МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Теория механизмов и машин»

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В МАШИНАХ

Методическое пособие к лабораторным работам

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теория механизмов и машин»

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В МАШИНАХ

Методическое пособие к лабораторным работам
по дисциплине «Колебания в машинах»
для студентов машиностроительных специальностей

Минск
БНТУ
2013

УДК 60.001.11:531.8(076.5)
ББК 34.41я73
М74

Авторы:
В. В. Кудин, *А. М. Авсиевич*, *Э. И. Астахов*,
М. В. Кудин, *А. А. Сухоцкий*

Рецензенты:
А. Т. Скойбеда, *В. И. Туромша*

Моделирование колебательных процессов в машинах : учебно-методическое пособие к лабораторным работам по дисциплине «Колебания в машинах» для студентов машиностроительных специальностей / В. В. Кудин [и др.]. – Минск : БНТУ, 2013 – 33 с.
М74
ISBN 978-985-525-997-9.

Методическое пособие представляет собой математическое и компьютерное моделирование собственных и вынужденных колебаний механической системы с одной и двумя степенями свободы. К каждой работе даются краткие теоретические сведения, математическое моделирование колебательных процессов в машинах, описание лабораторных установок или моделирования на ЭВМ исследуемых колебаний, порядок выполнения лабораторных работ, содержание отчета по работе, контрольные вопросы по теме.

Издание предназначено для студентов машиностроительных специальностей вузов по дисциплине «Колебания в машинах», а также может быть использовано на учебных курсах «Теория механизмов и машин», «Динамика машин» и др.

УДК 60.001.11:531.8(076.5)
ББК 34.41я73

ISBN 978-985-525-997-9

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 5к

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМАССОВОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВНЕШНЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Цель работы: моделирование колебаний одномассовой колебательной системы; исследование свободных затухающих и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы при полигармоническом внешнем воздействии. Расчёт параметров колебательной системы на каждой из выделенных гармоник.

Основные теоретические положения

Процесс изменения параметра, который характеризуется многократным поочерёдным возрастанием и убыванием параметра во времени, называется колебательным процессом, а соответствующий параметр – колеблющейся величиной.

Система, способная при определённых условиях совершать колебания, называется колебательной системой. Колебательные процессы, происходящие в механических системах, называются механическими колебаниями.

Линейные системы с постоянными параметрами являются самыми простыми моделями.

На рис. 5.1 изображена модель механической колебательной системы с числом свободы, равным 1. Инерциальный элемент 5, например, масса m, движется прямолинейно в идеальных направляющих 4 вдоль оси *OX*. Он соединен с неподвижной стойкой 2 линейной пружиной 3 с коэффициентом жёсткости *c* и линейным демпфером 1 с коэффициентом сопротивления (демпфирования) b. На колеблющуюся массу m действует некоторая внешняя сила $F(t)$, являющаяся функцией времени.

Свободные колебания

Колебания, которые совершаются при отсутствии переменного внешнего воздействия и без поступления энергии извне, называются свободными колебаниями. Они происходят за счёт первоначального накопления энергии, величина которой определяется перемещением и скоростью, заданными системе в некоторый начальный момент времени.

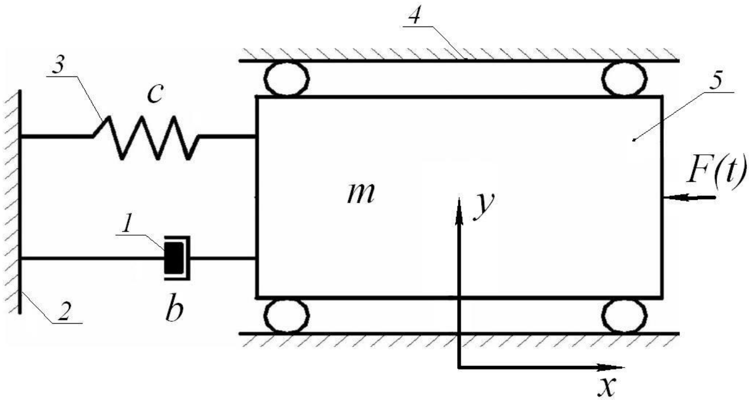

Рис. 5.1. Механическая система с одной степенью свободы

Уравнение свободных колебаний

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \qquad (5.1)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{a}} = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – частота свободных колебаний;

c – коэффициент жесткости упругого элемента;

$a = m$ – инерциальный коэффициент (масса).

Период свободных колебаний

$$T = 2\pi / k.$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.1) имеет вид

$$q = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \qquad (5.2)$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий: при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, тогда

$$c_1 = q_0, \quad c_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

Уравнение (5.2) может быть записано в виде

$$q = A\sin(kt + \beta), \tag{5.3}$$

где $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{q_0^2 + (\frac{\dot{q}_0}{k})^2}$ – амплитуда свободных колебаний;

$\beta = \mathrm{arctg}(c_1 / c_2)$ – начальная фаза.

Из уравнений (5.2) и (5.3) следует, что свободные колебания являются гармоническими с амплитудой *A* и начальной фазой β.

Свободные затухающие колебания

Свободные затухающие колебания – колебания механической системы, на которую действуют упругие восстанавливающие силы и силы сопротивления. Силы сопротивления представляются как функции первой степени скорости ($R = bV = b\dot{q}$).

Затухающие колебания описываются однородным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0,$$

где $2n = b/a$ – коэффициент демпфирования, $n = b/2m$;

$k = \sqrt{c/a}$ – частота свободных колебаний.

При $n < k$ (слабое демпфирование) наблюдается колебательный процесс.

