

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством образования  
Республики Беларусь в качестве учебного пособия  
для студентов учреждений, обеспечивающих  
получение высшего образования  
по строительным специальностям*

Минск 2009

УДК 624.04(75.8)  
ББК 38.112я73  
Б82

**Рецензенты:**

кафедра «Строительные конструкции, здания и сооружения»  
Белорусско-Российского университета,  
заведующий кафедрой д-р техн. наук, профессор *С.Д. Семенюк*;  
доцент кафедры «Строительная механика»  
Белорусского государственного университета транспорта,  
д-р физ.-мат. наук *А.В. Яровая*

**Борисевич, А.А.**

Б82     Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич,  
Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.

ISBN 978-985-479-820-2

Рассмотрены основные положения расчета статически определенных и статически неопределимых стержневых систем на статические и динамические нагрузки и воздействия, изложены вопросы расчета упругих систем на устойчивость в деформированном состоянии, даны основы нелинейного расчета стержневых систем по деформированной схеме. Приведены примеры расчета.

УДК 624.04(75.8)  
ББК 38.112я73

ISBN 978-985-479-820-2

©А.А. Борисевич,  
Е.М. Сидорович  
В.И. Игнатюк, 2009  
© БНТУ, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие по строительной механике предназначено для студентов строительных специальностей высших учебных заведений. Оно соответствует учебной программе, по которой ведется подготовка инженеров-строителей специальности «Промышленное и гражданское строительство». Содержание предлагаемого изучению материала рассчитано на курс лекционных и практических занятий примерно 180–200 учебных часов.

В методическом отношении учебное пособие воспроизводит в значительно переработанном и дополненном виде содержание лекционных и практических занятий, проводившихся авторами в течение ряда лет со студентами Белорусского национального технического университета и Брестского государственного технического университета.

Наряду с изложением традиционных методов расчета, в пособии много внимания уделяется изучению подходов к автоматизации расчета и получению достоверных результатов.

Затронутые в книге вопросы могут представлять интерес для лиц, работающих в области приложений строительной механики к разработке проектно-вычислительных комплексов. Поэтому удельный вес отдельных глав несколько увеличен по сравнению с традиционным представлением об их содержании, и изложение сделано, по возможности, доступным для широкого круга читателей.

Не останавливаясь здесь на содержании учебного пособия, представление о котором можно получить по оглавлению, отметим, что:

предисловие, глава 1 раздел 1.7, главы 2, 7–11, 15, 16 написаны проф., д-ром техн. наук А.А. Борисевичем;

главы 1 (кроме раздела 1.7), 12, 13, 18–25 написаны проф., д-ром техн. наук Е.М. Сидоровичем;

главы 3–6, 14, 17 написаны доц., канд. техн. наук В.И. Игнатуком.

Замечания о недостатках учебного пособия авторами будут приняты с благодарностью.

## **ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

### **1.1. Задачи и методы строительной механики**

Строительная механика – это наука о принципах и методах определения в инженерных сооружениях внутренних сил и перемещений, вызванных разнообразными статическими и динамическими нагрузками и воздействиями. На основе найденных внутренних сил проверяется прочность элементов сооружения и его устойчивость в деформированном состоянии, а на основе найденных перемещений оценивается жесткость сооружения.

Строительную механику в широком смысле слова можно назвать теорией сооружений. При таком понимании в ее состав входят как отдельные части такие дисциплины, как сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем (строительная механика в узком смысле слова), строительная механика корабля, строительная механика ракет, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести и т. п. Между всеми этими дисциплинами существует тесная неразрывная связь.

В учебном плане подготовки инженеров-строителей строительная механика следует непосредственно за такой дисциплиной как сопротивление материалов. В сопротивлении материалов изучается работа под нагрузкой отдельных элементов: брусьев (стержней), пластин. В строительной механике изучается работа систем, составленных из стержней, пластин, массивов, соединительных и опорных устройств.

Основными задачами строительной механики являются: разработка методов определения внутренних сил в элементах и частях сооружений от разнообразных нагрузок и воздействий, разработка методов определения перемещений и деформаций, изучение законов образования сооружений, исследование условий устойчивости сооружений, исследование взаимодействия сооружений с окружающей средой, исследование изменений в напряженно-деформированном состоянии сооружений при длительной их эксплуатации.

В практическом отношении наиболее полно разработана так называемая прямая задача строительной механики: определение

напряженно-деформированного состояния сооружения при заданных нагрузках и воздействиях. При этом предполагается, что заданы также расчетная схема сооружения, свойства материалов и размеры его элементов. Такую прямую задачу строительной механики иногда называют поверочным расчетом сооружения.

Относительно свойств материалов уместно отметить, что в расчетах инженерных сооружений используются гипотеза о сплошности материалов, гипотеза об их однородности и изотропности, гипотеза о прямой пропорциональности между напряжениями и деформациями. Деформации элементов сооружения, в свою очередь, предполагаются малыми, что позволяет вести расчет большинства сооружений по так называемой недеформированной расчетной схеме.

Может быть сформулирована и обратная задача строительной механики: по заданным нагрузкам и воздействиям, по заданным основным габаритам будущего сооружения определить его конструктивную схему, материал и размеры его элементов, так чтобы сооружение было прочным, жестким и устойчивым. Такую обратную задачу строительной механики можно вполне справедливо называть основной задачей инженерного расчета.

Для решения своих задач строительная механика использует достижения теоретической механики, высшей и вычислительной математики, информатики и программирования, разрабатывает и применяет экспериментальные и теоретические методы. Экспериментальные методы базируются на испытаниях образцов, моделей и натурных сооружений. Теоретические методы строительной механики подразделяются на графические, аналитические и численные.

Если на начальном этапе своего развития строительная механика базировалась в основном на графических методах решения своих задач, то с развитием вычислительной техники стали все более применяться аналитические решения. Более того, вместо многочисленных частных методов и приемов, позволявших избегать решения систем совместных уравнений, в строительной механике в настоящее время на первое место вышли общие универсальные методы, численные и аналитические, позволяющие рассчитывать сложнейшие сооружения как единые деформируемые системы. При этом решение систем совместных линейных алгебраических уравнений с сотнями тысяч неизвестных перестало быть камнем преткновения. Компьютерные технологии позволили не только решать, но и

составлять системы уравнений высоких порядков, и главное, обобщать полученные результаты на экране монитора в привычном для инженера виде. Можно сказать, что совершен очередной виток спирали познания, и экран компьютера стал новым полем применения графических методов и приемов. Методы строительной механики, ориентированные на использование современных численных методов и компьютерных технологий, нашли широкое применение не только в строительстве, но и во многих других инженерных отраслях, связанных с расчетом разнообразных объектов.

Строительная механика – постоянно развивающаяся прикладная наука, основной целью которой является развитие и совершенствование аналитических и численных методов расчета сооружений, ориентированных на компьютерные технологии. Разрабатываются математические модели поведения в деформированном состоянии реальных материалов, уточняются условия нагружения и значения нагрузок, тепловых и иных воздействий. Все более применяются нелинейные методы расчета сооружений по деформированному состоянию, разрабатываются методы синтеза и оптимизации конструкций. Все теснее становится связь строительной механики с проектированием конструкций, с технологией их изготовления и возведения. Все это ведет к созданию более прочных, экономичных, надежных и долговечных зданий и сооружений.

## **1.2. Понятие о расчетной схеме сооружения и ее элементах**

При расчете сооружений обычно имеют дело не с самим сооружением, а с его расчетной схемой.

Расчетная схема сооружения представляет собой упрощенное изображение действительного сооружения. Выбор расчетной схемы является весьма важным и ответственным процессом. Расчетная схема должна по возможности ближе отражать действительную работу сооружения и, в то же время, по возможности облегчать как сам процесс расчета, так и процесс анализа результатов расчета.

Для того чтобы создать расчетную схему, достаточно точную и простую, необходимо иметь большой опыт в расчете сооружений, хорошо представлять работу рассчитываемого сооружения и влияние на эту работу отдельных элементов сооружения.

В зависимости от соотношения геометрических размеров различают следующие основные типы элементов, из которых может быть составлено сооружение: стержни, оболочки, пластинки, массивные тела, тонкостенные стержни, а также узловые соединения (узлы) и опорные устройства (опоры).

Стержнем называют прямолинейный или криволинейный пространственный элемент, у которого один размер (длина) значительно превышает два других.

Пространственный элемент, один размер (толщина) которого значительно меньше двух других, называется оболочкой, если он ограничен двумя криволинейными поверхностями, или пластинкой, если ограничен двумя плоскостями.

На расчетных схемах сооружений стержни заменяются их осевыми линиями (прямыми, кривыми или ломаными), а пластинки и оболочки – их срединными поверхностями (плоскими или криволинейными).

Под массивными телами (массивами) подразумеваются элементы сооружения и окружающей среды, у которых все три размера одного порядка (иногда и неограниченные), например: фундаменты, плотины, подпорные стены, грунтовые и скальные массивы.

Тонкостенными называют стержни, у которых все основные размеры имеют разные порядки: толщина существенно меньше размеров поперечного сечения, а размеры поперечного сечения существенно меньше длины.

Отдельные элементы (стержни, пластины), из которых составляется сооружение, объединяются в единую систему посредством узловых соединений, или просто узлов. Узлы могут быть шарнирными или жесткими.

Шарнирное соединение (или просто шарнир) рассматривается как устройство, допускающее взаимный поворот соединяемых элементов относительно центра шарнира. На расчетных схемах шарнир обозначается кружком. Силами трения в шарнирах обычно пренебрегают.

От элемента к элементу при шарнирном соединении передается только сосредоточенная сила, разлагаемая обычно на составляющие. При шарнирном соединении двух стержней, лежащих на одной прямой (рис. 1.1,а), внутренняя сила в шарнире разлагается на продольную  $N$  и поперечную  $Q$  составляющие. Сила взаимодействия между шарнирно соединенными горизонтальным и вертикальным

стержнями (рис. 1.1,б) обычно разлагается на вертикальную  $V$  и горизонтальную  $H$  составляющие. Изгибающие моменты в любом шарнирном соединении отсутствуют.

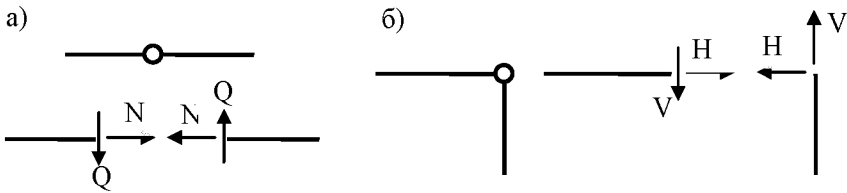


Рис. 1.1

Жесткое соединение элементов (жесткий узел) полностью устраняет их взаимное смещение. Специальных обозначений для жесткого узла обычно не вводят (рис. 1.2,а). Иногда жесткий узел обозначают в виде квадрата (рис. 1.2,б). В жестком узле действуют три внутренние силы, например, вертикальная составляющая  $V$ , горизонтальная составляющая  $H$  и изгибающий момент  $M$  (рис. 1.2,в).

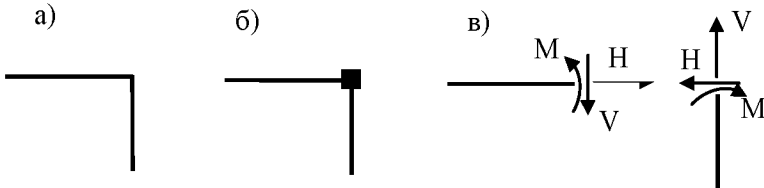


Рис. 1.2

Иногда такое разделение узлов на идеально шарнирные и идеально жесткие не соответствует действительности. Тогда рассматривают узлы податливые, допускающие взаимные смещения соединяемых элементов (допустим, повороты, сдвиги), зависящие от действующих в узле внутренних сил. На расчетных схемах податливые узлы специально оговаривают или изображают, допустим, в виде шарнирного узла с дополнительными деформируемыми (рис. 1.3,а) или недеформируемыми элементами (абсолютно жесткими консолями (рис. 1.3,б)). Внутренние силы в податливом узле зависят от взаимного



смещения соединяемых элементов. Например, значение изгибающего момента в деформируемом узле (рис. 1.3,в) может зависеть от взаимного угла поворота соединяемых элементов.

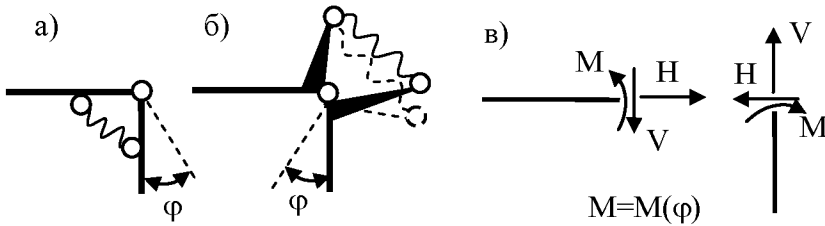


Рис. 1.3

Сооружение прикрепляется к земле (к фундаменту) или к другому сооружению с помощью опор.

Различают следующие основные виды расчетных схем опорных закреплений плоских стержневых сооружений: шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора, защемляющая неподвижная опора и защемляющая подвижная опора.

Шарнирно подвижная опора ограничивает только одно линейное перемещение в заданном направлении. Конструктивно такую опору можно выполнить в виде ролика, свободно катающегося по опорной поверхности (рис. 1.4,а). Если перемещения реального сооружения достаточно малы, то ролик можно заменить стержнем (рис. 1.4,б,в). На расчетных схемах шарнирно подвижная опора изображается в виде одного прямолинейного опорного стержня с шарнирами по концам (рис. 1.4,в). В такой опоре возникает единственная реактивная сила, направление которой совпадает с направлением опорного стержня, то есть с направлением устраняемого перемещения.

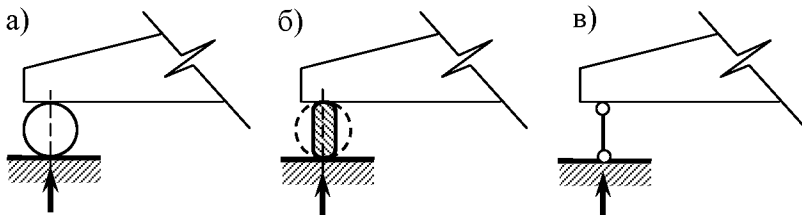


Рис. 1.4

Если в сооружении возможны большие перемещения точки опорения, то расчетную схему шарнирно подвижной опоры изображают в виде подушки, шарнирно соединенной с сооружением и свободно скользящей по опорной поверхности (рис. 1.5,а), или свободно перекаत्याющейся по ней на роликах (рис. 1.4,а; 1.5,б). Сооружение не может перемещаться по направлению, перпендикулярному опорной поверхности. Со стороны шарнирно подвижной опоры на сооружение действует единственная реактивная сила, нормальная к опорной поверхности. Даже если реакцию шарнирно подвижной опоры в виде наклонного опорного стержня разложить на две составляющие (рис. 1.5,в), то неизвестной будет только одна из составляющих.

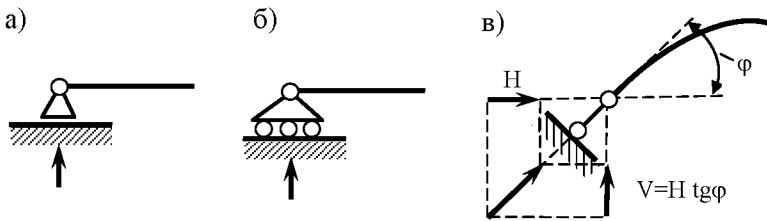


Рис. 1.5

Шарнирно неподвижная опора (рис. 1.6) устраняет любые линейные смещения и допускает только свободный поворот относительно оси опорного шарнира. В шарнирно неподвижной опоре возникает реактивная сила, линия действия которой проходит через центр опорного шарнира. Так как направление линии действия этой реакции зависит от приложенной к сооружению нагрузки, то для определенности эту реакцию разлагают на две неизвестные составляющие, обычно, вертикальную и горизонтальную. Шарнирно неподвижная опора (рис. 1.6,а,б) эквивалентна двум простым опорным стержням, пересекающимся на оси опорного шарнира (рис. 1.6,в,г).

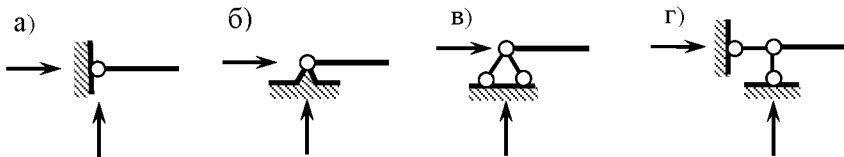


Рис. 1.6

Зашемляющая неподвижная опора, или полная (жесткая) заделка (рис. 1.7,а), не допускает ни линейных, ни угловых перемещений. В неподвижной заделке возникают три реакции: две реактивные силы (две составляющие одной реактивной силы неизвестного направления) и реактивный момент. Полная заделка эквивалентна трем простым опорным стержням (рис. 1.7,б).

Зашемляющая подвижная опора оставляет свободу для одного линейного перемещения (рис. 1.7,в,д). Естественно, составляющая реактивной силы в подвижной заделке по направлению свободного линейного перемещения отсутствует. Остаются реактивный момент и реактивная сила, перпендикулярная свободному линейному перемещению, то есть две опорные реакции. Подвижная заделка эквивалентна двум простым опорным стержням (рис. 1.7,г,е).

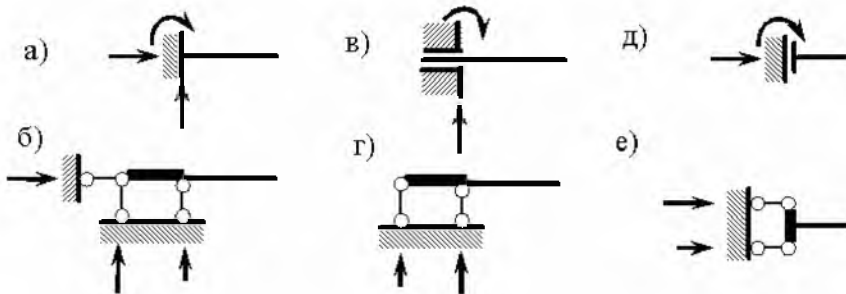


Рис. 1.7

Плавающая заделка (рис. 1.8) устраняет только угловое перемещение. В плавающей заделке возникает только один реактивный момент. Обозначить плавающую заделку можно условным устройством, показанным на рис. 1.8,а, или просто квадратом (рис. 1.8,б), оговорив его свойства.



Рис. 1.8

Современные методы строительной механики, современная вычислительная техника и современные проектно-вычислительные комплексы для расчета сооружений позволяют рассчитать практически любую расчетную схему.

При расчете одного и того же сооружения можно пользоваться несколькими расчетными схемами. Предварительный подбор сечений элементов сооружения можно выполнить по упрощенной расчетной схеме. Окончательный расчет следует выполнять по более точной и, как правило, более сложной схеме с применением компьютеров и проектно-вычислительных комплексов.

Приведем пример выбора расчетной схемы для балочной фермы. В качестве предварительной расчетной схемы для фермы можно принять шарнирно-стержневую систему с идеальными без трения шарнирными узловыми соединениями (рис. 1.9). Как показывает расчетная практика и эксперименты, шарнирно-стержневая расчетная схема фермы может оказаться и окончательной, если стержни фермы выполнены из прокатных профилей, соединенных сваркой на узловых фасонках. В таких фермах поперечное сечение сварных швов мало по сравнению с поперечным сечением соединяемых профилей, и их узлы можно считать шарнирными.

Однако если элементы фермы будут выполнены, например, из гнутосварных прямоугольных профилей с бесфасоночными сварными узлами или в монолитном железобетоне, то ее расчетной схемой уже будет рама, то есть система с жесткими узловыми соединениями (рис. 1.10).

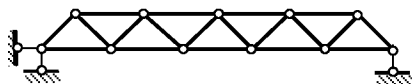


Рис. 1.9

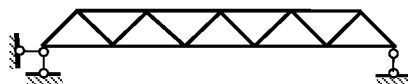


Рис. 1.10

Рамная расчетная схема фермы более точна, но многократно статически неопределима. Расчет таких рам сводится к решению систем совместных линейных алгебраических уравнений достаточно высоких порядков, что требует использования компьютеров.

### 1.3. Классификация сооружений

Классификация сооружений и их расчетных схем может выполняться по разным признакам.

#### **Сооружения плоские и пространственные**

Если геометрическая ось и одна из главных осей всех поперечных сечений каждого элемента, входящего в состав сооружения, а также линии действия всех нагрузок, приложенных к сооружению, лежат в одной плоскости, то такое сооружение называется плоским, или плоскостным. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то сооружение является пространственным.

Все реальные сооружения являются пространственными. Но в целях упрощения расчета их расчленяют на ряд плоских систем. Такое расчленение не всегда возможно. Поэтому некоторые сооружения приходится рассматривать как пространственные.

#### **Сооружения стержневые, тонкостенные пространственные и массивные**

Стержневыми называют сооружения, состоящие из прямолинейных или криволинейных стержней. Традиционно строительная механика занимается исследованием стержневых систем.

Тонкостенными пространственными называются сооружения, в состав которых входят оболочки или пластинки, а также сами оболочки и пластинки.

Под массивными подразумевают сооружения, состоящие из массивных тел, например: фундаменты, плотины, подпорные стены, грунтовые и скальные массивы, фрагменты стержней и узловых соединений. Массивы могут рассматриваться как в двухмерном пространстве, так и в трехмерном.

Традиционно исследование работы тонкостенных пространственных и массивных сооружений осуществляется методами теории упругости и теории пластичности. Однако, с появлением дискретных методов расчета, в частности, метода конечных элементов, и современных компьютеров расчет тонкостенных пространственных, массивных, пластинчато-стержневых и т. п. сооружений может вестись и ведется с единых позиций методами строительной механики стержневых систем. При этом следует иметь в виду, что метод конечных элементов

для пространственных тонкостенных и массивных сооружений является приближенным. Для плоских и пространственных стержневых систем метод конечных элементов в рамках принятых в строительной механике гипотез и допущений остается точным.

### Сооружения с шарнирными или жесткими узловыми соединениями элементов

Стержневая система, в которой присутствуют только шарнирные соединения, причем каждый стержень имеет только по два шарнира и только по концам, называется шарнирно-стержневой системой, или фермой (рис. 1.9).

Стержневая система, в которой элементы соединены, в основном, абсолютно жестко, называется рамой (рис. 1.10, 1.11).

В одном и том же сооружении могут применяться как шарнирные, так и жесткие соединения элементов. Иногда такой способ соединения называют комбинированным. Примером может служить шпренгельная балка (рис. 1.12).

Одновременное применение жестких и шарнирных соединений имеет место и в расчетных схемах многих других типов сооружений, например: в трехшарнирной раме (рис. 1.13), в двухпролетной двухъярусной раме с центральной качающейся стойкой и шарнирно опертым ригелем (рис. 1.14).

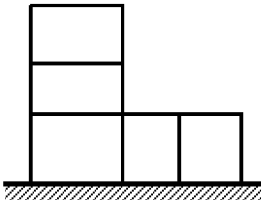


Рис. 1.11

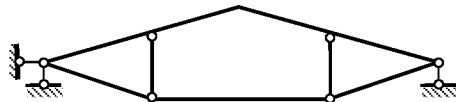


Рис. 1.12

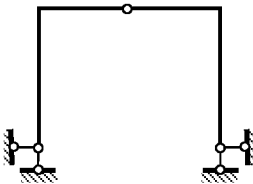


Рис. 1.13

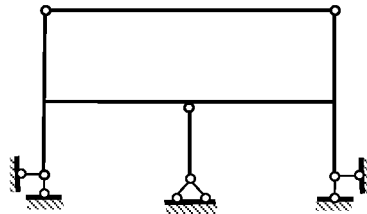


Рис. 1.14

**Системы геометрически изменяемые и геометрически неизменяемые, мгновенно изменяемые и мгновенно жесткие**

Если система элементов, узловых и опорных соединений, образующих расчетную схему сооружения, допускает изменение его формы за счет взаимного смещения элементов сооружения даже без их деформации, то такая система называется геометрически (кинематически) изменяемой (рис. 1.15). Если изменение формы (геометрии) системы возможно только за счет деформаций ее элементов, то такая система является геометрически (кинематически) неизменяемой (рис. 1.16).

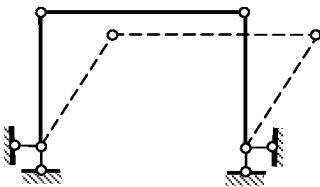


Рис. 1.15

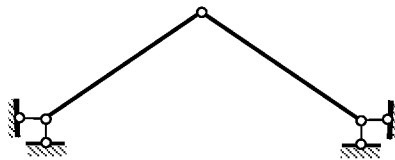


Рис. 1.16

Классификация сооружений по кинематическому признаку имеет большое значение, так как инженерные сооружения, как правило, должны быть геометрически неизменяемыми. Исключение составляют некоторые висячие системы изменяемого типа, выполненные из гибких элементов, тросов.

Строго говоря, понятия геометрической изменяемости и геометрической неизменяемости следует относить не к самой системе, а к некоторой ее конфигурации, зависящей от размеров заготовок ее элементов. На рис. 1.17 представлены различные геометрически изменяемые конфигурации шарнирно-стержневой системы, приведенной ранее на рис. 1.15. Новые конфигурации этой системы получены путем изменения только длин заготовок составляющих ее трех стержней.

На рис. 1.18 показаны геометрически неизменяемые конфигурации простейшей фермы, составленные из одного и того же количества стержней и узлов, но стержней разной длины.

При произвольном изменении (варьировании) размеров элементов или изменении (варьировании) взаимного расположения узлов системы ее конфигурация может вырождаться, стать особой.

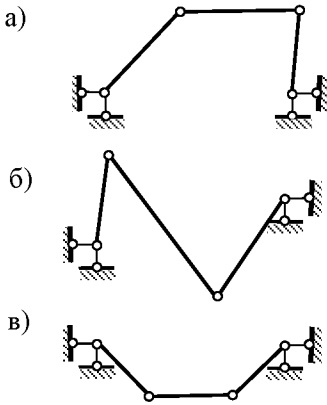


Рис. 1.17

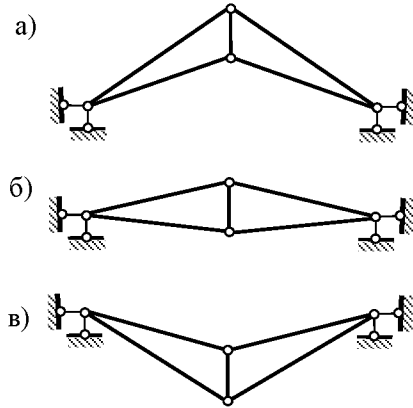


Рис. 1.18

Кинематические свойства вырожденной, особой конфигурации отличаются от свойств смежных конфигураций. Например, двухстержневая геометрически неизменяемая система (рис. 1.16) в процессе варьирования длин ее элементов может принять особую конфигурацию, в которой оба стержня будут лежать на одной прямой (рис. 1.19). В этой особой конфигурации промежуточный шарнир получает свободу вертикального перемещения. Однако вертикальное перемещение промежуточного шарнира может быть только бесконечно малым, так как стержни предполагаются абсолютно недеформируемыми. Особые конфигурации, в которых система допускает бесконечно малые перемещения, называют мгновенно изменяемыми, если при выводе системы из такой конфигурации она становится геометрически неизменяемой.

Системы, конфигурации которых являются мгновенно изменяемыми (рис. 1.19) или близки к мгновенно изменяемым (рис. 1.20), в инженерной практике, как правило, не применяются, так как они обладают повышенной деформативностью.

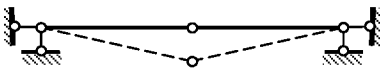


Рис. 1.19

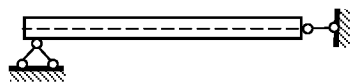


Рис. 1.20



С другой стороны, в геометрически изменяемых системах (рис. 1.15, 1.17) можно подобрать длины элементов такими, чтобы узлы оказались расположенными на одной прямой (рис. 1.22). Это будет особая конфигурация геометрически изменяемой системы, которую называют мгновенно жесткой. В мгновенно жесткой конфигурации (рис. 1.22) система при условии абсолютной недеформируемости ее элементов допускает только бесконечно малые перемещения. При выводе такой системы из мгновенно жесткой конфигурации она становится геометрически изменяемой. А в геометрически изменяемых конфигурациях система допускает большие конечные перемещения (рис. 1.21), которые происходят без деформаций элементов только за счет кинематических перемещений.

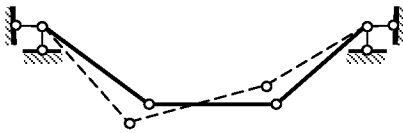


Рис. 1.21

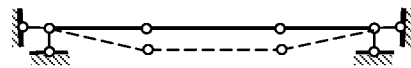


Рис. 1.22

Таким образом, как геометрически неизменяемые, так и геометрически изменяемые системы могут иметь особые (вырожденные) конфигурации.

Мгновенно изменяемой называется такая особая конфигурация, в которой система при условии абсолютной недеформируемости элементов обладает бесконечно малой подвижностью по сравнению со смежными абсолютно неподвижными, неизменяемыми конфигурациями.

Мгновенно жесткой называется такая особая конфигурация, в которой система при условии абсолютной недеформируемости элементов характеризуется только бесконечно малой подвижностью по сравнению со смежными подвижными, изменяемыми конфигурациями.

В реальных условиях, когда элементы сооружений выполняются из деформируемых материалов, вырожденные конфигурации характеризуются конечными перемещениями узлов, значения которых на порядок выше, чем удлинения элементов. Следовательно, мгновенно изменяемые системы характеризуются повышенной деформативностью по сравнению с геометрически неизменяемыми системами, а мгновенно жесткие системы – повышенной жесткостью по сравнению с геометрически изменяемыми системами.

Можно сказать, что системы мгновенно изменяемые являются результатом ошибочного проектирования. И наоборот, системы мгновенно жесткие являются результатом целенаправленного проектирования. Мгновенно жесткие системы широко применяются в предварительно напряженных вантовых и вантово-стержневых системах.

### Системы безраспорные и системы распорные

Безраспорными называют такие сооружения, у которых нагрузка одного направления (допустим, вертикальная) вызывает опорные реакции того же направления (только вертикальные). Все остальные сооружения можно отнести к распорным системам. Наличие составляющих опорных реакций, нормальных к линии действия нагрузки, является отличительной чертой распорных систем.

Классическим примером безраспорных систем являются балки: простая балка (рис. 1.23), криволинейная балка (рис. 1.24) и другие системы балочного типа (рис. 1.9, 1.10, 1.12). Двухшарнирная арка (рис. 1.25) и трехшарнирная рама (рис. 1.26), как и многие другие, представляют собой распорные системы.

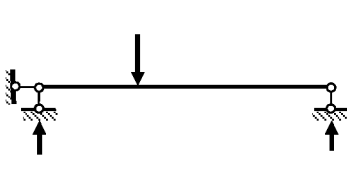


Рис. 1.23

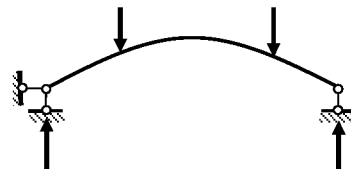


Рис. 1.24

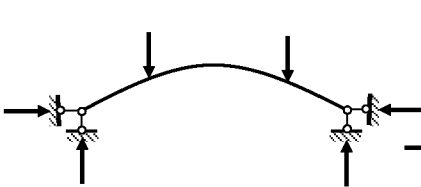


Рис. 1.25

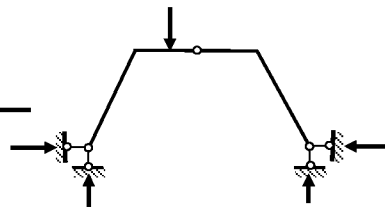


Рис. 1.26

### Системы статически определимые и статически неопределимые

В статически определимой системе все внутренние силы можно найти, используя только уравнения равновесия (уравнения статики).

Если для определения хотя бы части внутренних сил необходимо привлекать уравнения деформаций, то такую систему называют статически неопределимой.

Статически неопределимая система имеет избыточное количество узловых и других соединений (связей), чем это необходимо для ее геометрической неизменяемости. Статически неопределимая система допускает предварительное напряжение (начальные усилия, то есть усилия без нагрузки за счет тепловых воздействий, смещения опор, неточности сборки и т. п.). В статически определимой системе начальные усилия без нагрузки невозможны.

Разделение деформируемых систем на статически определимые и статически неопределимые имеет существенное значение только при расчете сооружений по недеформированной схеме.

### **Линейно деформируемые системы и системы нелинейно деформируемые**

Если взаимосвязь между нагрузкой, приложенной к сооружению, и вызванными ею внутренними силами и перемещениями подчиняется закону прямой пропорциональности, то такое сооружение называют линейно деформируемым, или просто линейным. В линейно деформируемой системе деформации и перемещения должны быть малы. Их влиянием на распределение внутренних сил пренебрегают. Расчет ведут по так называемой недеформированной расчетной схеме. Геометрия деформированного сооружения полагается совпадающей с геометрией исходного недеформированного сооружения. Уравнения равновесия составляют относительно исходной, недеформированной расчетной схемы. Напряженно-деформированное состояние линейной системы описывается линейными дифференциальными или линейными алгебраическими уравнениями.

Если же вызванные нагрузками или воздействиями деформации и перемещения в сооружении значительны, так что их влиянием на распределение внутренних сил пренебречь нельзя, то расчет такого сооружения ведут по деформированной расчетной схеме. Взаимосвязь между нагрузками и вызванными ею внутренними силами и перемещениями становится нелинейной. Такое сооружение называют нелинейно деформируемым, или нелинейным.

Нелинейность, обусловленную изменением геометрии расчетной схемы сооружения, называют геометрической нелинейностью. С уче-

том геометрической нелинейности обычно ведут расчет большепролетных и высотных сооружений. Геометрически нелинейными являются все геометрически изменяемые, мгновенно изменяемые и мгновенно жесткие системы (висячие покрытия и висячие мосты, тросовые и вантовые сети и системы).

Нелинейность, связанную с неупругими или нелинейно-упругими свойствами материала сооружения, когда нарушается линейная зависимость между напряжениями и деформациями его элементов, называют физической (или материальной) нелинейностью.

#### 1.4. Степень свободы плоской стержневой системы

Степенью свободы какого-либо тела или системы тел называют количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела или системы тел при их движении на плоскости или в пространстве.

Положение на плоскости подвижной (свободной) материальной точки (шарнирного узла) характеризуется двумя ее координатами относительно произвольной неподвижной системы отсчета, расположенной в той же плоскости (рис. 1.27). Следовательно, точка (шарнирный узел) обладает на плоскости двумя степенями свободы.

В пространстве положение свободной материальной точки (сферического шарнира) характеризуется уже тремя независимыми параметрами: координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1.28). Точка в пространстве имеет три степени свободы.

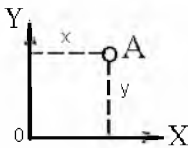


Рис. 1.27

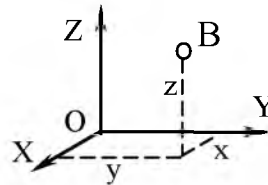


Рис. 1.28

Отдельное тело (стержень) или заведомо геометрически неизменяемую систему тел (стержневую систему), либо ее часть, которые могут перемещаться на плоскости как единое целое, не изменяя своей геометрической формы, в кинематическом анализе называют диском.

Положение подвижного (свободного) плоского тела (диска) на плоскости характеризуется тремя независимыми параметрами, например: абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  какой-либо точки  $A$  и углом наклона  $\varphi$  какой-нибудь прямой  $AB$ , принадлежащей диску (рис. 1.29). Таким образом, диск при движении на плоскости обладает тремя степенями свободы. Жесткий узел на плоскости, даже достаточно малых размеров, в отличие от шарнирного узла должен рассматриваться как диск. Следовательно, жесткий узел на плоскости имеет три степени свободы.

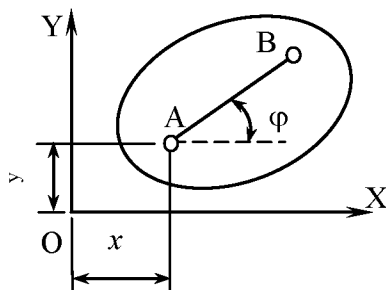


Рис. 1.29

В пространстве свободное твердое тело рассматривается как пространственный блок и обладает шестью степенями свободы: тремя координатами любой его точки и тремя углами поворота любой его линии по отношению к осям неподвижной системы пространственных координат.

В данном разделе ограничимся рассмотрением только плоских систем.

### **Классификация связей плоских систем**

Всякое устройство, уменьшающее степень свободы тела или системы тел на единицу, будем называть простой связью. Если устройство уничтожает несколько степеней свободы, то его будем рассматривать как сложную (кратную) связь, эквивалентную нескольким простым.

Каждая связь имеет как кинематическую, так и статическую характеристику.

Кинематическая характеристика определяет, каким видам движения одного диска относительно другого препятствует связь, сколько степеней свободы она устраняет. Статическая характеристика определяет количество и виды реакций, возникающих в соответствующей связи.

Впредь будем различать три основных вида связей плоских систем.

К связям *первого вида* относятся простые связи, устраняющие одну степень свободы. Примером могут служить шарнирно подвижная опора, плавающая заделка (моментная связь), стержень с шарнирами по концам. Такие связи характеризуются только одной реакцией (реактивной силой или реактивным моментом).

К связям *второго вида* относятся связи, эквивалентные двум простым, устраняющие две степени свободы. Связями второго вида являются шарнирно неподвижная опора; подвижная заделка; шарнир, соединяющий два диска. Такие связи характеризуются двумя реакциями (двумя силами или силой и моментом).

Связи *третьего вида* устраняют три степени свободы. К связям третьего вида можно отнести неподвижную заделку; жесткий узел (спайку, сварку, соединяющую два диска). Они характеризуются тремя реакциями (двумя силами и моментом).

Подразделение связей только на три вида условно, разнообразие связей безгранично.

Таким образом, всякое сооружение можно рассматривать как систему дисков, соединенных связями, как между собой, так и с опорной поверхностью (землей). Землю (опорную поверхность) также можно рассматривать как диск. Чаще всего с землей связывают неподвижную систему координат и по отношению к земле определяют степень свободы исследуемой системы.

В кинематическом анализе диски и связи полагаются недеформируемыми, абсолютно жесткими.

Рассмотрим расчетные схемы связей, используемых в строительной механике.

Шарнирно подвижная опора эквивалентна одной простой связи, то есть связи первого вида. Диск, присоединенный к земле (опорной поверхности) шарнирно подвижной опорой, теряет одну степень свободы. Система из диска и опорного стержня имеет две степени свободы (рис. 1.30).

Одиночный стержень, соединяющий два диска и шарнирно к ним прикрепленный, также можно рассматривать как простую связь. Система из двух дисков, шарнирно соединенных одним

стержнем, теряет одну степень свободы (рис. 1.31). Суммарная степень свободы такой системы равна пяти, в противовес шести степеням свободы для двух несвязанных дисков.

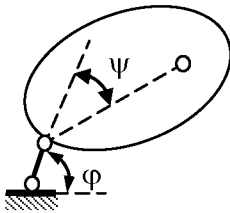


Рис. 1.30

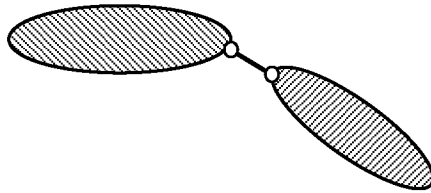


Рис. 1.31

Одиночный шарнир (на расчетных схемах изображается кружком) эквивалентен двум простым связям. Соединяя два диска, шарнир уменьшает их суммарную степень свободы, равную шести, до четырех, так как положение двух связанных шарниром дисков характеризуется двумя координатами  $x$  и  $y$  точки  $A$  и двумя углами  $\varphi$  и  $\psi$ , фиксирующими положение линий  $AB$  и  $BC$  (рис. 1.32,а). Землю (опорную поверхность) можно рассматривать как неподвижный диск. Плоский подвижный диск, прикрепленный к земле (к неподвижной опорной поверхности) шарниром, теряет две степени свободы, и его положение характеризуется только одним углом поворота относительно оси шарнира (рис. 1.32,б). Такое устройство можно рассматривать как шарнирно неподвижную опору, эквивалентную двум простым связям (рис. 1.32,в). Шарнирно неподвижная опора устраняет две степени свободы.

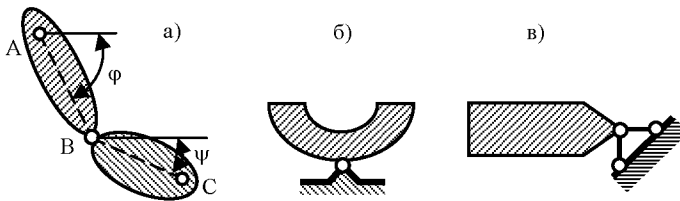


Рис. 1.32

Система из трех дисков, соединенных двумя шарнирами (рис. 1.33,а), имеет пять степеней свободы. Два шарнира устранили четыре сте-

пени свободы. В данной системе промежуточный диск можно рассматривать и как простую связь (сравните с системой на рис. 1.31).

В кинематическом анализе, напомним, любой стержень может быть рассмотрен как диск, и любой диск может быть заменен одним стержнем.

Часто два шарнира, соединяющие три диска, сближаются и сливаются как бы в один шарнир на общей оси (рис. 1.33,б). Получается сложный, кратный шарнир, эквивалентный, в данном случае, двум простым шарнирам, или четырьмя простыми связями.

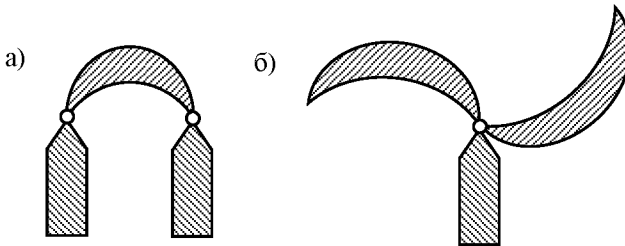


Рис. 1.33

В общем случае, кратность такого сложного шарнира на единицу меньше количества соединяемых на одной оси дисков (стержней). Другими словами справедливо соотношение:

$$Ш = Д - 1,$$

где  $Ш$  – кратность сложного шарнира;

$Д$  – количество дисков, соединяемых сложным шарниром на одной оси.

Примеры простых шарнирных соединений представлены на рис. 1.34,а. На рис. 1.34,б показаны кратные шарнирные соединения.

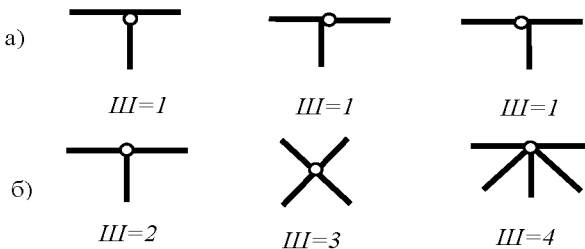


Рис. 1.34



Если два диска (стержня) монолитно (или с помощью сварки) объединяются в один диск, то такой стык называется жестким соединением, или жестким узлом.

Жесткие узлы также могут быть простыми (рис. 1.35,а) и кратными (рис. 1.35,б). Кратность жестких узлов определяется по формуле:

$$Ж = Д - 1,$$

где  $Ж$  – количество простых жестких узлов;

$Д$  – количество дисков, монолитно соединяемых в одном узле.

Простой жесткий стык устраняет три степени свободы. Он эквивалентен трем простым связям.

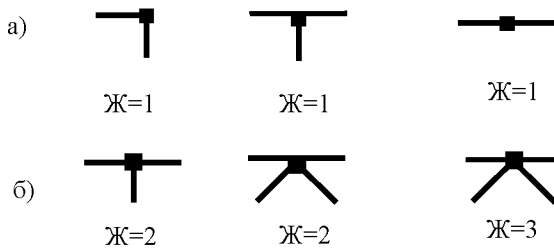


Рис. 1.35

Жесткая защемляющая опора, устраняющая способность диска (стержня) перемещаться относительно опорной поверхности, как и жесткий узел, также эквивалентна трем простым связям (рис. 1.7,а,б).

Жесткие узлы позволяют в случае необходимости разбивать один стержень (диск) на произвольное количество составляющих стержней (дисков) (рис. 1.36).



Рис. 1.36

От соотношения количества составляющих систему дисков и количества наложенных связей, а также от их взаимного расположения зависят кинематические и статические свойства системы.

Цель кинематического анализа как раз и состоит в том, чтобы выяснить:

- способны ли стержневые и иные системы воспринимать передаваемую на них нагрузку без существенного изменения приданной им геометрической формы;
- каким должно быть соотношение между числом дисков и числом связей, и каким должно быть их взаимное расположение;
- какова последовательность и трудоемкость расчета по определению реакций, внутренних сил и перемещений в элементах сооружения.

### **Формулы для вычисления степени свободы (степени изменяемости) плоских систем**

На основании введенных выше понятий легко определить степень свободы  $W$  любой плоской системы, составленной из  $D$  дисков, соединенных между собой и опорной поверхностью простыми жесткими узлами  $Ж$ , простыми шарнирами  $Ш$  и простыми опорными связями  $C_0$ .

