedom are considered. Parts of the manipulator form 2 revolute and 2 prismatic kinematic pairs.

Схема манипулятора показана на рисунке 1. С каждым звеном связываем правую систему координат: $x_0 y_0 z_0$ – неподвижная; $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ и $x_4 y_4 z_4$ – подвижные. Оси y_3 и y_1 параллельны, оси x_3, x_2, x_1 также параллельны. Обобщенные координаты: φ_{10} – угол поворота звена 1 относительно звена 0 вокруг оси z_0; S_{21} - линейное перемещение звена 2 относительно звена 1 вдоль оси z_1; S_{32} – линейное перемещение звена 3 относительно звена 2 вдоль оси x_3; φ_{43} - угол поворота звена 4 относительно звена 3 вокруг оси y_3. Положительный отсчет углов - против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующей оси.

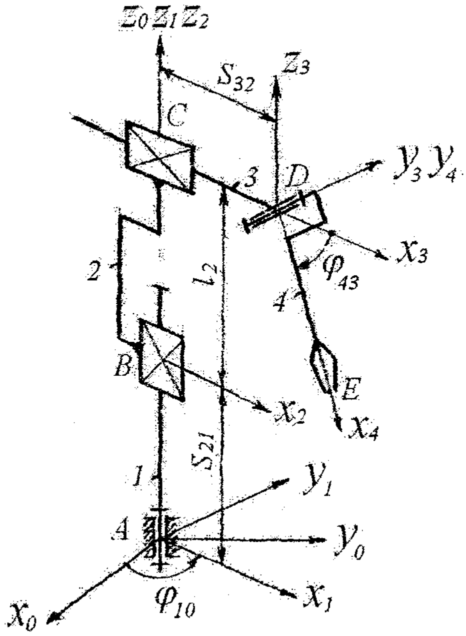

Рисунок 1 – Кинематическая схема манипулятора с 4 степенями свободы

В задаче о положениях определяем координаты $x_E^{(0)}$, $y_E^{(0)}$, $z_E^{(0)}$ центра схвата (точки E) в системе координат $x_0 y_0 z_0$, если известны его координаты в локальной системе $x_4 y_4 z_4$: $x_E^{(4)} = l_{DE} = l_4$, $y_E^{(4)} = z_E^{(4)} = 0$. Для этого, используя метод преобразования координат [4], осуществляем последовательный переход от системы $x_4 y_4 z_4$ к системе $x_0 y_0 z_0$:

$$r_E^{(3)} = A_{34} r_E^{(4)} \;; \qquad r_E^{(2)} = r_E^{(3)} + L_{23} \;;$$
$$r_E^{(1)} = r_E^{(2)} + L_{12} \;; \qquad r_E^{(0)} = A_{01} r_E^{(1)}, \tag{1}$$

где A_{34} и A_{01} – матрицы поворота координатных осей при переходе соответственно от 4-й системы к 3-й и от 1-й к нулевой; L_{23} и L_{12} – матрицы параллельного переноса осей при переходе соответственно от 3-й системы ко 2-й и от 2-й системы к 1-й.

Указанные матрицы поворота и параллельного переноса осей составляются на основании известной методики [1] и имеют следующий вид:

$$r_E^{(4)}=\begin{bmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad L_{23}=\begin{bmatrix} S_{32} \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix}; \quad L_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{21} \end{bmatrix};$$

$$A_{34}=\begin{bmatrix} \cos\varphi_{43} & 0 & \sin\varphi_{43} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{43} & 0 & \cos\varphi_{43} \end{bmatrix}; A_{01}=\begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

На основании выражений (1) получим

$$r_E^{(0)}=A_{04}\,r_E^{(4)}+A_{01}\,L_{23}+A_{01}\,L_{12}, \tag{2}$$

где, в частности,

$$A_{04}=A_{01}A_{34}=\begin{bmatrix} \cos\varphi_{10}\cos\varphi_{43} & -\sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10}\sin\varphi_{43} \\ \sin\varphi_{10}\cos\varphi_{43} & \cos\varphi_{10} & \sin\varphi_{10}\sin\varphi_{43} \\ -\sin\varphi_{43} & 0 & \cos\varphi_{43} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