При $n \geq k$ колебательный процесс отсутствует, движение называется апериодическим.

Рассмотрим случаи затухающих свободных колебаний ($n < k$).

Частота затухающих колебаний

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2} .$$

Период затухающих колебаний

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} .$$

Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$q^* = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) \tag{5.4}$$

или

$$q^* = A^* e^{-nt} \sin(k^* t + \beta^*) , \tag{5.5}$$

где $A^* = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\beta^* = \mathrm{arctg} \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{q_0 \sqrt{k^2 - n^2}}$ – начальная фаза.

Движение, соответствующее уравнениям (5.4) и (5.5), имеет колебательный характер и представлено на рис. 5.2.

Логарифмический декремент колебаний есть натуральный логарифм отношения двух последовательных максимумов либо минимумов отклонений системы от равновесного положения за полупериод колебаний:

$$\ln D = \ln \frac{A_2}{A_1} = n \frac{T^*}{2} .$$

Это позволяет сравнить диссипативные свойства колебательных систем.

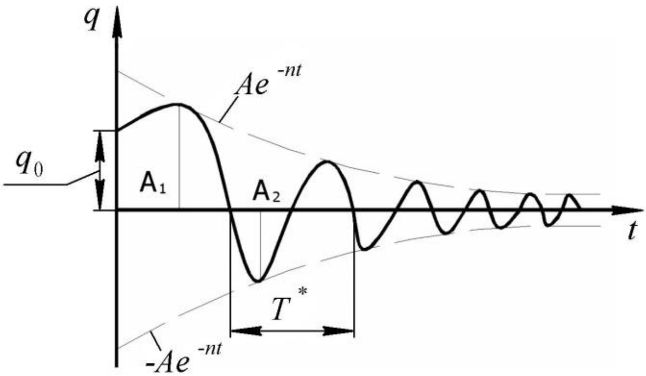

Рис. 5.2. Затухающие колебания

Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями механической системы называются колебания, вызванные внешним переменным воздействием.

В случае вынужденных механических колебаний дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{1}{m} F(t)\,. \tag{5.6}$$

Рассмотрим правую часть уравнения (5.6), которая выражает вынужденные колебания системы. Возмущающая сила $F(t)$ во многих областях техники является периодической силой, т. е. силой, любые значения которой повторяются через равные отрезки времени. Наименьшее из значений времени $T_в$ называется периодом внешнего воздействия, тогда величина

$$p = 2\pi / T_в$$

называется основной частотой возмущающей силы.

Периодическая функция $F(t)$, период $T_в$ и частота p могут быть представлены рядом Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jpt + b_j \sin jpt), \qquad (5.7)$$

где $a_0 = \dfrac{1}{T_в}\int\limits_0^{T_в} F(t)\,\mathrm{d}t$ – постоянная составляющая;

$a_j = \dfrac{2}{T_в}\int\limits_0^{T_в} F(t)\cos jpt\,\mathrm{d}t$, $b_j = \dfrac{2}{T_в}\int\limits_0^{T_в} F(t)\sin jpt\,\mathrm{d}t$ – коэффициенты ряда;

j = 1, 2, 3, …, ∞ – номер гармоники, кратный основной частоте внешнего воздействия.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет следующий вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jpt + b_j \sin jpt).$$

Общее уравнение

$$q = q^* + q^{**},$$

где $q^* = e^{-nt}(C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t)$ – для случая слабого сопротивления ($n < k$);

$$q^{**} = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cos jpt + B_j \sin jpt),$$

$$A_0 = \frac{a_0}{mk^2} = \frac{a_0}{c},$$

где $A_j = \dfrac{(k^2 - j^2 p^2)a_j - 2njpb_j}{m[(k^2 - j^2 p^2)^2 + 4n^2 j^2 p^2]}$,

$B_j = \dfrac{(k^2 - j^2 p^2)b_j - 2njpb_j}{m[(k^2 - j^2 p^2)^2 + 4n^2 j^2 p^2]}$ – постоянные коэффициенты.

Если внешнее воздействие (правую часть уравнения (5.7)) представить в виде

$$F(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Hj \sin(jpt + \delta_j),$$

где $H_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ – амплитуда j-й гармоники внешнего воздействия;

$\delta_j = \mathrm{arctg}(a_j / b_j)$ – начальная фаза j-й гармоники внешнего воздействия, то общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

$$q = A_0 + Ae^{-nt} \sin(k * t + \beta) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{j\text{в}} b \sin(jpt + Q_{j\text{в}}),$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда затухающих свободных колебаний;

$\beta = \mathrm{arctg}(C_1 / C_2)$ – начальная фаза затухающих колебаний;

$A_{j\text{в}} = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$ – амплитуда вынужденных колебаний j-й гармоники;

$Q_{j\text{в}} = \mathrm{arctg}(A_j / B_j)$ – начальная фаза вынужденных колебаний j-й гармоники.

Второе слагаемое с ростом параметра t исчезает (свободные колебания затухают), следовательно, остаются только вынужденные колебания , уравнение которых имеет вид

$$q = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_{j\text{в}} b \sin(jpt + Q_{j\text{в}})$$

Качественные параметры, характеризующие колебательный процесс

Коэффициент динамичности j-й гармоники

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p_j^2}{k^2})^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p_j}{k}\right)^2}},$$

где $p_j = jp$ – частота j-й гармоники.