Если бы система состояла только из свободных, несвязанных дисков, то ее степень свободы равнялась бы  $3D$ . Каждый введенный простой жесткий узел устраняет три степени свободы, каждый простой шарнир – две, а каждая простая опорная связь – одну степень свободы. Следовательно, общая степень свободы системы равна:

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0. \quad (1.1)$$

Для правильного применения полученной формулы следует помнить, что под  $Ж$ ,  $Ш$  и  $C_0$  понимается общее количество соответственно простых (однократных) жестких стыков, простых (однократных) шарниров и простых опорных связей. При этом необходимо следить, чтобы каждый диск и каждая связь (каждое устройство) были учтены только один раз. Другими словами, если, например, шарнирное соединение одного из дисков с землей было учтено как простой шарнир, то это опорное устройство уже нельзя включать в количество простых связей как шарнирно неподвижную опору, эквивалентную двум простым опорным связям.

Степень свободы плоской системы, отделенной от опор (не имеющей опорных связей), то есть в монтажном или транспортном

состоянии, равна сумме ее степени свободы как жесткого целого (три степени свободы на плоскости) и степени изменяемости  $V$  ее элементов (внутренней изменяемости). Таким образом, можем записать:

$$W = 3 + V,$$

откуда

$$V = W - 3.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение  $W$  при условии, что в системе отсутствуют опорные стержни, получим окончательную формулу для вычисления степени изменяемости стержневой системы, отсоединенной от опор:

$$V = 3D - 3Ж - 2Ш - 3. \quad (1.2)$$

Если степень свободы (или степень изменяемости) системы положительна (больше нуля):

$$W > 0 \text{ (или } V > 0 \text{),}$$

то система геометрически изменяема. В ее структуре для обеспечения геометрической неизменяемости недостает  $W$  (или  $V$ ) связей.

Например, висячая система (рис. 1.37) составлена из четырех стержней, соединенных тремя шарнирами, и оперта на две шарнирно неподвижные опоры. Ее степень свободы равна:

$$W = 3D - 2Ш - C_o = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

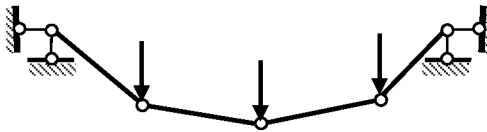


Рис. 1.37

Следовательно, она геометрически изменяема. В ее структуре недостает двух связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Если степень свободы (или степень изменяемости) системы отрицательна (меньше нуля)  $W < 0$  (или  $V < 0$ ), то система содержит избыточное количество связей с точки зрения геометрической неизменяемости.

Двухпролетная двухъярусная рама (рис. 1.38,а) состоит из восьми стержней-дисков. Стержни соединены двумя простыми шарнирами, тремя жесткими двукратными узлами (шестью однократными, простыми) и оперты на три жесткие защемляющие опоры. Степень свободы рамы равна:

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 2 - 9 = -7.$$

С точки зрения геометрической неизменяемости данная рама содержит семь лишних связей.

Эту же раму можно рассмотреть и как составленную только из двух дисков, соединенных двумя шарнирами (рис. 1.38,б). На один из дисков наложены три жестких заделки (9 простых опорных стержней). В итоге получим тот же результат:

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 9 = -7.$$

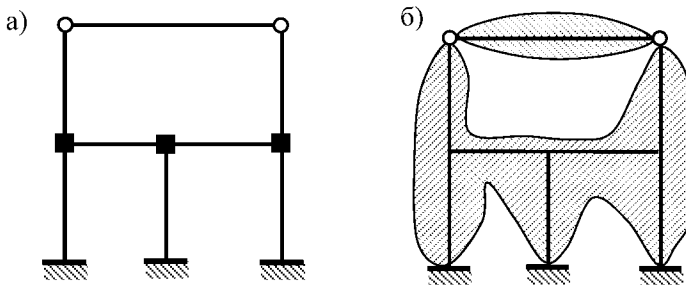


Рис. 1.38

Количество лишних связей при правильной их расстановке, равное отрицательной степени свободы системы, определяет степень статической неопределимости системы. Следовательно, количество лишних связей, или степень статической неопределимости системы можно вычислить по формуле:

$$L = -W = 3Ж + 2Ш + C_o - 3Д, \quad (1.3)$$

где  $L$  – количество лишних связей.

Если степень свободы системы равна нулю:

$$W = 0,$$

то система имеет необходимое для геометрической неизменяемости и неподвижности количество связей и может быть статически определимой. Такая система представлена на рис. 1.39. Она состоит из 9 стержней-дисков, жестких узлов не имеет, стержни-диски соединены 12 простыми шарнирами (кратность шарнирных соединений указана на рисунке), три опорных стержня связывают ее с опорной поверхностью. Степень свободы системы равна:

$$W = 3Д - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 9 - 0 - 2 \cdot 12 - 3 = 0.$$

Тот же результат можно получить и по-иному, считая, что система составлена из 11 стержней-дисков. Предполагается, что обе полубалки образованы каждая из двух стержней, спаянных жестко в четвертях пролета. Следовательно, появилось два дополнительных жестких узла. Количество шарниров и опорных стержней не изменилось. Возможны и другие варианты подсчета степени свободы данной системы.

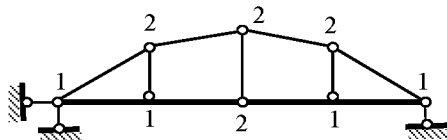


Рис. 1.39

Если степень изменяемости системы равна нулю:

$$V = 0,$$

то система имеет необходимое для внутренней геометрической неизменяемости количество связей и может быть внутренне статически определимой. Например, степень изменяемости односкатной фермы без опор (рис. 1.40) равна нулю:

$$V = 3Д - 3Ж - 2Ш - 3 = 3 \cdot 13 - 0 - 2 \cdot 18 - 3 = 0.$$

Система содержит необходимое количество связей, чтобы быть внутренне геометрически неизменяемой и статически определимой. Но внешне, по отношению к земле, система подвижна, в ней недостает, как минимум, трех опорных связей для придания ей неподвижности. Большее количество наложенных опорных связей превратит ее во внешне статически неопределимую систему.

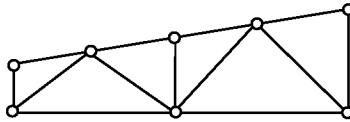


Рис. 1.40

Подсчет степени свободы или степени изменяемости фермы, как и любой другой шарнирно-стержневой системы, может быть выполнен и по более удобной формуле.

В шарнирно-стержневой системе узлы можно рассматривать как материальные точки, имеющие на плоскости две степени свободы. Стержни, соединяющие узлы, как и опорные стержни, можно рассматривать как простые связи (связи первого вида).

Если бы шарнирные узлы не были связаны стержнями, то система из  $U$  свободных шарнирных узлов имела бы  $2U$  степеней свободы. Стержни, соединяющие узлы, и опорные стержни как простые связи устраняют по одной степени свободы. Следовательно, степень свободы шарнирно-стержневой системы может быть вычислена по формуле:

$$W = 2U - C - C_0, \tag{1.4}$$

- где  $U$  – количество шарнирных узлов;
- $C$  – количество стержней, соединяющих узлы;
- $C_0$  – количество опорных стержней.

Соответственно степень изменяемости шарнирно-стержневой системы, отсоединенной от опор, будет равна:

$$V = 2U - C - 3. \tag{1.5}$$

Так, для фермы без опор (рис. 1.40) имеем:

$$V = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Таким образом, применение полученных выше формул для подсчета степени свободы или степени изменяемости плоских стержневых систем дает необходимые аналитические критерии геометрической неизменяемости или изменяемости, статической определенности или неопределенности.

К сожалению, эти аналитические критерии являются только необходимыми, но недостаточными.

### **1.5. Принципы образования геометрически неизменяемых систем**

Полученные выше формулы для вычисления степени свободы (степени изменяемости) стержневых систем дают только формальную оценку кинематических свойств исследуемых систем, что не всегда соответствует действительности. Для окончательного заключения о геометрической неизменяемости и статической определенности стержневой системы необходим анализ ее структуры, анализ принципов, по которым она составлена. Системы только правильной структуры могут быть действительно геометрически неизменяемыми ( $W \leq 0$ ) и статически определенными ( $W = 0$ ).

К системам неправильной структуры относятся системы частично статически неопределимые и частично геометрически изменяемые, хотя их суммарная степень свободы может равняться нулю (рис. 1.41). Система, изображенная на рис. 1.42, также имеет нулевую степень свободы, а на самом деле является мгновенно изменяемой, так как обладает бесконечно малой подвижностью. Структура ее также неправильная. Мгновенно жесткая система (рис. 1.43) формально имеет одну степень свободы, но на самом деле степеней свободы у нее две. К тому же, она может иметь начальные усилия (например, от охлаждения ее элементов), как статически неопределимая система.

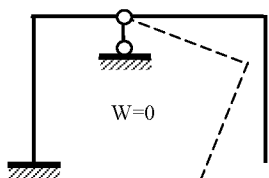


Рис. 1.41

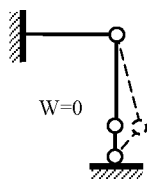


Рис. 1.42

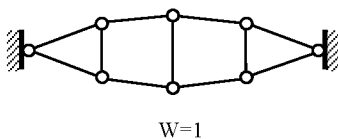


Рис. 1.43

Для таких систем понятия степени свободы или степени изменяемости, вычисляемые по выведенным выше формулам, становятся неопределенными, не имеющими смысла.

Рассмотрим основные способы образования заведомо геометрически неизменяемых стержневых систем.

1. Способ диады. Степень свободы системы (диска) не изменится, если к системе присоединить (отсоединить) шарнирный узел с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой (рис. 1.44). В качестве таких стержней могут выступать диски, заведомо статически определимые и геометрически неизменяемые подсистемы (рис. 1.45).

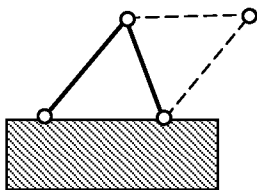


Рис. 1.44

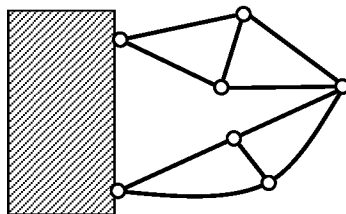


Рис. 1.45

2. Способ треугольников. Три диска 1, 2 и 3, соединенные тремя шарнирами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащими на одной прямой (рис. 1.46), образуют новую внутренне геометрически неизменяемую систему (диск). Общее количество лишних связей, если они есть в исходных дисках, не изменяется. Общая степень свободы трех дисков уменьшается на шесть единиц.

3. Способ шарнира и простой связи, эквивалентный способу треугольников. Два диска 1 и 2, соединенные общим шарниром  $C$  и одним стержнем  $AB$ , при условии, что прямая  $AB$  (или ее продолжение)



не проходит через шарнир  $C$ , образуют новый единый диск (рис. 1.47). При этом общее количество лишних связей в исходных дисках не изменяется, а их общая степень свободы снижается на три единицы.

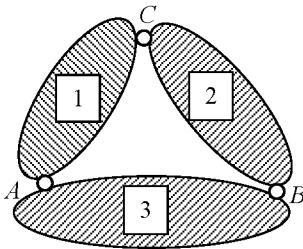


Рис. 1.46

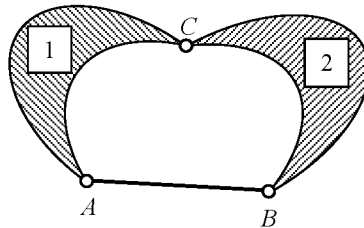


Рис. 1.47

4. Способ трех связей. Два диска, соединенные тремя стержнями (рис. 1.48), лежащими на прямых, не пересекающихся в одной точке и не параллельных все три сразу между собой, образуют единую систему (новый диск). В новой системе суммарное количество избыточных связей, если они были в исходных дисках, не изменяется, а суммарная степень свободы снижается на три единицы.

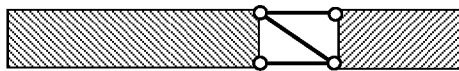


Рис. 1.48

Рассмотренные способы образования единой системы из нескольких составных частей, вообще говоря, применимы к любым системам как с избыточными связями (статически неопределимым дискам), так и с недостающими связями (механизмам).

Чтобы образованная по рассмотренным законам единая система была геометрически неизменяемой и статически определимой, необходимо и достаточно, чтобы и ее составные части каждая в отдельности были геометрически неизменяемыми и статически определимыми. При этом каждый диск можно рассматривать как стержень и каждый стержень можно рассматривать как диск. Тогда рассмотренные способы образования заведомо геометрически неизменяемых и статически определимых систем можно свести к двум основным способам.

1. *Способ треугольников*: три диска (стержня), соединенные тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют заведомо геометрически неизменяемую (внутренне) и статически определимую систему (новый диск) (рис. 1.46, 1.47).

2. *Способ трех связей*: два диска, шарнирно соединенные тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (три параллельных стержня можно считать пересекающимися в бесконечности), образуют новый диск (рис. 1.48).

Рассмотренные способы образования, сборки (или демонтажа, разборки) заведомо геометрически неизменяемых и статически определимых систем могут применяться не только по отдельности, но и в произвольной их комбинации, один может замещать другой.

Так, трехшарнирную арку с затяжкой (рис. 1.49) можно рассматривать как образованную:

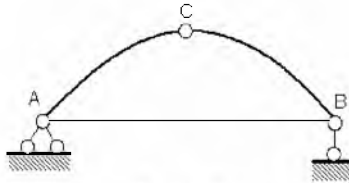


Рис. 1.49

- по способу диад. С помощью двух опорных стержней к земле неподвижно присоединяется опорный шарнир  $A$ . Затем с помощью третьего опорного стержня и балки  $AB$  – опорный шарнир  $B$ . Затем к неподвижным точкам  $A$  и  $B$  посредством двух полуарок присоединяется шарнир  $C$ ;

- по способу треугольников. Опорные стержни опоры  $A$  вместе с землей образуют первый треугольник и первый единый диск. Полученный диск, балка  $AB$  и опорный стержень опоры  $B$  образуют новый единый диск. И наконец, диск  $AB$  и полуарки  $AC$  и  $BC$  образуют итоговый диск-треугольник  $ABC$ ;

- посредством совместного использования способа трех связей и способа диад (или треугольников). Балка  $AB$  соединяется с землей тремя простыми связями (опорными стержнями). К полученной системе присоединяется способом диады шарнирный узел  $C$  (или образуется треугольник  $ABC$ ).

Кинематический анализ уже созданной системы можно проводить и в обратном порядке, то есть методом демонтажа. Если после отбрасывания узлов и стержней (дисков), присоединенных по рассмотренным выше правилам, останется в результате один диск (стержень или треугольник), то исследуемая система геометрически неизменяема и статически определима.

С помощью анализа структуры (анализа очередности образования) системы легко установить, в какой части системы имеются лишние связи, а в какой части связей не хватает. Именно так выявляются системы неправильной структуры и системы с вырожденными конфигурациями.

Любую систему в вырожденной конфигурации, мгновенно изменяемую или мгновенно жесткую, можно считать одновременно и статически неопределимой и геометрически изменяемой. В структуре таких систем недостает связей по одним направлениям и одновременно есть лишние связи по другим направлениям.

Наличие лишних связей придает вырожденной системе свойства статически неопределимой системы, то есть возможность иметь начальные усилия при отсутствии нагрузки. А это свойство приводит к статическому критерию мгновенной изменяемости или мгновенной жесткости.

1. Если в системе с нулевой степенью свободы ( $W = 0$ ), то есть в системе формально геометрически неизменяемой и статически определимой, могут быть начальные усилия (усилия предварительного напряжения), то такая система мгновенно изменяема или частично статически неопределима, а частично геометрически изменяема. В последнем случае необходимо провести кинематический анализ системы по фрагментам.

2. Если в системе с положительной степенью свободы ( $W > 0$ ), то есть в системе формально геометрически изменяемой, могут быть начальные усилия (усилия предварительного напряжения), то такая система мгновенно жесткая или в ее составе есть статически неопределимые фрагменты.

Связи в таких системах, с точки зрения геометрической неизменяемости, расставлены неправильно.

Например, в мгновенно изменяемой системе (рис. 1.50) узел  $C$  закреплен от горизонтального смещения стержнем  $AC$ . Стержень  $BC$  также устраняет горизонтальное смещение узла  $C$  и является лишним. В то же время, в системе нет никакой связи, которая бы устранила

смещение узла  $C$  по вертикали. Однако такое смещение может быть только бесконечно малым: как только узел  $C$  сместится с линии  $AB$ , стержни-диады  $AC - BC$  уже не будут лежать на одной прямой, и дальнейшее смещение узла  $C$  станет невозможным без деформации стержней  $AC$  и  $BC$ . Со статической точки зрения в этой системе возможны начальные усилия без нагрузки, допустим, за счет раздвижки опор.

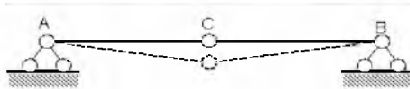


Рис. 1.50

В вантовой ферме (рис. 1.40) явно не хватает двух диагональных стержней в средних панелях, чтобы она была образована по способу треугольников (есть две степени свободы). В то же время, у нее есть четыре опорные связи, одна из которых (горизонтальная) является лишней (суммарная степень свободы  $W = 1$ ). Но именно из-за наличия этой лишней связи в данной геометрически изменяемой системе возможны только бесконечно малые перемещения. Со статической точки зрения данная система при  $W > 0$  допускает и предварительное натяжение. Значит, данная система мгновенно жесткая.

Диск, подсоединенный к опорной поверхности тремя опорными стержнями, формально должен иметь нулевую степень свободы. Но если три опорных стержня сходятся в одном опорном шарнире (рис. 1.51), система остается геометрически изменяемой (свобода поворота относительно оси опорного шарнира), в то время как шарнирная неподвижная опора имеет лишний (для плоского случая) опорный стержень.

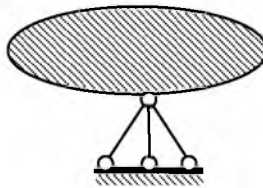


Рис. 1.51

Шарнирно-стержневой диск  $DFB$  (рис. 1.52), образованный по способу треугольников, соединен с неподвижными точками  $A$  и  $C$  Г-образными стержнями  $AD$  и  $CF$  и оперт на вертикальный опорный

стержень шарнирно подвижной опоры  $B$ , то есть соединен с опорной поверхностью тремя стержнями-дисками ( $W = 0$ ). Но линии, на которых лежат концы этих трех стержней, пересекаются в одной точке  $O$ , центре мгновенного вращения. В системе возможны и начальные усилия за счет поддомкрачивания центральной опоры. Следовательно, данная система мгновенно изменяемая.

Примеры некоторых других систем неправильной структуры приведены на рис. 1.53 (система геометрически изменяема, хотя  $W = -2$ ) и рис. 1.54 (система со статически неопределимым фрагментом мгновенно изменяема при  $W = -3$ ).

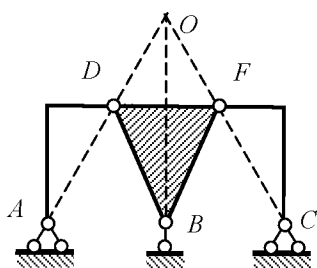


Рис. 1.52

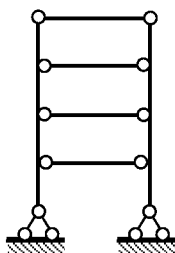


Рис. 1.53

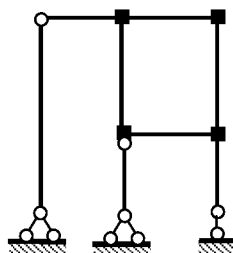


Рис. 1.54

## 1.6. Матрицы в задачах строительной механики

При проведении расчетов, ориентированных на компьютерные технологии, в строительной механике применяют дискретные расчетные схемы и методы матричного исчисления. Действующие на сооружение нагрузки представляют в виде вектора нагрузок, компонентами которого являются значения заданных нагрузок, занумерованных в определенном порядке. Результатами расчета будут служить не эпюры усилий или эпюры перемещений, а векторы усилий и векторы перемещений, в которых в заданном порядке будут перечислены значения конкретных усилий в конкретных сечениях и значения перемещений конкретных точек сооружения в заданных конкретных направлениях.

Так, нагрузки, примененные к простой балке (рис. 1.55), можно представить вектором  $\vec{F}_1$  третьего порядка:

$$\vec{F}_1 = [q_1 \quad F_2 \quad M_3]^T,$$

а нагрузки, приложенные к балочной ферме (рис. 1.56), вектором  $\vec{F}_2$  пятого порядка:

$$\vec{F}_2 = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_5]^T.$$

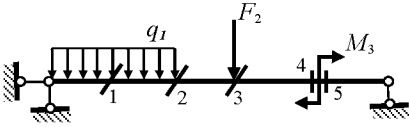


Рис. 1.55

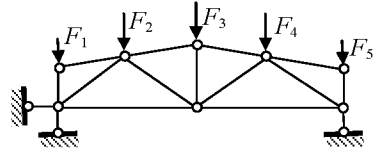


Рис. 1.56

Чтобы найти изгибающие моменты в пяти характерных сечениях балки (рис. 1.55) и внутренние силы в тринадцати стержнях фермы (рис. 1.56) от заданных нагрузок, достаточно построить соответственно матрицу влияния изгибающих моментов  $L_M$  для балки и матрицу влияния продольных сил  $L_N$  для фермы, стержни которой предварительно необходимо пронумеровать. Затем воспользоваться матричными формулами:

$$\vec{M} = L_M \vec{F}_1; \quad \vec{N} = L_N \vec{F}_2,$$

где

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_5 \end{bmatrix}; \quad L_M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} \end{bmatrix},$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_{13} \end{bmatrix}; \quad L_N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{11} & \dots & n_{15} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{13,1} & n_{13,2} & \dots & n_{13,5} \end{bmatrix}.$$

Элемент  $m_{ik}$  матрицы влияния изгибающих моментов представляет собой изгибающий момент в характерном сечении номер  $i$  балки, вызванный единичным значением нагрузки номер  $k$ . Элемент  $n_{ik}$  матрицы влияния продольных сил представляет собой усилие в стержне номер  $i$  фермы от единичного значения внешней силы  $F_k = 1$ .

С помощью соответствующим образом построенной матрицы влияния перемещений  $D$  можно найти вектор  $\vec{\Delta}$  перемещений заданных точек по заданным направлениям от внешних сил, заданных вектором  $\vec{F}$ :

$$\vec{\Delta} = D\vec{F},$$

где

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nk} \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_k \end{bmatrix}.$$

Символ  $\Delta_{nF}$  обозначает перемещение точки (сечения) номер  $n$  по направлению приложенной в этой точке силы  $F_n = 1$ , вызванное заданной нагрузкой. Элемент  $\delta_{nk}$  матрицы влияния перемещений  $D$  равен перемещению точки (сечения) номер  $n$  по направлению силы  $F_n = 1$ , вызванному силой  $F_k = 1$ , и называется единичным перемещением.

Таким образом, применение матриц влияния основано на принципе независимости действия сил, принципе суперпозиции. Согласно этому принципу, суммарный эффект действия нескольких сил равен сумме эффектов действия каждой силы в отдельности. На первом этапе расчет сводится к вычислению внутренних сил и перемещений от единичных внешних сил и построению матриц влияния. На втором этапе по матричным формулам с помощью компьютера вычисляются усилия и перемещения от любой комбинации нагрузок.

Матрицу влияния перемещений  $D$  еще называют матрицей податливости. Матрица податливости позволяет выразить перемещения через внешние силы. Квадратную матрицу податливости можно обратить и получить новую матрицу  $R$ , называемую матрицей жесткости:

$$R = D^{-1}.$$

Матрица жесткости позволяет выразить внешние силы через перемещения точек, к которым эти силы приложены:

$$\vec{F} = R\vec{\Delta}.$$

Не вникая более в детали, отметим пока, что матрицы податливости и матрицы жесткости широко используются при расчете статически неопределимых систем, а также в динамике и устойчивости сооружений. На основе матричного исчисления созданы современные проектно-вычислительные комплексы для расчета сооружений с помощью компьютеров.

### **1.7. Краткий исторический очерк развития строительной механики**

История науки о прочности сооружений достаточно древняя и характеризуется множеством направлений, глубокими взаимосвязями с развитием технических и математических наук. Начальный период развития строительной механики как общетехнической дисциплины непосредственно связан с развитием общей механики – науки о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между телами.

Развитие основных понятий механики о равновесии твердых тел и прочности деформируемых объектов со времен Аристотеля и Архимеда и до 16–17 веков связано, в основном, с анализом взаимодействия приложенных к элементу внешних сил. Существенный вклад в исследования по статике внесли Неморарий (ок. 13 в.); итальянский живописец, архитектор и ученый Леонардо да Винчи (1452–1519), который называл механику “раем математических наук” и



видел в ней главный ключ к тайнам мироздания; нидерландский ученый и инженер Стевин (1548–1620); французский механик и математик П. Вариньон (1654–1722, трактат “Новая механика или статика”, проект которой был дан в 1687 г., изд. в 1725 г.) и др.

Первые попытки установить безопасные размеры сооружений аналитическим путем связаны с именем Г. Галилея (1564–1642) – итальянского физика, механика и астронома. Г. Галилей первым исследовал прочность балок, дал верное решение задачи о движении тела под действием силы, высказал для частного случая закон инерции, использовал в научных исследованиях сформулированную им в общем виде начальную форму принципа возможных перемещений. Правильной теории изгиба балок он не смог создать, так как исходил из неверного положения о наличии во всех волокнах балки растягивающих напряжений.

Позднее, во второй половине 18 века, результаты опытных исследований показали, что в сечении изгибаемого стержня возникают не только растягивающие, но и сжимающие напряжения.

Ко времени исследований Г. Галилея закон, связывающий напряжения и деформации, еще был не известен. Этот закон, устанавливающий основное свойство упругих материалов, в 1678 г. был сформулирован Р. Гуком. В начальной форме записи этот закон читался так: каково растяжение – такова сила.

Окончательные формулировки основных законов механики были даны английским физиком и математиком Исааком Ньютоном (1643–1727). Изложенные в его труде “Математические начала натуральной философии” (первое издание датировано 1686 г.) законы механики послужили базой для укрепления и развития так называемой векторной механики, в которой действие силы измерялось ее импульсом. Понятие импульса силы связывают с именем французского философа и математика Рене Декарта (1596–1650).

Г.В. Лейбниц (1646–1716), немецкий философ, математик и физик, считал в качестве количественной меры движения “живую силу” (кинетическую энергию). Он, фактически, заменил понятие “силы” на понятие “работа силы”. Позже было введено понятие “силовой функции”. Он высказал идею о превращении одних видов энергии в другие. Лейбниц явился, таким образом, основателем второй ветви механики – аналитической, в которой за универсальную меру различных форм движения и взаимодействия тел принимается энергия.

Аналитические выражения энергии деформации системы или полной энергии обладают определенными экстремальными свойствами, на основе которых разработаны основные исходные положения (начала, принципы) теории и эффективных методов расчета деформируемых систем. Для исследования экстремальных свойств функционалов или функций многих переменных в механике используется вариационное исчисление, отсюда следует и происхождение термина “вариационные принципы” (см. главу 16).

Продолжили развитие этого направления Я. Бернулли (1654–1705) – швейцарский математик, Ж.Л. Лагранж (1736–1813) – французский математик и механик, Л. Эйлер (1707–1783) – математик, механик и физик, Ж.Л. Даламбер (1717–1783) – французский математик и философ и др.

В 1733 г. Д. Бернулли положил начало решению задачи проектирования однопролетной балки равного сопротивления с учетом собственного веса. Эти исследования продолжил английский физик Т. Юнг и результаты опубликовал в 1807 году в двухтомном труде “Курс лекций по натуральной философии и механическому искусству” (здесь же им была введена числовая характеристика упругости, известная как модуль Юнга).

Развитию строительной механики и выделению ее в самостоятельную науку способствовали работы гениального русского инженера И.П. Кулибина (1735–1818), спроектировавшего деревянный одноарочный мост через р. Неву пролетом 298 м, предложившего использовать фермы с перекрестной решеткой.

Дальнейшее развитие теории строительной механики получила благодаря трудам французских инженеров: Л. Навье (1785–1836), впервые сделавшего вывод уравнения изогнутой оси прямого и кривого брусьев при изгибе, исследовавшего изгиб прямоугольной пластинки, получившего общие уравнения равновесия и движения упругого тела, разработавшего метод расчета висячих мостов; Г. Ламе (1795–1870), издавшего в 1852 г. первое руководство по теории упругости, не утратившее своего значения и поныне; Б. Клапейрона (1799–1864), так же как и Ламе, работавшего в 1820–1830 гг. в Петербурге в Институте инженеров путей сообщения.

В 1855 году французский ученый в области механики Б. Сен-Венан решил задачу о равнопрочности призматических брусьев, работающих на изгиб с кручением.

Талантливый русский инженер Д.И. Журавский (1821–1891) впервые разработал теорию расчета многорешетчатых деревянных ферм с железными тяжами, предложил метод определения касательных напряжений в изгибаемых балках.

Профессор Х.С. Головин (1844–1904) впервые дал расчет упругой арки методами теории упругости.

Профессор Ф.С. Ясинский (1856–1899) впервые обосновал инженерное значение теории устойчивости сжатых стержней, исследовал устойчивость сжатых стержней за пределом упругости и предложил практический метод их расчета.

Выдающийся воспитатель инженерных кадров в России профессор Н.А. Белелобский (1845–1922) спроектировал большое количество металлических мостов, издал курс строительной механика.

Развитие и совершенствование строительной механики связано с именами таких известных ученых, как Д. Максвелл, О. Мор (см. главу 7), Мюллер-Бреслау и многих др.

Большую роль в развитии строительной механики имели работы профессора В.Л. Кирпичева (1845–1913), открывшего важный по своему практическому значению закон упругого подобия, воспитавшего несколько поколений инженерных кадров.

Великим инженером своего времени и выдающимся исследователем был академик В.Г. Шухов (1853–1939). По проектам Шухова были созданы экспериментальные и промышленные установки крекинг-процесса, сооружены крупные резервуары и нефтеналивные баржи, оригинальные покрытия ряда сооружений, гиперболоидные ажурные башни и другие сооружения. По свидетельству академика А.Ю. Ишлинского, В.Г. Шухов умело выбирал арсенал математических средств для решения задач строительной механики, настойчиво пропагандируя наиболее эффективные из них. Так, например, обстоит дело с использованием общеизвестного теперь дифференциального уравнения четвертого порядка для изгиба балок.

Член многих академий мира С.П. Тимошенко (1878–1972) выполнил цикл работ по изгибу, кручению, колебаниям, теории тонких пластин и оболочек. Создал классические учебные пособия “Курс сопротивления материалов” и “Курс теории упругости”.

Существенный вклад в развитие строительной механики внесли академик А.Н. Крылов (строительная механика корабля), профессоры: Б.Г. Галеркин (работы по теории изгиба пластин и оболочек),

И.М. Рабинович (исследования и обобщения по статике и динамике сооружений), Н.В. Корноухов (расчет стержневых систем на прочность и устойчивость по деформированной схеме), П.Ф. Папкович (методы расчета судовых конструкций, экспериментальные методы изучения прочности корабля), В.З. Власов (исследования по теории тонкостенных стержней и оболочек), А.Ф. Смирнов (применение матричной формы расчета и использование вычислительной техники), В.В. Болотин (вероятностные методы расчета в строительной механике), А.П. Филин (внедрение современных методов расчета в проектную практику) и др.

Тематика исследований по строительной механике очень широка. В кратком очерке развития строительной механики невозможно перечислить все направления исследований и назвать имена всех ученых, внесших существенный вклад в развитие этой науки.

Большое значение для развития строительной механики имели работы Л.Д. Проскуракова, Ю.Н. Работнова, А.А. Ильюшина, Н.И. Мухелишвили, П.Л. Пастернака, А.Н. Динника, Н.И. Безухова, И.П. Прокофьева, А.В. Александрова, В.В. Синельникова, Н.С. Стрелецкого, Б.Н. Жемочкина, А.Р. Ржаницына, В.И. Феодосьева, А.А. Гвоздева, Б.Г. Коренева, С.А. Бернштейна, В.А. Киселева, А.С. Вольмира, А.П. Сеницына, О.В. Лузина и др.

Развитие теории численных методов решения задач строительной механики и электронно-вычислительной техники, теории дискретизации систем позволило создать проектно-вычислительные комплексы, способные выполнять расчеты разнообразных систем на статические и динамические воздействия. Большинство таких комплексов создано на базе метода конечных элементов. Этому, во многом, способствовали работы О. Зенкевича, Р. Клафа, Д. Аргириса, Р. Галлагера, Д. Одена, Г. Стренга, Дж. Фикса, Л.А. Розина, В.А. Постнова, А.М. Масленникова, Д.В. Вайнберга, А.С. Городецкого, Б.Я. Лашеникова, Н.Н. Леонтьева, Р.А. Резникова, Л.К. Нареца, Р.А. Хечумова, Н.Н. Шапошникова и др.

Наряду с необходимостью решения задач поверочного расчета, в которых при заданных воздействиях на систему определяется ее напряженно-деформированное состояние, по мере развития строительной механики проявлялся интерес к направленному поиску конструкций и систем не только необходимой прочности, жесткости и устойчивости, но и имеющих минимальную массу, характери-

зующихся минимальной стоимостью или обладающих другими показателями оптимальности. Такое направление исследований, получившее название оптимальное проектирование, связано с оптимизацией конструкций и систем по заранее устанавливаемым критериям и, как правило, реализуется с помощью методов математического программирования.

Глубокие теоретические исследования и инженерный анализ работы конструкций базируются на учете особенностей поведения сооружения под нагрузкой и действительных свойств материалов. Нелинейная зависимость между деформациями и напряжениями для реальных материалов, изменение геометрии конструкции под нагрузкой не позволяют рассматривать такие сооружения как линейно-деформируемые. Раздел механики, в котором рассматриваются отмеченные особенности, получил название нелинейной механики.

Строительная механика является постоянно развивающейся прикладной наукой. Интенсивное развитие строительной отрасли выдвигает новые сложные проблемы, для решения которых требуется исключительно творческий подход. В формировании этой науки большое значение имеют экспериментальные исследования, позволяющие судить о поведении конструкций и сооружений при различных воздействиях и оценить точность теоретических предположений и расчетов.

В настоящее время строительная механика как наука о расчете сооружений развивается в направлении более совершенных аналитических и численных методов решения задач строительства, реализуемых в проектно-вычислительных комплексах, что позволяет создавать надежные и экономичные сооружения.

**ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА  
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ  
И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА  
ПРИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ**

**2.1. Понятие о статически определимых системах.  
Их основные свойства**

Одной из основных задач строительной механики является определение внутренних сил в элементах сооружения. Методы их определения зависят от тех предпосылок, которые принимаются в расчете. От этих же предпосылок зависит и деление систем на статически определимые и статически неопределимые. При одних предпосылках одна и та же расчетная схема сооружения рассматривается как статически определимая, а при других – как статически неопределимая.

При строгой постановке задачи расчета внутренние силы необходимо определять по деформированному состоянию сооружения. В этом случае, как правило, все системы относятся к статически неопределимым.

Если внутренние силы определять по недеформированному состоянию, то принадлежность исследуемой системы к системам статически определимым или статически неопределимым можно определить и без кинематического анализа по виду уравнений, которые необходимо составить и решить для определения неизвестных усилий. Позже, в главе 16, будет показано, что в общем случае для расчета любого сооружения используются три вида уравнений: уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций (иначе, геометрические уравнения) и физические уравнения.

Статически определимыми называются системы, у которых все внутренние силы могут быть определены только из уравнений равновесия. При этом система рассматривается как твердое тело.

Перечислим основные свойства статически определимых систем.

1. Статически определимая система не имеет лишних связей, то есть  $W = 0$ . При удалении хотя бы одной связи статически определимая система обращается в геометрически изменяемую систему.

2. Усилия в статически определимых системах не зависят от упругих свойств материала и размеров сечений элементов.

3. Изменение температуры, осадка опор, незначительные отклонения в длинах элементов не вызывают в статически определимой системе дополнительных усилий.

4. Заданной нагрузке в статически определимой системе соответствует одна единственно возможная картина распределения усилий.

5. Самоуравновешенная нагрузка, приложенная к локальной части системы, вызывает усилия в элементах только этой части. В остальных элементах системы усилия будут равны нулю (рис. 2.1).

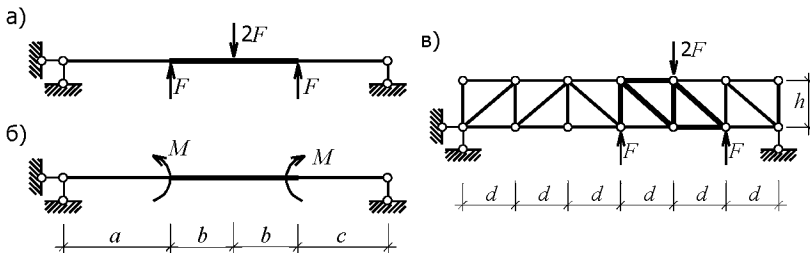


Рис. 2.1

## 2.2. Метод сечений

Изгибающий момент ( $M$ ), продольная ( $N$ ) и поперечная ( $Q$ ) силы, являющиеся внутренними силами в сечении элемента плоской системы, как известно, интегрально выражаются через нормальные ( $\sigma$ ) и касательные ( $\tau$ ) напряжения (рис. 2.2):

$$M_y = \int_A \sigma z dA, \quad N = \int_A \sigma dA, \quad Q = \int_A \tau dA,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения элемента.

Знак изгибающего момента  $M$  зависит от знака кривизны изогнутого стержня и выбранного направления осей внешней неподвижной системы координат (рис. 2.3). Если ось  $y$  направить в обратную сторону, то знак кривизны, следовательно, и момента изменится на обратный.

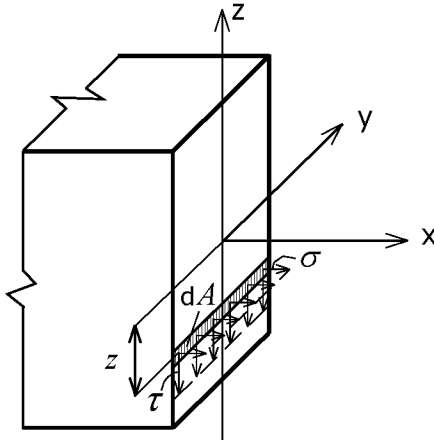


Рис. 2.2

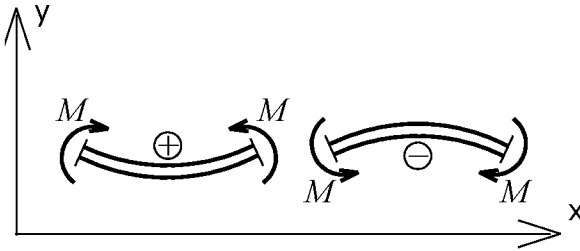


Рис. 2.3

При построении эпюр изгибающих моментов положительная ордината момента откладывается в сторону выпуклости изогнутой оси, то есть эпюра моментов строится на растянутых волокнах элемента.

Поперечную силу  $Q$  считают положительной, если она стремится вращать отсеченную часть стержня по ходу часовой стрелки (рис. 2.4,а). Отделяемые сечением части стержня на рис. 2.4 раздвинуты.

Продольную силу  $N$  считают положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части стержня (рис. 2.4,б).



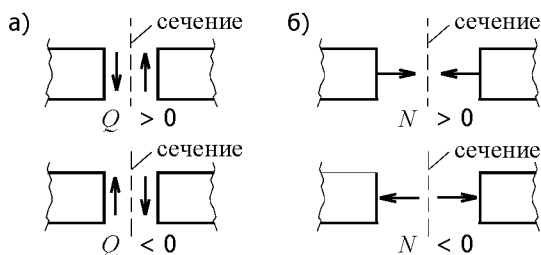


Рис. 2.4

Для определения усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  применяются уравнения равновесия любой отсеченной сечением части сооружения, которые могут быть записаны в любой из трех форм:

1. Суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любой точки  $C_1$ , лежащей в плоскости действия сил, должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_{C_1} = 0.$$

2. Суммы моментов всех сил относительно каких-нибудь двух точек  $C_1$  и  $C_2$  и сумма их проекций на любую ось ( $X$ ), не перпендикулярную к прямой  $C_1 C_2$ , должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \sum M_{C_1} = 0, \sum M_{C_2} = 0.$$

3. Суммы моментов всех сил относительно любых трех точек  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , не лежащих на одной прямой, должны быть равны нулю:

$$\sum M_{C_1} = 0, \sum M_{C_2} = 0, \sum M_{C_3} = 0.$$

Способы использования этих уравнений для определения внутренних сил зависят от структуры заданной системы.

При использовании способа простых сечений вначале исследуемая система разделяется по сечению, в котором определяются усилия, на две независимые части, а затем действие одной части на другую

заменяется искомыми внутренними силами. Для определения их составляются (в любой, из перечисленных ранее, форме) и решаются уравнения равновесия, при этом опорные реакции рассматриваемой системы вычисляются заранее по правилам, известным из курса сопротивления материалов. Например, определяя усилия в сечении  $k$  рамы (рис. 2.5,а), можно рассмотреть равновесие правой отсеченной части рамы (рис. 2.5,б) и составить уравнения вида:

$$\sum X^{(прав)} = F_3 - N_k = 0;$$

$$\sum Y^{(прав)} = V_B - F_2 + Q_k = 0;$$

$$\sum M_k = V_B b - F_2 b_1 + F_3 h_2 - M_k = 0.$$

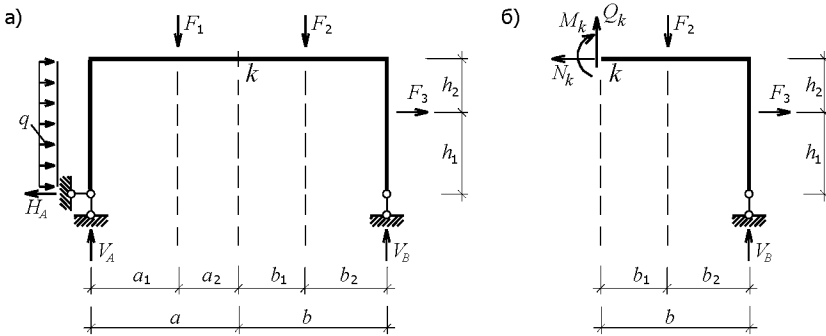


Рис. 2.5

Решив их, определим усилия  $N_k$ ,  $Q_k$  и  $M_k$ . Положительный знак найденного усилия показывает, что заданное направление усилия является действительным.

При выборе формы записи уравнений равновесия необходимо стремиться к тому, чтобы поставленная задача решалась наиболее просто: каждое уравнение, по возможности, должно содержать только одно неизвестное усилие.

Используя способы образования геометрически неизменяемых систем (см. главу 1), соединение левой и правой частей рамы в се-

чении  $k$  (рис. 2.5,а) можно представить при помощи связей первого вида. При определенном расположении связей в сечении усилие в какой-то одной связи (реакция связи) будет равно соответствующей внутренней силе, то есть  $N_k$ ,  $Q_k$  или  $M_k$ .

На рис. 2.6,а-в показаны возможные варианты расположения связей в сечении  $k$  и обозначены усилия в тех из них, с помощью которых находятся внутренние силы.

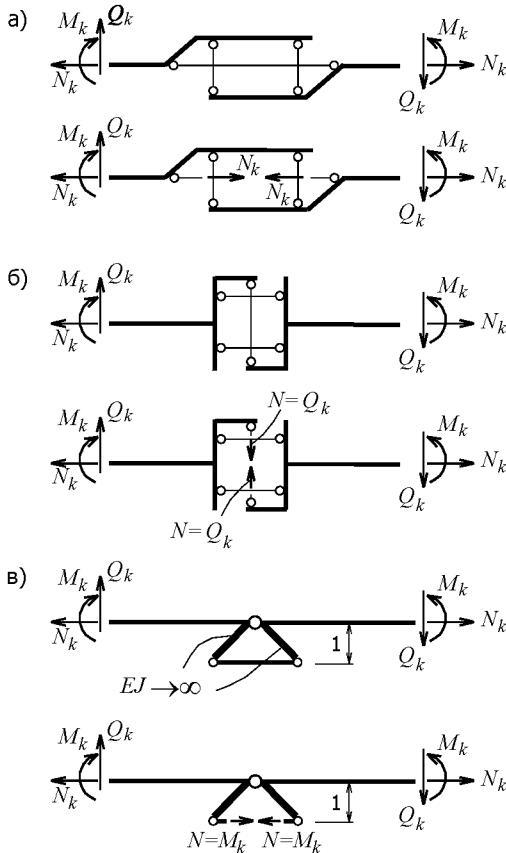


Рис. 2.6

Замену жесткой связи (спайки), соединяющей две части конструкции, связями первого вида можно рассматривать как стержневую аппроксимацию одномерного элемента в сечении  $k$ . Она используется при определении усилий статическим и кинематическим методами, при построении линий влияния усилий и в других задачах.

Частным случаем способа простых сечений является способ вырезания узлов. Если в шарнирном узле соединяются два стержня, каждый из которых представляет собой связь первого вида, то усилия в этих стержнях находятся из условия равновесия сил в этом узле. Например, усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 2.7,а, определяются из условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов. Так, составляя уравнения  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$  для узла 1 (рис. 2.7,б), получим  $N_{1-2} = -1,5\sqrt{5}F$ ,  $N_{1-6} = 3F$ . Последовательно применяя условия равновесия для узлов, в которых число неизвестных не превышает двух, определим усилия во всех стержнях фермы.