После выполнения операций умножения и сложения матриц формула (2) принимает следующий вид:

$$r_E^{(0)}=\begin{bmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ z_E^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (S_{32}+l_4\cos\varphi_{43})\cos\varphi_{10} \\ (S_{32}+l_4\cos\varphi_{43})\sin\varphi_{10} \\ S_{21}+l_2-l_4\sin\varphi_{43} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, элементы матрицы (4) представляют собой искомые координаты центра схвата. Аналогичным образом могут быть получены выражения координат и других точек, в частности центров масс звеньев.

Матрица A_{04} (3) полностью определяет ориентацию руки 4 в неподвижной системе координат $x_0\,y_0 z_0$, так как столбцы этой матрицы представляют собой направляющие косинусы осей x_4, y_4, z_4:

$$a_{11}=\cos(x_0,x_4)=\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{43}$$

$$a_{21}=\cos(y_0,x_4)=\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{43}$$

$$a_{31}=\cos(z_0,x_4)=-\sin\varphi_{43} \qquad \text{и т.д.}$$

Угловые скорости звеньев можно определить на основании теоремы о сложении угловых скоростей в переносном и относительном движениях. В частности, для угловой скорости ω_4 имеем соотношение

$$\overline{\omega}_4=\overline{\omega}_{43}+\overline{\omega}_{32}+\overline{\omega}_{21}+\overline{\omega}_{10}, \tag{5}$$

где

$$\overline{\omega}_{43}=\dot{\varphi}_{43}\,\bar{j}_4; \qquad \overline{\omega}_{10}=\dot{\varphi}_{10}\,\bar{k}_1,$$

а относительные угловые скорости $\overline{\omega}_{32} = \overline{\omega}_{21} = 0$, так как звенья 3 и 2, 2 и 1 образуют между собой поступательные пары. Все векторы в уравнении (5) должны быть представлены в одной системе координат. Переходя к неподвижной системе координат, на основании выражения (5) имеем

$$\omega_4^{(0)} = A_{04}\,\omega_{43}^{(4)} + A_{01}\,\omega_{10}^{(1)} = A_{04}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{43} \\ 0 \end{bmatrix} + A_{01}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_{43}\sin\varphi_{10} \\ \dot{\varphi}_{43}\cos\varphi_{10} \\ \dot{\varphi}_{10} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\omega_4^{x_0} = -\dot{\varphi}_{43}\sin\varphi_{10}, \quad \omega_4^{y_0} = \dot{\varphi}_{43}\cos\varphi_{10}, \quad \omega_4^{z_0} = \dot{\varphi}_{10}\,. \tag{6}$$

Для определения угловой скорости ω_4 можно также использовать матричный метод ([2], [3]). Тогда

$$\breve{\omega}_4^{(0)} = \dot{A}_{04}\,A_{40}, \tag{7}$$

где $\breve{\omega}_4^{(0)}$ – кососимметричная матрица вида

$$\breve{\omega}_4^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_4^{z_0} & \omega_4^{y_0} \\ \omega_4^{z_0} & 0 & -\omega_4^{x_0} \\ -\omega_4^{y_0} & \omega_4^{x_0} & 0 \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$$\dot{A}_{04} = \frac{d\,A_{04}}{d\,t}; \qquad A_{40} = A_{04}^{T}.$$

Элементы матрицы (8) представляют собой проекции угловой скорости ω_4. Тогда в соответствии с выражением (7)

$$\omega_4^{x_0} = \dot{a}_{31}\,a_{21} + \dot{a}_{32}\,a_{22} + \dot{a}_{33}\,a_{23},$$

$$\omega_4^{y_0} = \dot{a}_{11}\,a_{31} + \dot{a}_{12}\,a_{32} + \dot{a}_{13}\,a_{33}$$

$$\omega_4^{z_0} = \dot{a}_{21}\,a_{11} + \dot{a}_{22}\,a_{12} + \dot{a}_{23}\,a_{13},$$

где a_{11}, a_{12}, ..., $\dot{a}_{11}$, $\dot{a}_{12}$, ... – элементы матрицы A_{04} (3) и их производные по времени.