Коэффициент виброизоляции на j-й гармонике

$$K_{Rj} = \frac{\sqrt{k^4 + 4n^2 p_j^2}}{\sqrt{(k^2 - p_j^2)^2 + 4n^2 p_j^2}}.$$

Величина силы, передаваемой на основание j-й гармоники:

$$R_j = \frac{h_j m\sqrt{k^4 + 4n^2 p_j^2}}{\sqrt{(k^2 - p_j^2)^2 + 4n^2 p_j^2}},$$

где $h_j m$ – амплитуда j-й гармоники внешнего воздействия.

Коэффициенты динамичности, виброизоляции характеризуют качество виброизолирующих свойств колебательной системы с одной степенью свободы.

Порядок выполнения работы

I. До расчетов на ЭВМ

1. Составить схему динамической модели механической колебательной системы с одной степенью свободы.
2. Выбрать исходные данные (задаются руководителем).
3. Записать дифференциальное уравнение свободных колебаний.

4. Определить частоту и период свободных колебаний, постоянные интегрирования c_1, c_2. Вычислить амплитуду свободных колебаний и начальную фазу. Записать дифференциальное уравнение свободных колебаний со своими числовыми значениями амплитуды, частоты и начальной фазы и дать анализ.

5. Определить коэффициент демпфирования колебаний n, частоту, период амплитуду и начальную фазу затухающих колебаний. Записать дифференциальное уравнение затухающих колебаний в общем виде и с рассчитанными значениями. Определить логарифмический декремент колебаний. Произвести анализ.

6. Записать в общем виде диффернциальное уравнение вынужденых колебаний.

7. Расчитать основную частоту p вынуждающей силы $F(t)$, принимая, что в экспериментальном графике значения аргумента есть значения времени t.

8. Записать уравнение периодической функции вынуждающей силы в виде гармоник ряда Фурье и уравнения для расчета коэффициентов ряда.

II. Расчет на ЭВМ

1. Открыть файл «ЛР5К.xls». Выбрать лист «Свободные и затухающие». В поля, помеченные цветом, ввести исходные данные. Распечатать лист (объем распечатки 1 страница).

2. Выбрать лист «Вынужденные колебания». В поля, помеченные цветом, ввести численные значения вынуждающей силы согласно заданному графику. Распечатать лист (объем распечатки 2 страницы).

III. После расчета на ЭВМ

1. Сделать вывод о характере зависимости обобщенной координаты q от времени t для свободных колебаний.

2. Сравнить полученный экспериментальный график $q^*(t)$ для затухающих колебаний с графиком на рис. 5.2 и сделать вывод о характере зависимости обобщенной координаты q^* от времени t для затухающих колебаний. Определить из графика время затухания $t_{зат}$.

3. Используя график и таблицу значений $q^*(t)$, определить логарифмический декремент колебаний, сравнить его с рассчитанным теоретическим значением.

4. По результатам расчета и графикам гармоник $F(t)$ сделать заключение о достаточности (j = 3) трех гармоник для описания экспериментальной зависимости $F(t)$.

5. Проанализировать изменение вынужденных колебаний по гармоникам и суммарной величины.

Контрольные вопросы

1. Что называется колебательным процессом?
2. Какие колебания называются свободными?
3. Записать уравнение, частоту и период свободных колебаний.
4. Какие колебания называются затухающими?
5. Что такое коэффициент демпфирования?
6. Дать понятие частоты и периода затухающих колебаний.
7. Логарифмический декремент затухания (определение и формула).
8. Дать понятие апериодического движения
9. Вынужденные колебания (определение).
10. Уравнение вынужденных колебаний.
11. Дать понятие о разложении функции $F(t)$ в ряд Фурье.
12. Записать формулы расчёта амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний на j-й гармонике.
13. Записать частотный спектр вынуждающей силы и вынужденных колебаний.
14. В каких случаях вынужденные колебания являются периодическими и в каких апериодическими?

Лабораторная работа № 6к

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Цель работы: определение параметров и анализ собственных колебаний механической системы с двумя степенями свободы в физических (реальных) и главных координатах.

Основные теоретические положения

Колебания механических систем с несколькими степенями свободы описываются системой дифференциальных уравнений 2-го порядка, получаемых из уравнений Лагранжа 2-го рода. Для линейных механических систем с постоянными параметрами (рис. 6.1) с двумя степенями свободы дифференциальные уравнения свободных колебаний без учета вязкого трения выглядят в общем случае следующим образом [1, 2]:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

где a_{ij} – инерционные коэффициенты, определяемые из формулы кинетической энергии системы;

c_{ij} – коэффициенты жесткости, определяемые из формулы потенциальной энергии системы;

q_1 – обобщенные координаты отдельных степеней свободы;

$\ddot{q}_1$ – ускорение по 1-м координатам, $i = j = 1; 2$.

Кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \tag{6.2}$$

где $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости инерционных элементов ($\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i / \mathrm{d}t$).

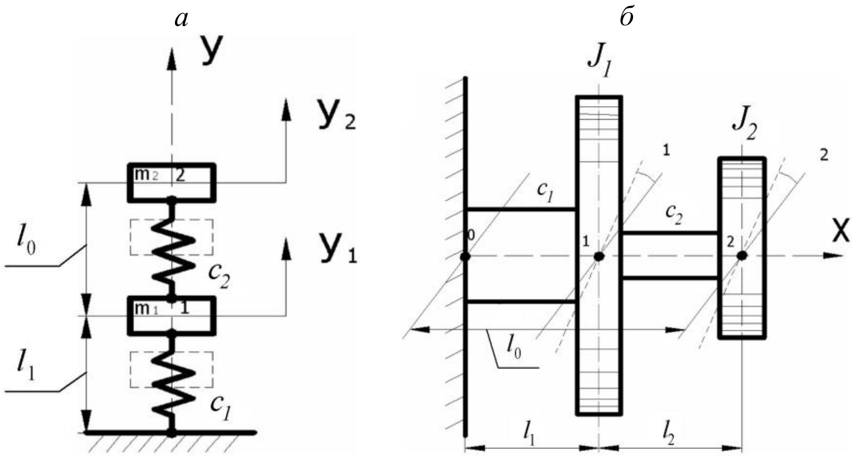

Рис. 6.1. Схемы колебательных систем:
а – с поступательными массами; *б* – с дисками на упругих валах