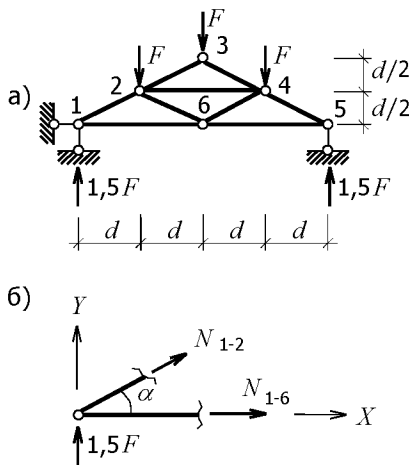


Рис. 2.7

Еще раз отметим, что при использовании способа простых сечений суммарное число неизвестных усилий в пересеченных стерж-

нях не должно быть более трех, так как для каждой части системы можно составить только три независимых уравнения равновесия. Если число неизвестных больше трех, то необходимо провести дополнительное сечение, с помощью которого можно составить другие уравнения, включающие те же неизвестные или некоторые из них. Решение системы уравнений, объединяющей условия равновесия отдельных частей конструкции по двум (в общем случае их число может быть большим) сечениям, позволит найти значения искомых усилий. Такой способ определения усилий называют способом совместных сечений.

Чтобы определить усилия в стержнях 4–10 и 10–17 полураскосной фермы (рис. 2.8,а), проведем сечение 1–1 и для левой части фермы (рис. 2.8,б) составим уравнение равновесия:

$$\sum Y^{(лев)} = V_A - F - N_{10-4} \sin \beta + N_{10-17} \sin \alpha = 0.$$

Вторым сечением 2–2 вырежем узел 10 (рис. 2.8,в). Составим уравнение проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum X = N_{10-4} \cos \beta + N_{10-17} \cos \alpha = 0.$$

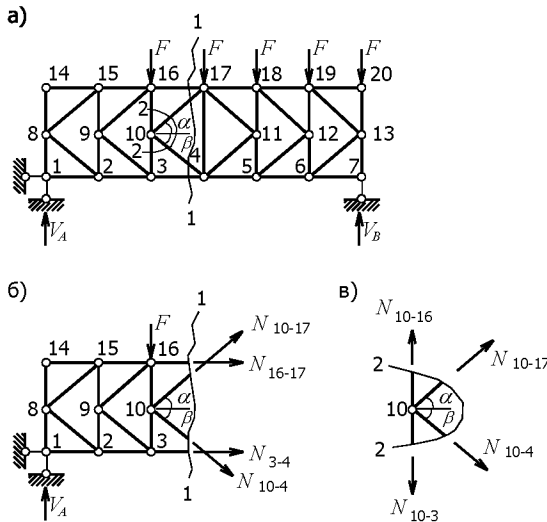


Рис. 2.8

Совместное решение полученных уравнений позволит найти усилия  $N_{10-4}$  и  $N_{10-17}$ .

Для определения усилия в стержне 9-3 консольной фермы (рис. 2.9,а) вырежем сечением 1-1 узел 9 (рис. 2.9,б) и составим уравнение проекций на ось  $Y$  :

$$\sum Y = -N_{9-3} - N_{9-10} \sin \alpha = 0.$$

Проведем сечение 2-2. Из уравнения равновесия сил, действующих на правую часть фермы (рис. 2.9,в), определим усилие  $N_{9-10}$  :

$$\sum M_3 = F(d + 2d + 3d) - N_{9-10} h \cos \alpha = 0.$$

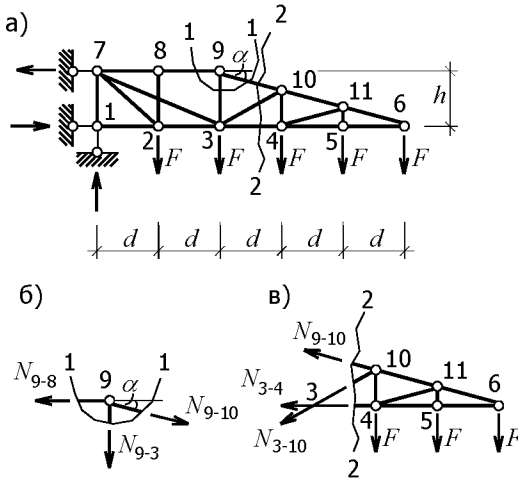


Рис. 2.9

Зная  $N_{9-10}$ , из первого уравнения найдем  $N_{9-3}$ .

Разновидностью статического метода определения усилий является и способ членения исследуемой системы на множество отдельных фрагментов. Составляя для каждого из них уравнения равновесия с учетом, естественно, внутренних сил (они являются неизвестными)

в сечениях, разделяющих фрагменты, получим для статически определимой системы полную систему уравнений, решение которой даст значения неизвестных.

Разобьем, например, раму (рис. 2.10,а) на три фрагмента, показанные на рис. 2.10,б. Общее число неизвестных равно девяти: четыре опорные реакции, три неизвестные в сечении  $D$  и две в сечении  $C$ . Для каждого из трех фрагментов (дисков) можно составить три независимых уравнения в любой из ранее перечисленных форм. Решение совместной системы линейных уравнений 9-го порядка позволит найти все неизвестные.

Дальнейшее расширение этого способа вычисления усилий связано с членением заданной системы на отдельные элементы и узлы. Об этом читайте в главе 15.

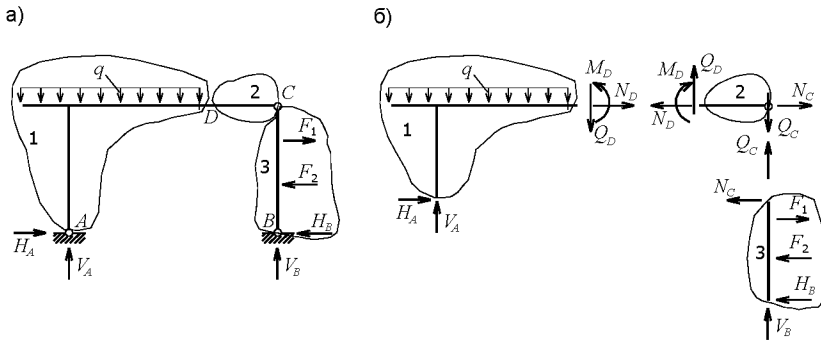


Рис. 2.10

### 2.3. Метод замены связей

Рассмотрим применение этого метода к расчету фермы, показанной на рис. 2.11,а. Ферма является статически определимой. Ее структура может быть представлена в виде трех дисков (треугольники 3–5–6, 4–6–7 и стержень 1–2), попарно соединенных двумя связями. Поскольку точки пересечения стержней 1–3 и 2–5, 2–4 и 1–7 и узел 6 (полусы взаимного вращения дисков) не лежат на одной прямой, то ферма не является мгновенно изменяемой.

Ферму невозможно рассчитать способом вырезания узлов без решения системы уравнений равновесия всех узлов. Невозможно

также применить и способ простых сечений, так как не найдется сечение, разделяющее систему на две части, при котором бы число неизвестных усилий было не более трех.

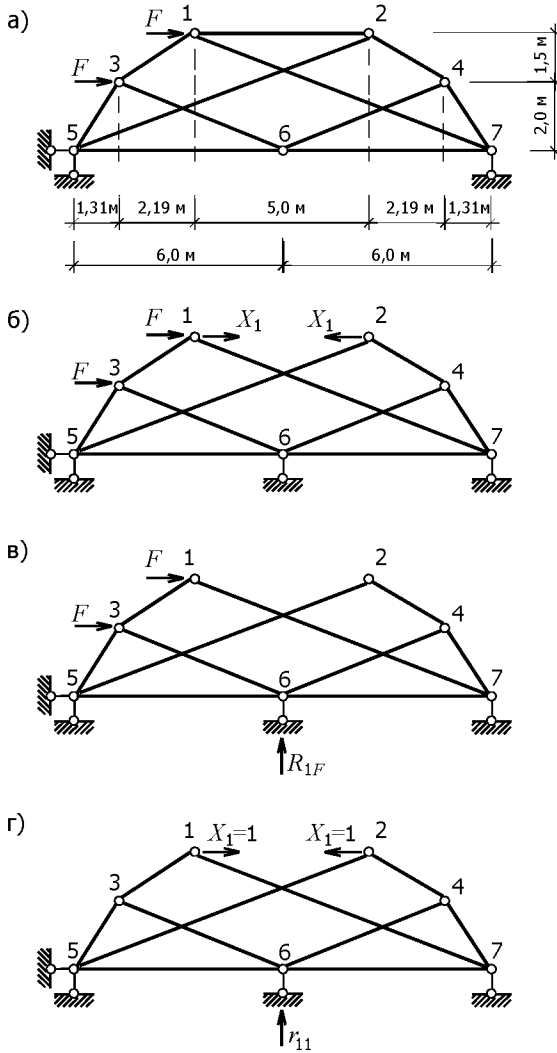


Рис. 2.11



Суть метода замены связей состоит в том, что одна из связей заданной системы удаляется, а ее действие заменяется неизвестной силой  $X$ . Чтобы система оставалась геометрически неизменяемой, в нее вводится другая связь. При удачном расположении этой связи новая система (ее называют заменяющей) получается более простой для расчета. Статическая эквивалентность заданной и заменяющей систем будет наблюдаться тогда, когда  $X$  станет равным истинному усилию в выбранном стержне. В этом случае во введенной дополнительной связи реакция окажется равной нулю. Равенство нулю усилия в дополнительной связи является условием для записи уравнения, из которого определяется усилие  $X$ .

Обратимся к примеру. В заданной ферме (рис. 2.11,а) выбросим стержень 1–2 (связь первого вида), а его действие на узлы 1 и 2 заменим силами  $X_1$ . Дополнительную связь (опорную) введем в шестой узел. Полученная такими преобразованиями заменяющая система приведена на рис. 2.11,б. Усилия в ее стержнях легко определяются по способу вырезания узлов.

Выполняя ее расчет, воспользуемся принципом независимости действия сил. Найдем вначале усилия в стержнях при нагружении системы заданной внешней нагрузкой (рис. 2.11,в). Будем их обозначать  $N_{i-k,F}$ . Усилие в дополнительной опорной связи –  $R_{1F}$  (индекс 1 означает номер дополнительной связи, индекс  $F$  указывает на причину, вызвавшую усилие). Для принятых на рис. 2.11,а размеров получим  $R_{1F} = 0,4023F$ .

Рассчитаем заменяющую систему на действие  $X_1 = 1$  (рис. 2.11,г). Усилия в стержнях будем обозначать  $N_{i-k,1}$ . Усилие в дополнительной связи –  $r_{11}$  (первый индекс, как и ранее, – номер дополнительной связи; второй указывает на причину, вызвавшую усилие). В рассматриваемом случае  $r_{11} = 0,1380$ .

Так как реакция дополнительной опоры равна нулю, то можно записать уравнение:

$$r_{11}X_1 + R_{1F} = 0, \quad (2.1)$$

из которого найдем  $X_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}} = -2,915F$ .

Если бы оказалось, что  $r_{11} = 0$ , то это было бы признаком того, что заданная ферма является мгновенно изменяемой.

Последующий расчет фермы можно выполнить способом вырезания узлов, или, если известны все  $N_{i-k,F}$ ,  $N_{i-k,1}$ , усилия в стержнях заданной фермы можно вычислить по формуле:

$$N_{i-k} = N_{i-k,F} + N_{i-k,1}X_1.$$

Рассмотрим еще один пример. Многопролетная балка (рис. 2.12,а) легко рассчитывается по способу простых сечений. Однако чтобы лучше понять суть метода замены связей, покажем ее расчет и этим методом.

Удалим в заданной балке опорные связи в точках  $B$  и  $D$ . Действие их на балку заменим силами  $X_1$  и  $X_2$ . Введем дополнительные связи в точках  $A$  и  $C$ , то есть закроем шарниры. Полученная этими преобразованиями заменяющая система показана на рис. 2.12,б или, в более привычной форме изображения, на рис. 2.12,в.

Построим эпюры изгибающих моментов в заменяющей балке от нагружения ее заданной нагрузкой (рис. 2.12,г), единичной силой  $X_1$  (рис. 2.12,д) и единичной силой  $X_2$  (рис. 2.12,е). Значения моментов в дополнительных связях от этих нагрузок показаны на рисунках.

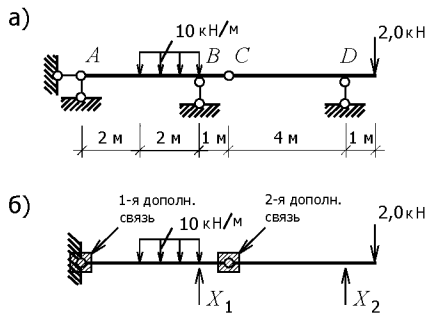
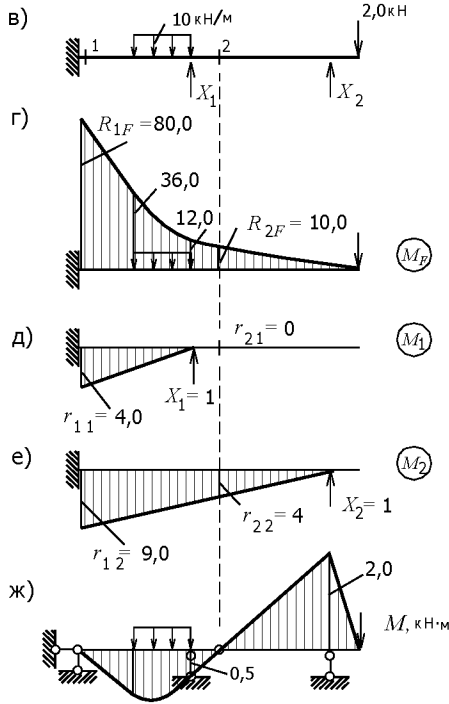


Рис. 2.12



Продолжение рис. 2.12

Из условий статической эквивалентности заданной и заменяющей балок следует, что усилия (моменты) в первой и второй дополнительных связях должны быть равны нулю. Определяя их по принципу независимости действия сил, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + R_{1F} &= 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}X_2 + R_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Запишем уравнения в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} 4X_1 + 9X_2 - 80 &= 0; \\ 4X_2 - 10 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая их, найдем  $X_1 = 2,5$  кН,  $X_2 = 2,5$  кН.

Эпюру моментов для заданной балки построим по выражению

$$M = M_F + M_1 X_1 + M_2 X_2.$$

Она показана на рис. 2.12,ж.

Понятно, что в общем случае число удаляемых и дополнительных связей может быть большим.

Запишем систему уравнений (2.2) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad L\vec{X} + \vec{R}_F = 0. \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3), записываемое в виде:

$$\vec{X} = -L^{-1}\vec{R}_F, \quad (2.4)$$

возможно лишь в том случае, когда определитель матрицы  $L$  не равен нулю:

$$\text{Det } L \neq 0.$$

Значит, равенство нулю определителя:

$$\text{Det } L = 0,$$

служит признаком мгновенной изменяемости заданной системы.

## 2.4. Кинематический метод

Кинематический метод основан на использовании принципа возможных перемещений, который позволяет получить необходимые условия равновесия системы.

Возможными перемещениями системы называют любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых ее связями. Возможные перемещения, в отличие от действительных, не зависят от заданных внешних воздействий. Они определяются только типом самой системы и видом наложенных на систему связей, это чисто геометрические понятия.

Будем считать, что при переходе системы из действительного состояния в новое, вызванное возможными перемещениями, внешние и внутренние силы не меняются.

Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях носит название возможной работы. С учетом введенных замечаний эта работа определяется как работа неизменных сил на возможных перемещениях.

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия деформируемой системы. Формулируется он так: **если система находится в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил, то при всяком возможном бесконечно малом перемещении точек этой системы сумма работ ее внешних и внутренних сил равна нулю.** Представим формальную запись этого принципа в виде:

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 0. \quad (2.5)$$

где  $W^{(возм)}$  – возможная работа внешних сил;

$A_{внутр}^{(возм)}$  – возможная работа внутренних сил.

Вводя понятие степени свободы стержневой системы (см. раздел 1.4) мы предполагали, что ее стержни являются абсолютно твердыми, недеформируемыми. Учитывая это, а также определение понятия о возможных перемещениях, надо отметить, что в исходном состоянии статически определимой системы ( $W = 0$ ) нельзя задавать возможные перемещения. Как же тогда применять принцип возможных перемещений к расчету таких систем?

Для использования этого принципа в задачах расчета статически определимых систем применяется основная аксиома механики несвободных материальных тел – принцип освобожденности. Удалим какую-либо связь (опорную, или из числа тех, которые показаны на рис. 2.6) и приложим к системе, кроме заданных внешних сил, усилие  $S$ , которое могло бы возникнуть в удаленной связи. Такая система будет представлять собой механизм с одной степенью свободы ( $W = 1$ ) и, значит, допускает одно возможное перемещение. Ее равновесное состояние возможно только в том случае, если неизвестное усилие  $S$  в удаленной связи будет равно истинному значению.

Полученному механизму зададим возможное перемещение. Работа внутренних сил по всей длине недеформируемых элементов равна нулю. Рассматривая усилие в удаленной связи как внешнюю силу, уравнение возможных работ всех сил (уравнение Лагранжа) запишем в виде:

$$W^{(возм)} = S_i \delta_i + \sum F_k \Delta_k = 0, \quad (2.6)$$

где  $S_i$  – искомое усилие в связи  $i$ ,  $\delta_i$  – перемещение по его направлению;

$F_k$  –  $k$ -я обобщенная сила,  $\Delta_k$  – перемещение по направлению силы  $F_k$ .

Если направления силы и соответствующего ей перемещения совпадают, то работа положительна.

Так как расчет ведется по недеформированной схеме, то в системе с одной степенью свободы все перемещения  $\delta_i$  и  $\Delta_k$  выражаются через один параметр. Сократив каждое слагаемое уравнения (2.6) на этот параметр, решим его относительно  $S_i$ .

Например, определяя реакцию  $V_B$  в опоре  $B$  двухпролетной статически определимой балки (рис. 2.13,а), удалим опорную связь в точке  $B$  и приложим в этой точке неизвестную силу  $V_B$ . Положение механизма с одной степенью свободы определяется одним параметром. В качестве этого параметра примем угол поворота балки  $AB$  (рис. 2.13,б). Так как  $\varphi$ , по определению, является бесконечно малым углом, то  $\Delta_1 = 2l\varphi$ ,  $\Delta_B = 4l\varphi$ ,  $\Delta_2 = 5l\varphi$ ,  $\Delta_3 = 5l\varphi$ .

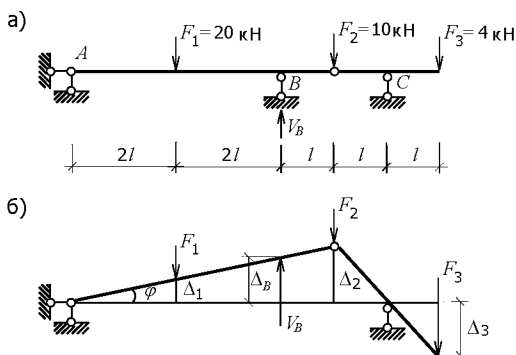


Рис. 2.13

Уравнение работ (2.5) запишется в виде:

$$W^{(возм)} = V_B 4l\varphi - F_1 2l\varphi - F_2 5l\varphi + F_3 5l\varphi = 0.$$

Решение его дает  $V_B = 17,5$  кН.

При определении усилия в стержне 1–2 шпренгельной балки (рис. 2.14,а) последовательность действий остается такой же, как и в предыдущем примере. После удаления в заданной балке стержня 1–2 получим механизм, возможные перемещения которого характеризуются взаимным поворотом стержней  $AC$  и  $CB$  относительно точки  $C$ . Зададим правому диску возможное перемещение в виде поворота его вокруг шарнира  $C$  на бесконечно малый угол  $\varphi$  (рис. 2.14,б).

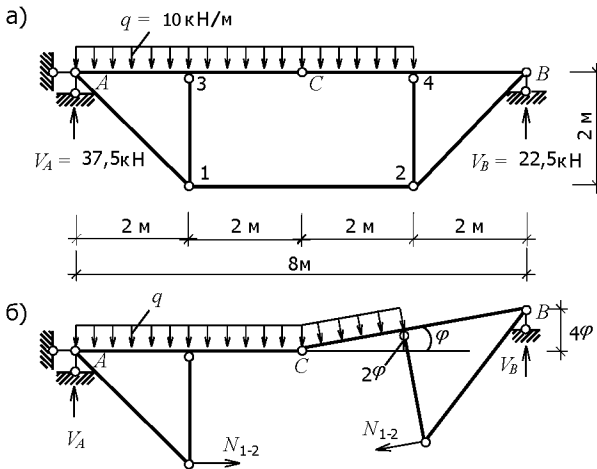


Рис. 2.14

Из уравнения возможных работ

$$- N_{1-2} 2\varphi + V_B 4\varphi - q \frac{1}{2} 2 \cdot 2\varphi = 0$$

найдем  $N_{1-2} = 35$  кН.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ОТ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

### 3.1. Понятие о подвижной нагрузке и особенностях расчета на ее действие

Подвижной называется нагрузка, которая перемещается по сооружению, не меняя направления действия. Примерами таких нагрузок могут служить давления от колес автомобилей, автомобильных поездов, железнодорожных составов, движущихся по эстакадам, мостам; давления от колес различного рода грузовых тележек, подъемников, перемещающихся по перекрытиям производственных зданий и сооружений; давления от колес мостовых кранов на подкрановые балки и т. п. Нагрузка в этих случаях может рассматриваться как система связанных между собой сил с заданными расстояниями между ними (расстояниями между осями колесных пар этих транспортных и грузовых средств). По своей природе подвижная нагрузка является динамической. Однако ускорения масс сооружений при действии таких нагрузок малы, вызывают незначительные силы инерции, поэтому их влиянием обычно пренебрегают. Учет динамического действия подвижных нагрузок, при необходимости, может быть выполнен путем использования методов расчета, рассматриваемых далее в динамике сооружений.

Статический расчет сооружений на действие подвижных нагрузок выполняется с помощью линий влияния усилий.

Линия влияния усилия – это графическое изображение изменения усилия в определенном элементе сооружения при перемещении по сооружению единичной силы постоянного направления.

При построении линии влияния некоторого усилия или реакции рассматривается произвольное положение на сооружении единичной силы. Для этого состояния составляются уравнения равновесия. Из уравнений равновесия получают функциональную зависимость рассматриваемого усилия от абсциссы положения силы. График этой зависимости и представляет искомую линию влияния.

Отметим отличия линий влияния усилий от эпюр усилий.

Эпюра усилий представляет собой график, показывающий значения соответствующего усилия (изгибающего момента, попереч-



ной силы, продольной силы) во всех сечениях рассматриваемого сооружения от действия определенной совокупности заданных неподвижных нагрузок. Ординаты эпюры усилий показывают значение усилия в том сечении элемента сооружения, где они отложены. При любом изменении нагрузок усилия изменяются, и эпюры усилий необходимо строить заново.

Линия влияния представляет собой график, характеризующий изменение конкретного усилия в одном строго определенном сечении сооружения в зависимости от положения подвижной единичной сосредоточенной силы. Ордината линии влияния показывает значение соответствующего усилия при положении единичной силы в том месте, где рассматриваемая ордината отложена. По данной линии влияния нельзя ничего сказать об изменении усилий в других сечениях сооружения.

Единичная подвижная сила при построении линий влияния принимается безразмерной. Поэтому размерности линий влияния усилий определяются выражением

$$[\text{размерность ординат линии влияния усилия}] = \frac{[\text{размерность усилия}]}{[\text{размерность силы}]}$$

Соответственно ординаты линий влияния опорных реакций, поперечных и продольных сил будут безразмерными (Н/Н), а размерность ординат линий влияния изгибающих моментов будет равна размерности длины (Н·м/Н = м).

Линии влияния усилий позволяют:

- определять значения усилий от нагрузок при любом их положении;
- находить наиболее невыгодные расположения нагрузок на сооружении с целью определения экстремальных (максимальных и минимальных) усилий.

### **3.2. Статический метод построения линий влияния усилий в простых балках**

Особенности применения статического метода рассмотрим на примере построения линий влияния опорных реакций и усилий в одном из сечений для консольной балки (рис. 3.1).

Зависимости для определения опорных реакций при перемещении единичной силы по балке получим из уравнений равновесия балки.

Так как подвижная сила является вертикальной, то из уравнения  $\sum X = 0$  следует, что горизонтальная реакция  $H_A = 0$ . Линия влияния горизонтальной реакции в консольной балке, таким образом, будет иметь нулевые ординаты.

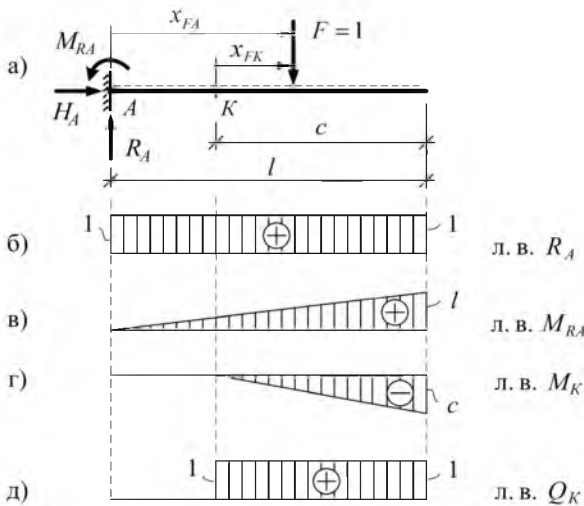


Рис. 3.1

Вертикальную реакцию определим из уравнения  $\sum Y = 0$ . При любом положении груза вертикальная реакция равна единице ( $R_A = 1$ ), то есть является величиной постоянной на всем участке движения силы. Соответствующий график линии влияния  $R_A$  представлен на рис. 3.1,б.

При построении всех линий влияния положительные ординаты откладываются выше оси балки, отрицательные – ниже.

Реактивный момент в заделке определим из уравнения:

$$\sum M_A = 0; \quad -M_{RA} + 1x_{FA} = 0; \quad M_{RA} = x_{FA}.$$

Опорный момент изменяется по линейному закону. Для построения графика прямой линии достаточно вычислить ординаты в двух точках. Так, при  $x_{FA} = 0$ ,  $M_{RA} = 0$ , а при  $x_{FA} = l$ ,  $M_{RA} = l$ . Соединив эти точки прямой, получим линию влияния опорного момента (рис. 3.1,в).

Изгибающий момент и поперечную силу в сечении  $K$  определим из уравнений равновесия правой части балки, когда сила  $F = 1$  расположена справа от сечения  $K$ :

$$M_K^{np} = -1 x_{FK} \quad (\text{при } x_{FK} = 0 \quad M_K = 0; \\ \text{при } x_{FK} = c \quad M_K = -c); \quad Q_K^{np} = +1.$$

При движении силы слева от сечения  $K$  из уравнений  $\sum M_K^{np} = 0$  и  $\sum Q_K^{np} = 0$  следует, что  $M_K = 0$ ,  $Q_K = 0$ . Линии влияния  $M_K$  и  $Q_K$  показаны на рис. 3.1,г,д.

Наибольшее по модулю значение изгибающего момента в сечении  $K$  возникает при расположении силы на конце консоли. При положениях силы правее сечения  $K$  растянуты верхние волокна балки, поэтому ординаты изгибающего момента отрицательны. Поперечная сила в сечении  $K$  при том же положении силы положительна (вращает элемент балки по часовой стрелке) и равна единице. В сечении  $K$  линия влияния изгибающего момента имеет излом, а линия влияния поперечной силы – разрыв на единицу (скачок).

Построим линии влияния опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  для двухопорной балки с консолями (рис. 3.2,а). Из уравнений равновесия балки следует:

$$\sum M_B = 0; \quad 1 x - R_B l = 0; \quad R_B = x/l; \quad (3.1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -1(l - x) + R_A l = 0; \quad R_A = (l - x)/l. \quad (3.2)$$

Полученные зависимости представляют собой уравнения прямых, которые построим по двум точкам:

$$- \text{при } x = 0 \quad R_A = 1, \quad R_B = 0;$$

$$- \text{при } x = l \quad R_A = 0, \quad R_B = 1;$$

Дополнительно вычислим значения реакций при положениях силы:

а) на конце левой консоли при  $x = -l_{k1}$ ;

$$R_A = (l - l_{k1})/l; \quad R_B = l_{k1}/l;$$

б) в сечении  $K$  между опорами при  $x = a$ ;

$$R_A = (l - a)/l; \quad R_B = a/l;$$

в) на конце правой консоли при  $x = l + l_{k2}$ ;

$$R_A = -l_{k2}/l; \quad R_B = (l + l_{k2})/l.$$

Линии влияния опорных реакций, построенные согласно полученным зависимостям, представлены на рис. 3.2, б, в.

Построим линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении  $K$ .

Усилия в сечении  $K$  могут быть найдены из рассмотрения равновесия левой либо правой части балки относительно сечения  $K$ . При этом для получения более простых зависимостей следует рассматривать ту часть балки, на которой нет подвижной силы.

При движении силы слева от сечения  $K$  изгибающий момент  $M_K$  получим из уравнения равновесия правой части балки:

$$M_K^{np} = R_B b. \quad (3.3)$$

С учетом (3.1) это выражение приводит к линейной зависимости (левая прямая):

$$M_K = \frac{xb}{l}, \quad (3.4)$$

справедливой для левой части балки, на которой находится единичная сила.

Из (3.3) следует, что левая прямая линии влияния  $M_K$  может быть построена умножением всех ординат линии влияния  $R_B$  на величину  $b$ :

$$\text{л.в. } M_K = (\text{л.в. } R_B) b.$$

Аналогично, при движении силы справа от сечения  $K$ , рассмотрим левую часть балки, будем иметь:

$$M_K = R_A a \quad \text{или} \quad \text{л.в. } M_K = (\text{л.в. } R_A) a.$$

То есть правую прямую линии влияния  $M_K$  можно построить, увеличив ординаты л.в.  $R_A$  в  $a$  раз (рис. 3.2,г).

Полученные прямые (левая и правая ветви линии влияния  $M_K$ ) пересекаются под сечением  $K$ . Линия влияния поперечной силы в сечении  $K$  строится аналогично. При движении силы слева от сечения получим (левая прямая):

$$Q_K = -R_B \quad \text{то есть} \quad \text{л.в. } Q_K = -(\text{л.в. } R_B).$$

При движении силы справа от сечения из уравнения равновесия левой части будем иметь (правая прямая):

$$Q_K = R_A \quad \text{то есть} \quad \text{л.в. } Q_K = \text{л.в. } R_A.$$

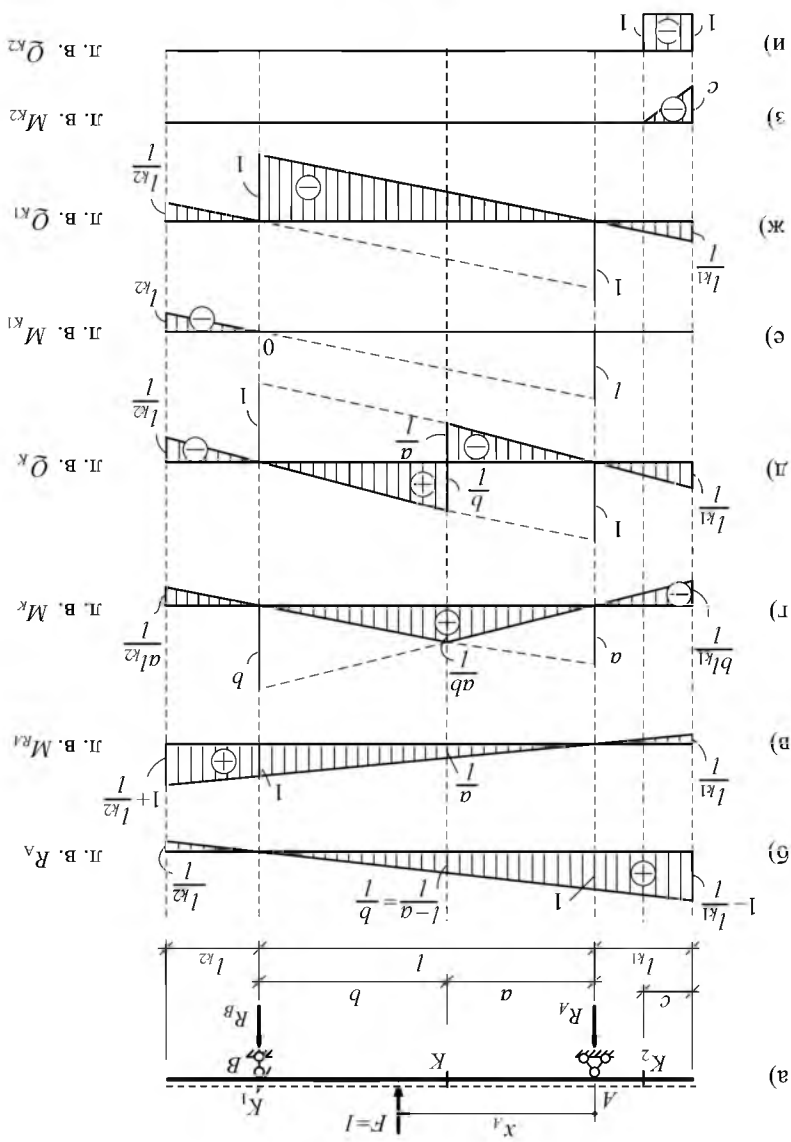
Построенная линия влияния  $Q_K$  показана на рис. 3.2,д. Под сечением  $K$  она имеет разрыв на единицу ( $a/l + b/l = 1$ ). На рис. 3.2,е,ж показаны линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении  $K_1$ , бесконечно близком к опоре  $B$ .

Линии влияния усилий в сечениях на консолях двухопорной балки (рис. 3.2,з,и) строятся так же, как и в сечениях консольной балки (рис. 3.1,г,д).

Заметим, что линии влияния усилий в балках, а также и в других статически определимых системах, имеют линейное или кусочно-линейное очертание.

Рассмотрим построение линий влияния усилий в многопролетных статически определимых балках, которые представляют собой совокупность простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами. Если простые балки, входящие в состав многопролетной, не будут связаны между собой шарнирами, то некоторые из них смогут самостоятельно воспринимать действующую на них нагрузку (их называют

Рис. 3.2



главными). Остальные балки (второстепенные) будут геометрически изменяемыми, если их не присоединить недостающими связями к главным балкам. Взаимодействие элементов многопролетной балки становится более понятным, если многопролетную балку изобразить в виде этажной схемы. На ней второстепенные балки показывают опирающимися на нижерасположенные неподвижные (геометрически неизменяемые), что осуществляется посредством замены каждого шарнира двумя простыми связями.

Расчет многопролетных балок сводится к расчету составляющих их простых балок. При этом расчет начинается с вышерасположенных второстепенных балок с постепенным переходом к расчету нижележащих. Опорные реакции второстепенной балки, взятые с обратным знаком, являются нагрузкой на главную.

Для построения линии влияния усилия в многопролетной балке необходимо сначала построить линию влияния усилия в простой балке, к которой относится рассматриваемое усилие. Затем, в соответствии с этажной схемой, необходимо продолжить ее построение на смежных балках.

При этом, если единичная сила располагается на нижележащей, главной балке, то вышерасположенные, второстепенные балки не работают. Следовательно, ординаты линии влияния рассматриваемого усилия на нижележащей балке (там, где движется сила) будут нулевыми.

Если же сила движется по вышерасположенной, второстепенной балке, то усилия в нижерасположенной, главной балке возникают. Для построения линии влияния на этом участке движения силы необходимо иметь в виду следующее.

Ордината линии влияния в шарнире, соединяющем главную балку со второстепенной, является уже известной. При расположении подвижной силы над опорой давление на ниже расположенную балку не передается. Поэтому в этой точке (над опорой) ордината линии влияния равна нулю. Так как линии влияния усилий в статически определимых системах являются кусочно-линейными, то полученные две ординаты позволяют построить очередной участок линии влияния в пределах соответствующей простой балки.

Рассмотрим построение линий влияния усилий в статически определимой многопролетной балке, представленной на рис. 3.3.

Опора  $C$  относится к балке  $BCD$ , поэтому построение линии влияния опорной реакции  $R_C$  начинаем с рассмотрения движения силы  $F = 1$  по этой балке. Строится линия влияния  $R_C$  по зависимостям (3.1), (3.2), как в простой двухопорной балке, каковой она и является (см. л.в.  $R_B$  на рис. 3.2). После этого рассматриваем движение единичной силы, например, по балке  $DST$ . В шарнире  $D$  ордината линии влияния известна и равна  $1 + l_{K2} / l_2$ . При расположении силы над опорой  $S$  она полностью воспринимается этой опорой, и все усилия во всей многопролетной балке, включая реакцию  $R_C$ , равны нулю (нулевая ордината над опорой  $S$ ). Через эти две точки проводим прямую в пределах участка  $DST$  (рис. 3.3,в). При движении груза по балке  $TU$  проводятся аналогичные действия. Осталось рассмотреть движение груза по балке  $AB$ , которая является главной и расположена на поэтажной схеме ниже балки  $BCD$ . Так как усилия от нагрузки, расположенной на балке  $AB$ , на верхние балки не передаются, то линия влияния  $R_C$  на этом участке будет нулевой (рис. 3.3,в).

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечениях  $K_1$  и  $K_2$  в балке  $BCD$  строятся аналогично (рис. 3.3,г,д,е,ж). При построении линий влияния усилий в сечении  $K_2$  (рис. 3.3,е,ж) необходимо учитывать, что при расположении силы слева от этого сечения усилия в нем равны нулю. При движении силы правее сечения линии влияния усилий в нем строятся как для сечения в консольной балке (рис. 3.1).

Построение линий влияния  $Q_{K3}$  проводится так же, как для сечения  $K_1$  в двухопорной балке на рис. 3.2,ж. На участке балки  $TU$  линия влияния  $Q_{K3}$  строится на основе рассмотренных выше условий взаимодействия главных и второстепенных балок. При движении груза по балкам  $AB$  и  $BCD$  усилия в сечении  $K_3$  будут отсутствовать. Линия влияния поперечной силы в сечении  $K_3$  представлена на рис. 3.3,з.



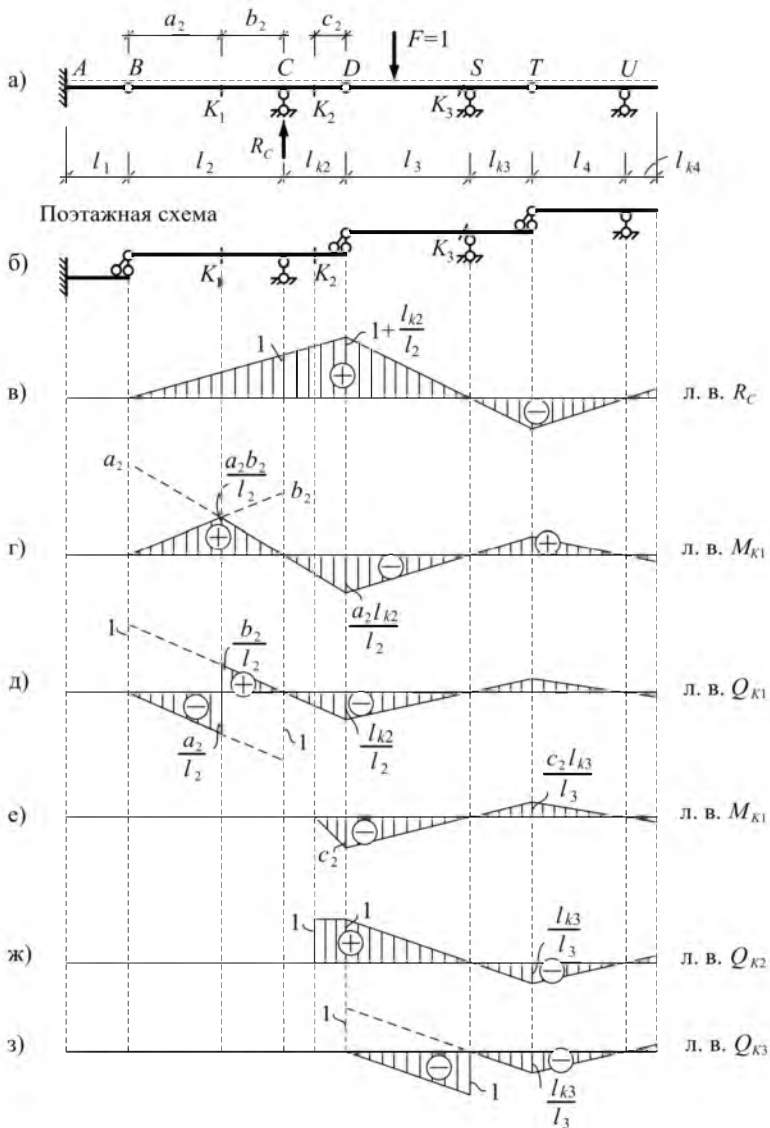


Рис. 3.3

### 3.3. Кинематический метод построения линий влияния усилий

Кинематический метод построения линий влияния основан на принципе возможных перемещений, согласно которому для находящейся в равновесии системы сумма работ всех сил на любых возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю.

Рассмотрим, например, двухопорную балку (рис. 3.4,а). Отбросим правую опору, заменив ее действие реакцией  $R_B$  (рис. 3.4,б). Полученная система превратилась в механизм. За возможные перемещения примем перемещения, вызванные поворотом балки вокруг точки  $A$  на угол  $\theta$  (рис. 3.4,в).

Запишем сумму работ сил, действующих на систему, на рассматриваемых бесконечно малых перемещениях:

$$-F \Delta_C + R_B \Delta_B = 0,$$

откуда получим выражение:

$$R_B = \frac{F \Delta_C}{\Delta_B}.$$

При изменении положения единичной силы  $F$  будет изменяться и соответствующее ей перемещение  $\Delta_C$  как функция аргумента  $x$ . Таким образом, числитель последнего выражения можно рассматривать как функцию, соответствующую эпюре возможных вертикальных перемещений точек балки, а знаменатель  $\Delta_B$  является масштабным коэффициентом (положение реакции  $R_B$  зафиксировано). Приняв  $\Delta_B$  равным единице, получим:

$$R_B = \Delta_C.$$

Следовательно, очертание линии влияния  $R_B$  (рис. 3.4,г) соответствует эпюре возможных перемещений балки (рис. 3.4,в). Перемещения точек  $C$  и  $B$  можно выразить через угол поворота  $\theta$ :

$$\Delta_C = x \operatorname{tg} \theta \approx x \theta; \quad \Delta_B = l \operatorname{tg} \theta \approx l \theta.$$

Подставляя их в выражение для  $R_B$ , получим:

$$R_B = \frac{x}{l}.$$

Полученная зависимость совпадает с формулой (3.1), полученной ранее статическим методом.

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении  $K$  рассматриваемой двухопорной балки (рис. 3.4,а) отбросим моментную связь (введем шарнир) в этом сечении (рис. 3.4,д). Возможные перемещения системы показаны на рис. 3.4,е. Сумма работ силы  $F$  и моментов  $M_K$  на соответствующих бесконечно малых перемещениях определяется выражением:

$$-F \Delta_C + M_K \varphi = 0, \quad (3.5)$$

где  $\varphi$  – угол взаимного поворота торцевых сечений элементов, примыкающих к шарниру (рис. 3.4,ж).

Из (3.5) следует, что при  $F = 1$ :

$$M_K = \frac{\Delta_C}{\varphi}.$$

Приняв  $\varphi$  равным единице, получим, что искомая линия влияния изгибающего момента в сечении  $K$  (рис. 3.4,з) совпадает с эпюрой возможных перемещений балки (рис. 3.4,ж). Используя обозначения, приведенные на (рис. 3.4,е,ж,з), можно показать, что она в точности совпадает с линией влияния, построенной ранее статическим методом.

Таким образом, для построения кинематическим методом линии влияния некоторого усилия в сооружении необходимо отбросить связь, в которой возникает это усилие. После этого полученному механизму по направлению усилия в отброшенной связи задается перемещение, равное единице. Полученный график перемещений и будет представлять собой линию влияния рассматриваемого усилия.

Построим кинематическим методом линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  двухопорной балки (рис. 3.5,а).