Угловое ускорение ε_4 определяется в результате дифференцирования проекций угловой скорости ω_4 (6):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_4^{x_0} &= -\ddot{\varphi}_{43}\sin\varphi_{10} - \dot{\varphi}_{10}\,\dot{\varphi}_{43}\cos\varphi_{10}, \\ \varepsilon_4^{y_0} &= \ddot{\varphi}_{43}\cos\varphi_{10} - \dot{\varphi}_{10}\,\dot{\varphi}_{43}\sin\varphi_{10}, \\ \varepsilon_4^{z_0} &= \ddot{\varphi}_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для определения ε_4 можно также использовать векторную формулу [1]

$$\overline{\varepsilon}_4 = \overline{\varepsilon}_3 + \overline{\varepsilon}_{43} + \overline{\omega}_3 \times \overline{\omega}_{43},$$

которая в неподвижной системе координат принимает вид

$$\bar{\varepsilon}_4^{(0)} = \bar{\varepsilon}_3^{(0)} + A_{04}\,\bar{\varepsilon}_{43}^{(4)} + \left(\bar{\omega}_3^{(0)} \times A_{04}\,\bar{\omega}_{43}^{(4)}\right). \tag{10}$$

В результате соотношение (10) даст те же самые выражения (9).

Скорость центра схвата V_E можно определить двумя способами: 1) путем дифференцирования выражений координат (4); 2) на основании векторных формул сложения скоростей. По второму способу необходимо использовать следующие соотношения:

$$\bar{V}_E = \bar{V}_D + \bar{V}_{ED}; \quad \bar{V}_D = \bar{V}_{C_3} + \bar{V}_{DC_3}; \quad \bar{V}_{C_3} = \bar{V}_{C_2} + \bar{V}_{C_3C_2};$$

$$\bar{V}_{C_2} = \bar{V}_{B_2} + \bar{V}_{C_2B_2}; \quad \bar{V}_{B_2} = \bar{V}_{B_1} + \bar{V}_{B_2B_1}; \quad \bar{V}_{B_1} = 0,$$

из которых следует, что

$$\bar{V}_E^{(0)} = \bar{V}_{ED}^{(0)} + \bar{V}_{DC_3}^{(0)} + \bar{V}_{C_3C_2}^{(0)} + \bar{V}_{C_2B_2}^{(0)} + \bar{V}_{B_2B_1}^{(0)},$$

где

$$\bar{V}_{ED}^{(0)} = \bar{\omega}_4 \times \bar{r}_{DE}; \quad \bar{V}_{DC_3}^{(0)} = \bar{\omega}_3 \times \bar{r}_{C_3D}; \quad \bar{V}_{C_3C_2}^{(0)} = A_{03}\,\bar{\dot{S}}_{32};$$

$$\bar{V}_{C_2B_2}^{(0)} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{B_2C_2}; \quad \bar{V}_{B_2B_1}^{(0)} = A_{02}\,\bar{\dot{S}}_{21}.$$

Ускорение центра схвата a_E также можно определить двумя способами: 1) путем дифференцирования выражений проекций скорости $V_E^{x_0}$, $V_E^{y_0}$, $V_E^{z_0}$; 2) на основании векторных формул сложения ускорений.

Выражения проекций скоростей и ускорений других точек, в частности центров масс звеньев, могут быть получены аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З. Коловский, А.В. Слоущ. –М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1988. – 240 с.
2. Лебедев, П.А. Кинематика пространственных механизмов / П.А. Лебедев. – М., Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.
3. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз., 1961. – 824 с.
4. Филонов, И.П. Определение кинематических характеристик звеньев манипулятора с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 40 с.

Поступила 31.10.11