Потенциальная энергия такой схемы

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1 q_2 + c_{22}q_2^2\right). \qquad (6.3)$$

Для механической системы с двумя подпружиненными поступательными массами m_1 и m_2 (рис. 6.1, *а*) $q_1 = y_1$, $q_2 = y_2$.

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2\right). \qquad (6.4)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\left[c_1 y_1^2 - c_2\left(y_2 - y_1\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(c_1 + c_2\right)y_1^2 - 2c_2 y_1 y_2 + c_2 y_2^2\right]. \quad (6.5)$$

Для системы с двумя дисками (рис. 6.1, б) с осевыми моментами инерции J_1 и J_2, закрепленными на упругих валах с угловыми жесткостями c_1 и c_2:

$$q_1 = \varphi_1, \qquad q_2 = \varphi_2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2\right),$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\left[c_1\varphi_1^2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[(c_1 + c_2)\varphi_1^2 - 2c_2\varphi_1\varphi_2 + c_2\varphi_2^2\right].$$

Сравнивая выражение кинетической энергии (6.2) с кинетической энергией по формуле (6.4), получаем инерционные коэффициенты a_{ij} для данной схемы, а сравнивая выражение (6.3) потенциальной энергии с формулами (6.5), получаем коэффициенты жесткости c_{ij} схемы (рис. 6.1, *б*).

Для схемы на рис. 6.1, *а* $a_{11} = m_1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = m_2$.

Для схемы на рис. 6.1, *б* $a_{11} = J_1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = J_2$.

Для обеих схем $c_{11} = c_1 + c_2$, $c_{12} = c_{21} = -c_2$, $c_{22} = c_2$.

Решение системы уравнений (6.1) 2-го порядка, как известно, приводит к следующему частотному уравнению 4-й степени [1]:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)K^4 - \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2c_{12}a_{12}\right)K^2 + \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right) = 0 \quad (6.6)$$

или

$$A_k K^4 - B_k K^2 + C_k = 0,$$

где A_k, B_k, C_k – коэффициенты уравнения (6.6), которые равны

$$A_k = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right),\ C_k = \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right),$$
$$B_k = \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2c_{12}a_{12}\right).$$

Отсюда определяются угловые частоты K собственных колебаний системы:

$$K_{1,2} = +\sqrt{-\frac{B_k}{2A_k} \pm \sqrt{\left(\frac{B_k}{2A_k}\right)^2 - \frac{C_k}{A_k}}}\,. \quad (6.7)$$

Из уравнений (6.6) и (6.7) угловые частоты K_1 и K_2, как положительные действительные числа, могут быть получены при следующих ограничениях на параметры системы:

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$
$$c_{11} > 0, \qquad c_{22} > 0, \qquad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Соответствующие этим частотам колебания называют главными колебаниями системы. Меньшую из частот K, называют основной частотой, а первое главное колебание этой частоты – основным колебанием.

Определив K_1 и K_2, находят значения коэффициентов распределения μ_1 и μ_2 , представляющих собой отношение обобщенных координат q или амплитуд A колебаний и называемых формами главных колебаний:

$$\mu = -\frac{q_2}{q_1} = -\frac{A_2}{A_1},$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{c_{11} - a_{11}K_1^2}{c_{12} - a_{12}K_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}K_1^2}{c_{22} - a_{22}K_1^2}, \\ \mu_2 &= -\frac{c_{11} - a_{11}K_2^2}{c_{12} - a_{12}K_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}K_2^2}{c_{22} - a_{22}K_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Из уравнений (6.8) следует, что формы главных колебаний системы не зависят от начальных условий и так же, как и частоты колебаний, определяются только параметрами системы.

Тогда уравнения, определяющие первое главное колебание, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(K_1 t + \beta_1), \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A_1^{(1)} \sin(K_1 t + \beta_1), \end{aligned}\right\}$$

где β_1 – начальная фаза, соответствующая частоте колебаний K_1.

Аналогично для второго главного колебания

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(K_2 t + \beta_2), \\ q_2^{(2)} &= \mu_2 A_1^{(2)} \sin(K_2 t + \beta_2), \end{aligned}\right\}$$

где β_2 – начальная фаза, соответствующая частоте колебаний K_2.

Анализ этих уравнений показывает, что если система совершает одно из главных колебаний, то обе обобщенные координаты изменяются по гармоническому закону с одинаковой частотой и начальной фазой. Это означает, что обе координаты изменяются синхронно.

Общее решение системы дифференциальных уравнений получается путем суммирования первого и второго главных колебаний:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(K_1 t + \beta_1) + A_1^{(2)} \sin(K_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= \mu_1 A_1^{(1)} \sin(K_1 t + \beta_1) + \mu_2 A_1^{(2)} \sin(K_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

Неизвестные $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, β_1, β_2 в уравнениях (6.9) определяются по начальным условиям, т. е. при $t = 0$:

$$q_1 = q_{10}, \quad q_2 = q_{20}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20},$$

тогда получим систему

$$\begin{cases} q_{10} = A_1^{(1)} \sin\beta_1 + A_1^{(2)} \sin\beta_2, \\ \dot{q}_{10} = A_1^{(1)} \cos\beta_1 + A_1^{(2)} \cos\beta_2, \\ q_{20} = \mu_1 A_1^{(1)} \sin\beta_1 + \mu_2 A_1^{(2)} \sin\beta_2, \\ \dot{q}_{20} = \mu_1 A_1^{(1)} \cos\beta_1 + \mu_2 A_1^{(2)} \cos\beta_2, \end{cases}$$

решая которую, определяем $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, β_1 и β_2.