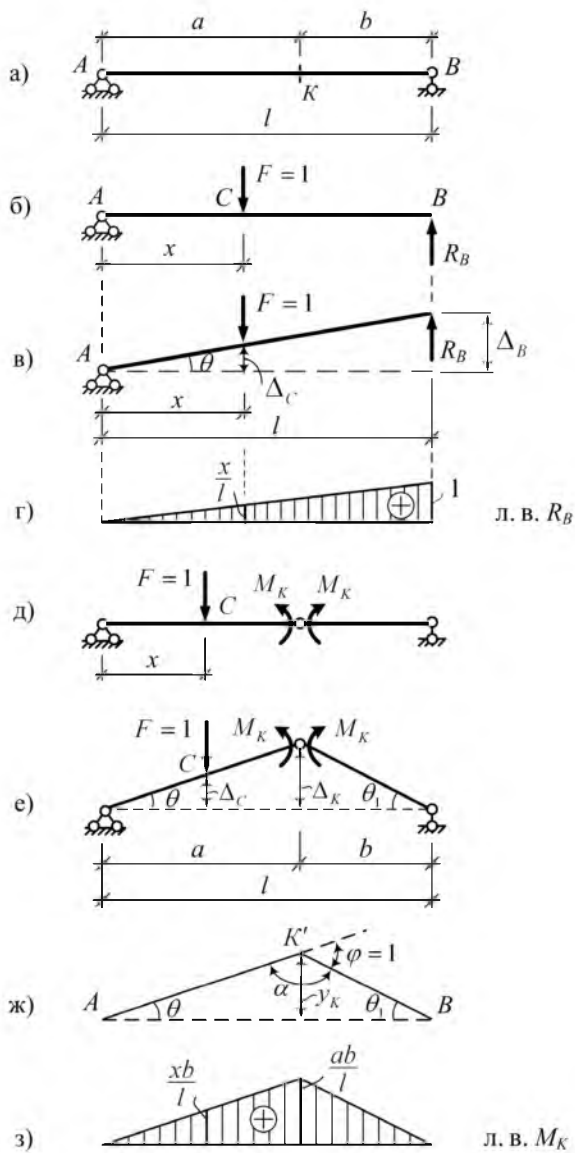


Рис. 3.4

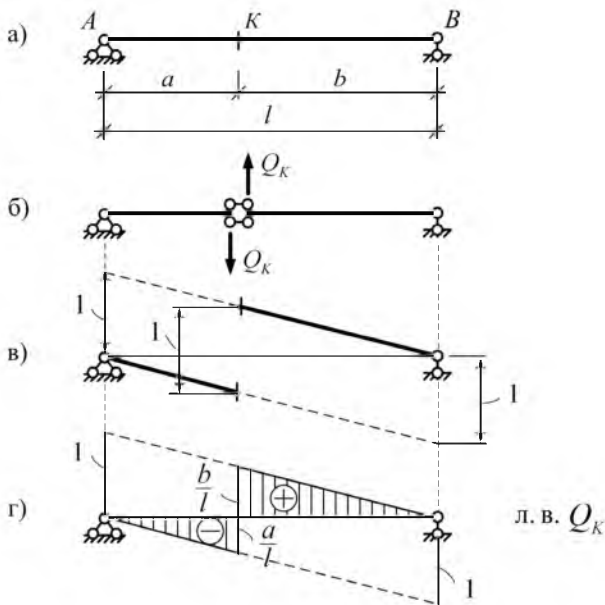


Рис. 3.5

Отбросим в этом сечении вертикальную связь (рис. 3.5,б), в которой возникает поперечная сила. Задав взаимное единичное смещение торцов балок по направлениям сил  $Q_K$ , получим график перемещений сооружения в виде, показанном на (рис. 3.5,в), который и будет представлять линию влияния  $Q_K$  (рис. 3.5,г). Ординаты линии влияния в характерных сечениях находят из геометрических соотношений.

### 3.4. Определение усилий по линиям влияния от неподвижных нагрузок

Из определения линий влияния следует, что ордината  $y_i$  линии влияния усилия  $S$  представляет собой значение этого усилия при расположении единичной силы над этой ординатой. Если над орди-

натой  $y_i$  будет не единичная сила, а сила, значение которой равно  $F$ , то усилие от ее действия будет в  $F$  раз больше. То есть искомое усилие может быть определено как произведение силы на ординату линии влияния усилия под этой силой:

$$S = F y_i . \tag{3.6}$$

Тогда на основе принципа независимости действия сил усилие  $S$ , вызванное системой сосредоточенных сил (рис. 3.6), будет определяться выражением:

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum F_i y_i . \tag{3.7}$$

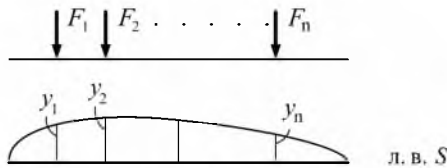


Рис. 3.6

Рассмотрим нагружение балки распределенной по произвольному закону нагрузкой  $q(x)$  (рис. 3.7). Выделим на этой балке участок бесконечно малой длины  $dx$ . Произведение  $q(x) dx$  представляет собой элементарную сосредоточенную силу  $dF$  (рис. 3.7).

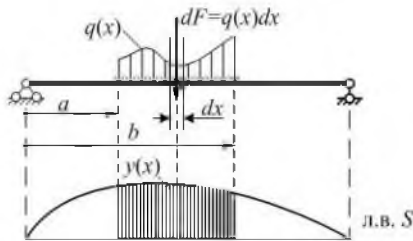


Рис. 3.7

Элементарное усилие  $dS$  от действия силы  $dF$  будет равно:

$$dS = dF y = q(x) y(x) dx .$$

Взяв интеграл на участке действия нагрузки, найдем, что:

$$S = \int_a^b q(x)y(x)dx. \quad (3.8)$$

В частном случае для равномерно распределенной нагрузки  $q = const$  получим:

$$S = q \int_a^b y(x)dx = q \Omega, \quad (3.9)$$

где  $\Omega$  – площадь линии влияния на участке действия равномерно распределенной нагрузки.

Итак, усилие  $S$  равно произведению интенсивности нагрузки  $q$  на площадь  $\Omega$  линии влияния усилия под этой нагрузкой (рис. 3.8).

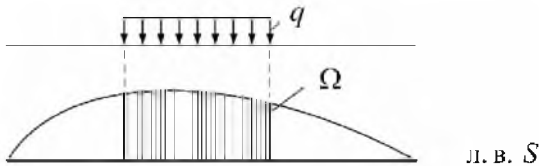


Рис. 3.8

Для вычисления усилия по линии влияния от сосредоточенного момента (рис. 3.9,а), представим этот момент в виде пары сил (рис. 3.9,б), действующих в окрестности точки приложения момента. Плечо пары сил примем бесконечно малым ( $dx$ ), тогда каждая из сил будет равна  $m/dx$ . Для вычисления усилия воспользуемся выражением (3.7):

$$S = -\frac{m}{dx} y + \frac{m}{dx} (y + dy) = m \frac{dy}{dx} = m y'. \quad (3.10)$$

Таким образом, усилие  $S$  от действия сосредоточенного момента вычисляется по линии влияния этого усилия как произведение момента на значение первой производной от функции влияния усилия в точке приложения момента. При этом сосредоточенный момент принимается положительным, если он действует по часовой стрелке.

На линейном участке линии влияния производная от функции влияния усилия равна тангенсу угла наклона участка линии влияния усилия по отношению к базовой оси. В этом случае усилие от действия сосредоточенного момента можно вычислить по формуле:

$$S = m \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.10)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha$  – положителен для возрастающей функции влияния (участок  $ab$  на рис. 3.9,г) и отрицателен для убывающей функции (участок  $bc$ ).

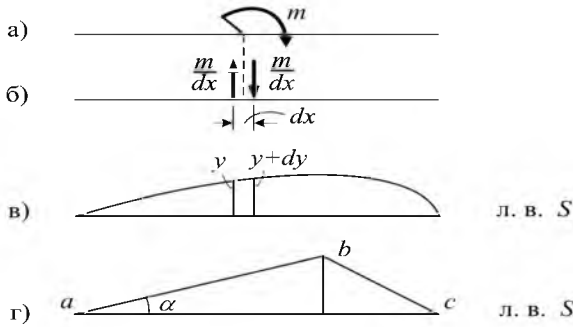


Рис. 3.9

Для статически определимых систем, у которых линии влияния являются кусочно-линейными, общее выражение для определения усилий от действия сосредоточенных сил, равномерно распределённых нагрузок и сосредоточенных моментов имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{j=1}^s q_j \Omega_j + \sum_{k=1}^t m_k \operatorname{tg} \alpha_k \quad (3.11)$$

где  $n, s, t$  – число, соответственно, сосредоточенных сил  $F_i$ , равномерно распределённых нагрузок  $q_j$  и сосредоточенных моментов  $m_k$ .

Важным при определении усилий от внешних нагрузок является следующее свойство прямолинейного участка линии влияния: на прямолинейном участке линии влияния усилие от системы вертикальных сил может быть определено произведением равнодействующей этой системы сил на ординату линии влияния под равнодействующей.



Докажем справедливость этого свойства. Пусть на линейном участке  $ab$  линии влияния усилия  $S$  (рис. 3.10) действует произвольная система сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Усилие  $S$  от действия этой системы сил согласно (3.7) определяется выражением:

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n . \quad (3.12)$$

Обозначим точку пересечения прямой  $ab$  линии влияния с базовой осью буквой  $O$ , угол наклона этой прямой к базовой оси через  $\varphi$ , а расстояние от точки  $O$  до точек приложения сил  $F_i$  – через  $a_i$  (рис. 3.10). Из геометрических соображений получим:

$$y_1 = a_1 \operatorname{tg} \varphi; \quad y_2 = a_2 \operatorname{tg} \varphi; \quad \dots; \quad y_n = a_n \operatorname{tg} \varphi .$$

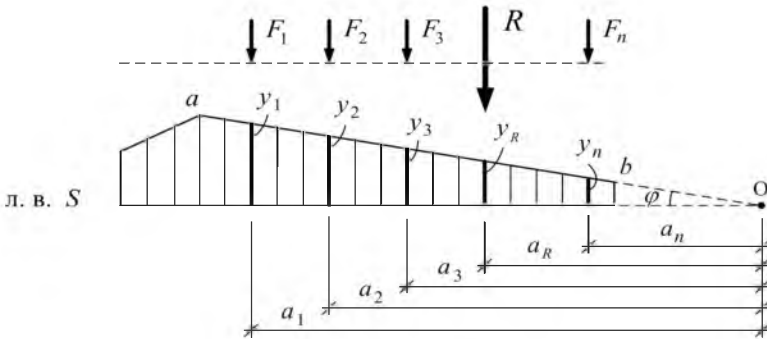


Рис. 3.10

Подставив эти выражения в (3.12), получим:

$$S = (F_1 a_1 + F_2 a_2 + \dots + F_n a_n) \operatorname{tg} \varphi . \quad (3.13)$$

Выражение в скобках представляет собой сумму моментов рассматриваемой системы сил относительно точки  $O$ . Эта сумма равна моменту равнодействующей  $R$  системы сил относительно точки  $O$ :

$$\sum_{i=1}^n F_i a_i = R a_R .$$

Подставив это выражение в (3.13), получим:

$$S = R a_R \operatorname{tg} \varphi .$$

С учетом того, что  $a_R \operatorname{tg} \varphi = y_R$ , будем иметь:

$$S = R y_R . \quad (3.14)$$

Рассматриваемое свойство упрощает определение усилий от действия любых нагрузок, действующих на прямолинейных участках линий влияния, при условии, что можно легко найти равнодействующие этих нагрузок и точки их приложения. Так, в случае равномерно распределённой нагрузки ее равнодействующая равна произведению интенсивности нагрузки на длину участка и приложена в середине этого участка. Достаточно просто определяются усилия на линейных участках линий влияния от распределенных нагрузок, имеющих форму треугольника или трапеции. Распределённую нагрузку, имеющую форму трапеции, следует разбивать на равномерно распределённую и треугольную нагрузки. Либо на две нагрузки, распределенные по форме треугольников.

Например, усилие  $S$  от нагрузок, представленных на рис. 3.11, можно вычислить по выражению:

$$S = (q_1 a) y_1 + (0,5 q_2 b) y_2 + (0,5 q_3 c) y_3 + (0,5 q_4 c) y_4 .$$

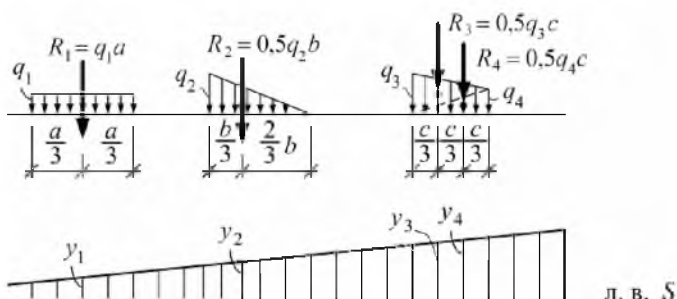


Рис. 3.11

### 3.5. Линии влияния усилий при узловой передаче нагрузки

На практике часто нагрузка передается на сооружение не непосредственно, а через дополнительные устройства, которые на расчетных схемах могут быть представлены в виде систем двухпорных балок, называемых передаточными (рис. 3.12,а). Сооружения (балки), на которые передается нагрузка через передаточные устройства, называют основными, или главными. Передаточные балки передают нагрузки на главные только в определенных точках, которые называют узлами (точки 1, 2, 3, 4 на рис. 3.12,а). Рассматриваемую передачу нагрузок называют узловой.

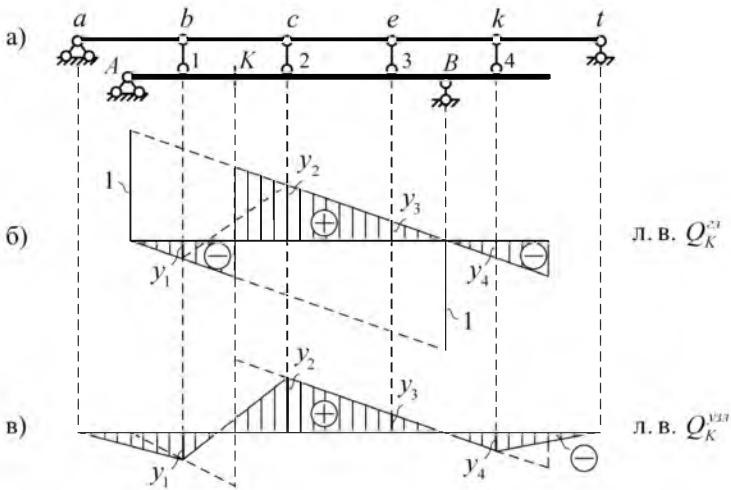


Рис. 3.12

Покажем, что при узловой передаче нагрузки на участках между узлами линии влияния усилий будут всегда линейными.

Рассмотрим линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  балки  $AB$  при движении груза по этой балке (рис. 3.12,а,б). Пусть нагрузка на балку  $AB$  передается посредством системы передаточных балок. Выделим один из участков системы, например, между узлами  $b$  и  $c$ .

При расположении силы в точке  $b$  или  $c$ , то есть над опорами передаточной балки  $bc$ , она через опорные стержни будет полностью передаваться на главную балку. Значит, положение силы в точке  $b$  или  $c$  на передаточных балках эквивалентно ее положению в точках 1 или 2 на главной балке. Следовательно, ординаты  $y_1$  и  $y_2$  линии влияния  $Q_K$ , полученные при непосредственном нагружении главной балки, будут справедливы и при узловой передаче нагрузки.

При движении единичной силы по балке  $bc$  ее опорные реакции (рис. 3.13) равны:

$$R_b = \frac{d-x}{d}; \quad R_c = \frac{x}{d}. \quad (3.15)$$

Выражение для вычисления поперечной силы в сечении  $K$  от действия сил, передаваемых на главную балку посредством опорных стержней в точках 1 и 2, согласно (3.7) примет вид:

$$Q_K = R_b y_1 + R_c y_2 = \frac{d-x}{d} y_1 + \frac{x}{d} y_2 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{d} x.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой на участке  $bc$ . Следовательно, линия влияния  $Q_K$  на участках между узлами является прямолинейной.

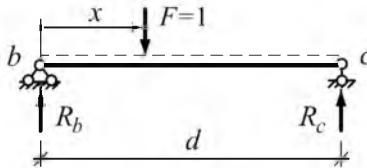


Рис. 3.13

Таким образом, для построения линии влияния усилия при узловой передаче нагрузки необходимо сначала построить линию влияния рассматриваемого усилия при непосредственном нагружении сооружения. Затем необходимо зафиксировать ординаты этой линии влияния под узлами и соединить их прямыми линиями.

На рис. 3.12,в показана построенная таким способом линия влияния поперечной силы в сечении  $K$  балки  $AB$  при узловой передаче нагрузки (рис. 3.12,а).

### 3.6. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния

Наиболее невыгодным положением на сооружении подвижной нагрузки называется такое положение, при котором рассматриваемое усилие достигает экстремального значения. Это значение усилия далее будем называть расчетным.

Задача определения расчетного значения усилия  $S_{расч}$  и соответствующего ему положения нагрузки может быть решена как задача нахождения экстремума функции одной переменной, абсциссы  $x$ , определяющей положение нагрузки. Следует заметить, что решение этой задачи усложняется тем, что нагрузки могут быть самыми разными, а линии влияния – разрывными.

Рассмотрим решение данной задачи для нескольких наиболее часто встречающихся типов нагрузок и форм линий влияния.

1. При действии на сооружение одной подвижной силы расчетному усилию будет соответствовать положение этой силы над наибольшей (положительной или отрицательной) ординатой линии влияния (по определению линии влияния).

2. При действии на сооружение связанной системы сосредоточенных сил (рис. 3.14,а), расстояние между которыми при их движении не меняется, усилие определяется по выражению:

$$S = \sum_{i=1}^n F_i y_i .$$

Рассмотрим действие такой нагрузки на треугольном участке линии влияния (рис. 3.14). Примем, что система связанных сил (поезд сил) движется слева направо. Положение поезда характеризуется абсциссой  $x$  (рис. 3.14,а). Будем считать, что в некоторый момент времени ни одна из сил не находится над вершиной линии влияния. Все силы этого поезда можно разделить на две группы – на силы, расположенные слева от вершины линии влияния ( $F_i^{лев}$ ), и силы,

расположенные справа от вершины линии влияния ( $F_k^{np\text{рав}}$ ). Каждую из этих групп можно привести к равнодействующим  $R_{лев}^*$  и  $R_{прав}^*$  (рис. 3.14,а). Тогда выражение для усилия  $S$  на основании (3.14) можно записать в виде:

$$S = \sum F_i^{лев} y_i^{лев} + \sum F_k^{np} y_k^{np} = R_{лев}^* y_{лев} + R_{np}^* y_{np},$$

где  $y_{лев}$ ,  $y_{np}$  – ординаты линии влияния под равнодействующими.

В состав равнодействующих следует включать только те грузы, которые находятся на соответствующем участке линии влияния.

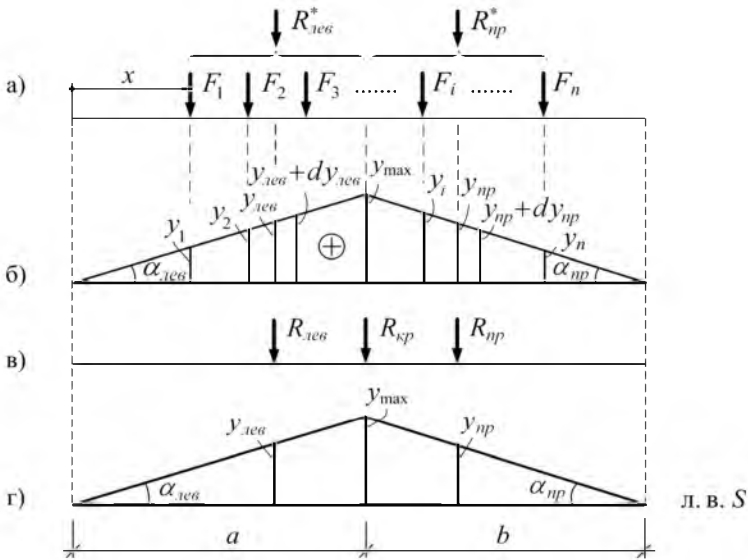


Рис. 3.14

Переместив поезд сил на бесконечно малую величину  $dx$ , найдем приращение усилия в виде:

$$dS = R_{лев}^* dy_{лев} + R_{np}^* dy_{np}.$$

Разделив это выражение на  $dx$ , получим выражение для первой производной усилия по переменной  $x$ :

$$\frac{dS}{dx} = R_{лев}^* \frac{dy_{лев}}{dx} + R_{np}^* \frac{dy_{np}}{dx}.$$

Учитывая, что производные от функций  $S = y(x)$  слева и справа от вершины треугольной линии влияния вычисляются по выражениям:

$$\frac{dy_{лев}}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_{лев}; \quad \frac{dy_{np}}{dx} = -\operatorname{tg} \alpha_{np},$$

получим:

$$\frac{dS}{dx} = R_{лев}^* \operatorname{tg} \alpha_{лев} - R_{np}^* \operatorname{tg} \alpha_{np}. \quad (3.16)$$

Условием экстремальности функции  $S$  могло бы быть равенство нулю выражения (3.16). Однако производная функции  $S$  в вершине линии влияния имеет разрыв. Поэтому критерием экстремума является смена знака производной, что имеет место, когда одна из сил переходит вершину линии влияния. Эту силу называют критической  $F_{кр}$ .

Обозначив равнодействующую левой группы сил без критического груза через  $R_{лев}$ , а соответствующую равнодействующую правой группы сил через  $R_{np}$ , запишем условие для определения невыгодного расположения нагрузки в виде двух неравенств:

$$\begin{cases} (R_{лев} + F_{кр}) \operatorname{tg} \alpha_{лев} \geq R_{np} \operatorname{tg} \alpha_{np}; \\ R_{лев} \operatorname{tg} \alpha_{лев} \leq (R_{np} + F_{кр}) \operatorname{tg} \alpha_{np}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Первое неравенство соответствует случаю, когда критическая сила находится слева от вершины линии влияния, а второе – случаю, когда критическая сила перешла через вершину.

Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha_{лев} = y_{\max} / a$  и  $\operatorname{tg} \alpha_{пр} = y_{\max} / b$  (рис. 3.14,г), неравенства (3.17), после сокращения на  $y_{\max}$ , можно записать и в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{R_{лев} + F_{кр}}{a} \geq \frac{R_{пр}}{b}, \\ \frac{R_{лев}}{a} \leq \frac{R_{пр} + F_{кр}}{b}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Определение критического груза в соответствии с условием (3.17) или (3.18) сводится к пробным установкам поезда сил, при которых одна из сил, предполагаемая критической, располагается над вершиной линии влияния. Попытки повторяются до тех пор, пока не будут выполняться оба неравенства.

Пример. Пусть поезд сил, представленный на рис. 3.15,а, движется по балке (рис. 3.15,б). Определим положение поезда сил, при котором в сечении  $K$  возникает максимальный изгибающий момент. Линия влияния  $M_K$  показана на рис. 3.15,г.

Для определения критической силы воспользуемся условиями (3.18).

Предположим, что критической силой является, например, сила  $F_3$ . Равнодействующие левых и правых сил соответственно будут равны:

$$R_{лев} = F_1 + F_2 = 20 \text{ кН}, \quad R_{пр} = F_4 + F_5 + F_6 = 36 \text{ кН}.$$

Условия (3.18) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{20+13}{6} < \frac{36}{4}, \\ \frac{20}{6} < \frac{10+36}{4}. \end{cases}$$

Первое неравенство в (3.18) не выполняется. Значит, груз  $F_3$  не является критическим.



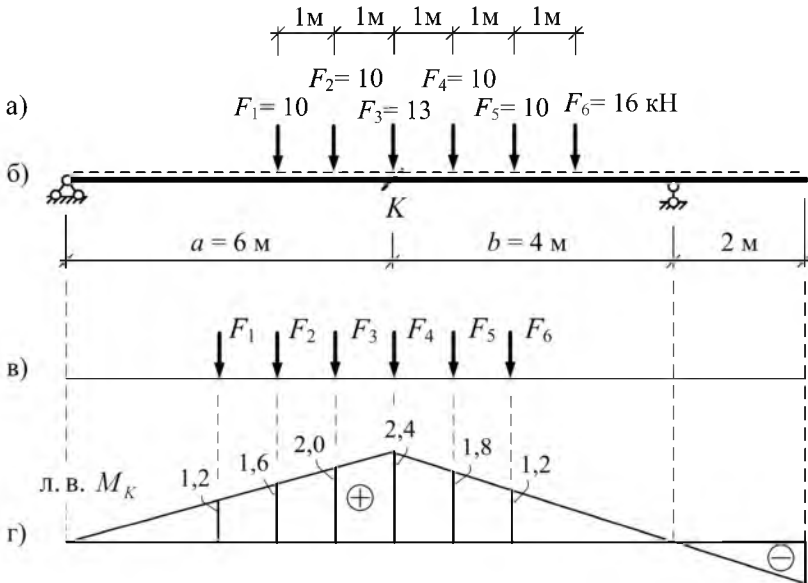


Рис. 3.15

Повторим попытку, предположив, что критической будет сила  $F_4 = 10$  кН. В этом случае  $R_{лев} = 33$  кН, а  $R_{пр} = 26$  кН. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{33+10}{6} > \frac{26}{4}, \\ \frac{33}{6} < \frac{10+26}{4}. \end{cases}$$

Условия (3.18) выполняются. Таким образом, сила  $F_4$  является критической.

Расположив поезд сил над линией влияния  $M_K$  таким образом, чтобы критическая сила  $F_{кр} = F_4$  находилась над вершиной линии влияния (рис. 3.15,в), получим максимальное значение изгибающего момента в сечении  $K$ :

$$M_{K_{\max}} = 10 \cdot 1,2 + 10 \cdot 1,6 + 13 \cdot 2,0 + 10 \cdot 2,4 + 10 \cdot 1,8 + 6 \cdot 1,2 = 103,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Рассмотрим действие равномерно распределенной нагрузки на участке треугольной линии влияния (рис. 3.16). При движении такой нагрузки усилие  $S$  будет изменяться непрерывно, и условие экстремальности функции  $S$  запишется так:

$$\frac{dS}{dx} = R_{лев}^* \operatorname{tg} \alpha_{лев} - R_{np}^* \operatorname{tg} \alpha_{np} = 0. \quad (3.19)$$

Учитывая, что  $R_{лев}^* = qx$ ,  $R_{np}^* = q(l_q - x)$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_{лев} = \frac{y_{\max}}{a}$  и  $\operatorname{tg} \alpha_{np} = \frac{y_{\max}}{b}$ , уравнение (3.19) преобразуем к виду:

$$qx \frac{y_{\max}}{a} = q(l_q - x) \frac{y_{\max}}{b}.$$

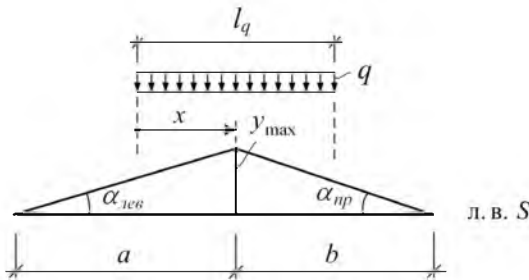


Рис. 3.16

Сократив обе части этого уравнения на  $q y_{\max}$ , получим:

$$\frac{x}{a} = \frac{l_q - x}{b}.$$

Из этого выражения найдем расчетное положение равномерно распределенной нагрузки:

$$x_{расч} = \frac{a}{a+b} l_q,$$

при котором рассматриваемое усилие  $S$  получает максимальное значение.

### 3.7. Понятие об огибающих эпюрах

Огибающая эпюра показывает распределение по сечениям сооружения экстремальных (максимальных и минимальных) значений соответствующего усилия от действия заданной системы подвижных нагрузок.

Для построения огибающей эпюры усилия рассматривают различные положения подвижной нагрузки. Для каждого из них строят соответствующую эпюру усилия. Для полученного семейства эпюр строят огибающие кривые, охватывающие экстремальные значения рассматриваемого усилия. Полученные огибающие кривые и представляют собой огибающую эпюру рассматриваемого усилия.

Огибающие эпюры усилий в балках, нагруженных подвижной сосредоточенной силой  $F$ , можно построить с помощью линий влияния соответствующих усилий. При этом следует четко различать смысл независимых переменных в огибающих эпюрах и линиях влияния усилий. В огибающих эпюрах независимая переменная (абсцисса) определяет положение сечения по длине сооружения, в котором вычисляется усилие. В линиях влияния независимая переменная определяет точку приложения подвижной единичной силы.

Рассмотрим изменение максимальных и минимальных усилий в сечениях консольной балки при движении по ней вертикальной сосредоточенной силы  $F$  (рис. 3.17,а). Положение произвольного сечения, например, относительно точки  $A$ , обозначим абсциссой  $x$ . Линия влияния изгибающего момента в сечение  $x$  имеет вид, представленный на рис. 3.17,б. Минимальное (наибольшее по абсолютной величине отрицательное) значение изгибающий момент в сечении  $x$ , как видно из этой линии влияния, будет принимать при положении груза на конце консоли. Это значение равно  $-F(l-x)$ .

График зависимости  $M_{\min} = -F(l-x)$  (рис. 3.17,в) и будет представлять огибающую эпюру наименьших значений изгибающих моментов в сечениях консольной балки от действия рассматриваемой силы.

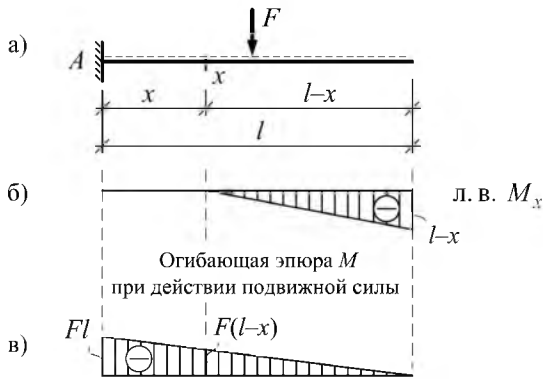


Рис. 3.17

Для построения огибающих эпюр изгибающих моментов и поперечных сил от действия подвижной сосредоточенной силы  $F$  в двухопорной балке также рассмотрим произвольное сечение  $x$ , обозначив расстояние до него через  $x$  (рис. 3.18,а). Построим линии влияния усилий  $M_x$ ,  $Q_x$  (рис. 3.18,б,в). Экстремальные значения усилий для произвольного сечения  $x$  от действия подвижной силы  $F$  равны:

$$M_{\max} = \frac{Fx(l-x)}{l} = Fx \left( 1 - \frac{x}{l} \right); \quad M_{\min} = 0;$$

$$Q_{\max} = F \frac{l-x}{l}; \quad Q_{\min} = F \frac{x}{l}.$$

Эти выражения, как функции абсциссы  $x$  сечения, определяют изменение максимального и минимального значений изгибающих моментов и поперечных сил по сечениям между опорами двухопорной балки при действии подвижной силы. Огибающие эпюры, построенные в соответствии с этими зависимостями, представлены на рис. 3.18,г,д.

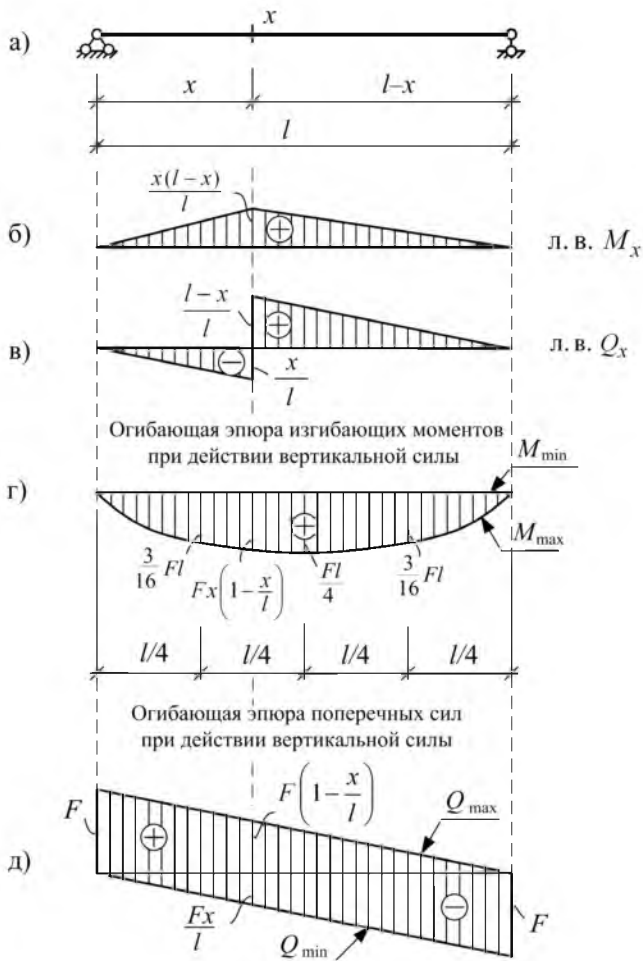


Рис. 3.18

Построим огибающую эпюру изгибающих моментов в двух-опорной балке от действия двух подвижных связанных сил  $F$ , расстояние между которыми равно  $d$ . При двух равных силах огибающая эпюра будет симметричной. Построим ее для половины балки, например, левой. Линия влияния  $M_x$  имеет прежний

вид (рис. 3.19,б). Изгибающий момент в произвольном сечении левого полупролета, согласно (3.18), достигнет максимального значения при положении сил, показанном на рис. 3.19,б.

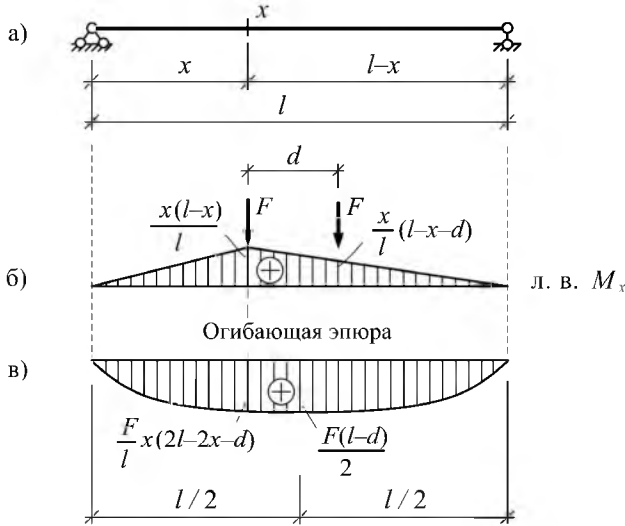


Рис. 3.19

Ордината линии влияния под правой силой равна:

$$y = \frac{x}{l}(l-x-d).$$

Выражение для изгибающего момента в произвольном сечении  $x$  левого полупролета получим, согласно (3.7), в виде:

$$M_{\max} = F \frac{x(l-x)}{l} + F \frac{x}{l}(l-x-d) = \frac{F}{l} x(2l-2x-d).$$

Это выражение и будет представлять уравнение огибающей изгибающих моментов для левой половины рассматриваемой балки

при движении двух равных сил (рис. 3.19,в). Минимальные значения изгибающих моментов в данном случае равны нулю.

Огибающие эпюры показывают экстремальные значения усилий только от одного вида подвижной нагрузки. При необходимости анализа работы сооружения на другие виды нагрузок нужно строить новые огибающие эпюры. Так как на сооружение действуют различные виды нагрузок, то анализ работы сооружений с помощью огибающих эпюр является достаточно трудоемким и используется сравнительно редко.

Практический подход к построению огибающих эпюр усилий от действия на сооружение постоянных и временных нагрузок рассмотрен в разделе 11.4.

## ГЛАВА 4

### РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ

#### 4.1. Общие сведения и принципы образования

Трехшарнирной называют систему, которая состоит из двух дисков, соединенных между собой шарниром, и опирающихся на землю (основание) с помощью шарнирно неподвижных опор (рис. 4.1).

Трехшарнирные системы, у которых диски представлены криволинейными стержнями, называют трехшарнирными арками (рис. 4.3,а).

Трехшарнирные системы, у которых диски представлены ломаными стержнями, называют трехшарнирными рамами (рис. 4.2).

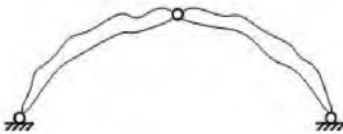


Рис. 4.1

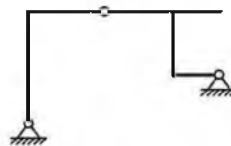


Рис. 4.2

Трехшарнирные системы статически определимы, неизменяемы и являются распорными системами.

Наличие распора является отличительной особенностью трехшарнирных систем. Даже при действии только вертикальной нагрузки реакции распорной системы направлены наклонно. Горизонтальную составляющую опорной реакции трехшарнирной системы называют распором.

В ряде случаев, для устранения воздействия распора на нижележащие конструкции, опорные шарниры соединяют горизонтальными стержнями – затяжками. В таких случаях одна из опор должна быть шарнирно подвижной (рис. 4.3,б). Затяжка может быть расположена как на уровне опор, так и выше, и даже иметь ломаное очертание (рис. 4.3,в).

Рассмотрим основные элементы арки (рис. 4.4). Опорные сечения называют пятами. Расстояние между опорами называется пролетом. Сечение арки в точке  $C$ , в котором полуарки соединяются шарниром, называется ключевым. Высоту ключевого сечения над линией опор называют стрелой подъема арки. В зависимости от отношения стрелы подъема к пролету  $f/l$  различают пологие арки (при малых значениях  $f/l$ ) и крутые (при больших значениях  $f/l$ ). В пологих арках имеют место большие распоры и большие продольные силы.

Очертание оси арки может быть задано произвольной кривой. Чаще всего арки выполняют круговыми, параболическими, синусоидальными и т. п.

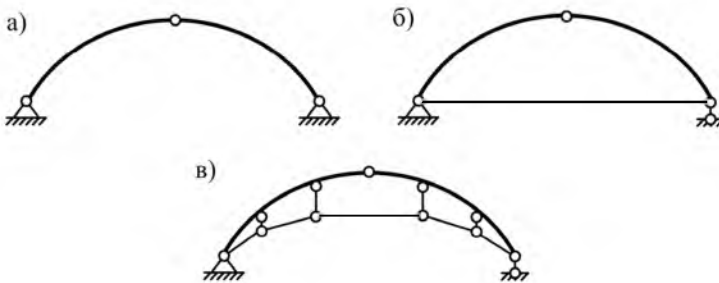


Рис. 4.3



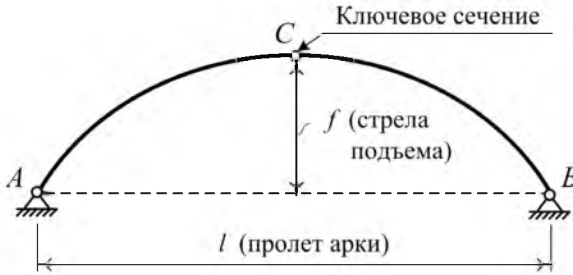


Рис. 4.4

## 4.2. Расчет трехшарнирных арок

Рассмотрим расчет трехшарнирной арки с опорами в одном уровне на действие вертикальной нагрузки (рис. 4.5,а).

В арке неизвестны четыре составляющие опорных реакций (рис. 4.5,а). Обозначим вертикальные составляющие реакций через  $R_A$ ,  $R_B$ , а горизонтальные, соответственно, через  $H_A$  и  $H_B$ .

Вертикальные составляющие опорных реакций арки определим из уравнений равновесия, составленных в виде сумм моментов всех сил относительно опорных точек  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B l + \sum_{i=1}^n F_i a_{Fi} = 0; \quad R_B = \frac{\sum_{i=1}^n F_i a_{Fi}}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A l - \sum_{i=1}^n F_i b_{Fi} = 0; \quad R_A = \frac{\sum_{i=1}^n F_i b_{Fi}}{l}, \quad (4.1)$$

где  $n$  – число всех сил, действующих на арку.

Из полученных формул следует, что реакции  $R_A$  и  $R_B$  в опорах арки определяются точно так же, как и опорные реакции простой двухопорной балки того же пролета, нагруженной той же нагрузкой (рис. 4.5,б). Назовем эту балку соответствующей. Получаем, что:

$$R_A = R_A^0; \quad R_B = R_B^0, \quad (4.2)$$

где  $R_A^0$  и  $R_B^0$  – опорные реакции в опорах соответствующей двухопорной балки.

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций  $H_A$  и  $H_B$  составим уравнения равновесие всех сил, действующих на левую и правую полуарки, в виде сумм моментов сил относительно шарнира  $C$ :

$$\begin{aligned} \sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^k F_i \left( \frac{l}{2} - a_{Fi} \right) - H_A f = 0; \\ H_A = \frac{R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^k F_i \left( \frac{l}{2} - a_{Fi} \right)}{f}; \\ \sum M_C^{прав} = 0; \quad -R_B \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^s F_i \left( \frac{l}{2} - b_{Fi} \right) + H_B f = 0; \\ H_B = \frac{R_B \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^s F_i \left( \frac{l}{2} - b_{Fi} \right)}{f}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $k, s$  – число сил соответственно слева и справа от шарнира  $C$ .

При действии на арку только вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие опорных реакций для левой и правой опор равны и противоположны по направлению:

$$H_A = H_B = H. \quad (4.4)$$

Числители в выражениях (4.3) представляют собой изгибающий момент в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки. Поэтому выражение для определения распора можно записать в виде:

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (4.5)$$

где  $M_C^0$  – изгибающий момент в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки.

Из формулы (4.5) следует, что чем больше стрела подъема арки  $f$ , тем меньше распор. Из этой же формулы следует, что значения распора зависят только от взаимного расположения шарниров  $A, C, B$  и не зависят от очертания оси арки.

Определим внутренние силы  $M, Q, N$  в некотором сечении арки. Рассечем арку по этому сечению и составим уравнения равновесия сил, действующих на отсеченную часть (рис. 4.5,в). Координаты центра тяжести сечения  $x$  и  $y$  полагаем известными. Угол наклона касательной к оси арки (или угол между нормалью к оси арки и вертикалью)  $\varphi_x$  (рис. 4.5,а) определяется с помощью уравнения оси арки  $y = y(x)$  через его первую производную ( $y'(x) = tg \varphi_x$ ).

Изгибающий момент в сечении  $x$  равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих слева от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести данного сечения:

$$M_x = M_x^{лев} = R_A x - \sum_{i=1}^k F_i (x - a_{Fi}) - H_A y. \quad (4.6)$$

Два первых слагаемых данного выражения представляют собой изгибающий момент в сечении  $x$  соответствующей двухопорной балки (балочный момент):

$$M_x^0 = R_A x - \sum_{i=1}^k F_i (x - a_{Fi}).$$

Тогда выражение (4.6) можно представить в виде:

$$M_x = M_x^0 - H y. \quad (4.7)$$

Из этого выражения видно, что изгибающие моменты в арке при действии вертикальных нагрузок будут меньше изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке.

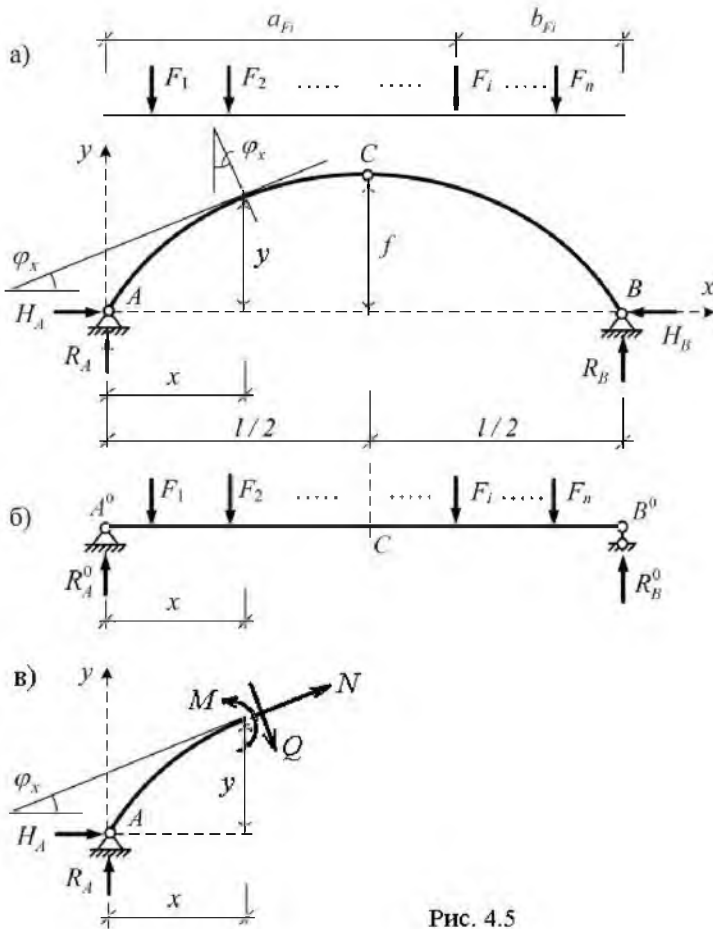


Рис. 4.5

Из (4.7) следует, что эпюра изгибающих моментов в арке может быть построена сложением двух эпюр. Одна из них представляет собой эпюру изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке ( $M^0$ ), а вторая, отрицательная – эпюру, получаемую умножением ординат оси арки на значения распора (рис. 4.6).

Эпюры усилий в арке могут строиться как непосредственно на оси арки, так и на ее горизонтальной проекции.

Для арки параболического очертания (рис. 4.6,а), нагруженной одной силой, на рис. 4.6,б представлена эпюра изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке, а на рис. 4.6,в – эпюра  $(-Hy)$ . Окончательная эпюра изгибающих моментов в арке (рис. 4.6,г) построена на горизонтальной проекции оси арки.

Поперечная сила в сечении арки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, действующие по одну сторону от сечения, на нормаль к оси арки в этом сечении. Для сечения  $x$  (рис. 4.5,в) получим:

$$\begin{aligned} Q_x &= R_A \cos \varphi_x - F_1 \cos \varphi_x - F_2 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x = \\ &= (R_A - F_1 - F_2) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x. \end{aligned}$$

Выражение в скобках  $(R_A - F_1 - F_2)$  представляет собой балочную поперечную силу. Обозначив ее через  $Q_x^0$ , получим следующую формулу для определения поперечной силы в произвольном сечении арки:

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x. \quad (4.8)$$

Для арок, как и для других систем, соблюдается известная дифференциальная зависимость  $Q = dM / ds$ , использующаяся при построении эпюр  $Q$  и  $M$ . Так, при принятых правилах знаков для эпюр  $M$  и  $Q$  возрастание функции изгибающих моментов с увеличением  $s$  (или  $x$ ) будет соответствовать положительной поперечной силе, а ее убывание – отрицательной. Сечения, в которых поперечная сила равна нулю, будут соответствовать экстремальным значениям изгибающих моментов. Изменение знака поперечной силы с положительного на отрицательный в окрестностях точки экстремума будет соответствовать наибольшему изгибающему моменту  $M$ , а изменение знака  $Q$  с отрицательного на положительный будет соответствовать наибольшему изгибающему моменту  $M$ ). Сечение, в котором поперечная сила экстремальна, соответствует точке перегиба на эпюре изгибающих моментов.

Продольная сила в сечении арки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, действующие по одну сторону от сечения, на касательную к оси арки в рассматриваемом сечении. Для произвольного сечения  $x$  (рис. 4.5,в) получим:

$$N_x = -R_A \sin \varphi_x + F_1 \sin \varphi_x + F_2 \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x =$$

$$= -(R_A - F_1 - F_2) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x.$$

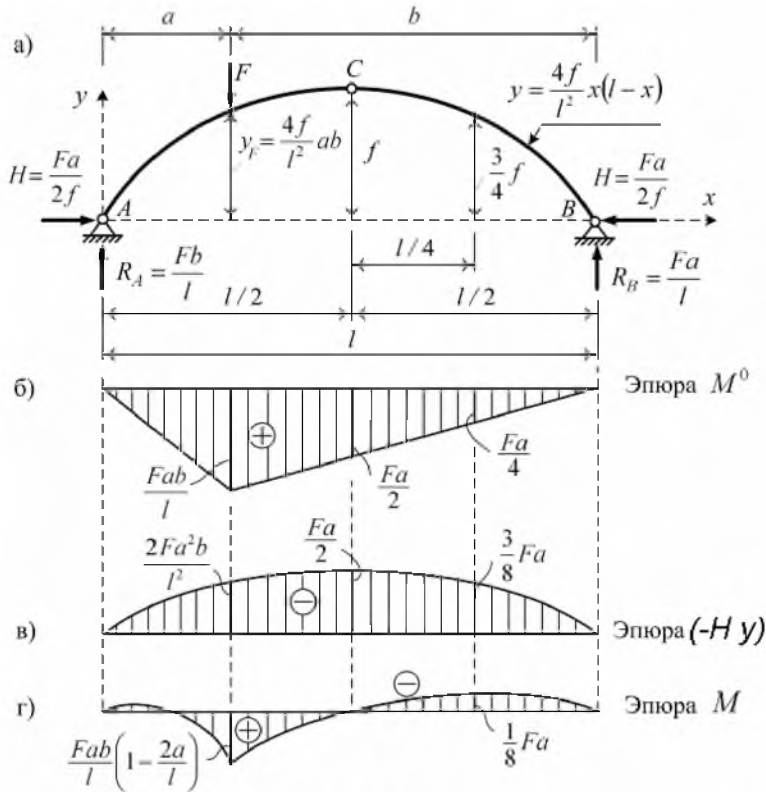


Рис. 4.6

Выражение в скобках представляет балочную поперечную силу. Выражение для определения продольных сил в сечениях арок при действии на них только вертикальных нагрузок можно записать в виде:

$$N_x = -\left(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x\right). \quad (4.9)$$

Рассмотрим особенности расчета арок с затяжками. Особенностью таких арок является то, что распор здесь воспринимают не опоры, а затяжка. Для определения усилия в затяжке проведем сечение I-I через ключевой шарнир  $C$  и затяжку (рис. 4.7). Рассмотрим равновесие одной из частей арки. Составим, например, уравнение равновесия в виде суммы моментов сил для левой части арки относительно шарнира  $C$ :

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - F \left( \frac{l}{2} - a \right) - H_{зат} \cdot f = 0;$$

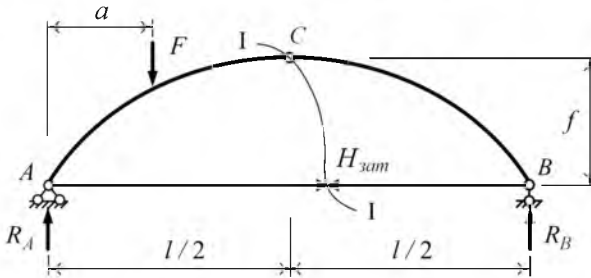


Рис. 4.7

Два первых слагаемых в уравнении представляют собой выражение для вычисления балочного момента в сечении  $C$ :

$$M_C^0 = R_A \frac{l}{2} - F \left( \frac{l}{2} - a \right).$$

Следовательно, усилие в затяжке вычисляется так же, как и распор в обычной трехшарнирной арке:

$$H_{зат} = \frac{M_C^0}{f}.$$

Для внутренних сил в сечениях арок с затяжками будут справедливы выражения (4.7)–(4.9), если вместо  $H$  подставить  $H_{зат}$ .

### 4.3. Линии влияния усилий в трехшарнирных арках

Для определения вертикальных опорных реакций от действия вертикальной подвижной единичной силы (рис. 4.8,а) составим уравнения равновесия в виде сумм моментов сил, действующих на арку, относительно левой и правой опор:

$$\sum M_A = 0; \quad 1x_F - R_B l = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -1(l - x_F) + R_A l = 0.$$

Из этих уравнений найдем выражения для определения опорных реакций:

$$R_B = \frac{x_F}{l}; \quad R_A = \frac{l - x_F}{l}.$$

Полученные зависимости полностью совпадают с соответствующими зависимостями для простой двухопорной балки. Таким образом, линии влияния вертикальных опорных реакций в арке (рис. 4.8,в,г) совпадают с линиями влияния опорных реакций в соответствующей двухопорной балке (рис. 4.8,б).

Распор в арке определяется по выражению (4.5):

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Значит, л. в.  $H = (\text{л. в. } M_C^0) / f$ .

Таким образом, чтобы построить линию влияния распора в арке необходимо построить линию влияния изгибающего момента в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки (рис. 4.8,б,д) и все ее ординаты разделить на значение стрелы подъема арки  $f$  (рис. 4.8,е).

Линии влияния внутренних сил в сечениях арок построим с использованием полученных ранее зависимостей (4.7)–(4.9).

Так как изгибающий момент в сечении  $K$  (рис. 4.8,а) вычисляется по формуле:



$$M_K = M_K^0 - Hy_K,$$

то выражение для построения его линии влияния примет вид:

$$\text{л. в. } M_K = (\text{л. в. } M_K^0) - (\text{л. в. } H)y_K.$$

В соответствии с полученным выражением линия влияния  $M_K$  строится посредством суммирования линии влияния изгибающего момента в сечении  $K$  соответствующей двухопорной балки  $M_K^0$  (рис. 4.8,ж) и линии влияния распора  $H$ , взятой с множителем  $(-y_K)$ . Окончательный вид л. в.  $M_K$  показан на рис. 4.8,и.

Поперечная сила в сечении  $K$ , согласно (4.8), определяется по зависимости:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K.$$

Следовательно, построение ее линии влияния следует вести по выражению:

$$\text{л. в. } Q_K = (\text{л. в. } Q_K^0) \cos \varphi_K - (\text{л. в. } H) \sin \varphi_K.$$

Линия влияния распора  $H$  уже построена (рис. 4.9,б), остается построить линию влияния балочной поперечной силы в сечении  $K$  (рис. 4.9,в). Затем умножаем все ординаты л.в.  $Q_K$  на  $\cos \varphi_K$  (рис. 4.9,г), а ординаты л.в.  $H$  – на  $\sin \varphi_K$  (рис. 4.9,д). Взяв их разность, получим линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  арки (рис. 4.9,е).

Аналогично, исходя из формулы (4.9)

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K),$$

получим выражение для построения линии влияния продольной силы в сечении  $K$  арки:

$$\text{л. в. } N_K = -\left[ (\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi_K + (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K \right].$$

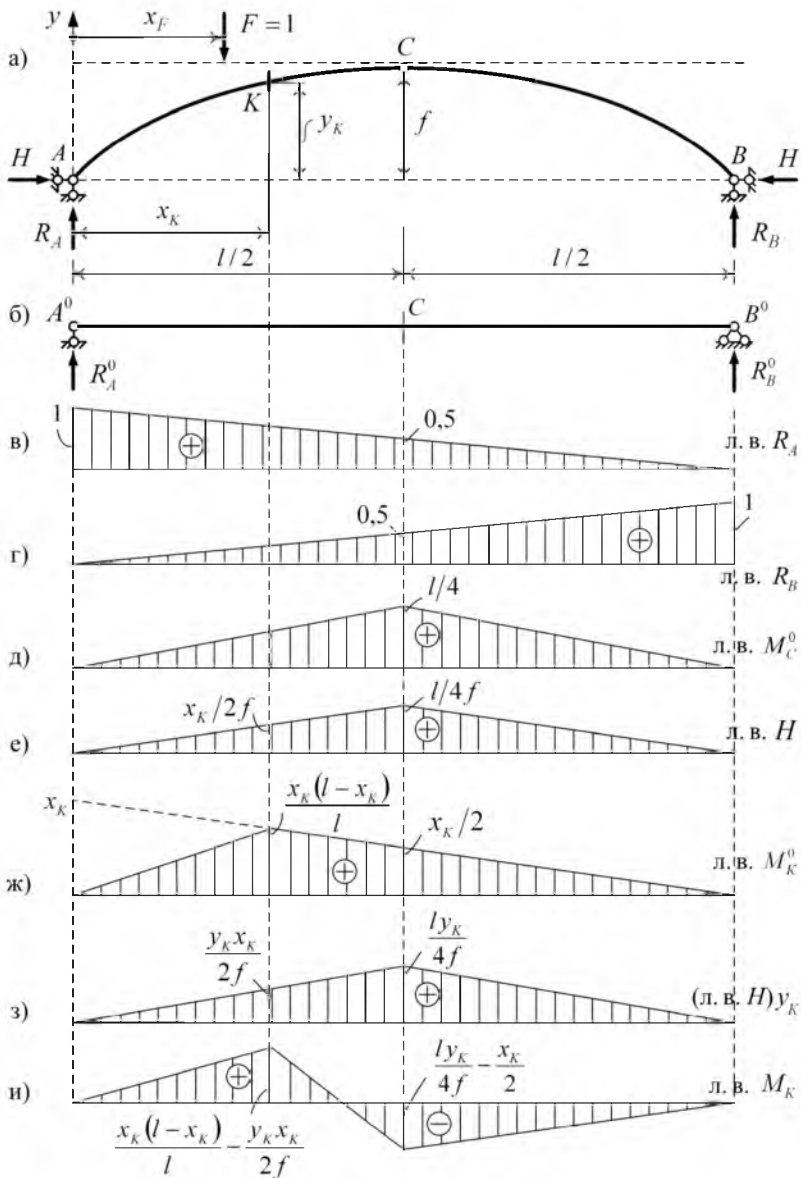


Рис. 4.8

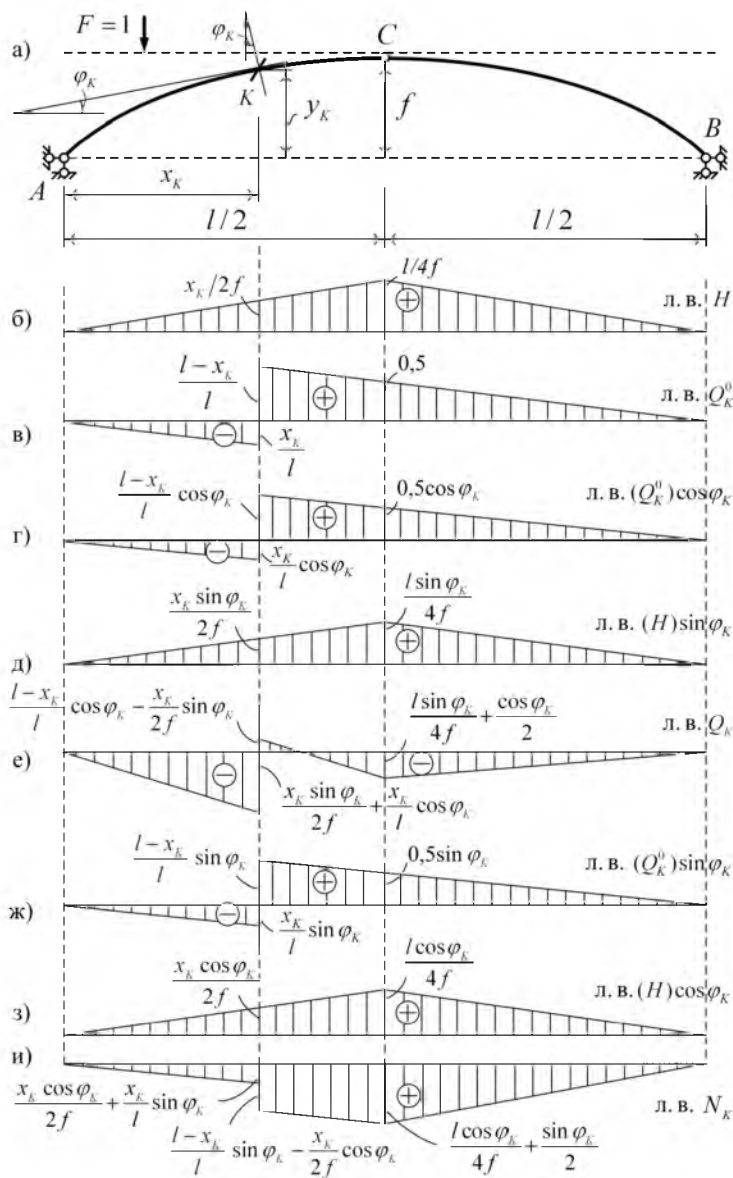


Рис. 4.9

Соответствующие графики слагаемых этого выражения и окончательная л. в.  $N_K$  показаны на рис. 4.9, ж–и.

Линии влияния в арках могут строиться и кинематическим методом. Суть кинематического метода изложена в главе 2.

#### 4.4. Рациональное очертание оси арки

Рациональной называют такую ось арки, при которой показатель эффективности арки (стоимость, масса материала, трудозатраты на изготовление и т. д.) будет наилучшим. В случае, если наибольшее влияние на прочность арок оказывают изгибающие моменты, рациональному очертанию оси арки будет соответствовать равенство нулю изгибающих моментов во всех сечениях арки.

При действии только вертикальных нагрузок изгибающие моменты в сечениях арки определяются выражением (4.7). Приравняв это выражение нулю, найдем зависимость изменения ординат рациональной оси арки в виде:

$$y = \frac{M_x^0}{H}. \quad (4.10)$$

Из этого выражения следует, что ординаты оси арки рационального очертания при действии только вертикальных нагрузок пропорциональны изгибающим моментам, возникающим в соответствующей двухопорной балке, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и арка. Коэффициент пропорциональности при этом равен величине, обратной расвору  $H$ .

Определим рациональную ось трехшарнирной арки при действии на нее вертикальной равномерно распределенной нагрузки (рис. 4.10, а).

Опорные реакции в арке в этом случае равны:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; \quad H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении  $x$  из рассмотрения левой части арки записывается в виде:

$$M_x = \frac{ql}{2}x - (qx)\frac{x}{2} - \frac{ql^2}{8f}y = \frac{qx}{2}(l-x) - \frac{ql^2}{8f}y.$$

Приравняв это выражение нулю, из полученного уравнения найдем зависимость изменения рационального очертания оси трехшарпирной арки в виде:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x), \quad (4.11)$$

которая представляет собой уравнение квадратной параболы.

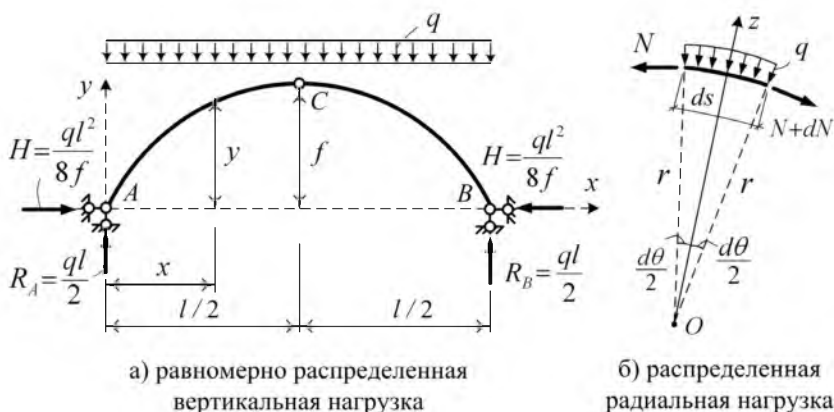


Рис. 4.10

В арке, нагруженной равномерно распределенной радиальной нагрузкой, для получения рациональной оси сразу примем, что изгибающие моменты в ее сечениях равны нулю. Рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента арки длиной  $ds$ , для которого радиус кривизны арки  $r$  можно считать постоянным (рис. 4.10,б). Составим сумму моментов сил относительно центра кривизны  $O$  элемента:

$$-Nr + (N+dN)r = 0.$$

Из этого уравнения получим  $dN = 0$ . А это значит, что продольная сила  $N$  в арке в этом случае будет величиной постоянной ( $N = const$ ).

Составим теперь сумму проекций сил на ось  $z$ , совпадающую по направлению с биссектрисой угла  $\theta$ :

$$-N \sin \frac{d\theta}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\theta}{2} - q ds = 0.$$

Учитывая, что для бесконечно малых величин  $ds$  и  $d\theta$   $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ , а  $ds = r d\theta$ , и пренебрегая бесконечно малой величиной второго порядка малости  $dN d\theta / 2$ , получим:

$$-Nd\theta - qr d\theta = 0.$$

Разделив полученное уравнение на  $d\theta$ , найдем радиус кривизны арки:

$$r = \frac{N}{q}.$$

Следовательно, при  $N = const$  рациональному очертанию оси арки соответствует окружность.

#### 4.5. Расчет трехшарнирных арок с надарочным строением

Часто нагрузки на арки передаются не непосредственно, а через надарочные строения, схемы которых показаны на рис. 4.11.

Расчет таких систем на неподвижные нагрузки начинается с расчета надарочного строения, которое представляет собой совокупность однопролетных балок. Нагрузка, приложенная к надарочному строению, передается на арку через вертикальные стержни. После определения в них усилий расчет арки может выполняться как расчет обычных трехшарнирных арок, загруженных системой сосредоточенных сил (рис. 4.11).

Построение линий влияния усилий в арках с надарочным строением выполняется так же, как и в балках при узловых передаче нагрузки. Например, для арочной системы, изображенной на рис. 4.12,а, линия влияния изгибающего момента в сечении  $K$  арки

без надарочного строения, согласно (4.7), имеет вид, показанный на рис. 4.12,б. Корректировка этой линии влияния с учетом узловой передачи нагрузки дает линию влияния изгибающего момента в сечении  $K$  арки с надарочным строением (рис. 4.12,в).

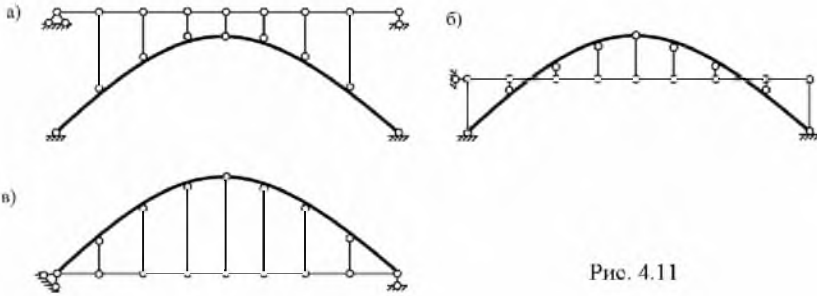


Рис. 4.11

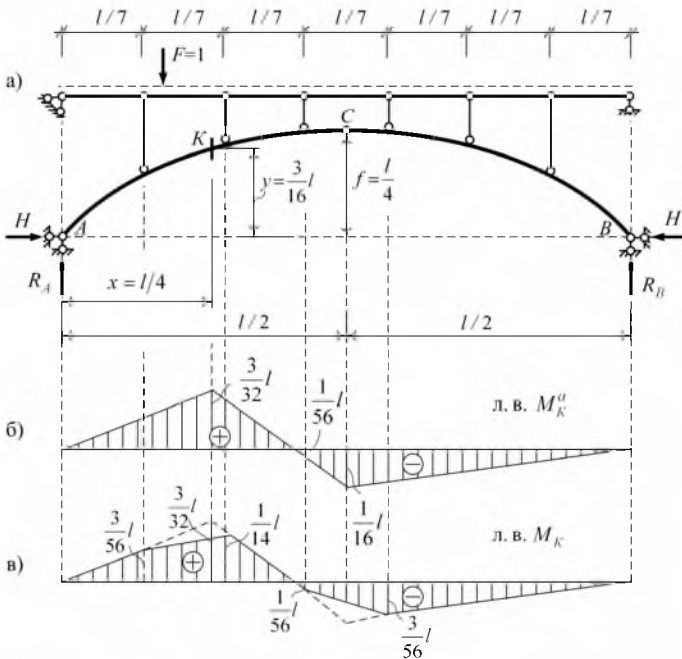


Рис. 4.12

## 4.6. Расчет трехшарнирных рам

Трехшарнирная рама представляет собой два диска в виде ломаных стержней, соединенных между собой шарниром, при этом каждый из дисков опирается на шарнирно неподвижные опоры (рис. 4.13,а). Простейшая трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях приведена на рис. 4.13,а. На рис. 4.13,б показана трехшарнирная рама с затяжкой. В такой системе отсутствие горизонтальной связи на правой опоре компенсируется введенной затяжкой.

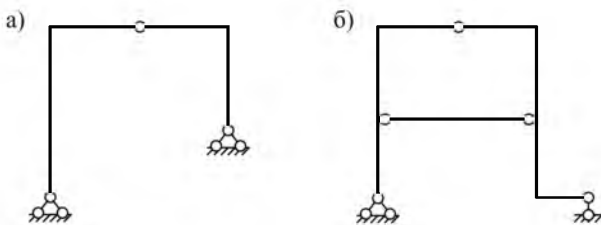


Рис. 4.13

Определение опорных реакций в трехшарнирных рамах выполняется так же, как и в трехшарнирных арках. Последующее определение усилий в стержнях рамы выполняется статическим методом (см. главу 2).

Например, последовательность определения опорных реакций в трехшарнирной раме (рис. 4.14) при произвольной нагрузке (на расчетной схеме она не показана) сводится к следующим действиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Leftrightarrow \quad R_B; & \quad 2) \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Leftrightarrow \quad R_A; \\ 3) \quad \Sigma M_C^{лев} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad H_A; & \quad 4) \quad \Sigma X = 0, \quad \Leftrightarrow \quad H_B. \end{aligned}$$

$$\text{Проверка: } \Sigma M_C^{прав} = 0.$$



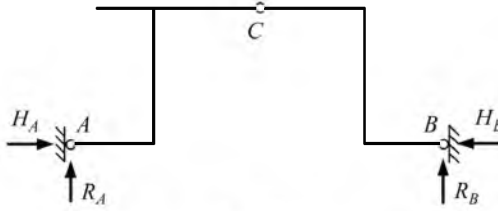


Рис. 4.14

Определение опорных реакций в трехшарнирной раме с опорами в разных уровнях (рис. 4.15) выполняется путем решения двух систем алгебраических уравнений каждая с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= f_1(R_B, H_B) = 0, \\ \Sigma M^{npaog}_C &= f_2(R_B, H_B) = 0, \end{aligned}$$

откуда находятся  $R_B$  и  $H_B$ ;

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= f_3(R_A, H_A) = 0, \\ \Sigma M^{npaog}_C &= f_4(R_A, H_A) = 0, \end{aligned}$$

откуда находятся  $R_A$  и  $H_A$ .

Для проверки применяют суммы проекций сил на оси:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0.$$

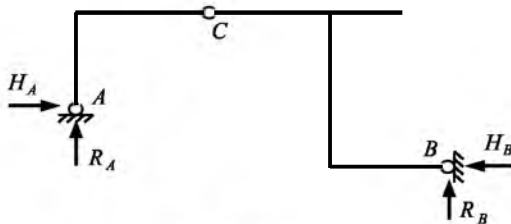


Рис. 4.15

Если в трехшарнирной раме затяжка не нагружена (рис. 4.16,а), то ее следует рассматривать как связь первого вида (раздел 1.4), в которой может возникнуть только продольная сила.

Усилие  $H$  в затяжке  $DK$  (рис. 4.16,б) определяется из уравнения равновесия левой или правой части рамы, отделяемой сечением, проходящим через ключевой шарнир и затяжку.

Тогда для рассматриваемой рамы (для рамы с ненагруженной затяжкой) можно принять следующий порядок расчета.

1. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0, \Rightarrow R_B; \quad \Sigma M_B = 0, \Rightarrow R_A; \quad \Sigma X = 0, \Rightarrow H_A.$$

Проверка:  $\Sigma Y = 0$ .

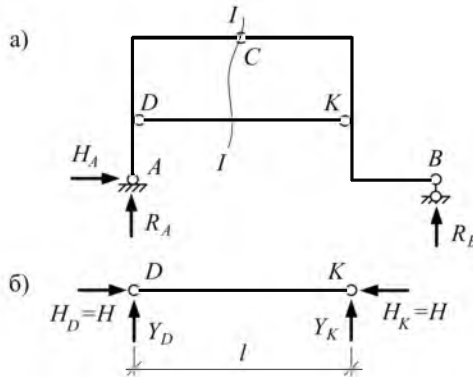


Рис. 4.16

2. Рассматривая, например, равновесие правой части рамы (рис. 4.17), из уравнения

$$\Sigma M^{прав}_C = 0$$

находим  $H$ .

Для проверки применяем условие равновесия левой части рамы:

$$\Sigma M^{лев}_C = 0.$$

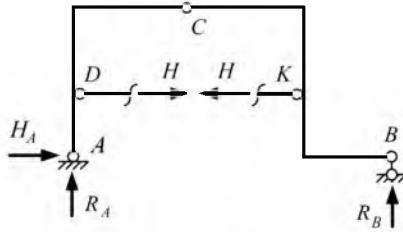


Рис. 4.17

Для трехшарнирной рамы с нагруженной затяжкой, последнюю можно рассматривать как шарнирно опертую балку (рис. 4.18). Порядок расчета рамы сводится к следующему:

1. Внешние опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$  и  $R_B$  определяются так же, как и для трехшарнирной рамы с ненагруженной затяжкой:

$$\Sigma M_A = 0, \Rightarrow R_B; \quad \Sigma M_B = 0, \Rightarrow R_A; \quad \Sigma X = 0, \Rightarrow H_A.$$

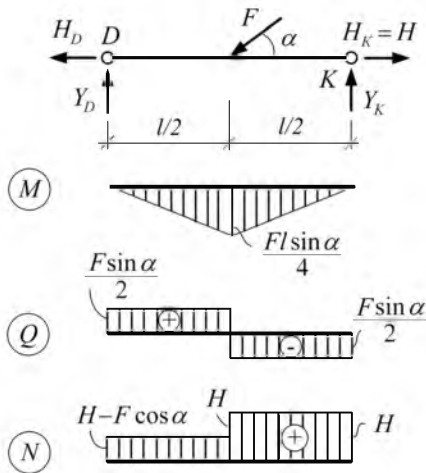


Рис. 4.18

2. Вырезаем стержень  $DK$  и рассматриваем его равновесие (рис. 4.18). Из уравнений  $\Sigma M_D = 0$  и  $\Sigma M_K = 0$  несложно определить реактивные усилия  $Y_D$  и  $Y_K$ , а из уравнения  $\Sigma X = 0$  найдем зависимость между  $H_D$  и  $H_K$  с точностью до параметра  $H$ , который пока остается неизвестным.

Например, при действии на стержень  $DK$  нагрузки, представленной на рис. 4.18, получим:

$$Y_D = Y_K = 0,5 \sin \alpha, \quad H_D = H_K - F \cos \alpha = H - F \cos \alpha. \quad (4.12)$$

Найдя эти реакции, можно в стержне  $DK$  построить эпюры внутренних сил  $M$  и  $Q$ , а также эпюру  $N$  с точностью до неизвестного параметра – усилия  $H$  (рис. 4.18).

3. Равновесие рамы сохранится, если влияние удаленного стержня на полурамы  $AC$  и  $CB$  заменить силами:  $H_D, Y_D$  и  $H_K, Y_K$  (рис. 4.19). Из уравнения равновесия одной из полурам, например, правой, найдем неизвестный параметр  $H$ :

$$\Sigma M^{прав}_C = 0 \Rightarrow H.$$

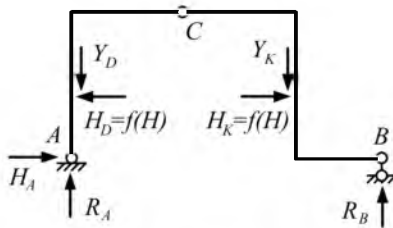


Рис. 4.19

Ниже приведен пример расчета трехшарнирной рамы с затяжкой (рис. 4.20,а), и даны краткие пояснения к расчету (рис. 4.20,б).

$$\Sigma M_A = 0, \quad -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 = 0;$$

$$R_B = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad H_A + 8,5 - 16 - 9,5 = 0, \quad H_A = 17,0 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0, \quad R_A - 12 + 6 = 0, \quad R_A = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M^{прав}_C = 0, \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0, \quad H = 20 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma M^{лев}_C = 0, \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0, \quad 27 - 27 = 0.$$

Вычисляем усилия в сечениях системы:

$$M^{прав}_2 = (4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M^{прав}_3 = -20 \cdot 0 + 9,5 \cdot 2 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_1^{прав} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$$

$$Q_3^{прав} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$$

$$N_1^{прав} = N_3^{прав} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \cos \alpha = 15 \text{ кН}.$$

Эпюры усилий построены на рис. 4.21.

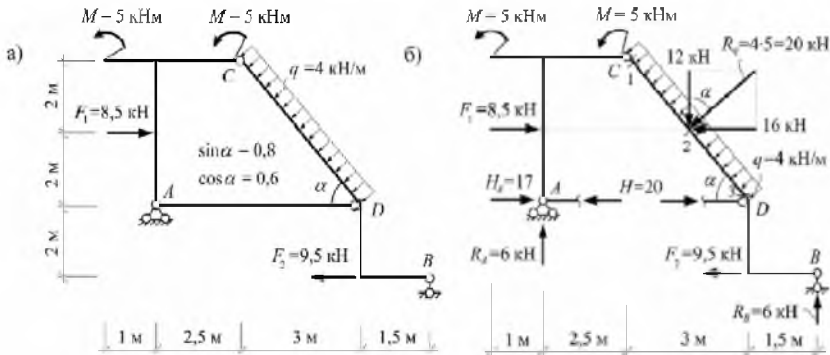


Рис. 4.20

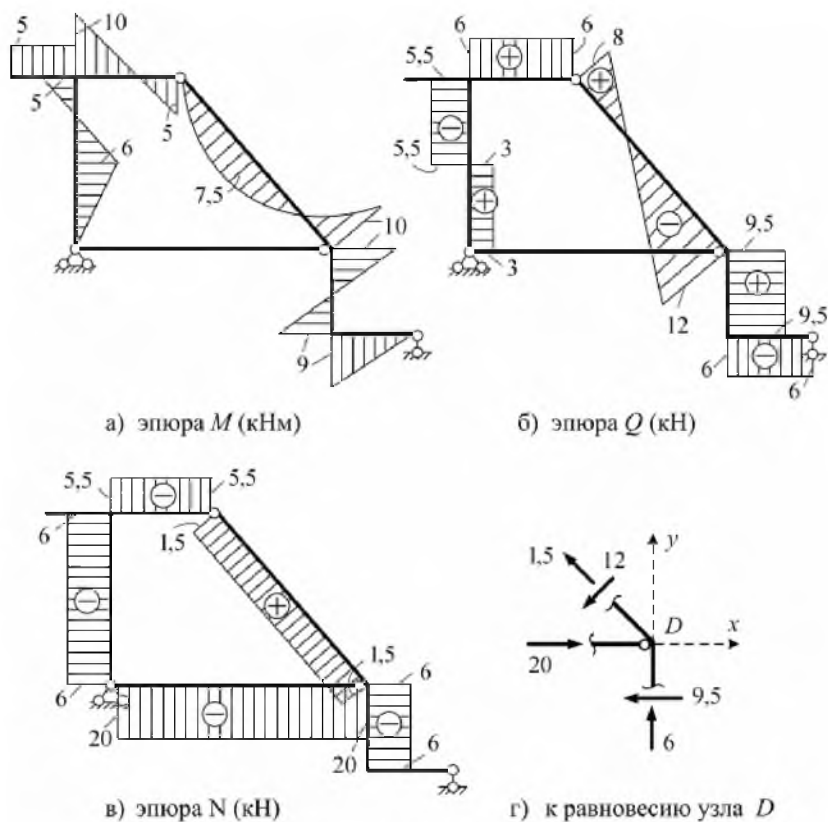


Рис. 4.21

#### 4.7. Расчет составных рам

Составными называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых и (или) трехшарнирных рам (рис. 4.22,а).

Для расчета составные рамы, по аналогии со статически определенными многопролетными балками, необходимо разделять на основные и вспомогательные рамы, то есть составить схему взаимодействия составных частей. Расчет, как и в балках, начинается со

второстепенных рам. Эпюры усилий для составных рам получим путем объединения соответствующих эпюр для отдельных рам.

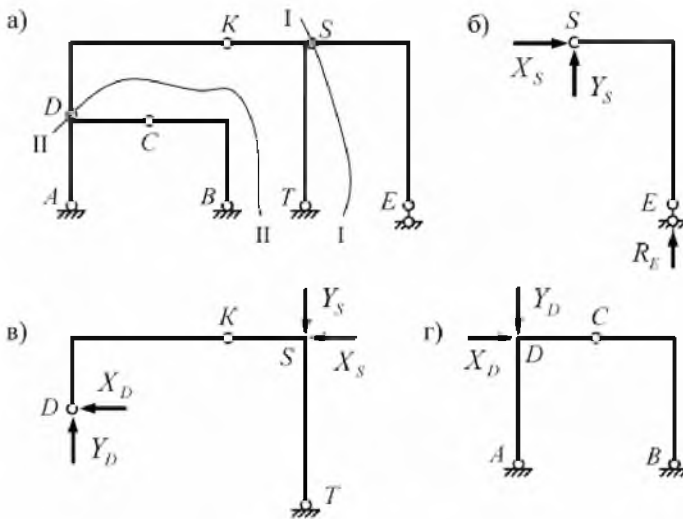


Рис. 4.22

Например, расчет составной рамы, представленной на рис. 4.22,а, можно выполнять в следующей последовательности:

1. Сечением I-I отрезаем правую часть рамы  $SE$ . Эта часть рамы представляет собой простую раму (рис. 4.22,б). Определяем в ней вертикальную реакцию  $R_E$  в шарнирно подвижной опоре  $E$  и реактивные силы  $X_S, Y_S$  в шарнире  $S$ . Силы взаимодействия в шарнире  $S$  учитываем при расчете последующих рам.

2. Выделяем раму  $DKT$  (рис. 4.22,в). Она является трехшарнирной с опорами в разных уровнях. Определив опорные реакции, построим эпюры усилий в ней и перейдем к расчету фрагмента  $ACB$ , учитывая, кроме действующих на него нагрузок, силы взаимодействия в шарнире  $D$ .

3. Рама  $ACB$  (рис. 4.22,г) является трехшарнирной рамой с опорами в одном уровне ( $A$  и  $B$ ). Особенности расчета таких рам рассмотрены ранее.

Рассмотрим расчет составной рамы, представленной на рис. 4.23. Анализ ее структуры показывает, что основной (главной) частью является ломаный стержень  $ADB$ , на который опирается трехшарнирная рама  $ACB$ , а на последнюю – простая рама  $CE$ .

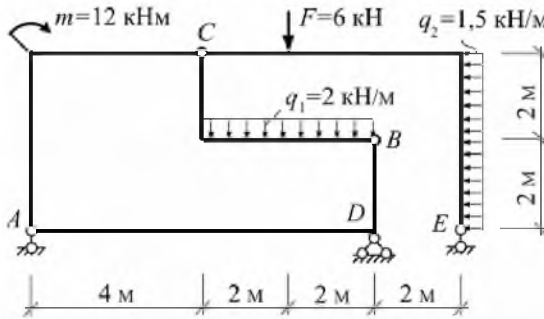


Рис. 4.23

Расчет начнем со вспомогательной рамы  $CE$  (рис. 4.24). Определим опорную реакцию  $R_E$  и реактивные силы в шарнире  $C$ :

$$\Sigma X_{\text{прав}} = 0, \quad X_C - 1,5 \cdot 4 = 0, \quad X_C = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_{\text{прав } C} = 0, \quad 1,5 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - R_E \cdot 6 = 0, \quad R_E = 4 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y_{\text{прав } C} = 0, \quad -6 + 4 + Y_C = 0, \quad Y_C = 2 \text{ кН}.$$

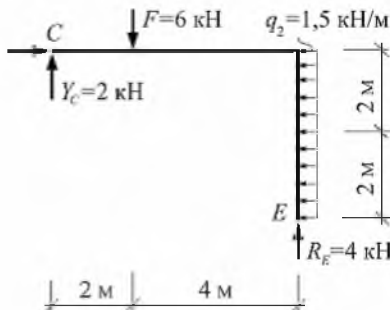


Рис. 4.24



Рассматривая равновесие трехшарнирной рамы  $ACB$  (рис. 4.25, а), найдем реакции в опорах  $A$  и  $B$ . Из уравнений:

$$\Sigma M_C^{np} = 0, \quad -Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

$$\Sigma M_A^{вверху} = 0, \quad 12 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - X_B \cdot 2 - Y_B \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 0,$$

получим  $X_B = 2$  кН,  $Y_B = 5$  кН.

Затем определим реакции  $X_A$  и  $Y_A$ :

$$\Sigma X = 0, \quad X_A - 6 - 2 = 0, \quad X_A = 8 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0, \quad Y_A + 5 - 2 - 2 \cdot 4 = 0, \quad Y_A = 5 \text{ кН}.$$

Для ломаного стержня  $ADB$  (рис. 4.25, б), учитывая силы взаимодействия в шарнирах  $A$  и  $B$ , получим значения  $H_D$ ,  $R_A$  и  $R_D$ .

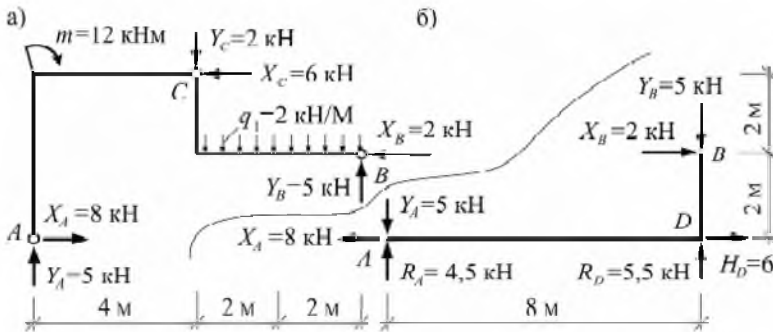
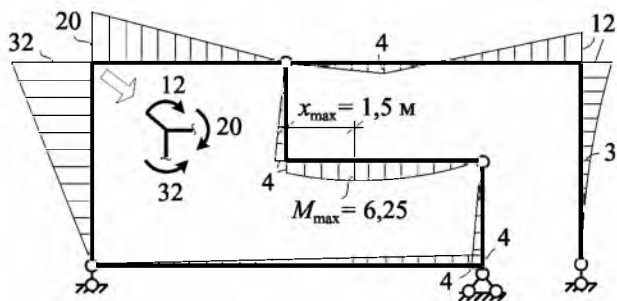
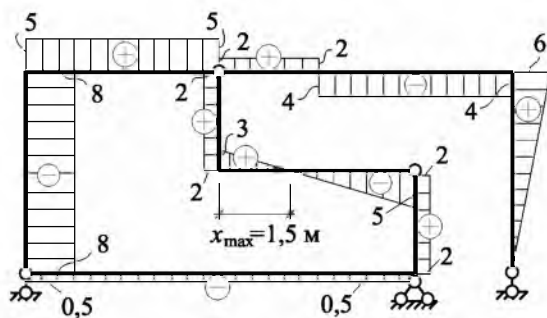


Рис. 4.25

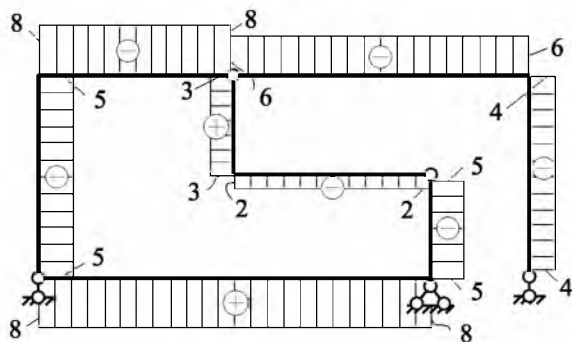
Проведя последовательно построение эпюр усилий для рассмотренных составных частей рамы, получим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  (рис. 4.26) для рамы в целом.



а) эпюра  $M$  (кН·м)



б) эпюра  $Q$  (кН)



в) эпюра  $N$  (кН)

Рис. 4.26

## РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

### 5.1. Понятие о фермах, их классификация, анализ структуры

Фермой называют геометрически неизменяемую стержневую систему, составленную, как правило, из прямолинейных стержней, соединенных по своим концам идеальными шарнирами, нагруженную узловыми силами.

В реальном сооружении узловые соединения стержней обычно выполняются жесткими: сварными в металлических конструкциях или монолитными в железобетонных конструкциях. Сравнительно редко применяют болтовые или иные соединения, которые действительно можно считать шарнирными.

При узловой нагрузке в элементах шарнирно-стержневой системы возникают только продольные внутренние силы. Экспериментально доказано, что дополнительные напряжения, которые возникают в стержнях реальных типовых ферм из-за жесткости узловых соединений, практически незначительны. В предельном случае, при пренебрежении продольными деформациями стержней, в ферме с жесткими узлами при узловой нагрузке изгибающие моменты теоретически равны нулю.

Классификация ферм как шарнирно-стержневых систем может быть проведена по многим признакам.

Фермы, как и другие сооружения, подразделяют на плоские (рис. 5.1) и пространственные (рис. 5.2).

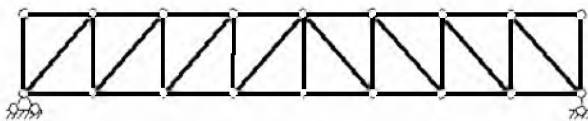


Рис. 5.1

Расстояние между осями опор плоской фермы называют пролетом. Стержни, расположенные по верхнему и нижнему контурам

фермы, образуют ее пояса. Стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы. Наклонные стержни решетки называются раскосами. Вертикальные стержни решетки называются стойками (или подвесками, если они растянуты; в фермах башенного типа подобные стержни решетки называются распорками).

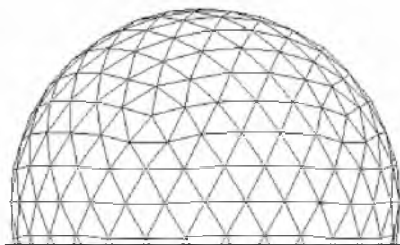


Рис. 5.2

Фермы можно классифицировать по назначению. Различают фермы стропильные и подстропильные, применяемые в покрытиях зданий и сооружений; крановые и подкрановые, применяемые в конструкциях подъемных кранов и крановых путей; башенные, входящие в состав различных башен и мачт; мостовые, входящие в конструкции мостов и путепроводов и др.

По условиям опирания фермы подразделяют на безраспорные (балочные) (рис. 5.1, 5.4,а,в,ж-к), распорные (арочные (рис. 5.3, 5.4,д) и висячие (рис. 5.4,г)), консольные (рис. 5.4,б), консольно-балочные (рис. 5.4,в,ж) и др. К фермам можно отнести и комбинированную систему со сквозной балкой жесткости (рис. 5.4,е).

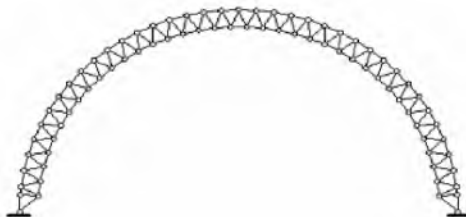


Рис. 5.3

По очертанию поясов различают фермы с параллельными поясами (рис. 5.1; 5.4,в,ж,з,и,к; 5.5,а) и с ломаными (полигональными) поясами (рис. 5.4,а,г; 5.5,б). К фермам с полигональными поясами относятся также фермы треугольного и трапециевидного очертания, фермы параболические и круговые.

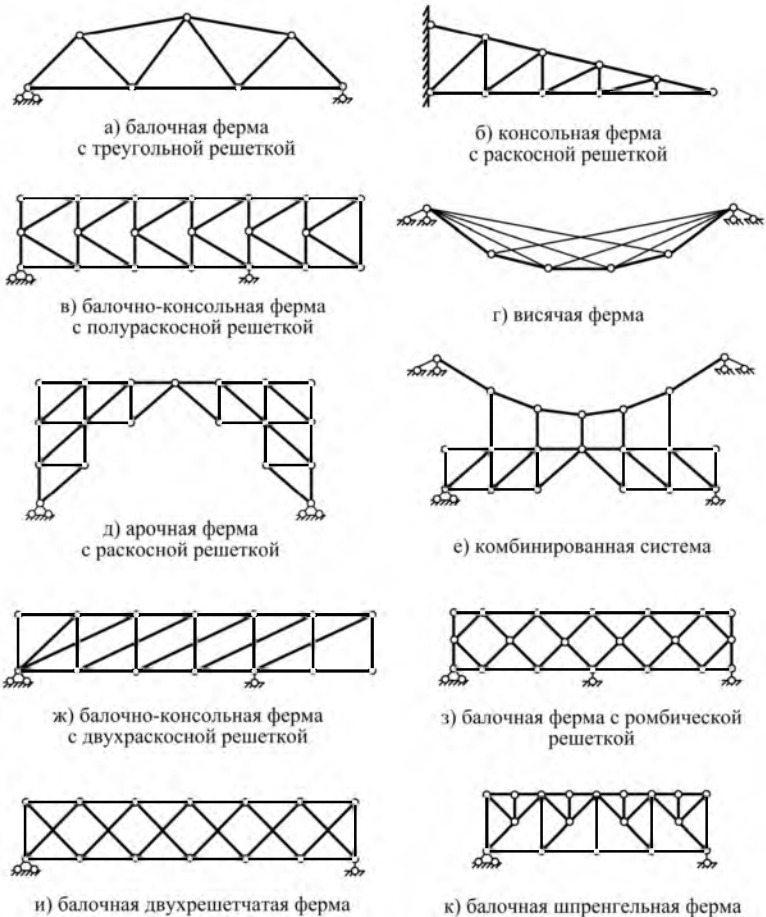


Рис. 5.4

По типу решетки фермы делятся на фермы с раскосной решеткой (рис. 5.1; 5.4,б,д), фермы с треугольной решеткой (рис. 5.2; 5.4,а), фермы с полураскосной решеткой (рис. 5.4,в), фермы со шпренгельной решеткой (рис. 5.4,к), фермы с ромбической решеткой (рис. 5.4,з), фермы с крестовой решеткой (рис. 5.5,а).