Общее колебание, определяемое из (6.9), не является простым гармоническим, т.к. результирующее движение представляет собой сумму двух движений различной частоты K_1 и K_2.

Главные формы колебаний характеризуются разными значениями амплитуд, т. е.

а) на частоте K_1 соответственно $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)} = \mu_1 A_1^{(1)}$;

б) на частоте K_2 соответственно $A_1^{(2)}$ и $A_2^{(2)} = \mu_2 A_1^{(2)}$;

в) минимальные размеры l_1 и l_2 выбираются произвольно.

С помощью графиков форм колебаний (рис. 6.2), характеризующих изменение амплитуд на частотах K_1 и K_2, определяют наличие и положение узловых точек, в которых значение амплитуд равно нулю.

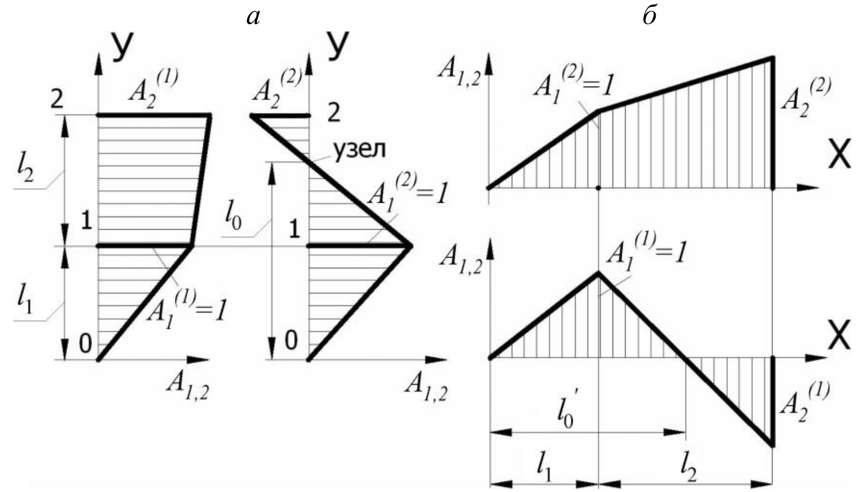

Рис. 6.2. Формы собственных колебаний:
а – для схемы на рис. 6.1, *а*; *б* – для схемы на рис. 6.1, *б*

Главными координатами механической системы называют обобщенные координаты, выбранные таким образом, чтобы выражения кинетической и потенциальной энергии содержали лишь квадраты обобщенных скоростей.

В этом случае дифференциальные уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\ddot{\eta}_1 + c_1\eta_1 = 0, \\ a_2\ddot{\eta}_2 + c_2\eta_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения независимы и могут быть решены раздельно. Однако частоты K_1 и K_2 остаются теми же, что и при выборе произвольных (физических) обобщенных координат.

В этом случае $q_1 = \eta_1 + \eta_2$, $q_2 = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2$.

Отсюда главные координаты равны:

$$\eta_1 = \frac{q_2 - \mu_2 q_1}{\mu_1 - \mu_2}, \qquad \eta_2 = \frac{\mu_1 q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Введение главных координат не упрощает вычислений, но имеет важное теоретическое значение. Уравнения колебаний в главных координатах являются гармоническими с частотами K_1 и K_2:

$$\eta_1(t) = C_{\eta 1}\sin(K_1 t + \beta_1),$$
$$\eta_2(t) = C_{\eta 2}\sin(K_2 t + \beta_2).$$

Моделирование свободных колебаний двухмассовой колебательной системы

Моделирование свободных колебаний системы с двумя степенями свободы осуществляется на персональном компьютере с использованием пакета программ LP6к2012.

После загрузки пакета на экране монитора высвечивается заставка лабораторной работы № 6к2 с приглашением к работе. После регистрации студента высвечивается окно выбора схемы колебательной системы с поступательными массами или с дисками на упругих валах. Далее для принятой схемы высвечивается окно ввода исходных данных. Нажатие кнопки «Расчет» завершает процесс ввода данных и запускает их проверку на предмет получения положительных значений частот K_1 и K_2 главных колебаний.

Затем программный блок вычисляет K_1, K_2, μ_1, μ_2, а также $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, β_1 и β_2 по начальным условиям и выдает окно результатов вычислений.

На экране монитора строятся графики.

Далее предлагается вызвать окно «Графики», на котором в соответствующей вкладке предлагается изучить графики главных форм колебаний, а также $q_1(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $q_2(t)$, $\dot{q}_2(t)$, фазовые траектории $\dot{q}_1(q_1)$, $\dot{q}_2(q_2)$, а также $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$.

Завершающий этап моделирования свободных колебаний двухмассовой колебательной системы сводится к распечатке результатов расчета свободных колебаний.

Порядок выполнения работы

I. До расчетов на ЭВМ

1. Составить схему колебательной системы. При этом выбирается одна из схем, заложенных в программном обеспечении LP6к2012 (с линейным перемещением масс либо с угловыми (крутильными) перемещениями).