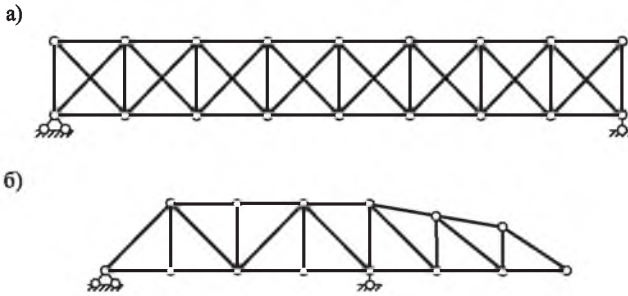


Рис. 5.5

Фермы, показанные на рис. 5.4,ж и рис. 5.4,и называют соответственно двухраскосными и двухрешетчатыми. Встречаются также многораскосные и многорешетчатые фермы.

Шпренгельную решетку называют составной, так как она обычно составлена из основной (раскосной или треугольной) решетки и дополнительных элементов (фермочек), называемых шпренгелями, располагающимися в пределах панелей основной решетки. Назначение шпренгелей – воспринимать нагрузку, прикладываемую между узлами основной решетки (рис. 5.4,к).

### Способы образования плоских ферм

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости фермы как шарнирно-стержневой системы состоит в равенстве нулю ее степени свободы ( $W = 0$ ) или, если ферма отделена от ее опор, в равенстве нулю ее степени изменяемости ( $V = 0$ ).

Будем полагать, что ферма в общем случае состоит из  $У$  узлов, соединенных между собой  $С$  стержнями фермы, и присоединена к опорам  $С_0$  опорными стержнями. Тогда для плоской фермы ее сте-

пень свободы  $W$  относительно системы отсчета, связанной с опорной поверхностью, равна:

$$W = 2U - C - C_o,$$

где  $2U$  – степень свободы узлов, рассматриваемых как  $U$  точек на плоскости;

$C$  – число простых связей, соединяющих узлы фермы и устраняющих, следовательно,  $C$  степеней свободы;

$C_o$  – число опорных (простых) связей, также устраняющих  $C_o$  степеней свободы системы.

Степень свободы плоской системы, отделенной от опор (не имеющей опорных связей), состоит из степени свободы ее как жесткого целого (диска), равной трем (на плоскости), и степени изменчивости  $V$  ее элементов относительно друг друга (внутренней изменчивости). Таким образом, можем записать:

$$W = 3 + V,$$

откуда  $V = W - 3$ .

Подставив в последнюю формулу выражение для  $W$  при условии  $C_o = 0$ , получим формулу для вычисления степени изменчивости фермы (шарнирно-стержневой системы), отсоединенной от опор:

$$V = 2U - C - 3.$$

Если степень свободы (степень изменчивости) фермы положительна (больше нуля)

$$W > 0 \quad (V > 0),$$

то ферма геометрически изменяема. В ее структуре недостает  $W$  связей (стержней).

Если степень свободы (степень изменчивости) фермы отрицательна (меньше нуля)

$$W < 0 \quad (V < 0),$$

то ферма содержит избыточное количество связей и является формально статически неопределимой.

Если степень свободы (степень изменяемости) фермы равна нулю,

$$W = 0 \quad (V = 0),$$

то ферма имеет необходимое для ее геометрической неизменяемости количество стержней (связей) и является, опять-таки формально, статически определимой.

Как отмечалось в главе 1, для окончательного заключения о геометрической неизменяемости и статической определимости фермы необходим анализ ее структуры, анализ законов, по которым она составлена. Фермы только правильной структуры могут быть действительно геометрически неизменяемыми ( $W \leq 0$ ) и статически определимыми ( $W = 0$ ).

К фермам (системам) неправильной структуры относятся системы частично статически неопределимые и частично геометрически изменяемые, а также системы мгновенно изменяемые.

Операция подсчета количества узлов, количества стержней фермы и количества опорных стержней, несомненно, является важной, особенно если исследуемая система достаточно сложна. Однако эта операция не является достаточной. Необходим анализ очередности соединения (монтажа) отдельных элементов фермы в единую систему, или анализ очередности разборки (демонтажа) системы на составные части. Другими словами, необходим анализ структуры сооружения. Этого достаточно для окончательного заключения о геометрической изменяемости или неизменяемости, статической определимости или неопределимости даже сложных ферм. При этом количественное определение степени свободы (степени изменяемости) ферм совсем необязательно.

Способы образования ферм правильной структуры, остаются такими же, как и для любых других стержневых систем. Напомним их.

1. Степень свободы фермы не изменяется, если к ней присоединить (отсоединить) узел с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой (способ диады). В качестве стержней могут выступать заведомо статически определимые и геометрически неизменяемые фермы.



2. Три стержня, соединенные тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют внутренне геометрически неизменяемую систему (диск) без лишних связей.

3. Две фермы (два диска), соединенные тремя стержнями, лежащими на прямых, не пересекающихся в одной точке и не параллельных все три сразу между собой, образуют единую систему (диск), в которой суммарное количество избыточных связей не изменяется, а суммарная степень свободы снижается на три единицы.

4. Две фермы (два диска), соединенные общим шарниром и стержнем, не проходящим через общий шарнир, образуют единую ферму (единый диск), при этом общее количество избыточных связей не увеличивается, а общая степень свободы снижается на три единицы.

## 5.2. Определение усилий в стержнях ферм от неподвижных нагрузок

Определение усилий в стержнях плоских статически определимых ферм, как и в других статически определимых системах (балках, рамах, арках), выполняется методом сечений. Суть метода сечений для ферм заключается в следующем. Ферма разрезается (разделяется) на две или несколько частей так, чтобы был рассечен стержень, в котором ищется усилие (рис. 5.6,а). Для фермы, находящейся в равновесии, любая ее часть также должна быть уравновешена, и для любой части можно записать уравнения равновесия. В эти уравнения наряду с внешними узловыми нагрузками, приложенными к соответствующей части сооружения, должны войти также усилия в разрезанных стержнях. Усилия (продольные силы) в разрезанных стержнях обычно направляют от сечений (от узлов), что соответствует растяжению стержней (рис. 5.6,б). Для отсеченной части плоской фермы в общем случае можно составить три независимых уравнения равновесия. Поэтому рассматриваемый фрагмент фермы должен иметь не более трех стержней с неизвестными усилиями. Уравнения равновесия могут быть составлены либо в форме суммы моментов сил относительно некоторой точки на плоскости, либо в форме суммы проекции сил на некоторую ось. Эти уравнения, по возможности, следует составлять так, чтобы в каждое из них входило только одно неиз-

вестное усилие. Это позволяет определить искомое усилие из решения только одного уравнения.

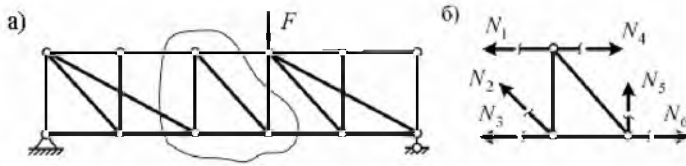


Рис. 5.6

Если отсеченная часть фермы представляет собой один единственный узел, то для системы сил (внешних и внутренних), сходящихся в точке, можно составить только два независимых уравнения равновесия. Следовательно, из уравнений равновесия одного узла можно найти не более двух неизвестных усилий. Частный случай метода сечений, состоящий в последовательном вырезании и уравновешивании узлов фермы, носит название способа вырезания узлов. При его применении узлы рассматриваются в такой последовательности, чтобы в каждом очередном узле было не более двух стержней с неизвестными усилиями.

Покажем определение усилий способом вырезания узлов в некоторых стержнях фермы, представленной на рис. 5.7,а.

Из уравнений равновесия узла 1 (рис. 5.7,б) получаем:

$$\sum Y = 0, \quad N_{1-3} \sin \alpha - F = 0, \quad N_{1-3} = \frac{F}{\sin \alpha},$$

$$\sum X = 0, \quad N_{1-2} + N_{1-3} \cos \alpha = 0,$$

$$N_{1-2} = -N_{1-3} \cos \alpha = -\frac{F}{\sin \alpha} \cos \alpha = -F \operatorname{ctg} \alpha.$$

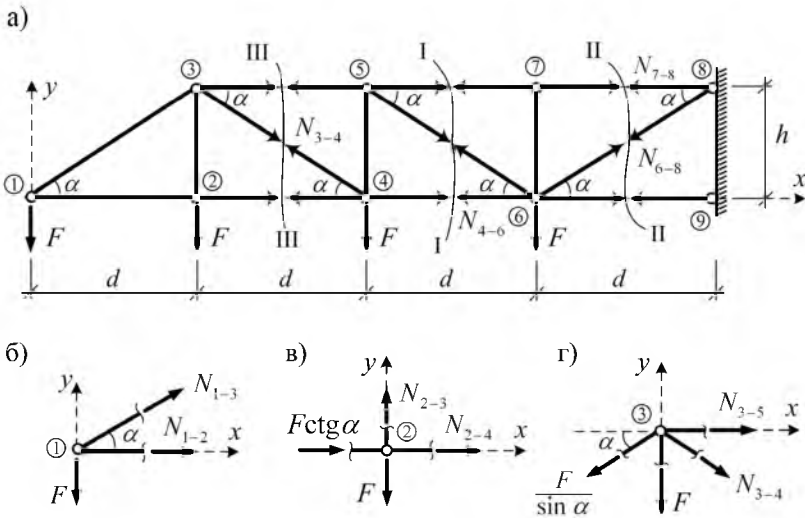


Рис. 5.7

Затем можно вырезать узел 2 (рис. 5.7,в). Усилие в стержне 1–2 уже известно. Остается найти продольные силы еще в двух стержнях:

$$\sum X = 0, \quad F \operatorname{ctg} \alpha + N_{2-4} = 0,$$

$$N_{2-4} = -F \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{2-3} - F = 0, \quad N_{2-3} = F.$$

Следующим вырезаем узел 3, из равновесия которого (рис. 5.7,г) находим усилия в стержнях 3–4 и 3–5:

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{F}{\sin \alpha} \sin \alpha - F - N_{3-4} \sin \alpha = 0,$$

$$N_{3-4} = -\frac{2F}{\sin \alpha},$$

$$\sum X = 0, \quad -\frac{F}{\sin \alpha} \cos \alpha + N_{3-4} \cos \alpha + N_{3-5} = 0,$$

$$N_{3-5} = 3F \operatorname{ctg} \alpha.$$

Дальнейшая процедура расчета фермы предполагает вырезание узлов 4, 5, 7 и 6, из рассмотрения равновесия которых найдутся усилия в остальных стержнях фермы.

Способ вырезания узлов позволяет сформулировать, так называемые признаки «нулевых» стержней, с помощью которых можно быстро находить стержни с нулевыми усилиями:

1) в двухстержневом ненагруженном узле усилия в обоих стержнях равны нулю, если стержни не лежат на одной прямой (рис. 5.8):

$$\sum Z_1 = 0, \quad -N_1 \cos \beta = 0, \quad N_1 = 0,$$

$$\sum Z_2 = 0, \quad -N_2 \cos \alpha = 0, \quad N_2 = 0;$$

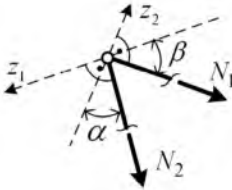


Рис. 5.8

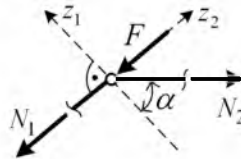


Рис. 5.9

2) если в двухстержневом узле, в котором стержни не лежат на одной прямой, по направлению одного из них приложена сила (рис. 5.9), то усилие в этом стержне будет равно (со знаком «плюс» или «минус») указанной внешней силе, а усилие во втором стержне – нулю:

$$\sum Z_1 = 0, \quad -N_2 \cos \alpha = 0, \quad N_2 = 0,$$

$$\sum Z_2 = 0, \quad -N_1 - P = 0, \quad N_1 = -P;$$

3) в трехстержневом ненагруженном узле, в котором два стержня лежат на одной прямой, а третий располагается под углом к ним (рис. 5.10), усилие в третьем, одиночном стержне равно нулю, а усилия в первых двух стержнях равны между собой:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0, \quad N_3 \sin \alpha = 0, \quad N_3 = 0, \\ \sum X = 0, \quad -N_1 + N_2 + 0 = 0, \quad N_1 = N_2. \end{aligned}$$

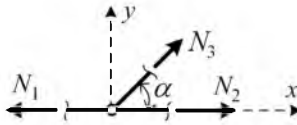


Рис. 5.10

Определение усилий способом вырезания узлов требует последовательного вырезания узлов в порядке, продиктованном структурой фермы. Такой способ вычисления усилий приемлем, если требуется определить усилия во всех стержнях фермы. Достоинством способа является его простота. К недостаткам следует отнести то, что часто нельзя сразу, без предварительного рассмотрения ряда узлов, иногда довольно большого их количества, найти усилие в интересующем нас стержне фермы.

Если ферму расечь так, что оси пересеченных стержней с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), будут пересекаться в одной точке, то чтобы найти усилие в этом, одиночном стержне, достаточно составить уравнение равновесия в виде суммы моментов сил относительно точки пересечения остальных стержней. Такой подход часто называют **способом моментной точки**, а точку называют моментной.

Для определения усилия в стержне 4–6 фермы (рис. 5.7) проведем сечение I–I и рассмотрим равновесие левой части фермы. Два стержня (5–6 и 5–7) пересекаются в узле 5. Усилие в

стержне 4–6 найдем из уравнения равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно узла 5:

$$\sum M_5^{лев} = 0, \quad -F 2d - F d - N_{4-6} h = 0, \quad N_{4-6} = -\frac{3d}{h} F.$$

Усилие в стержне 7–8 найдем, проводя сечение II–II. Моментной точкой в этом случае будет узел 6:

$$\sum M_6^{лев} = 0, \quad -F 3d - F 2d - F d + N_{7-8} h = 0, \quad N_{7-8} = \frac{6d}{h} F.$$

Если в сечении оказалось несколько параллельных стержней, кроме одного (того, в котором ищется усилие), то усилие в этом стержне можно найти из уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на ось, перпендикулярную параллельным стержням. Такой подход часто называют **способом проекций**.

Например, при расчете фермы, изображенной на рис. 5.7, для определения усилия в стержне 6–8 составим уравнение равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось всех сил, действующих на левую часть:

$$\sum Y^{лев} = 0, \quad -4F + N_{6-8} \sin \alpha = 0, \quad N_{6-8} = \frac{4F}{\sin \alpha}.$$

Аналогично, проводя сечение III–III, можно найти усилие в стержне 3–4:

$$\sum Y^{лев} = 0, \quad -2F - N_{3-4} \sin \alpha = 0, \quad N_{3-4} = -\frac{2F}{\sin \alpha}.$$

### 5.3. Определение усилий с использованием метода замены связей

Суть метода замены связей изложена в разделе 2.3. Напомним особенности его применения к расчету ферм.

В ферме, показанной на рис. 5.11,а, можно удалить шарнирно подвижную опору  $C$ , а ее действие заменить вертикальной реакцией, которую обозначим через  $X$  (рис. 5.11,б). Для сохранения

геометрической неизменяемости необходимо установить в ферме дополнительный стержень, и сделать это надо так, чтобы расчет получаемой фермы был, по возможности, более простым. Например, в рассматриваемой ферме после удаления указанного опорного стержня можно установить дополнительный стержень 7–8 (рис. 5.11,б). В полученной ферме, назовем ее заменяющей, усилия теперь можно найти методом сечений.

Заменяющая ферма (рис. 5.11,б) будет эквивалентна исходной (рис. 5.11,а), если усилие  $N^{\text{дон}}$  в дополнительно установленном стержне от действия заданной нагрузки и неизвестной реакции  $X$  будет равно нулю. Найдем усилие в дополнительном стержне только от заданной нагрузки, обозначив его через  $N_F^{\text{дон}}$  (рис. 5.11,в), и отдельно от действия  $X = 1$ , обозначив последнее через  $\bar{N}_X^{\text{дон}}$  (рис. 5.11,г). Учитывая, что  $X$  неизвестно, выразим усилие  $N_X^{\text{дон}}$  через соответствующее усилие  $\bar{N}_X^{\text{дон}}$  от единичного значения  $X = 1$ :

$$N_X^{\text{дон}} = \bar{N}_X^{\text{дон}} X.$$

Используя принцип независимости действия сил, найдем полное усилие в дополнительном стержне и приравняем его нулю:

$$N^{\text{дон}} = N_F^{\text{дон}} + \bar{N}_X^{\text{дон}} X = 0.$$

Из полученного уравнения

$$N_F^{\text{дон}} + \bar{N}_X^{\text{дон}} X = 0,$$

найдем неизвестную реакцию:

$$X = -\frac{N_F^{\text{дон}}}{\bar{N}_X^{\text{дон}}}.$$

Последующий расчет фермы можно вести методом сечений.

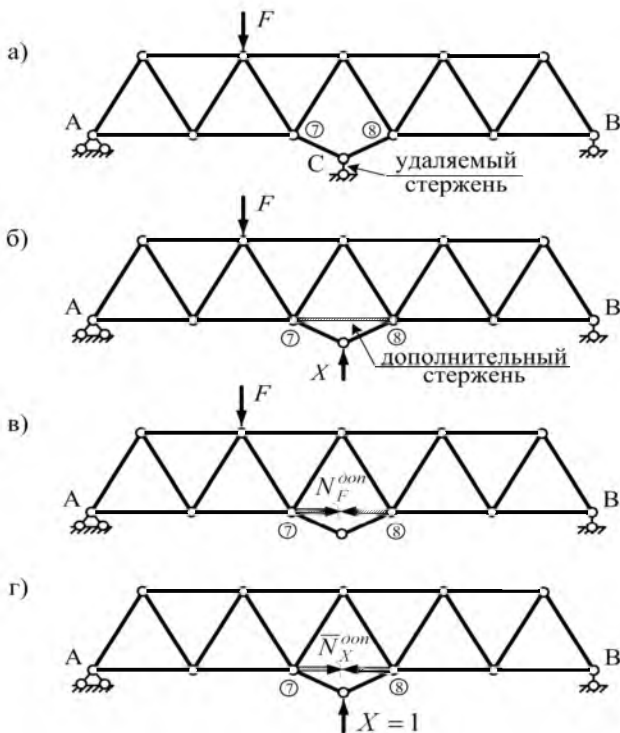


Рис. 5.11

#### 5.4. Особенности определения усилий в стержнях шпренгельных ферм

Шпренгельная ферма (рис. 5.12,а) является составной фермой. Структуру шпренгельной фермы можно представить как результат наложения на основную ферму с раскосной или треугольной решеткой (рис. 5.12,б) дополнительных фермочек (шпренгелей (рис. 5.12,в)), располагаемых в пределах панелей основной фермы. Назначение шпренгелей – воспринимать нагрузку, прикладываемую между узлами основной фермы, и передавать ее на узлы основной фермы (рис. 5.12,а).



Шпренгели могут быть одноярусными и двухъярусными (рис. 5.12,в).

Одноярусные шпренгели передают нагрузку на смежные узлы того же грузового пояса. Например, в ферме на рис. 5.12,а шпренгель 6–8–10–7 сосредоточенную силу  $F_2$  из узла 8 передает поровну в узлы 6 и 10 основной фермы (рис. 5.12,б).

Двухъярусные шпренгели, воспринимая нагрузку в дополнительных узлах одного пояса, передают ее на основные узлы другого пояса фермы. Например, шпренгель 14–16–18–15–13–17 (рис. 5.12,а) сосредоточенную силу  $F_5$ , действующую в узле 16 верхнего пояса, передает в узлы 13 и 17 нижнего пояса.

В шпренгельных фермах выделяют три типа стержней (рис. 5.12,г): стержни только основной решетки фермы (первый тип), стержни только шпренгелей (второй тип) и стержни, полученные наложением стержней шпренгеля на стержни основной фермы (третий тип).

Расчет шпренгельных ферм выполняется, как правило, методом сечений. Иногда определение усилий в стержнях шпренгельных ферм более удобно проводить с учетом принадлежности стержней к одному из перечисленных ранее типов. В этом случае последовательность расчета сводится к следующим действиям.

1. Определяются усилия  $N^u$  в стержнях шпренгелей от действующих на них местных нагрузок. Полученные усилия в стержнях второго типа являются окончательными.

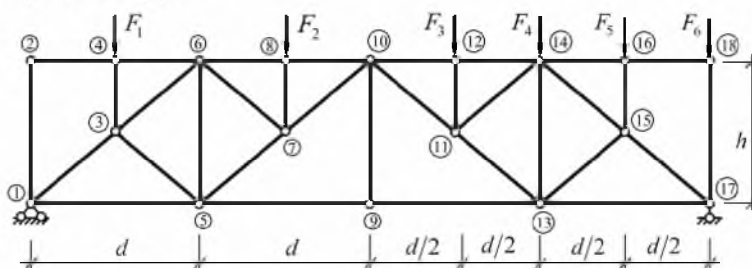
2. Нагрузка, действующая на шпренгели, передается на узлы основной фермы. Определяются усилия  $N^o$  в стержнях основной фермы. Полученные усилия в стержнях первого типа являются окончательными.

3. Усилия  $N$  в стержнях третьего типа вычисляются по выражению:

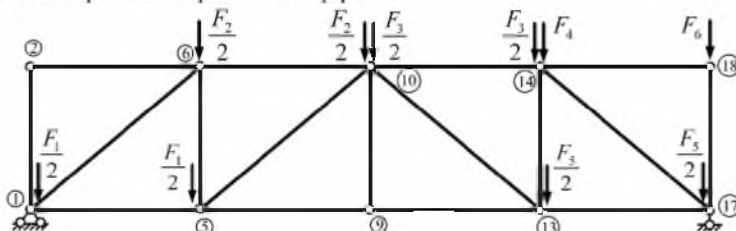
$$N_i = N_i^o + N_i^u .$$

Рассмотрим расчет шпренгельной фермы, представленной на рис. 5.13,а. На рис. 5.13,б показана основная ферма и действующая на ее узлы нагрузка. Пояснения к преобразованию нагрузки, действующей на шпренгели, даны на рис. 5.13,в.

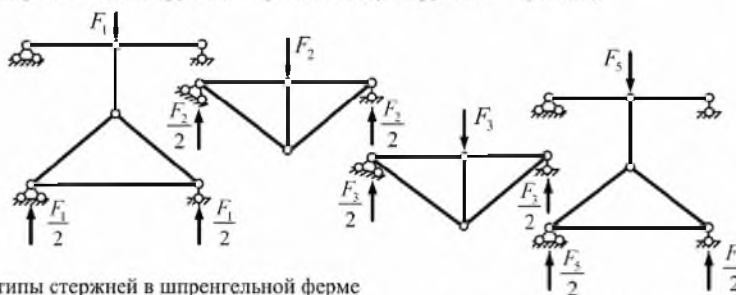
а) шпренгельная ферма



б) основная решетка шпренгельной фермы



в) шпренгели (однорядные – средние и двухъярусные – крайние)



г) типы стержней в шпренгельной ферме

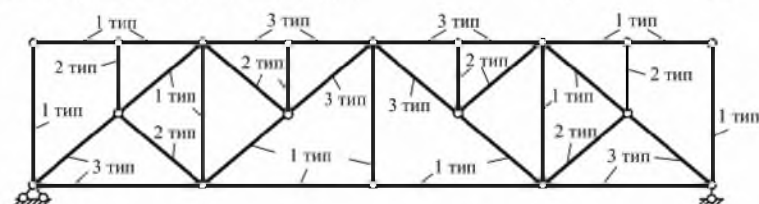


Рис. 5.12

Определим опорные реакции фермы:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = 48 \text{ кН}; \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = 72 \text{ кН}.$$

Усилия в стержне 5–6 (рис. 5.13,а) относится к третьему типу. Усилие  $N_1$  в нем найдем способом моментной точки, рассматривая равновесие, например, левой части фермы (рис. 5.14):

$$\sum M_1^{лев} = 0, \quad 72 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + 10 \cdot 1 - N_1 \cdot 1,778 = 0,$$

$$N_1 = 41,62 \text{ кН}.$$

Для определения усилия  $N_2$  в стержне 4–6 воспользуемся тем же сечением I–I (рис. 5.13,а) и моментной точкой 7.

Рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 5.14), разложив искомое усилие  $N_2$  в точке 6 на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$\sum M_7^{лев} = 0,$$

$$-72 \cdot 2 + 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + N_2 \cos \alpha \cdot 6 = 0,$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1,778} = 1,125; \quad \alpha = 48,363^\circ; \quad \cos \alpha = 0,6644.$$

Решая уравнение, получим:

$$N_2 = -\frac{6}{3,9864} = -1,505 \text{ кН}.$$

Сечение I–I рассекает также стержень 2–3 (рис. 5.13,а), усилие в котором  $N_3$  определим, составив уравнение в виде суммы моментов левых сил относительно узла 6 (рис. 5.14):

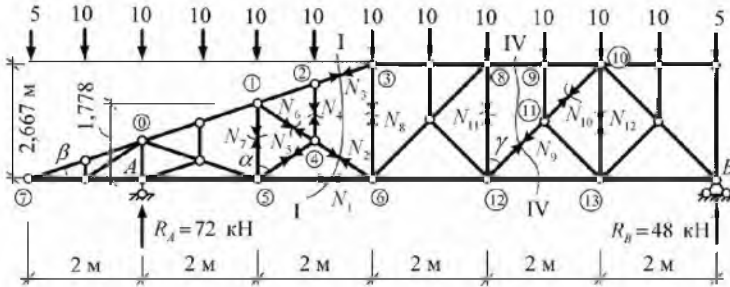
$$\sum M_6^{лев} = 0,$$

$$72 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 10 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1) + N_3 \cos \beta \cdot 2,667 = 0,$$

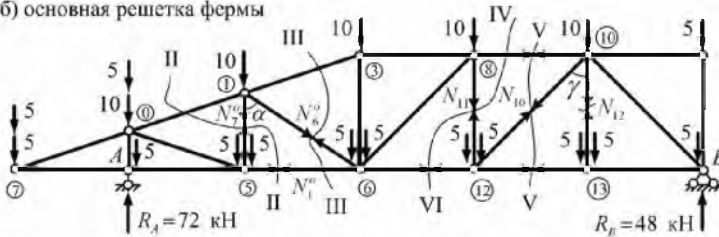
где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2,667}{6} = 0,4445; \quad \beta = 23,965^\circ; \quad \cos \beta = 0,9138.$$

а) расчетная схема фермы



б) основная решетка фермы



в) шпренгели фермы

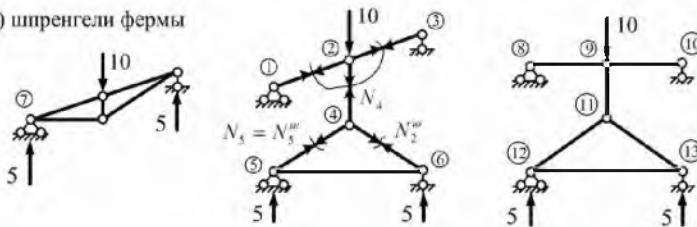


Рис. 5.13

В результате получаем:

$$108 + 2,4368 N_3 = 0, \quad N_3 = -44,32 \text{ кН.}$$

Усилие  $N_4$  в стержне 2-4 (рис. 5.13,а) найдем из уравнения равновесия узла 2 (рис. 5.15,а):

$$\sum Y_1 = 0, \quad -5 \cos \beta - N_4 \cos \beta = 0, \quad N_4 = -10 \text{ кН.}$$

Усилие  $N_5$  в стержне 4-5 (рис. 5.13,а), который является стержнем шпренгеля (второй тип), найдем из уравнений равновесия узла 4 шпренгеля (рис. 5.15,б):

$$\sum X = 0, \quad -N_5 \sin \alpha - N_2^{ш} \sin \alpha = 0, \quad N_2^{ш} = N_5,$$

$$\sum Y = 0, \quad N_4 - N_5 \cos \alpha - N_2^{ш} \cos \alpha = 0, \quad N_4 - 2N_5 \cos \alpha = 0,$$

$$N_5 = N_2^{ш} = \frac{N_4}{2 \cos \alpha} = \frac{-10}{2 \cdot 0,6644} = -7,525 \text{ кН.}$$

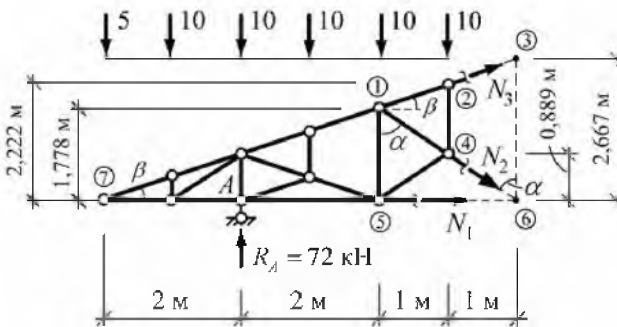


Рис. 5.14

Стержень 1–4 является стержнем основной решетки. Усилие в нем  $N_6$  найдем как усилие  $N_6^o$  в стержне 1–6 основной фермы. Проведем сечение III–III (рис. 5.13,б). Воспользуемся уравнением равновесия в виде суммы моментов левых сил относительно узла 7:

$$\sum M_7^{лев} = 0,$$

$$-72 \cdot 2 + (5 + 10 + 5) \cdot 2 + (10 + 5 + 5) \cdot 4 + N_6^o \cdot 0,6644 \cdot 6 = 0,$$

$$N_6 = N_6^o = 6,02 \text{ кН.}$$

Стержень 4–6 (рис. 5.13,а) является стержнем третьего типа. Он принадлежит и основной решетке (стержень 1–6 (рис. 5.13, б)) и стержню 4–6 шпренгеля (рис. 5.13,в). Поэтому усилие  $N_2$  в этом стержне можно определить по выражению:

$$N_2 = N_2^o + N_2^{ш} = N_6^o + N_2^{ш} = 6,02 - 7,525 = -1,505 \text{ кН.}$$

Этот результат, естественно, совпадает со значением  $N_2$ , полученным ранее.

Усилие  $N_7$  в стойке 1–5 (рис. 5.13,а), как стержне основной решетки, определим, рассмотрев основную ферму (рис. 5.13,б). Проведем сечение II–II и применим способ моментной точки:

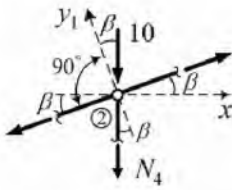
$$\sum M_7^{лев} = 0, \quad -72 \cdot 2 + (5 + 10 + 5) \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 4 - N_7^o \cdot 4 = 0,$$

$$N_7 = N_7^o = -16 \text{ кН.}$$

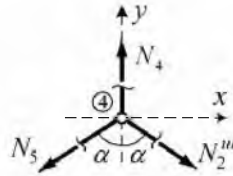
Усилие  $N_8$  в стержне 3–6 как в стержне основной решетки можно найти из уравнений равновесия узла 3 (рис. 5.15,в):

$$\sum Y = 0, \quad -10 - N_8 - N_3 \sin \beta = 0,$$

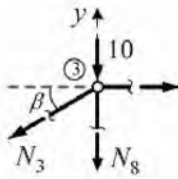
$$N_8 = -10 - (-44,32) \cdot 0,4062 = -8,003 \text{ кН.}$$



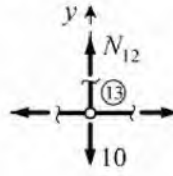
а) узел 2



б) узел 4 шпренгеля



в) узел 3



г) узел 13

Рис. 5.15

Усилие  $N_9$  в стержне 11–12 определим из уравнения проекций сил на вертикальную ось (рис. 5.16):

$$\sum Y^{прое} = 0, \quad -N_9 \cos \gamma - 10 - 10 - 10 - 5 + 48 = 0,$$

$$N_9 = \frac{13}{0,8} = 16,25 \text{ кН},$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2,0}{2,667} = 0,75; \quad \sin \gamma = 0,6; \quad \cos \gamma = 0,8.$$

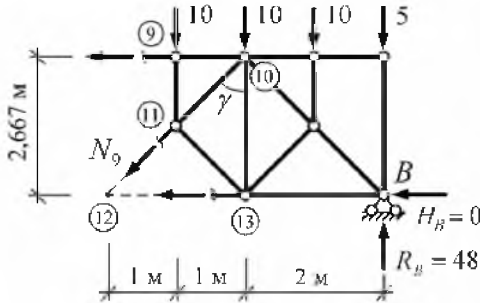


Рис. 5.16

## 5.5. Построение линий влияния усилий в фермах

### 5.5.1. Построение линий влияния усилий в балочных фермах

Рассмотрим балочную ферму, представленную на рис. 5.17,а. Движение единичной силы примем по нижнему поясу. Покажем построение линий влияния усилий в некоторых стержнях этой фермы статическим методом.

Предварительно построим линии влияния опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\sum M_B = 0, \quad -1 x_B + R_A 5d = 0, \quad R_A = \frac{x_B}{5d},$$

$$\sum M_A = 0, \quad -R_B 5d + 1 x_A = 0, \quad R_B = \frac{x_A}{5d}.$$

Из полученных выражений для определения опорных реакций следует, что линии влияния опорных реакций в балочных фермах строятся так же, как в простых балках (раздел 3.2). Линии влияния  $R_A$  и  $R_B$  для рассматриваемой фермы представлены на рис. 5.17,б,в.

Для определения усилия  $N_1$  проведем сечение I-I и воспользуемся способом проекций. Сечение I-I рассекает стержень 10-11 грузового пояса.



При расположении единичной силы левее рассеченной панели (левее узла 10) усилие  $N_1$  определим из уравнения проекций сил правой отсеченной части фермы на вертикальную ось:

$$\sum Y^{прав} = 0, \quad -N_1 \cos \alpha + R_B = 0,$$

$$N_1 = \frac{R_B}{\cos \alpha}, \quad \text{л. в. } N_1 = (\text{л. в. } R_B) / \cos \alpha.$$

Из последней записи следует, что линия влияния усилия  $N_1$  на участке движения единичной силы (участок А–10) будет иметь такой же вид, как линия влияния опорной реакции  $R_B$ , все ординаты которой разделены на  $\cos \alpha$ .

При движении единичной силы справа от рассеченной панели (участок 11–12) получим:

$$\sum Y^{лев} = 0, \quad N_1 \cos \alpha + R_A = 0,$$

$$N_1 = -\frac{R_A}{\cos \alpha}, \quad \text{л. в. } N_1 = -(\text{л. в. } R_A) / \cos \alpha.$$

Следовательно, линия влияния  $N_1$  на этом участке будет такой же, как и линия влияния опорной реакции  $R_A$ , если все ее ординаты разделить на  $(-\cos \alpha)$ .

На участке рассеченной панели (участок 11 – 12) линия влияния строится с учетом узловой передачи нагрузки. Для этого следует соединить прямой линией ординаты линии влияния слева и справа от рассеченной панели. Этот прямолинейный отрезок называют переходной прямой.

Окончательный вид линии влияния усилия  $N_1$  представлен на рис. 5.17,г.

Анализ линии влияния  $N_1$  показывает, что ее левая прямая (слева от рассеченной панели) и правая прямая (справа от рассеченной панели) параллельны друг другу. Эта закономерность связана

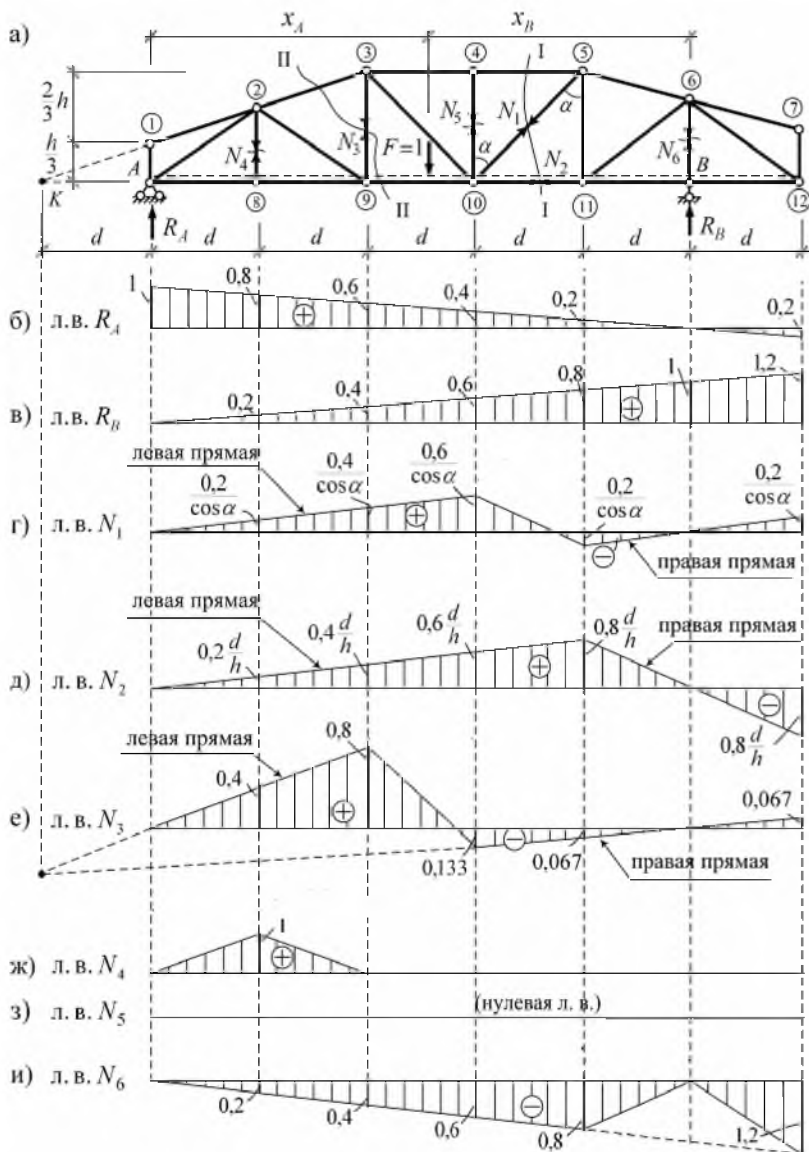


Рис. 5.17

со способом определения усилия, способом проекций, и будет соблюдаться всегда при использовании способа проекций, когда усилие выражается только через груз и опорные реакции.

Для определения усилия  $N_2$  в стержне 10–11 можно использовать сечение I–I (рис. 5.17,а) и способ моментной точки, учитывая, что стержни 4–5 и 10–5, рассеченные сечением вместе со стержнем 10–11, пересекаются в узле 5. Точку в этом узле и принимаем для усилия  $N_2$  в качестве моментной. Рассеченная панель та же, что и для определения усилия  $N_1$ . Найдем зависимости изменения усилия  $N_2$  при движении единичного груза на трех участках грузового пояса фермы:

а) груз слева от рассеченной панели (на участке А–10) – рассматриваем равновесие правой части фермы:

$$\sum M_5^{прав} = 0, \quad N_2 h - R_B d = 0, \quad N_2 = R_B \frac{d}{h},$$

$$\text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_B) \frac{d}{h};$$

б) груз справа от рассеченной панели (на участке 11–12) – рассматриваем равновесие левой части фермы:

$$\sum M_5^{лев} = 0, \quad -N_2 h + R_A 4d = 0,$$

$$N_2 = R_A \frac{4d}{h}, \quad \text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_A) \frac{4d}{h};$$

в) на участке рассеченной панели (10–11) проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_2$  показана на рис. 5.17, д.

Анализ этой линии влияния показывает, что ее левая и правая прямые пересекаются под моментной точкой. Эта закономерность также будет соблюдаться при использовании способа моментной точки в случаях, когда усилие выражается только через груз и опорные реакции.

Для определения усилия  $N_3$  в стержне 3 – 9 проведем сечение II–II (рис. 5.17,а) и воспользуемся также способом моментной точки. В качестве моментной точки здесь следует принять точку  $K$ , в которой пересекаются оси стержней 2–3 и 9–10, рассеченных вместе со стержнем 3–9. Рассеченные участки нижнего и верхнего поясов здесь не совпадают по их горизонтальной проекции. Заметим, что при вырезании узлов отсекаются две смежные панели. В таких случаях положение груза следует определять относительно рассеченных участков грузового пояса, то есть пояса, по которому движется груз. В данном случае рассеченный участок грузового (нижнего) пояса находится между узлами 9 и 10. Рассмотрим движение единичного груза на участках:

а) груз слева от рассеченного участка грузового пояса (на участке А–9) – рассмотрим равновесие правой части фермы:

$$\sum M_k^{права} = 0, \quad N_3 3d - R_B 6d = 0,$$

$$N_3 = R_B \frac{6d}{3d} = 2R_B, \quad \text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_B) \cdot 2;$$

б) груз справа от рассеченного участка грузового пояса (на участке 10–12) – рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum M_k^{лева} = 0, \quad N_3 3d - R_B 6d = 0,$$

$$N_3 = R_B \frac{6d}{3d} = 2R_B, \quad \text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_B) \cdot 2;$$

в) на рассеченном участке грузового пояса (9–10) проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_3$  показана на рис. 5.17,е. Ее левая и правая ветви, как и должно быть, пересекаются под моментной точкой  $K$ .

Для построения линии влияния усилия  $N_4$  в стержне 2–8 усилие  $N_4$  будем определять из вырезания узла 8 (рис. 5.17,а). Узел 8 находится на нижнем поясе фермы, по которому движется груз, поэтому

при его вырезании пересекаются два участка грузового пояса А–8 и 8–9. Для определения зависимостей изменения усилия необходимо рассмотреть движения груза на трех участках:

а) при положении груза в узле 8, вырезая этот узел (рис. 5.18), получим:

$$\sum Y = 0, \quad N_4 - 1 = 0, \quad N_4 = 1;$$

под узлом откладываем единицу со знаком «плюс»;

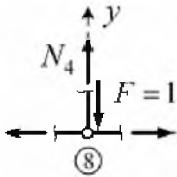


Рис. 5.18

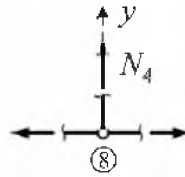


Рис. 5.19

б) при положении силы вне узла и вне рассеченных участков грузового пояса будем иметь (рис. 5.19):

$$\sum Y = 0, \quad N_4 = 0;$$

в) при движении силы на рассеченных участках грузового пояса (А–8 и 8–9) в соответствии с узловой передачей нагрузки проводим переходные прямые.

Линия влияния усилия  $N_4$  имеет вид, представленный на рис. 5.17,ж.

Усилие  $N_5$  в стержне 4–10 проще всего определить, вырезав узел 4. И так как узел 4 находится на верхнем поясе фермы, а сила движется по ее нижнему поясу, то в узел 4 груз попасть не может никак. Поэтому при любом положении груза  $N_5 = 0$ . Соответственно линия влияния  $N_5$  на всей длине фермы будет нулевой (рис. 5.17,з).

Усилие  $N_6$  в стержне 6– $B$  также будем определять способом вырезания узлов, вырезав узел  $B$ . При этом здесь усилие будет выражаться через опорную реакцию  $R_B$  и через груз (когда он будет передаваться в узел  $B$ ). Как и обычно, при вырезании узла, находящегося на поясе, по которому движется груз, здесь необходимо рассмотреть три участка его движения (положения):

а) сила в узле  $B$  (рис. 5.20):

$$\sum Y = 0, \quad N_6 + R_B - 1 = 0, \quad N_6 = 1 - R_B;$$

реакция  $R_B$  при положении силы в узле  $B$  равна единице (рис. 5.17,в), и значит  $N_6 = 1 - 1 = 0$ , то есть под узлом  $B$  линия влияния  $N_6$  будет иметь нулевую ординату;

б) сила вне узла и вне рассеченных участков грузового пояса:

$$\sum Y = 0, \quad N_6 + R_B = 0, \quad N_6 = -R_B,$$

$$\text{л. в. } N_6 = -(\text{л. в. } R_B),$$

то есть на участке  $A$ –11 и под узлом 12 для линии влияния  $N_6$  справедливой будет зависимость изменения линии влияния опорной реакции  $R_B$  со знаком «минус»;

в) на рассеченных участках грузового пояса (11– $B$  и  $B$ –12) проводим переходные прямые.

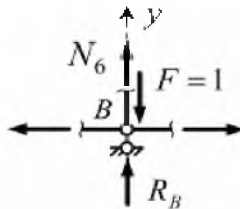


Рис. 5.20

Линия влияния усилия  $N_6$  имеет вид, представленный на рис. 5.17,и.

Таким образом, если вырезаемый узел находится на грузовом поясе, то при построении линии влияния усилия с помощью способа вырезания узлов необходимо рассматривать три случая положения единичной силы:

- а) сила в узле;
- б) сила вне узла и вне рассеченных участков грузового пояса;
- в) сила на рассеченных участках грузового пояса.

Если же вырезаемый узел находится на незагруженном поясе, то искомое усилие можно выразить через усилия в других стержнях, соединяющихся в данном узле, линии влияния усилий в которых необходимо предварительно построить.

### 5.5.2. Построение линий влияния усилий в консольных фермах

Особенностью расчета консольных ферм, как и любых других консольных систем, является то, что для определения усилий в них практически всегда удобнее рассматривать равновесие отсеченных консольных частей.

Рассмотрим консольную ферму с полураскосной решеткой, представленную на рис. 5.21,а.

Построим линию влияния усилия  $N_1$  в стержне 2–3. Проведем в рассматриваемой ферме сечение I–I. Для определения усилия в стержне 2–3 составим уравнение суммы моментов всех правых сил относительно узла 15.

При расположении единичной силы слева от рассеченного стержня 2–3 грузового пояса получим:

$$\sum M_{15}^{права} = 0, \quad -N_1 h = 0, \quad N_1 = 0.$$

Следовательно, на участке 1–2 линия влияния имеет нулевые ординаты.

Если  $F = 1$  будет расположена правее узла 3, то получим:

$$\sum M_{15}^{права} = 0, \quad -N_1 h + 1 \cdot x_1 = 0, \quad N_1 = \frac{x_1}{h}.$$

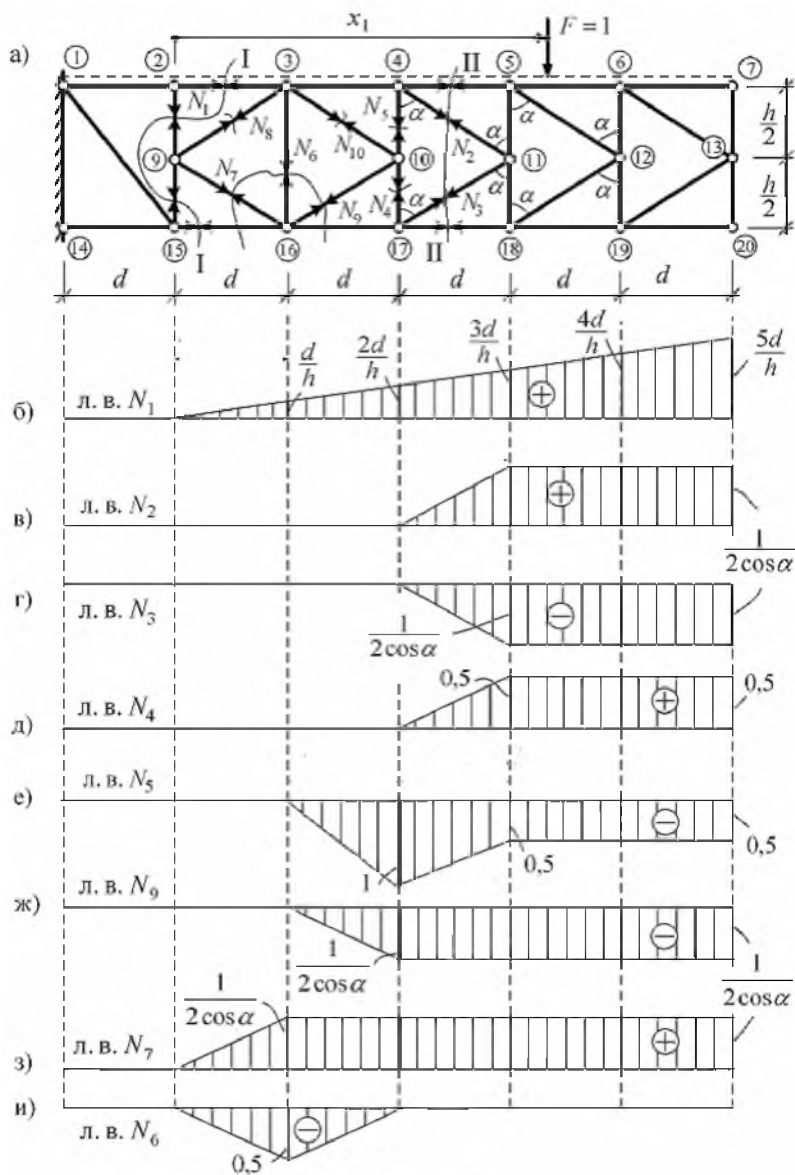


Рис. 5.21



Из полученной формулы следует, что линия влияния усилия  $N_1$  на рассматриваемом участке движения силы является прямолинейной. Прямую можно построить по двум точкам:

$$\text{при } x_1 = d \quad N_1 = \frac{d}{h}; \quad \text{при } x_1 = 5d \quad N_1 = \frac{5d}{h}.$$

На участке 2–3 проводим переходную прямую, которая в данном случае будет являться продолжением правой прямой линии влияния.

Таким образом, левая (нулевая) и правая прямые линии влияния  $N_1$  пересекаются под моментной точкой 15.

Построим теперь линию влияния усилия  $N_2$  в стержне 4–11. Для определения этого усилия используем способ совместных сечений.

Из уравнения равновесия узла 11 (рис. 5.22) следует:

$$\sum X = 0, \quad -N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, \quad N_3 = -N_2.$$

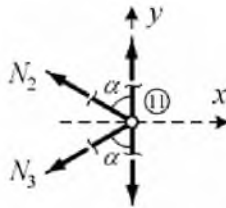


Рис. 5.22

Теперь, проведя сечение II–II, будем составлять уравнения равновесия в виде суммы проекций правых сил на вертикальную ось.

При расположении подвижной силы слева от рассеченной панели (на участке 1–4) имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0, \quad N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha = 0,$$

$$N_2 \cos \alpha - (-N_2) \cos \alpha = 0,$$

$$2N_2 \cos \alpha = 0, \quad N_2 = 0,$$

откуда следует, что на участке 1–4 линия влияния имеет нулевые ординаты.

При движении подвижной силы справа от рассеченной панели (на участке 5–7) получаем:

$$\sum Y^{прав} = 0, \quad N_2 \cos \alpha - N_3 \cos \alpha - 1 = 0,$$

$$2N_2 \cos \alpha - 1 = 0, \quad N_2 = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

Это означает, что усилие  $N_2$  не зависит от точки приложения подвижной силы на рассматриваемом участке.

На участке рассеченного стержня грузового пояса проводим переходную прямую.

Линия влияния  $N_2$  имеет вид, представленный на рис. 5.21,в.

Линия влияния усилия  $N_3$  в стержне 11–17 в соответствии с зависимостью  $N_3 = -N_2$  показана на рис. 5.21,г.

Усилие  $N_4$  в стержне 10–17 найдем из уравнений равновесия узла 17 (рис. 5.23,а):

$$\sum Y = 0, \quad N_4 + N_3 \cos \alpha = 0, \quad N_4 = -N_3 \cos \alpha,$$

$$\text{л. в. } N_4 = (\text{л. в. } N_3) \cdot (-\cos \alpha).$$

Линия влияния усилия  $N_4$  показана на рис. 5.21,д.

Усилие  $N_5$  в стержне 4–10 находится подобно усилию  $N_4$  из уравнений равновесия узла 4. Если единичная сила находится в узле 4 (рис. 5.23,б), то имеем:

$$\sum Y = 0, \quad -1 - N_2 \cos \alpha - N_5 = 0, \quad N_5 = -N_2 \cos \alpha - 1.$$

В соответствии с рис. 5.21, в ордината линии влияния усилия  $N_2$  в узле 4 равна нулю. Поэтому получаем:

$$N_5 = -1.$$

При расположении подвижной силы вне узла 4 на участках 1–3 и 5–7 имеем:

$$\sum Y = 0, \quad -N_2 \cos \alpha - N_5 = 0, \quad N_5 = -N_2 \cos \alpha,$$

$$\text{л. в. } N_5 = (\text{л. в. } N_2) \cdot (-\cos \alpha).$$

На участках рассеченных стержней (3–4 и 4–5) грузового пояса проводим переходные прямые.

Линия влияния усилия  $N_5$  показана на рис. 5.21, е.

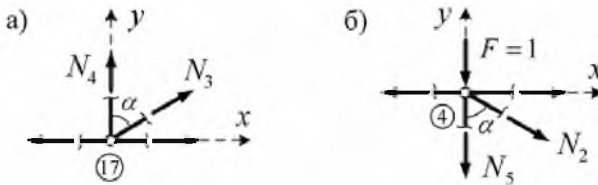


Рис. 5.23

Усилие  $N_6$  в стержне 3–16 удобнее всего найти, вырезав узел 16. Этот узел относится к ненагруженному поясу фермы. Из уравнения равновесия узла усилие  $N_6$  выражается через усилия  $N_7$  и  $N_9$ .

Составив сумму проекций сил на вертикальную ось (рис. 5.24), получим:

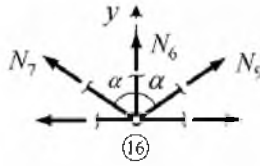


Рис.5.24

$$\sum Y = 0, \quad N_6 + N_7 \cos \alpha + N_9 \cos \alpha = 0, \quad N_6 = -(N_7 + N_9) \cos \alpha,$$

$$\text{л. в. } N_6 = [(\text{л. в. } N_7) + (\text{л. в. } N_9)](-\cos \alpha).$$

Линии влияния усилий  $N_7$  и  $N_9$  построены аналогично линии влияния усилия  $N_3$  и показаны на рис. 5.21,ж,з.

Линия влияния усилия  $N_6$  представлена на рис. 5.18,и.

### 5.5.3. Построение линий влияния усилий в шпренгельных фермах

Рассмотрим шпренгельную ферму балочного типа с одноярусными шпренгелями (рис. 5.25,а). Пусть грузовым будет верхний пояс.

Линии влияния опорных реакций показаны на рис. 5.25,б,в.

При построении линий влияния усилий в стержнях следует руководствоваться правилами определения внутренних сил в шпренгельных фермах, изложенными в разделе 5.4.

Построим линию влияния усилия  $N_1$  в стержне 1–4 (рис. 5.25,а). Для определения усилия в нем воспользуемся методом сечений. Проведем сечение I–I, разрезав ферму на две части.

При движении единичной силы слева от рассеченного стержня 1–2 грузового пояса усилие  $N_1$  найдем из уравнения равновесия в виде суммы моментов правых сил относительно точки  $K$ :

$$\sum M_K^{\text{прав}} = 0, \quad -N_1 \cos \alpha \cdot 8,889 - R_B \cdot 14,889 = 0,$$

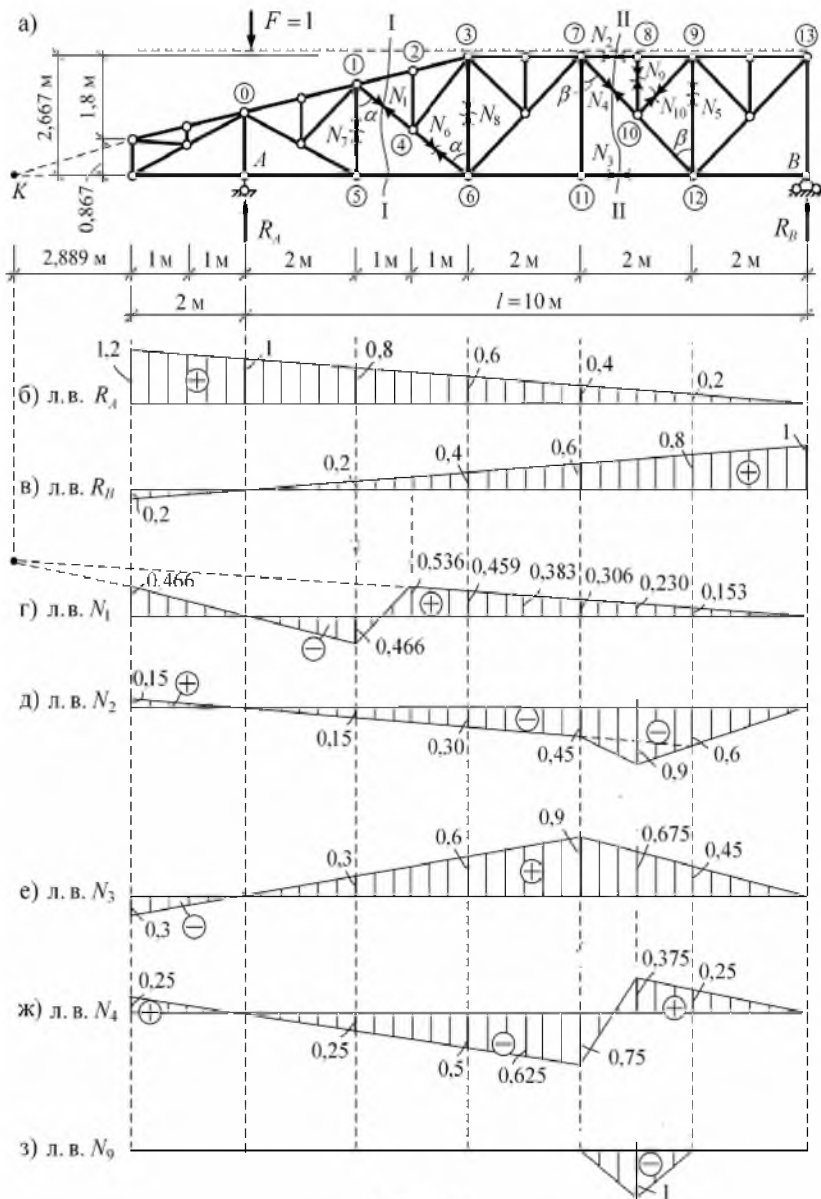


Рис. 5.25

где  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2,067} = 0,9677$ ;  $\cos \alpha = 0,7186$ .

Решив уравнение, получим  $N_1 = -2,331R_B$ .

Следовательно, л. в.  $N_1 = (\text{л. в. } R_B)(-2,331)$ .

При движении единичной силы справа от рассеченного стержня 1–2 грузового пояса имеем:

$$\sum M_K^{\text{лев}} = 0, \quad N_1 \cdot 0,7186 \cdot 8,889 - R_A \cdot 4,889 = 0,$$

$$N_1 = 0,7655 R_A = 0.$$

Следовательно л. в.  $N_1 = (\text{л. в. } R_A)0,7655$ .

Переходная прямая будет расположена на участке рассеченного стержня 1–2 грузового пояса.

Линия влияния  $N_1$  показана на рис. 5.25, г.

Для построения линии влияния  $N_2$  в стержне 7–8 проведем сечение II–II (рис. 5.25, а).

Если подвижная сила будет располагаться левее узла 7, то из уравнения равновесия правых сил в виде суммы моментов относительно узла 12 получим:

$$\sum M_9^{\text{прав}} = 0, \quad -N_2 \cdot 2,667 - R_B \cdot 2 = 0, \quad N_2 = -0,75R_B,$$

$$\text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_B)(-0,75).$$

Если подвижная сила будет располагаться правее узла 8, то получим:

$$\sum M_9^{\text{лев}} = 0, \quad N_2 \cdot 2,667 - R_A \cdot 8 = 0, \quad N_2 = -3R_B,$$

$$\text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_B)(-3).$$

Переходная прямая располагается на участке 7–8 грузового пояса. Линия влияния  $N_2$  представлена на рис. 5.25, д.

Для определения усилия  $N_3$  в стержне 11–12 воспользуемся уже проведенным сечением II–II (рис. 5.25,а). Составив уравнения равновесия всех правых или левых сил при расположении подвижной силы соответственно слева или справа от рассеченного стержня 7–8 грузового пояса, получим зависимости для построения линии влияния  $N_3$ :

$$\sum M_4^{прав} = 0, \quad N_3 \cdot 2,667 - R_B \cdot 4 = 0, \quad N_3 = 1,5R_B,$$

$$\text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_B) \cdot 1,5,$$

$$\sum M_4^{лев} = 0, \quad -N_3 \cdot 2,667 + R_A \cdot 6 = 0, \quad N_3 = 2,25R_A,$$

$$\text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_A) \cdot 2,25.$$

Линия влияния  $N_3$  представлена на рис. 5.25,е.

Используя то же сечение II–II и способ проекций, можно построить линию влияния усилия  $N_4$  в стержне 7–10. Она показана на рис. 5.25,ж.

Стержень 9–12 (рис. 5.25,а) является стержнем основной решетки и усилие в нем  $N_5$  удобнее определять из рассмотрения основной фермы (рис. 5.27,а). Вырежем узел 9 из основной фермы и рассмотрим его равновесие. При расположении подвижной силы в узле 9 усилие  $N_5 = -1$  (рис. 5.26). При нахождении подвижной силы за пределами участка 7 – 13  $N_5 = 0$ . Линия влияния  $N_5$  показана на рис. 5.27,д.

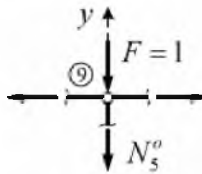


Рис. 5.26

Стержень 4–6 (рис. 5.25,а) является стержнем первого типа шпренгельной фермы. Ему соответствует стержень 1–6 основной фермы (рис. 5.27,а). Для определения усилия в нем проведем сечение III–III (рис. 5.27,а) и воспользуемся способом моментной точки.

При расположении единичной силы левее узла 1 получим:

$$\sum M_{\kappa}^{npas} = 0, \quad -N_6^o \cos \alpha \cdot 8,889 - R_B \cdot 14,889 = 0,$$

$$N_6^o = -2,331R_B, \quad \text{л. в. } N_6^o = (\text{л. в. } R_B)(-2,331).$$

При расположении единичной силы правее узла 3 получим:

$$\sum M_{\kappa}^{лев} = 0, \quad N_6^o \cos \alpha \cdot 8,889 - R_A \cdot 4,889 = 0,$$

$$N_6^o = 0,7655R_A, \quad \text{л. в. } N_6^o = (\text{л. в. } R_A) \cdot 0,7655.$$

На участке 1–3 проводим переходную прямую.

Построенная линия влияния усилия  $N_6^o$  (и соответственно усилия  $N_6$ ) представлена на рис. 5.27,е.

Стойка 1–5 (рис. 5.25,а) также является стержнем основной решетки шпренгельной фермы, и усилие  $N_7$  в ней эквивалентно усилию  $N_7^o$  основной фермы (рис. 5.27,а). Проведя сечение IV–IV и рассматривая положение подвижной силы по обе стороны участка 0–1 грузового пояса, составим уравнения равновесия и получим необходимые зависимости для построения линии влияния  $N_7^o$ . Построенная линия влияния  $N_7^o$  показана на рис. 5.27,ж.

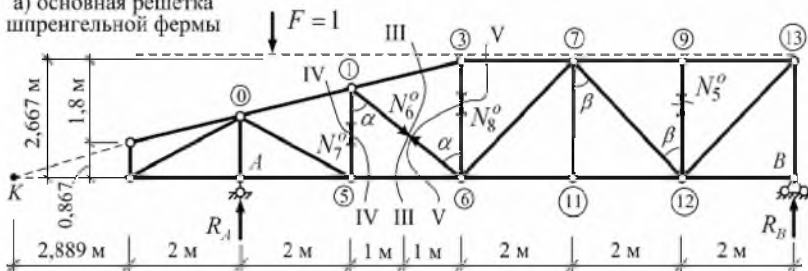
Построим линию влияния усилия  $N_8$  в стойке 3–6 (рис. 5.25,а). Так как эта стойка является стержнем основной фермы, то усилие  $N_8^o$  определим, воспользовавшись сечением V–V (рис. 5.27,а).

Составив сумму проекций правых сил на вертикаль при расположении подвижной силы слева от узла 3, получим:

$$\sum Y^{npas} = 0, \quad N_6^o \cos \alpha + N_8^o + R_B = 0,$$



а) основная решетка шпренгельной фермы



б) шпренгели в 1, 3 и 5 панелях

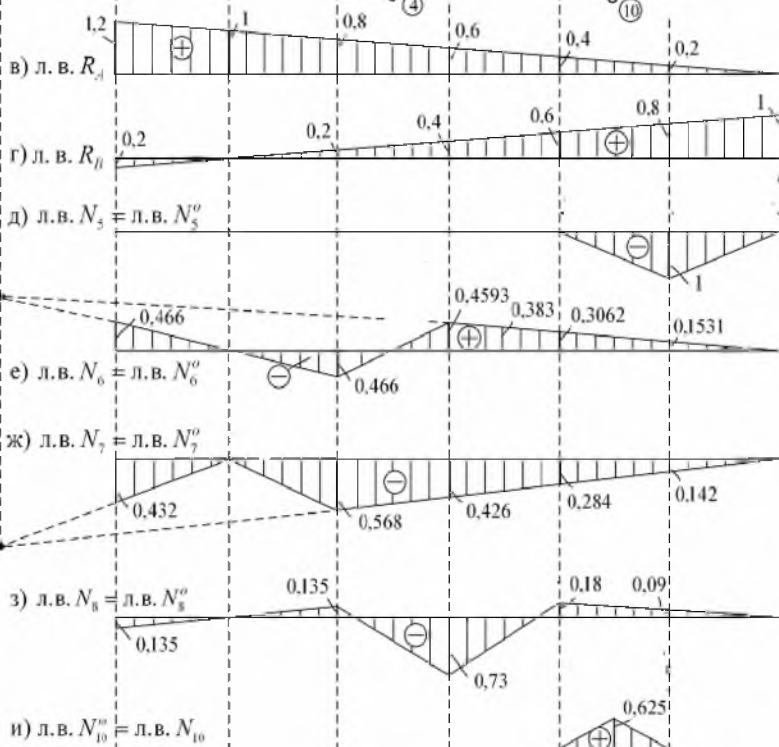
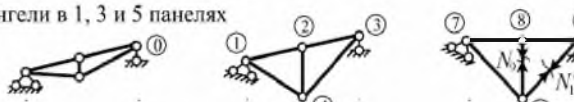


Рис. 5.27

$$N_8^o = -N_6^o \cos \alpha - R_B = 0, \quad (\cos \alpha = 0,7186),$$

$$\text{л. в. } N_8 = \text{л. в. } N_8^o = (\text{л. в. } N_6^o)(-0,7186) - (\text{л. в. } R_B).$$

Линия влияния  $N_8^o$  на рассматриваемом участке движения силы строится путем суммирования скорректированных линии влияния усилия  $N_6^o$  и линии влияния опорной реакции  $R_B$ .

При расположении подвижной силы справа от узла 7, аналогично получим:

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0, \quad -N_6^o \cos \alpha - N_8^o + R_A = 0, \quad N_8^o = -N_6^o 0,7186 + R_A,$$

$$\text{л. в. } N_8 = (\text{л. в. } N_6^o)(-0,7186) + (\text{л. в. } R_A).$$

На рассеченном участке 3–7 грузового пояса проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_8 = N_8^o$  представлена на рис. 5.27,з.

Стержень 8–10 (рис. 5.25,а) является стержнем шпренгеля (второй тип), усилие  $N_9$  в нем можно определить из уравнения равновесия узла 8 (рис. 5.28).

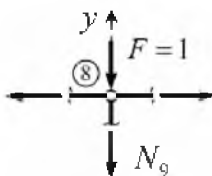


Рис. 5.28

Линия влияния  $N_9$  представлена на рис. 5.25,з.

Стержень 9–10 является стержнем шпренгеля 7–8–9–10 (рис. 5.27,б), усилие  $N_{10}^u$  ( $N_{10} = N_{10}^u$ ) в нем определим из рассмотрения уравнений равновесия для узла 10 шпренгеля (рис. 5.29):

$$\sum X = 0, \quad -N_4^u \sin \beta + N_{10}^u \sin \beta = 0; \quad N_4^u = N_{10}^u,$$

$$\sum Y = 0, \quad N_4^u \cos \beta + N_9 + N_{10}^u \cos \beta = 0,$$

$$N_{10} = N_{10}^{uu} = -\frac{N_9}{2 \cos \beta} = -\frac{N_9}{2 \cdot 0,8} = -0,625 N_9,$$

$$\text{л. в. } N_{10} = (\text{л. в. } N_9)(-0,625).$$

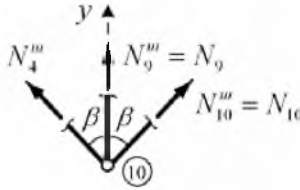


Рис. 5.29

Линия влияния усилия  $N_{10}$  (и одновременно  $N_4'''$ ) представлена на рис. 5.27,и.

Отметим, что линию влияния усилия  $N_4$  (рис. 5.25,ж) в стержне 7–10 (рис. 5.25,а), как в стержне третьего типа можно было получить также путем сложения линии влияния усилия в стержне 7–12 основной фермы и линии влияния усилия в стержне 7–10 шпренгеля. Такой подход можно применять для построения линий влияния усилий в любом из стержней третьего типа.

Рассмотрим ферму с двухъярусными шпренгелями (рис. 5.30,а).

Особенности расчета ферм с двухъярусными шпренгелями изложены в разделе 5.3.

Линии влияния опорных реакций шпренгельной фермы (рис. 5.30,а) показаны на рис. 5.30,в,г.

Построим линию влияния усилия  $N_1$  в стойке 3–17. Усилие в ней определяется из уравнений равновесия узла 3, рассматривая положение подвижной силы либо в узле (рис. 5.31), либо вне узла. Стержень 3–17 работает только на местную (узловую) нагрузку. Соответствующая линия влияния показана на рис. 5.30,д.

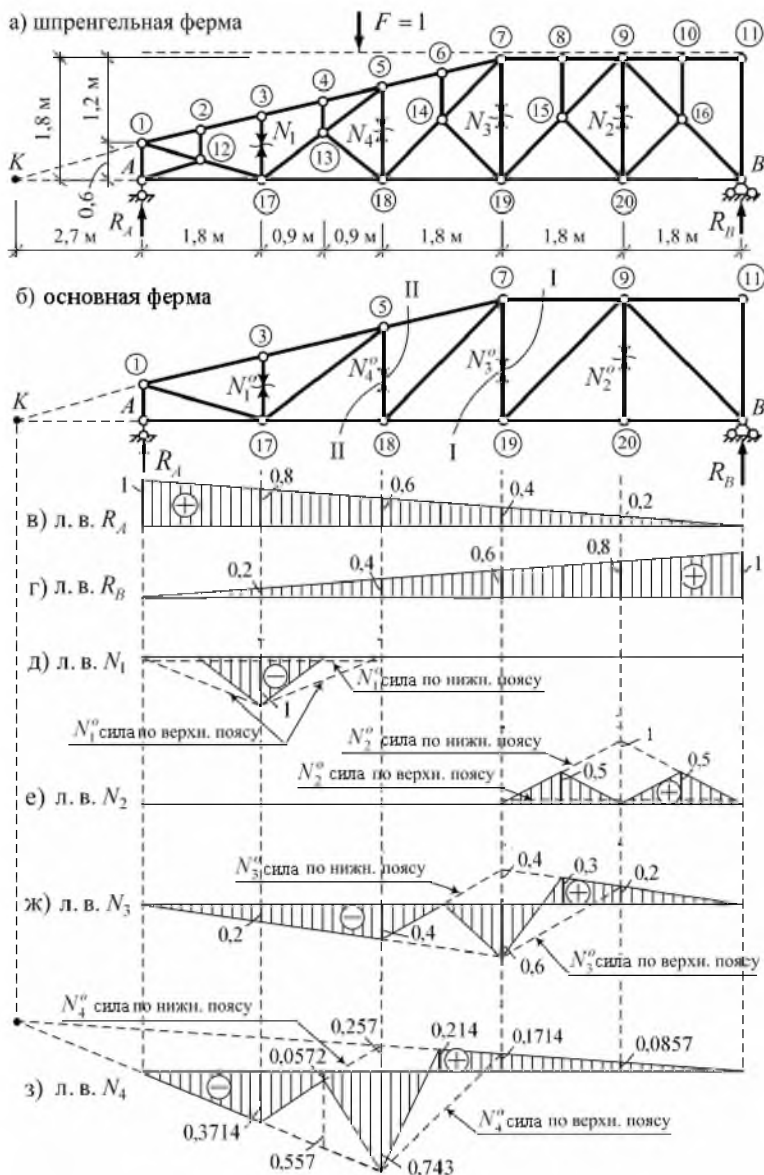


Рис. 5.30

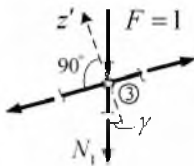


Рис. 5.31

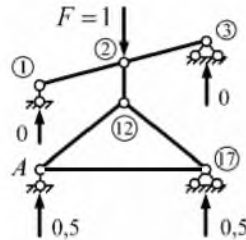


Рис. 5.32

Усилия  $N_2$  в стержне 9–20 как в стержне основной фермы (рис. 5.30,б) при грузовом верхнем поясе равно нулю. В случае нижнего грузового пояса  $N_2^o = 1$ , если единичная сила располагается в узле 20, и  $N_2^o = 0$ , если единичная сила находится вне узла 20.

Соответствующие две линии влияния  $N_2^o$  на рис. 5.30,е показаны штриховыми линиями. На участке грузового пояса 7–11 они не совпадают. Рассмотрим последовательно расположение подвижной силы в узлах 8, 9 и 10 грузового пояса. При расположении силы в узле 8 двухъярусный шпренгель передает ее действие на узлы 19 и 20, то есть грузовым становится нижний пояс. Значит, действительной ординатой искомой линии влияния будет ордината линии влияния  $N_2^o$  при движении силы по нижнему поясу. При расположении силы в узле 9 шпренгели не работают и усилие в стержне 9–20 равно нулю. При расположении силы в узле 10 усилие в стержне 9–20 определяется аналогично, как и при ее расположении в узле 8.

Используя сечение I–I для основной фермы построим линии влияния усилия  $N_3^o$  при движении единичной силы по верхнему и нижнему поясам (рис. 5.30,ж). Последовательно рассматривая расположение силы в узлах 6, 7 и 8 (на несовпадающих участках линий влияния  $N_3^o$ ), найдем окончательный вид линии влияния усилия  $N_3$  (рис. 5.30,ж).

Применяя аналогичные действия, советуем читателю проверить правильность построения линии влияния усилия  $N_4$  в стержне 5–18 (рис. 5.30,з).

## РАСЧЕТ РАСПОРНЫХ ФЕРМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

### 6.1. Расчет распорных ферм

В распорных системах при действии вертикальных нагрузок возникают, кроме вертикальных составляющих опорных реакций, и горизонтальные. Последние называют распором. Примерами распорных ферм являются фермы, показанные на рис. 6.1,а и 6.2,а.

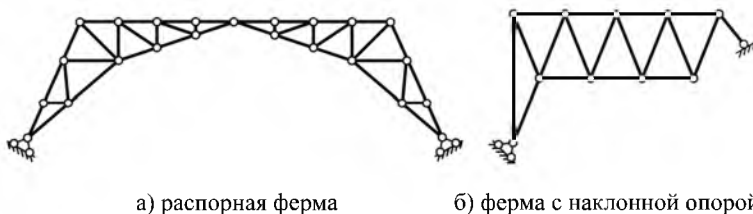


Рис. 6.1

Фермы, представленные на рис. 6.1,а и 6.2,а, называют арокными фермами, так как способ их образования подобен способу образования трехшарнирных арок.

Опорные реакции арочных ферм определяют так же, как в трехшарнирных арках. После определения опорных реакций усилия в стержнях распорных ферм от действия неподвижной нагрузки определяют, как правило, методом сечений.

Рассмотрим особенности построения линий влияния усилий в стержнях распорных ферм. Построим, например, линию влияния усилия  $N_1$  в стержне верхнего пояса фермы, показанной на рис. 6.2,а. Для этого предварительно необходимо построить линии влияния вертикальных составляющих опорных реакций и распора.

Вертикальную реакцию в шарнирно неподвижной опоре  $A$  найдем из уравнения моментов всех сил, действующих на ферму, относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B = 0, \quad R_A l - 1(l - x_F) = 0, \quad R_A = 1 - \frac{x_F}{l}.$$

Полученная зависимость совпадает с соответствующей зависимостью для простой балки, поэтому линия влияния опорной реакции  $R_A$  строится как в простой балке (рис. 6.2,б).

Аналогично получается зависимость:

$$R_B = \frac{x_F}{l}.$$

Линия влияния  $R_B$  показана на рис. 6.2,в.

Распор определим как в трехшарнирной арке по формуле:

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Следовательно, линия влияния распора есть линия влияния балочного изгибающего момента, взятая с коэффициентом  $1/f$  (рис. 6.2,г).

Усилие  $N_1$  будем искать с помощью сечения I–I (рис. 6.2,а).

Если единичная сила располагается слева от сечения, то, рассматривая равновесие правой части фермы, получим:

$$\sum M_1^{прав} = 0, \quad -R_B \cdot 8d + H \cdot 4a - N_1 \cdot a = 0, \quad N_1 = 4H - \frac{8d}{a} R_B.$$

Это означает, что:

$$\sum M_1^{прав} = 0, \quad -R_B \cdot 8d + H \cdot 4a - N_1 \cdot a = 0, \quad N_1 = 4H - \frac{8d}{a} R_B.$$

При движении единичной силы справа от рассеченной панели из уравнения равновесия левых сил найдем:

$$\sum M_1^{лев} = 0, \quad R_A \cdot 2d - H \cdot 4a + N_1 \cdot a = 0,$$

$$N_1 = 4H - \frac{2d}{a} R_A.$$

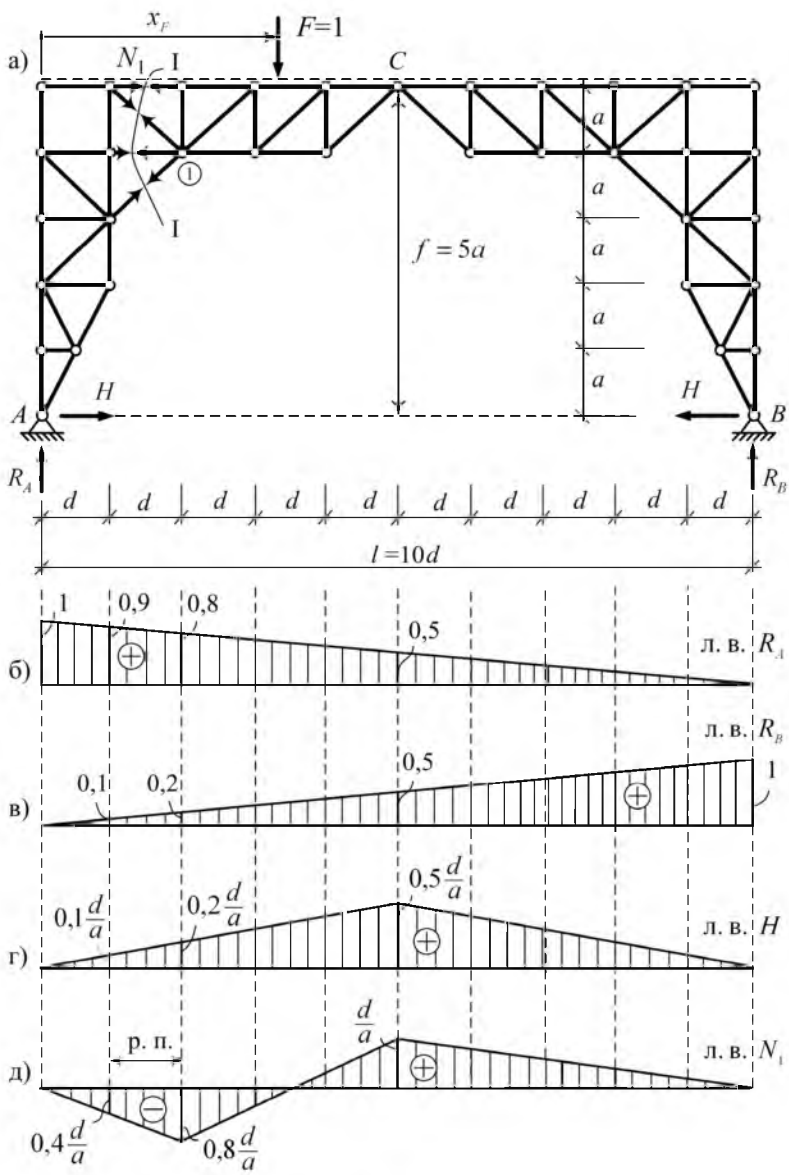


Рис. 6.2



Значит,

$$\text{л.в. } N_1 = (\text{л.в. } H) \cdot 4 - (\text{л.в. } R_A) \cdot \frac{2d}{a}.$$

На участке рассеченной панели, в соответствии с узловой передачей нагрузки, проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_1$  представлена на рис. 6.2,д.

## 6.2. Расчет комбинированных систем

Комбинированными называют системы, часть элементов которых работает на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие, а другая часть – только на растяжение-сжатие. К таким системам, например, относятся: балка с гибкой аркой (рис. 6.3,а), трехшарнирная арка с затяжкой (рис. 6.3,б), трехшарнирная рама с затяжкой (рис. 6.3,в), трехшарнирная рама со шпренгелем (рис. 6.3,г), шпренгельная балка (рис. 6.4,а), цепь с балкой жесткости (рис. 6.5,а).

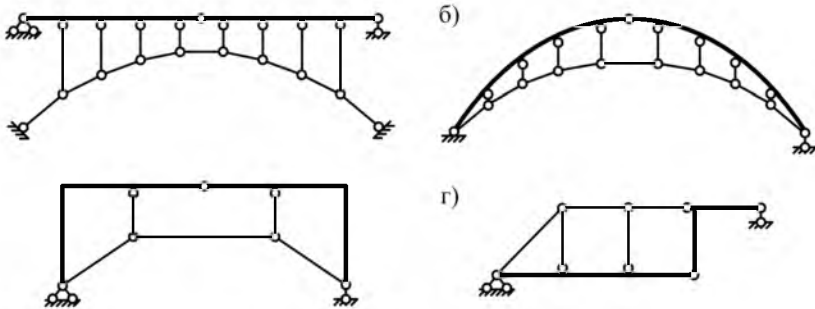


Рис. 6.3

Особенности расчета комбинированных систем рассмотрим на примере расчета шпренгельной балки (рис. 6.4,а), в которой горизонтальные стержни  $AC$  и  $CB$  усилены шарнирно-стержневой системой в виде ломаного пояса (шарнирной цепи) и вертикальных стоек. Усиливающую группу стержней называют шпренгелем.

Вертикальные опорные реакции, вызванные заданной нагрузкой, найдем из уравнений равновесия всей системы:

$$\sum M_A = 0, \quad -R_B 5d + q 2d d = 0, \quad R_B = 0,4qd,$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A 5d - q 2d 4d = 0, \quad R_A = 1,6qd.$$

Горизонтальная реакция опоры  $A$  равна нулю.

Расчет начинаем с определения усилия  $H$  в стержне 4–6 шарнирной цепи. Для этого проводим сечение I–I через названный стержень и шарнир  $C$ . Рассматривая равновесие правой части, получим:

$$\sum M_C^{прав} = 0, \quad -R_B 2,5d + H h = 0, \quad H = R_B \frac{2,5d}{h} = \frac{qd^2}{h}.$$

Затем определяются усилия в стержнях шпренгеля, как в стержнях фермы (рис. 6.4,б).

После определения усилий в элементах шпренгеля выполняется расчет горизонтальных стержней, как простой балки, на действие заданной нагрузки и сил взаимодействия со шпренгелем (рис. 6.4,г). Эпюры внутренних сил показаны на рис. 6.4,д,е,ж.

Особенности построения линий влияния усилий в элементах комбинированных систем рассмотрим на примере системы типа цепь с балкой жесткости (рис. 6.5,а).

Предварительно покажем порядок определения усилий в элементах данной системы.

Найдем опорные реакции от действия нагрузки, приложенной к балке жесткости. Разрежем шарнирную цепь в точках  $A'$  и  $B'$  балки, расположенных по вертикали над опорами  $A$  и  $B$  (рис. 6.5,а). Разложим продольные силы в разрезанных стержнях на горизонтальные и вертикальные составляющие  $V'_A$ ,  $H'_A$  и  $V'_B$ ,  $H'_B$ . Составив уравнения равновесия в виде сумм моментов относительно точек  $A'$  и  $B'$ , найдем суммы вертикальных составляющих  $R_A = V_A + V'_A$  и  $R_B = V_B + V'_B$ :

$$\sum M_{A'} = 0, \quad 1x - R_B l = 0, \quad R_B = \frac{x}{l}; \quad (6.1)$$

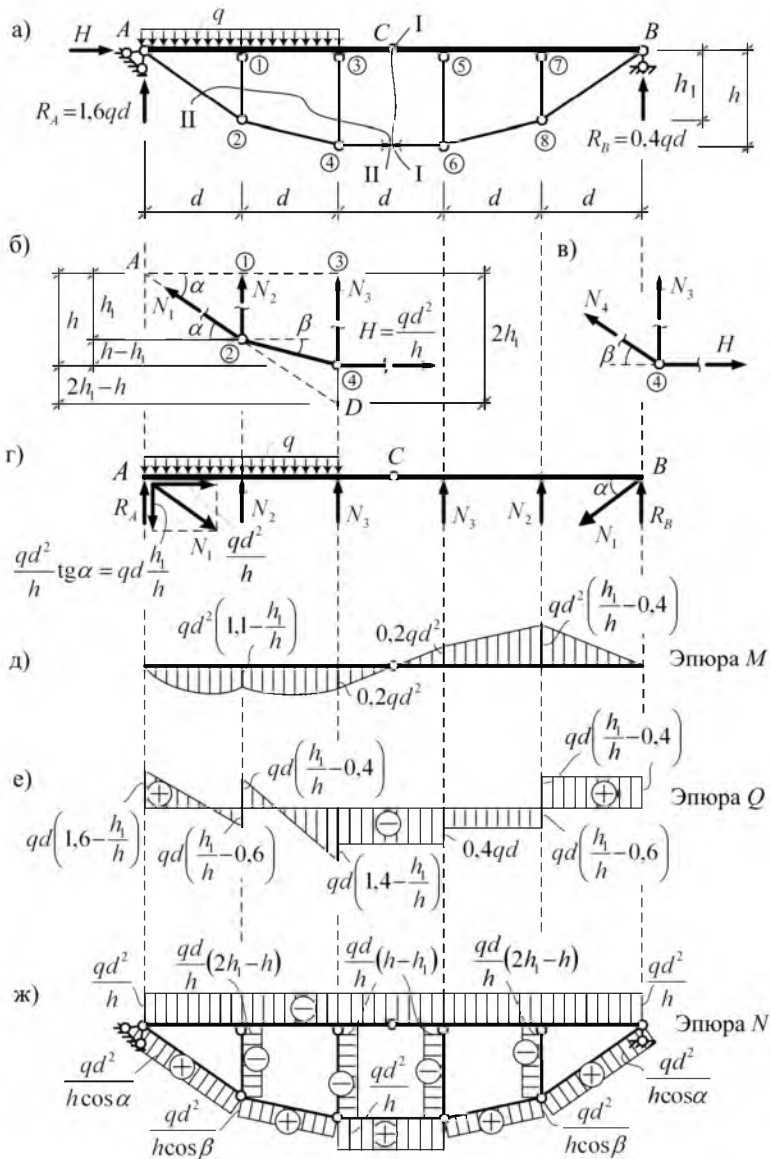


Рис. 6.4

$$\sum M_{B'} = 0, \quad -1(l-x) + R_A l = 0, \quad R_A = \frac{l-x}{l}. \quad (6.2)$$

Из уравнений равновесия узлов шарнирной цепи в местах примыкания вертикальных подвесок (рис. 6.6,б,в,г) или фрагмента (рис. 6.6,а) следует, что горизонтальная составляющая продольных сил в элементах цепи есть величина постоянная и равна распору системы  $H$ .

Чтобы найти усилие  $H$ , проведем сечение II-II, проходящее через шарнир  $C$  и горизонтальный стержень цепи (рис. 6.5,а). Составив сумму моментов сил относительно шарнира  $C$  для одной из частей системы, например, для левой, получим:

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - 1 \left( \frac{l}{2} - x \right) + H h - H(h+f) = 0.$$

Или, учитывая, что

$$M_C^0 = R_A \frac{l}{2} - 1 \left( \frac{l}{2} - x \right), \quad (6.3)$$

получим формулу для определения усилия  $H$ :

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (6.4)$$

Из условий разложения продольной силы в элементе цепи в точке  $A'$  (рис. 6.6,а), найдем вертикальную составляющую  $V_A'$ :

$$V_A' = H \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Аналогично определяется составляющая  $V_B'$ .

После этого находим опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$ :

$$V_A = R_A - V_A', \quad V_B = R_B - V_B'. \quad (6.5)$$

При известной горизонтальной составляющей  $H$  полные усилия в элементах цепи будут равны:

$$N_i = \frac{H}{\cos \alpha_i}.$$

Усилия в подвесках определяются из уравнений равновесия узлов (рис. 6.6,б,в,г).

Для определения внутренних сил в сечении  $K$  проведем через  $K$  строго вертикальное сечение и рассмотрим равновесие левой части (рис. 6.7).

Продольную силу в разрезанном элементе цепи разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие  $H$  и  $V_1$ . Изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $K$  будут равны:

$$\begin{aligned} M_K &= (V_A + V'_A) x_K - F(x_K - x) - H(h + f) + H(h + f - y_K) = \\ &= R_A x_K - 1(x_K - x) - H y_K = M_K^0 - H y_K; \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$Q_K = R_A - 1 - H \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_K^0 - H \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (6.7)$$

где  $M_K^0$  и  $Q_K^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении простой двухопорной балки, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и рассматриваемая система.