2. По заданным массам (моментам инерции) и коэффициентам жесткости определить инерционные и жесткостные коэффициенты.

3. Выбрать начальные условия системы при $t = 0$ (q_{10}, $\dot{q}_{10}$, q_{20}, $\dot{q}_{20}$).

4. Записать дифференциальные уравнения свободных колебаний.

5. Решая частотное уравнение, определить собственные частоты главных форм колебаний, а затем коэффициенты распределения (K_1, K_2, μ_1, μ_2).

6. Получить у преподавателя допуск к выполнению расчета на ЭВМ.

II. Расчет на ЭВМ

1. Загрузить программний пакет «LP6к2012». Зарегистрироваться.
2. Выбрать соответствующую схему колебательной системы.
3. Ввести исходные данные.
4. Выполнить расчет.
5. Проверить правильность ввода исходных данных.
6. Посмотреть результаты расчетов коэффициентов распределения (K_1, K_2, μ_1, μ_2).
7. Посмотреть все построенные графики.
8. Запустить печать результатов.

III. Анализ свободных колебаний

1. В компьютерной распечатке на графиках форм главных колебаний найти и обозначить узловые точки согласно рис. 6.2.

2. Выполнить анализ всех представленных на распечатке графиков и сделать выводы по работе. В ходе анализа необходимо:

2.1. Для графиков $q_1(t)$, $\dot{q}_1(t)$, $q_2(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\eta_1(t)$ $\eta_2(t)$ оценить форму колебаний (гармонические или негармонические), для гармонических графиков определить продолжительность (время) одного цикла (периода) колебаний.

2.2. На всех графиках определить амплитуду колебаний.

2.3. Дать оценку характера колебаний (устойчивые или неустойчивые).

Форма протокола и отчет по лабораторной работе приведен в прил. 2.

Контрольные вопросы

1. Назовите или нарисуйте механическую колебательную систему с двумя и более степенями свободы.
2. Запишите дифференциальные уравнения свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы.
3. Запишите выражения кинетической и потенциальной энергий системы с двумя степенями свободы.
4. Как определяются инерционные a_{ij} и жескостные c_{ij} коэффициенты колебательной системы с двумя степенями свободы?
5. Дайте понятие о главных колебаниях, основной частоте.
6. Что такое форма колебаний, узловые точки?
7. Какими являются зависимости обобщенных координат от времени $q_1(t)$, $q_2(t)$?
8. Как выражаются амплитуды A главных собственных колебаний на частотах K_1 и K_2?
9. Дайте понятие о главных координатах η и их зависимостях $\eta(t)$.
10. Что такое фазовая плоскость, фазовый портрет колебания?

Литература

1. Астахов, Э.И., Кудин, В.В. Колебания в машинах и методы их устранения: учебно–методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей. – Минск: БГПА, 1997. – 130 с.

2. Колебания в машинах: Лабораторные работы для студентов специальностей 1–36 01 01 «Технология машиностроения» и 1–36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / сост.: Э.И.Астахов, В.В.Кудин, М.В.Кудин. – Минск: БНТУ, 2005 – 99 с.

3. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.

4. Горов, Э.А. Гайдай, С.А., Лушников, С.В. Типовой лабораторный практикум по теории механизмов и машин: учебное пособие для студентов втузов. – М.: Машиностроение, 1990. – 160 с.

5. Лабораторный практикум по теории колебаний/ Г.Н.Бухаринов [и др.] – Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1965. –79 с.

6. Левитский, Н.И. Колебания в механизмах: учебн. пособие для втузов. –М.: Наука, 1988. – 336 с.

7. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – 3–е изд., доп. и перераб. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд–ние, 1976. – 320 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Теория механизмов и машин»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 5к
по курсу «Колебания в машинах»
«МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМАССОВОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВНЕШНЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ»

Студент гр. 103999 ______________ Иванов И. И.
Руководитель ______________ Сидоров С. С.

1. **Цель работы**: ознакомление с основными теоретическими положениями по расчёту параметров одномассовой колебательной системы; исследование свободных затухающих и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы при полигармоническом внешнем воздействии. Расчёт параметров колебательной системы на каждой из выделенных гармоник.

2.

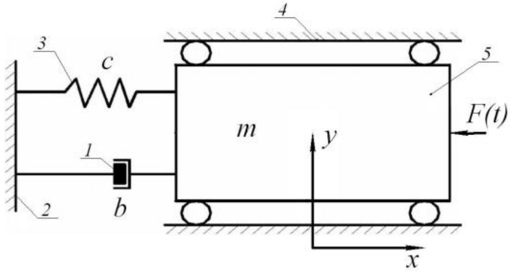

Рисунок – Динамическая модель колебательной системы

3. **Исходные данные**. m =12 кг, c = 5000 н/м, b=100 Н·с/м, q_0 = 0,05 м, $\dot{q}_0$ = 1,2 м/с.

График возбуждающей силы в зависимости от времени:

t, c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, H	0	500	1000	1500	1000	500	100	-200	-400	0

4. **Параметры свободных колебаний**.

Уравнение свободных колебаний:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 . \qquad (1)$$

Частота свободных колебаний, $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{5000}{12}} = 20{,}41$ рад/с.

Период свободных колебаний: $T = 2\pi / k = 2 \cdot 3{,}1416 / 20{,}41 = 0{,}308$ с.

Общее решение уравнения (1):

$q = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$, (2) или $q = A \sin(kt + \beta)$ (3).

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяем из начальных условий: при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$,

$$c_1 = q_0 = 0{,}05 \text{ м}, \quad c_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} = \frac{1{,}2}{20{,}41} = 0{,}059 \text{ м.}$$

Амплитуда свободных колебаний

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}059^2} = 0{,}077 \text{ м.}$$

Начальная фаза свободных колебаний:

$\varphi = \mathrm{arctg}(c_1 / c_2) = \mathrm{arctg}(0{,}05 / 0{,}059) = 0{,}705$ рад = 40,4 градуса.

Уравнения свободных колебаний:

$q = 0{,}05 \cos 20{,}41t + 0{,}059 \sin 20{,}41t$ или $q = 0{,}077 \sin(20{,}41t + 0{,}705)$.

5. **Параметры затухающих колебаний.**

Коэффициент демпфирования $n = b / 2m = 100 / 2 \cdot 24 = 4{,}17$ с$^{-1}$.

Частота затухающих колебаний:

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{20{,}41^2 - 4{,}17^2} = 19{,}98 \text{ рад/с.}$$

Период $T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2 \cdot \pi}{19{,}98} = 0{,}314$ с.

Амплитуда

$$A^* = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}} = \sqrt{0{,}05^2 + \frac{(1{,}2 + 4{,}17 \cdot 0{,}05)^2}{20{,}41^2 - 4{,}17^2}} = 0{,}086 \text{ м.}$$

Начальная фаза

$$\varphi^* = arctg \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{q_0 \sqrt{k^2 - n^2}} = arctg \frac{1{,}2 + 4{,}17 \cdot 0{,}05}{0{,}05\sqrt{20{,}41^2 - 4{,}17^2}} = 0{,}954 \text{ рад.}$$

Решение уравнение затухающих колебаний:

$q^* = A^* \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k^* \cdot t + \varphi) = 0{,}086 \cdot e^{-4{,}17t} \cdot \sin(19{,}98 \cdot t + 0{,}954)$ – выполняется на ЭВМ с построением графика.

Логарифмический декремент колебаний

$\ln D = n\dfrac{T^*}{2} = 4{,}17 \cdot \dfrac{0{,}314}{2} = 0{,}655$. Время затухания $t_{зат} \approx 1{,}0$ с.

6. **Параметры вынужденных колебаний.**

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{1}{a}F(t) . \qquad (4)$$

Представление $F(t)$ в виде ряда Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jpt + b_j \sin jpt) ,$$

где $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^{T_в} F(t)\,\mathrm{d}t$ – постоянная составляющая;

$a_j = \dfrac{2}{T_в}\int_0^{T_в} F(t)\cos jpt\,\mathrm{d}t$, $b_j = \dfrac{2}{T_в}\int_0^{T_в} F(t)\sin jpt\,\mathrm{d}t$ – коэффициенты ряда Фурье;

$T_в$ – период изменения возмущающей силы $F(t)$;

j – номер гармоники, кратной основной частоте возмущающей силы.

Основная частота возмущающей силы

$$p = \frac{2\pi}{T_в} = \frac{2\pi}{t_{посл} - t_{нач}} = \frac{2\pi}{9-0} = 0{,}698 \text{ рад/с}.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{3}(a_j \cos jpt + b_j \sin jpt)$$

или

$$\ddot{q} + 8{,}34\dot{q} + 20{,}41^2 q = \frac{a_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{3}(a_j \cos j \cdot 0{,}698t + b_j \sin j \cdot 0{,}698t) . \qquad (5)$$

Коэффициенты для разложения вынуждающей силы в ряд Фурье определяются с помощью ЭВМ:

Амплитуды гармоник: $a_0 =$, $A_{k1} =$, $A_{k2} =$, $A_{k3} =$.

Начальные фазы : $\delta_1 =$, $\delta_2 =$, $\delta_3 =$.

Параметры вынужденных колебаний рассчитаны с помощью ЭВМ. Амплитуды гармоник: $A_0 =$, $A_{1В} =$, $A_{2В} =$, $A_{3В} =$

Начальные фазы : $\Theta_1 =$, $\Theta_2 =$, $\Theta_3 =$.

Моделирование вынужденных колебаний представлено в виде графиков по каждой гармонике и суммы гармоник.

Анализ вынужденных колебаний: ……..

Выводы по работе:

1) ….
2) …..

Исходные данные к лабораторной работе 5К

1) параметры колебательной системы:

№ варианта	Масса m, кг	Жесткость c, Н/м	Коэффициент сопротивления b, Н·с/м	Начальная координата q_0, м	Начальная скорость $\dot{q}_0$, м/с
1	20	4000	135	0,02	0,8
2	15	3000	110	0,01	0,5
3	30	8000	150	0,04	1,4
4	25	10 000	170	0,03	1,1
5	40	11 000	200	0,05	1,5
6	30	10 500	210	0,04	0,9
7	50	10 000	240	0,06	1,7
8	35	9000	220	0,04	1,0
9	60	15 000	270	0,02	1,1
10	45	14 000	245	0,03	1,2
11	80	18 500	350	0,01	1,5
12	65	17 000	320	0,06	1,6
13	100	20 000	450	0,05	1,2
14	85	19 000	425	0,01	0,9
15	75	18 000	390	0,02	1,1

2) Значения возбуждающей силы в зависимости от времени $F(t)$:

Вариант	№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	F, Н	0	500	1000	1500	1000	500	100	–200	– 400	0
2	t, с	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	F, Н	0	1000	2000	1000	0	– 400	– 800	– 600	– 400	0
3	t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
	F, Н	200	500	700	400	200	100	– 100	– 200	0	200
4	t, с	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
	F, Н	0	400	900	500	100	0	– 200	– 300	– 100	0
5	t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	F, Н	1000	700	500	200	100	0	200	800	1200	1000
6	t, с	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	F, Н	500	700	1000	600	200	– 100	100	200	400	500
7	t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
	F, Н	0	250	450	700	800	750	500	350	100	0
8	t, с	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
	F, Н	250	800	1000	400	100	200	500	600	400	250
9	t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	F, Н	400	600	700	800	600	500	300	200	300	400
10	t, с	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	F, Н	800	500	300	200	0	– 100	– 200	200	400	800

Вариант	№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	*t*, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
	F, Н	500	250	0	– 250	0	250	500	500	500	500
12	*t*, с	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
	F, Н	200	300	500	500	500	800	800	700	400	200
13	*t*, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	F, Н	400	200	200	100	– 100	0	100	100	200	400
14	*t*, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
	F, Н	100	500	800	1000	900	400	300	200	100	100
15	*t*, с	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
	F, Н	0	250	300	400	500	600	450	350	200	0

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теория механизмов и машин»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 6к

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Студент __________ № группы _________дата _________

1. Цель работы.

2. Схема колебательной системы

3. Исходные данные:

Вариант №__

параметры

начальные условия

4. Дифференциальные уравнения свободных колебаний

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

5. Расчет инерционных и жесткостных коэффициентов колебательной системы.

6. Расчет K_1, K_2 главных колебаний системы, а также коэффициентов распределения μ_1 и μ_2 (формы главных колебаний).

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)K^4 - \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2c_{12}a_{12}\right)K^2 + \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right) = 0$$

или

$$A_k K^4 - B_k K^2 + C_k = 0,$$

где A_k, B_k, C_k – коэффициенты уравнения, которые равны:

$$A_k = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) = \ldots$$

$$C_k = \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right) = \ldots$$

$B_k = \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2c_{12}a_{12}\right) =$

Тогда угловые частоты K собственных колебаний системы:

$$K_1 = +\sqrt{-\frac{B_k}{2A_k} + \sqrt{\left(\frac{B_k}{2A_k}\right)^2} - \frac{C_k}{A_k}} = \ldots$$

$$K_{1,2} = +\sqrt{-\frac{B_k}{2A_k} - \sqrt{\left(\frac{B_k}{2A_k}\right)^2} - \frac{C_k}{A_k}} = \ldots$$

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}K_1^2}{c_{12} - a_{12}K_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}K_1^2}{c_{22} - a_{22}K_1^2} = \ldots$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}K_2^2}{c_{12} - a_{12}K_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}K_2^2}{c_{22} - a_{22}K_2^2} = \ldots$$

7. Анализ результатов, выводы.
8. Компьютерная распечатка (на отдельных листах).

Исходные данные для лабораторной работы № 6к

1) колебательная система с поступательными массами:

№ варианта	Параметры системы				Начальные условия при $t=0$			
	m_1, кг	m_2, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	q_{10}, м	q_{20}, м	$\dot{q}_{10}$, м/с	$\dot{q}_{20}$, м/с
1.1	5	4	60	20	0,001	0,002	0,005	0,004
1.2	8	4	80	40	0,002	0,003	0,006	0,005
1.3	10	6	90	50	0,0015	0,0025	0,005	0,003
1.4	12	5	100	60	0,002	0,0025	0,004	0,002
1.5	15	10	120	80	0,003	0,0015	0,003	0,003
1.6	18	12	140	90	0,0025	0,0015	0,004	0,003
1.7	20	15	150	100	0,001	0,0015	0,005	0,004
1.8	22	14	160	120	0,002	0,002	0,006	0,004
1.9	25	15	180	100	0,003	0,003	0,005	0,006
1.10	30	18	200	120	0,004	0,0025	0,004	0,0025
1.11	32	15	220	100	0,005	0,003	0,002	0,001
1.12	35	20	250	120	0,003	0,001	0,0015	0,002
1.13	38	25	280	150	0,004	0,002	0,001	0,002
1.14	40	28	300	160	0,003	0,002	0,002	0,0015

2) колебательная система с вращательными массами:

№ варианта	Параметры системы				Начальные условия при $t=0$			
	J_1, $кг \cdot м^2$	J_2, $кг \cdot м^2$	c_1, $\frac{Н \cdot м}{рад}$	c_2, $\frac{Н \cdot м}{рад}$	q_{10}, рад	q_{20}, рад	$\dot{q}_{10}$, рад/с	$\dot{q}_{20}$, рад/с
2.1	0,4	0,6	160	240	0,005	0	2,5	1,5
2.2	0,5	0,3	180	200	0	0,004	3,0	2,0
2.3	0,6	0,5	200	250	0,003	0,002	4,0	5,0
2.4	0,7	0,4	240	200	0,004	0,005	5,0	6,0
2.5	0,8	0,5	300	280	0,003	0,004	2,0	4,0
2.6	0,5	0,6	260	300	0,002	0,001	2,5	3,0
2.7	0,4	0,5	250	210	0,003	0,005	3,0	2,0
2.8	0,3	0,4	210	250	0,004	0,006	4,0	3,0
2.9	0,7	0,8	200	260	0,005	0,003	5,0	4,0
2.10	0,6	0,6	180	120	0	0,005	6,0	8,0

Учебное издание

КУДИН Валентин Валентинович
АВСИЕВИЧ Андрей Михайлович
АСТАХОВ Эдуард Иванович и др.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В МАШИНАХ

Методическое пособие к лабораторным работам
по дисциплине «Колебания в машинах»
для студентов машиностроительных специальностей

Подписано в печать 05.12.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,92. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 150. Заказ 828.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.