На основе полученных зависимостей для определения опорных реакций и усилий можно строить необходимые линии влияния.

Так, используя формулы (6.1) и (6.2), строим линии влияния  $R_A = V_A + V'_A$  (рис. 6.5,б) и  $R_B = V_B + V'_B$  (рис. 6.5,в). Как для простой балки строится линия влияния балочного изгибающего момента (рис. 6.5,г). По формуле (6.4) строится линия влияния усилия  $H$  (рис. 6.5,д), а на основании (6.5) – линия влияния реакции  $V_A$  (рис. 6.5,е).

По формулам (6.6) и (6.7) строятся линии влияния изгибающего момента  $M_K$  (рис. 6.5,ж) и поперечной силы  $Q_K$  (рис. 6.5,з).

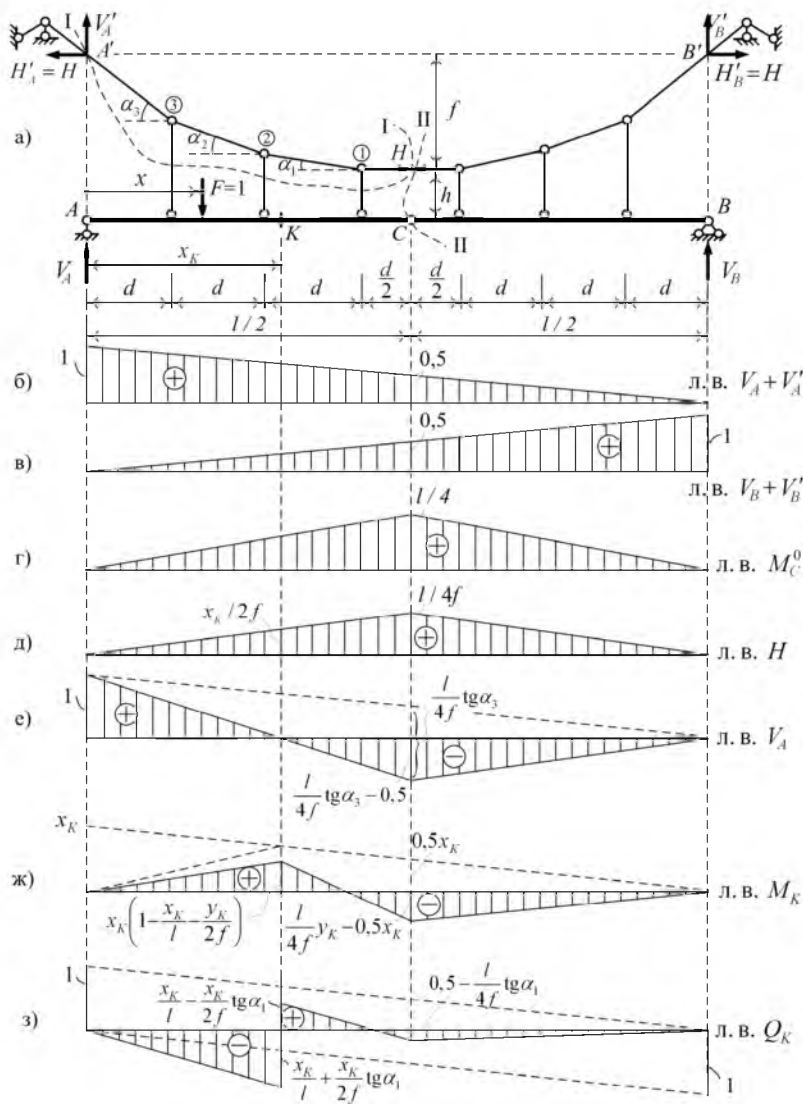


Рис. 6.5

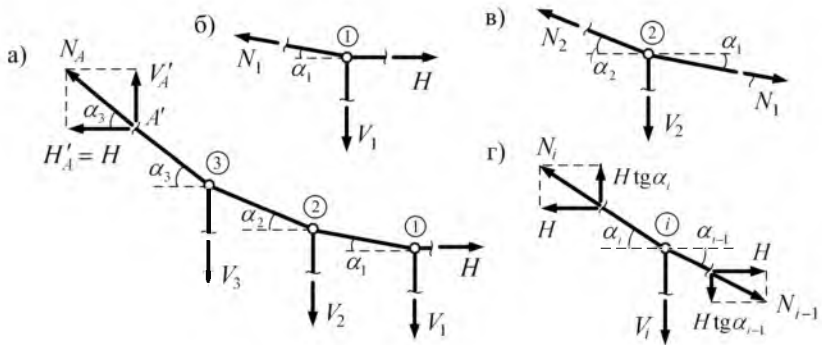


Рис. 6. 6

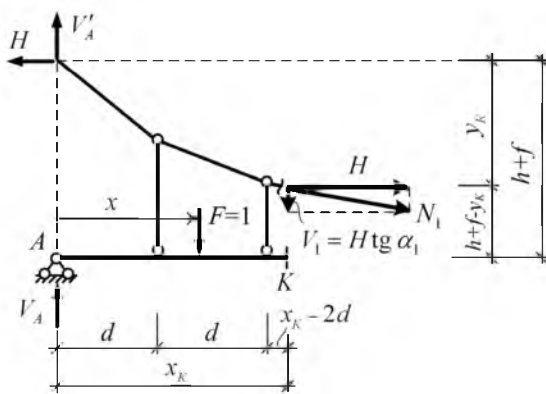


Рис. 6. 7

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 7.1. Общие сведения о перемещениях стержневых систем

При действии на сооружение нагрузки (будем далее обозначать этот фактор через  $F$ ), при изменении температуры ( $t$ ) или смещении опор ( $c$ ) появляются линейные отклонения его точек и углы поворота сечений.

На рис. 7.1 сплошной линией показано начальное (до приложения внешней нагрузки) положение стержневой рамы, штриховой – положение после нагружения (деформированное). Сечение  $K$  переместилось в положение  $K_1$ . Угол  $\varphi$  характеризует поворот сечения, отрезок  $KK_1$  (на схеме не показан) – линейное перемещение сечения  $K$ .

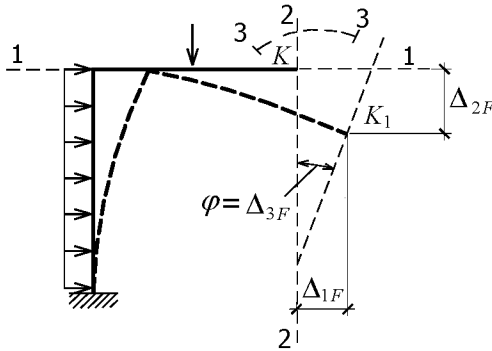


Рис. 7.1

Линейное перемещение сечения  $K$  по направлению, не совпадающему с истинным, можно установить, найдя проекцию отрезка  $KK_1$  на это направление. В инженерных расчетах наиболее часто определяются перемещения сечения по вертикальному и горизонтальному направлениям.



Определение перемещений производится при проверке жесткости сооружений, расчете их на устойчивость и колебания, а также при расчете статически неопределимых систем.

Перемещение какого-либо сечения принято обозначать буквой  $\Delta$  (дэльта) с двумя индексами, первый из которых указывает направление перемещения, а второй – причину, вызвавшую перемещение. Так,  $\Delta_{1F}$  обозначает перемещение сечения по 1-му направлению, вызванное внешней нагрузкой. Смысл обозначений  $\Delta_{2F}$  и  $\Delta_{3F}$  раскрывается с помощью рис. 7.1. В дальнейшем необходимо будет определять перемещения по направлению действия некоторых сосредоточенных сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Тогда обозначение  $\Delta_{iF}$  следует читать так: это перемещение точки приложения силы  $F_i$  по ее направлению, вызванное нагрузкой  $F$ .

Перемещение по  $i$ -му направлению, вызванное температурным воздействием, обозначается  $\Delta_{it}$ , смещением опор –  $\Delta_{ic}$ .

Определение перемещений в линейно деформируемых системах основывается на общих теоремах об упругих системах.

## 7.2. Работа внешних статически приложенных сил

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает перемещение (движение) его из исходного состояния в новое, деформированное. Будем рассматривать такую нагрузку, которая прикладывается к сооружению настолько медленно, плавно, что возникающими при этом ускорениями его элементов, следовательно, и силами инерции их масс можно пренебречь. Такой процесс нагружения называют статическим, а соответствующую ему нагрузку – статической.

Пусть стержень, выполненный из нелинейно-упругого материала, испытывает растяжение силой  $F$  (рис. 7.2).

Диаграмма “напряжение-деформация” этого материала показана на рис. 7.3.

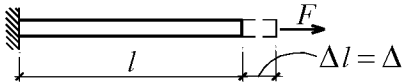


Рис. 7.2

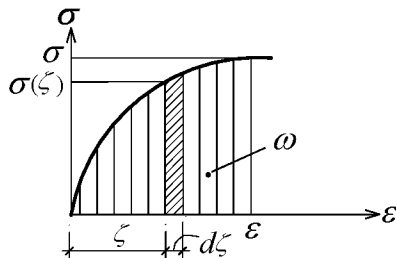


Рис. 7.3

Площадь диаграммы  $\omega$ , как известно из курса сопротивления материалов, равна удельной потенциальной энергии  $u_0$  (иначе, плотности энергии – энергии, отнесенной к единице первоначального объема элемента) при линейном напряженном состоянии.

Если изменить масштаб ординат графика  $\sigma - \varepsilon$ , введя зависимости  $N = \sigma A$  и  $\Delta l = \varepsilon l$ , то можно получить часто используемую в практике расчетов зависимость “нагрузка-перемещение” (рис. 7.4).

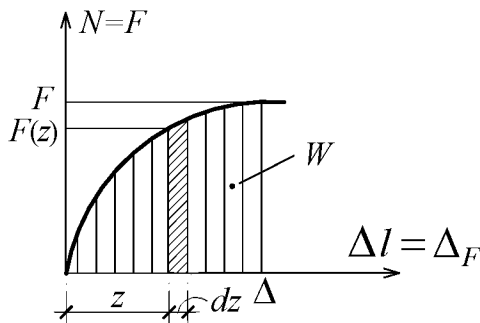


Рис. 7.4

Через  $z$  обозначено некоторое промежуточное абсолютное удлинение стержня, вызываемое силой  $F(z)$ , а через  $\Delta$  – перемещение, соответствующее конечному (максимальному) значению силы  $F$ .

При бесконечно малом увеличении перемещения на  $dz$  совершаемая силой работа определится по выражению:  $dW = F(z)dz$ .

Суммируя элементарные работы на всем интервале изменения перемещений, получаем формулу для определения работы, совершаемой статически приложенной внешней силой  $F$  :

$$W = \int_0^{\Delta} F(z) dz .$$

Для линейно-упругого стержня зависимость между силой и перемещением линейная (рис. 7.5). Поэтому  $F(z) = k z$ , где  $k$  – коэффициент жесткости стержня.

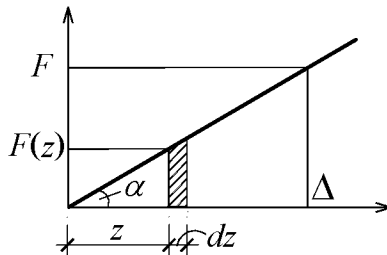


Рис. 7.5

Конечному значению силы соответствует перемещение  $\Delta$ . Работа статически приложенной силы вычисляется по выражению:

$$W = \int_0^{\Delta} F(z) dz = \int_0^{\Delta} k z dz = \frac{kz^2}{2} \Big|_0^{\Delta} = k \frac{\Delta^2}{2} .$$

Так как  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{\Delta}$ , то  $W = \frac{F \Delta}{2}$ .

**Работа внешней статически приложенной силы равна половине произведения значения этой силы на значение вызванного ею перемещения** (теорема Клапейрона (1799–1864)). Работу статически приложенной силы на перемещении, вызванном этой же силой, принято называть действительной работой.

В общем случае под силой надо понимать не только сосредоточенную силу, но и момент, и распределенную нагрузку. Соответствующими им перемещениями будут линейное перемещение по направле-

нию силы, угловое по направлению момента и площадь эпюры перемещений на участке действия равномерной нагрузки.

При совместном действии на систему нескольких статически приложенных сил их работа вычисляется полусуммой произведений каждой силы на соответствующее ей суммарное перемещение:

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i. \quad (7.1)$$

Например, при статическом действии на балку, показанную на рис. 7.6, сосредоточенных сил  $F_1$ ,  $F_2$  и сосредоточенного момента  $M$  действительная работа внешних сил равна:

$$W = \frac{F_1 \Delta_1}{2} + \frac{F_2 \Delta_2}{2} - \frac{M\varphi}{2}.$$

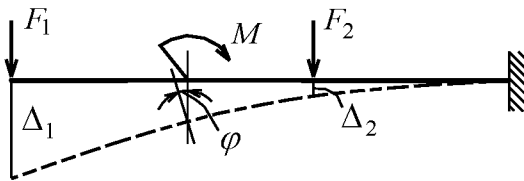


Рис. 7.6

Знак минус перед последним слагаемым выражения принят потому, что направление угла поворота  $\varphi$  поперечного сечения балки и направление момента  $M$  являются противоположными.

### 7.3. Работа внутренних сил плоской линейно-упругой стержневой системы

При статическом действии внешних сил на деформируемую систему в ее сечениях развиваются внутренние силы. Для определения работы этих сил выделим из системы (рис. 7.7,а) двумя бесконечно близко расположенными сечениями элемент длины  $dx$  (рис. 7.7,б).

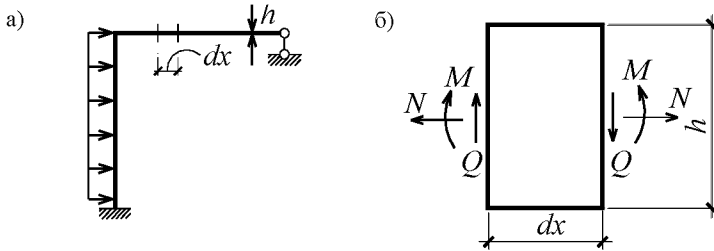


Рис. 7.7

По отношению к этому элементу силы  $N$ ,  $M$  и  $Q$ , заменяющие действие отброшенных частей системы на выделенный элемент, являются внешними. Внутренние же силы им равны, но противоположны по направлению, и сопротивляются деформациям элемента. Поэтому работа внутренних сил всегда отрицательна.

*Замечание* – В формулах раздела 7.3 и далее будут использованы обозначения:

$A$  – площадь сечения стержня;

$J$  – осевой момент инерции сечения; обозначение момента инерции  $J_y$  в формуле Журавского связано с принятым обозначением осей на рис. 7.9;

$EA$  – жесткость стержня на растяжение-сжатие;

$EJ$  – жесткость стержня на изгиб;

$GA$  – жесткость стержня на сдвиг.

Действие на элемент продольных сил  $N$  вызывает растяжение его на  $\Delta dx = \frac{N dx}{EA}$  (рис. 7.8,а). На этом перемещении статически

возрастающая внешняя сила  $N$  совершит элементарную действительную работу:  $dW_N = \frac{1}{2} N \Delta dx = \frac{N^2 dx}{2EA}$ . Работа же  $dA_N$  внутренних продольных сил будет ей равна, но отрицательна (направление внутренних сил и соответствующих им деформаций противоположны).

Следовательно,  $dA_N = -dW_N = -\frac{N^2 dx}{2EA}$ .

На угловом перемещении сечений  $d\varphi$ , вызванном действием изгибающего момента (рис. 7.8,б), его работа будет равна  $-\frac{1}{2}M d\varphi$ .

Используя формулу для определения кривизны оси стержня  $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$ , величину угла взаимного поворота сечений получим в виде  $d\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$ . Тогда  $dA_M = -\frac{M^2 dx}{2EJ}$ .

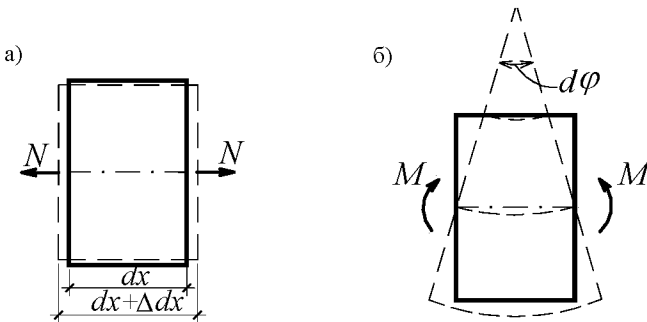


Рис. 7.8

Касательные напряжения в сечении, определяемые по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_y^{omc}}{J_y b(z)},$$

вызывают взаимный сдвиг сечений на  $\Delta_z = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx$  (рис. 7.9).

Для определения их работы выделим на торцевых сечениях элемента  $dx$  соответствующие полоски площадью  $dA$ . Учитывая статический характер нагрузки, найдем, что:

$$dA_Q = -\frac{1}{2} \int_A (\tau dA) \Delta_Z = -\frac{dx}{2G} \int_A \tau^2 dA =$$

$$= -\frac{Q^2 dx}{2G} \int_A \left( \frac{S_y^{omc}}{J_y b(z)} \right)^2 dA = -\frac{\mu Q^2 dx}{2GA},$$

где  $\mu = A \int_A \left( \frac{S_y^{omc}}{J_y b(z)} \right)^2 dA$  – безразмерный коэффициент, зави-

сящий от формы площади поперечного сечения. Для прямоугольного сечения  $\mu = 1,2$ ; для круглого  $\mu = 1,18$ ; для прокатных двутавров приближенно  $\mu$  равно отношению площади двутавра к площади его стенки.

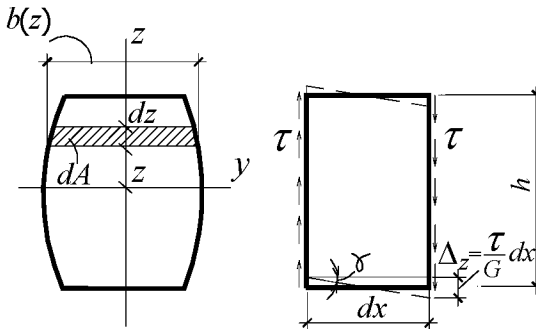


Рис. 7.9

Полную действительную работу внутренних сил плоской стержневой системы получим, интегрируя выражения для элементарных работ по длине каждого участка стержня и произведя суммирование по всем участкам системы. Суммарная действительная работа внутренних сил равна:

$$A_{внутр} = -\sum \int \frac{N^2 dx}{2EA} - \sum \int \frac{M^2 dx}{2EJ} - \sum \int \frac{\mu Q^2 dx}{2GA}. \quad (7.2)$$

Поскольку в формулу (7.2) величины  $N$ ,  $M$  и  $Q$  входят в квадрате, то работа внутренних сил всегда отрицательна.

В линейно деформируемых системах зависимость между нагрузкой и перемещениями (усилиями) линейная. Зависимость же между нагрузкой и работой, как следует из формулы (7.2), нелинейная. Действительная работа группы одновременно действующих внешних сил, не равна сумме действительных работ, вызванных каждой из сил в отдельности. Принцип независимости действия сил при вычислении действительной работы не применим.

#### 7.4. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам

Расширим понятия, изложенные в разделе 2.4.

Упругая система, испытывающая заданное внешнее воздействие, занимает определенное деформированное положение. Перемещения точек системы, отсчитанные от начального (недеформированного) состояния системы до соответствующего положения их в деформированном состоянии – это действительные перемещения.

Зададим рассматриваемой системе возможные перемещения. Так как положение упругой системы в деформированном состоянии характеризуется бесконечно большим числом параметров, то такая система является системой с бесконечно большим числом степеней свободы. Число возможных перемещений для нее тоже будет бесконечно большим.

Как отмечено в разделе 2.4, при “переходе” системы из деформированного состояния в новое, в котором учитываются возможные перемещения, внешнее воздействие и внутренние силы не меняются. Поэтому работу внешних и внутренних сил на возможных перемещениях необходимо определять по выражениям:

$$W^{(возм)} = \sum F_i \Delta_i,$$

где  $F_i$  – обобщенные силы;

$\Delta_i$  – соответствующие обобщенные перемещения;

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum S_i e_i,$$

где  $S_i$  – обобщенные внутренние силы;

$e_i$  – соответствующие обобщенные деформации.

Работа внутренних сил всегда отрицательна.



Формальная запись принципа возможных перемещений остается такой же, как и в разделе 2.4:

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 0.$$

Предполагается, что в упругой системе связи являются идеальными и на возможных перемещениях никаких затрат работы на преодоление трения или на образование и выделение тепла и т. п. не происходит; в неупругих системах это учитывается.

В практических приложениях за возможные перемещения принимаются конечно малые перемещения, которые могут быть вызваны силовыми или другими воздействиями. Например, для состояния балки, показанного на рис. 7.10 (состояние “*i*”), в качестве возможных перемещений можно принять перемещения этой же балки, нагруженной другой группой сил (состояние “*k*”). Тогда возможная работа внешних сил состояния “*i*” на этих перемещениях запишется в виде:

$$W^{(возм)} = F_1 \Delta_{1k} + F_2 \Delta_{2k}.$$

Возможная работа внутренних сил состояния “*i*” на деформациях балки в состоянии “*k*” будет равна:

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum \int N_i \frac{N_k dx}{EA} - \sum \int M_i \frac{M_k dx}{EJ} - \sum \int \mu Q_i \frac{Q_k dx}{GA}.$$

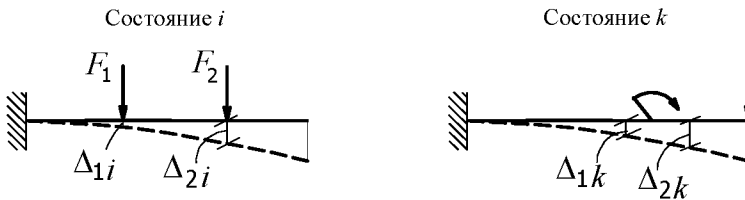


Рис. 7.10

Принцип возможных перемещений является одним из основных принципов механики. Он позволяет найти условия равновесия, что очень важно, без определения неизвестных реакций связей.

Если за возможные перемещения принять действительные, то возможная работа внешних и внутренних сил будет определяться по выражениям:

$$W^{(возм)} = \sum F_i \Delta_i,$$

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum \int \frac{N^2 dx}{EA} - \sum \int \frac{M^2 dx}{EJ} - \sum \int \frac{\mu Q^2 dx}{GA}, \quad (7.3)$$

где  $W^{(возм)}$  – возможная работа внешних сил;

$A_{внутр}^{(возм)}$  – возможная работа внутренних сил.

Отметим, что понятие возможного перемещения (обозначается символом  $\delta$ ) было введено Лагранжем. В классическом трактате “Аналитическая механика” (1788; рус. пер., т. 1–2, 2 изд., 1950) он в основу всей статики положил “общую формулу”, являющуюся принципом возможных перемещений, а в основу всей динамики – “общую формулу”, являющуюся сочетанием принципа возможных перемещений с принципом Д’Аламбера.

### 7.5. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

Предположим, что линейно деформируемая система (рис. 7.11,а) последовательно нагружается вначале силой  $F_i$ , а затем силой  $F_k$ .

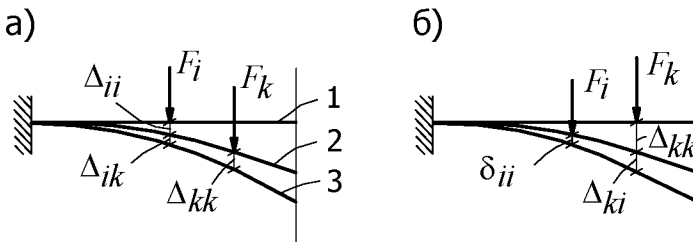


Рис. 7.11

При “переходе” балки из положения 1 в положение 2 силой  $F_i$  на перемещении  $\Delta_{ii}$  совершается действительная работа, равная  $W_{ii} = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii}$ .

При “переходе” балки из положения 2 в положение 3 сила  $F_k$  совершает действительную работу  $W_{kk} = \frac{1}{2} F_k \Delta_{kk}$ , а сила  $F_i$ , оставаясь в это время неизменной, совершает на перемещении  $\Delta_{ik}$  возможную работу  $W_{ik} = F_i \Delta_{ik}$ . Суммарная работа двух сил будет равна:

$$W_1 = W_{ii} + W_{kk} + W_{ik}.$$

Если осуществить нагружение балки в обратной последовательности – вначале силой  $F_k$ , а затем силой  $F_i$  (рис. 7.11,б), – то получим:

$$W_2 = W_{kk} + W_{ii} + W_{ki}.$$

Так как значение работы внешних сил равно потенциальной энергии системы и поскольку, независимо от последовательности нагружения, в обоих случаях совпадают начальные и конечные положения балки, то  $W_1 = W_2$ . Значит, имеет место равенство:

$$W_{ik} = W_{ki}, \quad (7.4)$$

или в развернутой форме записи:

$$F_i \Delta_{ik} = F_k \Delta_{ki}.$$

Получена формальная запись теоремы о взаимности работ (теоремы Бетти (1823–1892)): **работа сил состояния  $i$  на перемещениях состояния  $k$  равна работе сил состояния  $k$  на перемещениях состояния  $i$ .**

Заметим, что в приведенной формулировке термин “сила” следует понимать как “обобщенная сила”, которой может быть и группа сил, а термин “перемещение” – как “обобщенное перемещение”.

Аналогичная зависимость о взаимности имеется и для возможных работ внутренних сил на соответствующих деформациях. Тогда формулировка теоремы о взаимности работ может быть дана в такой форме: **возможная работа внешних (внутренних) сил состояния  $i$  на перемещениях (деформациях) состояния  $k$  равна работе внешних (внутренних) сил состояния  $k$  на перемещениях (деформациях) состояния  $i$ .**

**Пр и м е р.** Балка (рис. 7.12) постоянного сечения в состоянии 1 нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , а в состоянии 2 – сосредоточенным моментом  $M$ , приложенным в конце в сечении. Показать справедливость теоремы о взаимности работ.

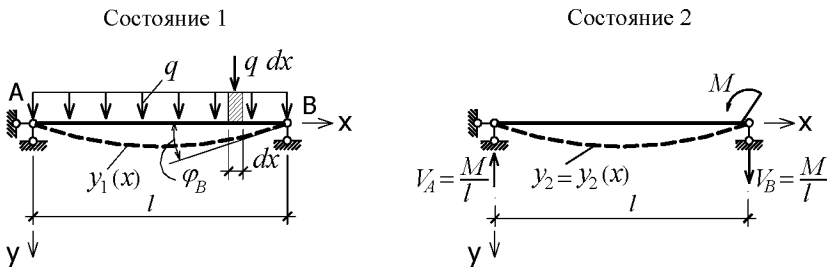


Рис. 7.12

Обобщенной силой в состоянии 1 является нагрузка  $q$ . Ее возможную работу определим как сумму элементарных работ сил  $q dx$  на перемещениях  $y$  состояния 2:

$$W_{12} = \int_0^l q dx y_2 = q \int_0^l y_2 dx = q \omega,$$

где  $\omega$  – площадь эпюры вертикальных перемещений балки.

Для определения  $\omega$  найдем уравнение изогнутой оси балки. Дифференциальное уравнение изогнутой оси запишется в виде:

$$EJ y_2''(x) = -\frac{M}{l} x.$$

Последовательное интегрирование дает:

$$EJ y_2'(x) = -\frac{M}{2l} x^2 + c_1,$$

$$EJ y_2(x) = -\frac{M}{6l} x^3 + c_1 x + c_2.$$

Используя граничные условия  $x=0 \quad y_2=0$  и  $x=l \quad y_2=0$ , найдем:

$$EJ y_2(x) = \frac{M}{6} \left( -\frac{x^3}{l} + l x \right).$$

Тогда:

$$\omega = \int_0^l y_2(x) dx = \frac{M}{6EJ} \int_0^l \left( -\frac{x^3}{l} + l x \right) dx = \frac{M l^3}{24 EJ}.$$

Возможная работа:

$$W_{12} = \frac{q M l^3}{24 EJ}.$$

Возможная работа сосредоточенного момента равна  $W_{21} = M \varphi_B$ .

Прогибы и углы поворота балки в состоянии 1 определяются из уравнений:

$$y_1(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{q l^3}{24} x - \frac{q l}{12} x^3 + \frac{q x^4}{24} \right],$$

$$y_1'(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{q l^3}{24} - \frac{q l}{4} x^2 + \frac{q x^3}{6} \right].$$

При  $x=l$   $y_1'(x) = \phi_B = -\frac{q l^3}{24 EJ}$ .

Направление действия момента  $M$  совпадает с направлением перемещения  $\phi_B$ , поэтому:

$$W_{21} = \frac{M q l^3}{24 EJ}.$$

Следовательно,  $W_{12} = W_{21}$ .

Если обобщенные силы в состояниях “ $i$ ” и “ $k$ ” будут равны единице (перемещения от единичных сил обозначаются буквой  $\delta$ , рис. 7.13), то из теоремы (7.4) следует, что:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (7.5)$$

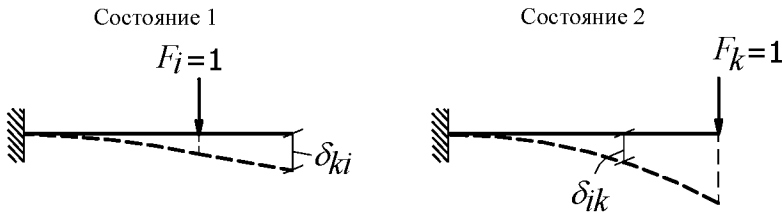


Рис. 7.13

Равенство (7.5) выражает одно из общих свойств линейно деформируемых систем и является формальной записью теоремы о взаимности перемещений (теоремы Максвелла (1831–1879)): **перемещение по  $i$ -му направлению от  $k$ -й единичной силы равно перемещению по  $k$ -му направлению от  $i$ -й единичной силы.**

Замечание о размерности перемещений  $\delta_{ik}$ . Обобщенное перемещение  $\Delta_{ik}$ , вызываемое обобщенной силой  $F_k$ , определя-

ется как  $\Delta_{ik} = \delta_{ik} F_k$ . Поэтому размерность перемещения  $\delta_{ik}$  получается в виде:

$$\text{размерность } \delta_{ik} = \frac{\text{размерность } \Delta_{ik}}{\text{размерность } F_k}.$$

Например, при нагружениях балок, показанных на рис. 7.14, имеем:

$$\delta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{F_1}, \quad \text{размерность } \delta_{21} = \text{рад/кН} = \text{кН}^{-1};$$

$$\delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{F_2}, \quad \text{размерность } \delta_{12} = \text{м/(кН}\cdot\text{м)} = \text{кН}^{-1}.$$

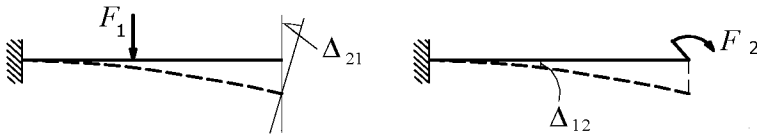


Рис. 7.14

Перемещения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$  имеют одинаковую размерность.

### 7.6. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы

Предположим, что стержневая система (рис. 7.15,а) под влиянием заданных воздействий деформировалась, и требуется определить перемещение какой-либо ее точки  $i$  по заранее установленному направлению, не обязательно совпадающему с истинным направлением перемещения этой точки. Рассматриваемое состояние системы будем обозначать как “состояние  $a$ ”, а внутренние силы в сечениях элементов – через  $N_a, M_a, Q_a$ . Бесконечно малый элемент этой системы в деформированном состоянии испытывает, в общем случае, деформации удлинения  $\Delta dx = \varepsilon dx$ , изгиба  $d\varphi = \kappa dx$

и сдвига  $\Delta_z = \gamma dx$ . Здесь через  $dx$  обозначена длина элемента, через  $\varepsilon$  – относительное удлинение (укорочение) его, через  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  – кривизна изогнутой оси, через  $\gamma$  – относительный сдвиг (угол сдвига) граней элемента.

Для определения искомого перемещения  $\Delta_{ia}$  наряду с состоянием  $a$ , которое является действительным состоянием системы, рассмотрим вспомогательное (фиктивное). Во вспомогательном состоянии к той же системе по направлению обобщенного перемещения  $\Delta_{ia}$  приложим единичную обобщенную силу  $F_i = 1$  (рис. 7.15,б).

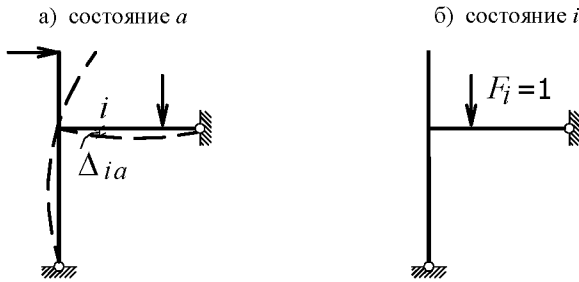


Рис. 7.15

Внутренние силы в этом состоянии (состоянии  $i$ ) системы обозначим через  $N_i, M_i, Q_i$ . Так как это состояние является состоянием равновесия, то к нему применим принцип возможных перемещений. За возможные перемещения примем перемещения, вызываемые заданным воздействием. Суммарная работа внешних и внутренних сил состояния  $i$  на перемещениях состояния  $a$  должна быть равна нулю (7.3), то есть:

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 1 \Delta_{ia} - \sum \int N_i \varepsilon dx - \sum \int M_i \kappa dx - \sum \int Q_i \gamma dx = 0$$

Интегрирование ведется по длине каждого стержня или участка стержня, на протяжении которого подынтегральное выражение представляется непрерывной функцией определенного вида.



Следовательно,

$$\Delta_{ia} = \sum \int N_i \varepsilon dx + \sum \int M_i \kappa dx + \sum \int Q_i \gamma dx. \quad (7.6)$$

Полученная формула позволяет найти требуемое перемещение через деформации элементов системы в состоянии  $a$ , причем сама система может быть как линейной, так и физически нелинейной. Несущественно также и то, чем вызваны деформации элементов: силовым воздействием, изменением температуры окружающей среды, ползучестью материала или другими причинами. Поэтому формулу (7.6) можно рассматривать как общую формулу для определения перемещений стержневых систем.

Состояние системы под действием заданной нагрузки принято называть грузовым (состоянием  $F$ ). Из курса сопротивления материалов известно, что деформации элементов линейно деформируемой системы в этом состоянии определяются через внутренние силы так:

$$\varepsilon dx = \frac{N_F dx}{EA}, \quad \kappa dx = \frac{M_F dx}{EJ}, \quad \gamma dx = \frac{\mu Q_F dx}{GA},$$

где  $EA$ ,  $EJ$ ,  $GA$  – жесткости элемента соответственно на растяжение (сжатие), изгиб и сдвиг.

Подставляя эти выражения в (7.6), получим формулу для определения перемещений плоской стержневой системы в следующем виде:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{N_i N_F dx}{EA} + \sum \int \frac{M_i M_F dx}{EJ} + \sum \int \frac{\mu Q_i Q_F dx}{GA}. \quad (7.7)$$

Ее называют формулой Максвелла-Мора для определения перемещений упругих систем от заданной нагрузки.

Относительный вклад каждого из трех слагаемых формулы (7.7) в конечный результат зависит от вида стержневой системы и характера нагружения. В частности оказывается, что перемещения в балках зависят, в основном, только от второго слагаемого (изгибающих моментов); доля слагаемого, учитывающего влияние поперечных сил, составляет ничтожно малую часть от окончательного значения  $\Delta_{iF}$ .

Поэтому, с достаточной для практических целей точностью, перемещения систем, работающих преимущественно на изгиб, можно вычислять по формуле:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_i M_F dx}{EJ}.$$

По той же причине в расчетах (особенно “вручную”) рамных и арочных систем пренебрегают влиянием на перемещения продольных и поперечных сил. В то же время, автоматизированный расчет этих систем с помощью компьютерных программ производится, как правило, с учетом влияния на перемещения изгибающих моментов и продольных сил.

В элементах шарнирно-стержневых систем, в том числе ферм, от узловой нагрузки возникают только продольные силы. Поэтому определение перемещений узлов производится по формуле:

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{N_i N_F dx}{EA}.$$

Так как при узловой нагрузке на ферму продольная сила по длине стержня не изменяется, то, при условии постоянной жесткости каждого стержня, формула переписывается в виде:

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ki} N_{kF} l_k}{EA_k}, \quad (7.8)$$

где  $l_k$  – длина  $k$ -го стержня;  
 $n$  – число стержней фермы.

В таком виде (7.8) впервые в 1864 г. Дж. Максвеллом была получена формула для определения перемещений ферм. Спустя 10 лет О. Мором (1835–1918) метод определения перемещений был развит на случай произвольных деформаций системы (см. формулу (7.7)).

Поясним особенности выбора вспомогательного состояния. Единичная обобщенная сила должна прикладываться к системе по направлению соответствующего обобщенного перемещения.

Произведение их, как известно, дает работу силы  $F = 1$  на искомом перемещении. Если, например, для рамы в состоянии  $F$  (рис. 7.16,а) необходимо определить угол поворота  $\varphi$  какого-либо сечения элемента, например, сечения  $D$ , то во вспомогательном состоянии в этом сечении необходимо приложить единичный сосредоточенный момент  $M = 1$  (рис. 17.16,б), и тогда возможная работа внешней силы состояния  $i$  на перемещении  $\Delta_{iF}$  состояния  $F$  будет равна  $M \varphi = 1 \Delta_{iF}$ . В дальнейшем номер единичной силы во вспомогательном состоянии будет определять и номер этого состояния.

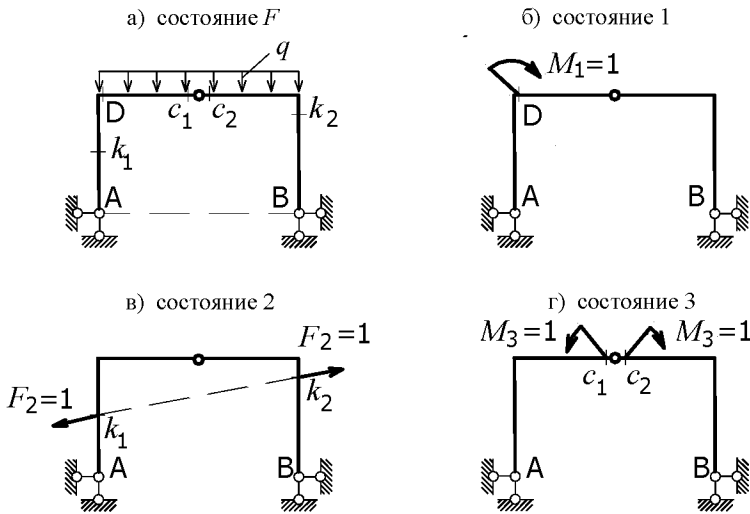


Рис. 7.16

Если требуется определить изменение расстояния между точками  $k_1$  и  $k_2$ , то во вспомогательном состоянии (состояние 2) по направлению прямой, соединяющей эти точки, следует приложить две направленные в противоположные стороны единичные силы (рис. 7.16,в); при необходимости найти угол взаимного поворота сечений  $c_1$  и  $c_2$  – во вспомогательном состоянии (состояние 3) в этих сечениях прикладываются разнонаправленные единичные моменты (рис. 7.16,г).

Задаваемые во вспомогательных состояниях направления единичных сил соответствуют положительным направлениям перемещений  $\Delta_{iF}$ .

Если в результате вычисления окажется  $\Delta_{iF} < 0$ , то это будет означать, что искомое перемещение направлено в сторону, противоположную направлению силы  $F_i = 1$ .

### 7.7. Способы вычисления интегралов Мора

Задача о вычислении перемещений по формуле Мора сводится к вычислению интегралов вида  $\int_a^b \frac{M_i M_F dx}{EJ}$ , которые принято называть интегралами Мора. Для относительно несложных задач подынтегральная функция  $f(x) = \frac{M_i M_F}{EJ}$  может быть такой, что неопределенный интеграл  $F(x)$  можно выразить при помощи конечного числа элементарных функций. Тогда определенный интеграл вычисляется по формуле  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Покажем, например, определение вертикального перемещения сечения 1 и угла поворота сечения 2 консольной балки (рис. 7.17), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с учетом влияния на прогиб только изгибающих моментов.

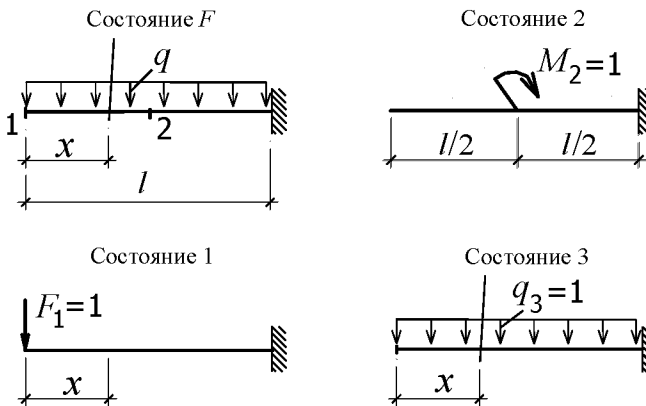


Рис. 7.17

Для определения прогиба используем вспомогательное состояние 1. В дальнейшем обозначения усилий от безразмерных сил будут сопровождаться верхней чертой. Тогда:

$$M_F = -0,5qx^2, \quad \bar{M}_1 = -1x.$$

Принимая жесткость балки  $EJ$  неизменной по ее длине, получим:

$$\Delta_1^{(верт)} = \Delta_{1F} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \int_0^l \frac{1}{EJ} (-x) \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Для определения угла поворота сечения посередине балки используем вспомогательное состояние 2. Тогда:

$$M_F = -\frac{q x^2}{2}; \quad \bar{M}_2 = 0, \text{ если } 0 \leq x < \frac{l}{2}; \quad \bar{M}_2 = 1,$$

если  $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F dx}{EJ} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EJ} 0 \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx + \\ &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{1}{EJ} 1 \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx = \frac{-q}{2EJ} \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{l}{2}}^l = \frac{-7ql^3}{48EJ}. \end{aligned}$$

Для этого же примера при вычислении площади эпюры прогибов с помощью вспомогательного состояния 3 (балка нагружена единичной равномерно распределенной нагрузкой) получим:

$$\begin{aligned} M_F &= -\frac{qx^2}{2}, \quad \bar{M}_3 = -\frac{x^2}{2}, \\ \omega = \Delta_{3F} &= \int_0^l \frac{1}{EJ} \left(-\frac{qx^2}{2}\right) \left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{q}{4EJ} \frac{x^5}{5} \Big|_0^l = \frac{ql^5}{20EJ}. \end{aligned}$$

Указанный способ вычисления интегралов Мора может привести к существенным затруднениям, так как для неопределенного интеграла  $F(x)$  может получиться или очень сложная формула, или вообще ее невозможно получить.

На практике интегралы типа  $\int_a^b \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} dx$  вычисляют графо-

аналитическим способом или с помощью численного интегрирования.

Для случая, когда на участке интегрирования стержень имеет постоянную жесткость, то есть  $EJ = f_3(x) = const$ , а одна из функций  $f_1(x)$  или  $f_2(x)$  является линейной, одним из наиболее распространенных является способ, предложенный А. Верещагиным. Поясним его сущность.

Построим на участке интегрирования графики функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , то есть эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_i(x)$  и  $M_F(x)$  (рис. 7.18).

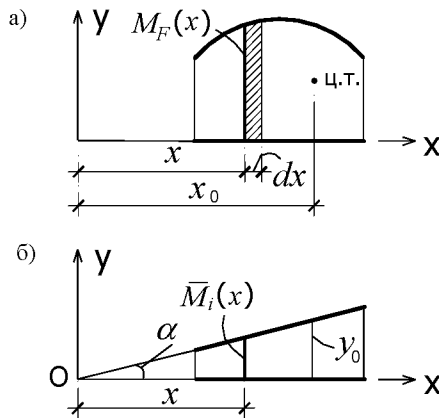


Рис. 7.18

Пусть, например, эпюра  $\overline{M}_i$  является прямолинейной (рис. 7.18,б). Точку пересечения оси  $x$ , на которой расположен стержень, с наклонной прямой примем за начало координат. Тогда  $\overline{M}_i(x) = x \operatorname{tg} \alpha$ , а интеграл Мора преобразуется к виду:

$$\int_a^b \frac{\overline{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_a^b x \operatorname{tg} \alpha \cdot M_F dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_a^b x M_F dx.$$

Интеграл  $\int_a^b x M_F dx$ , по определению, представляет собой статический момент площади эпюры  $M_F$  (рис. 7.18,а) относительно оси  $y$ . Он, как известно, равен произведению площади  $\omega$  этой эпюры на расстояние от ее центра тяжести до оси  $y$ , то есть:

$$\int_a^b x M_F dx = \omega x_0.$$

Учитывая соотношение  $x_0 = y_0 / \operatorname{tg} \alpha$ , получим:

$$\int_a^b \frac{\overline{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{\omega y_0}{EJ}. \quad (7.9)$$

Таким образом, интеграл Мора вычисляется посредством произведения площади криволинейной эпюры на ординату прямолинейной эпюры, взятую под центром тяжести криволинейной.

Операцию вычисления интегралов по способу Верещагина называют иногда “перемножением” эпюр. Положительный знак произведения  $\omega y_0$  принимается тогда, когда эпюра  $M$ , площадь которой обозначена через  $\omega$ , и ордината  $y$  имеют одинаковые знаки, то есть когда они расположены с одной стороны стержня. На практике часто руководствуются более простым правилом: если обе эпюры усилий на некотором участке стержня расположены по одну сторо-

ну от его оси, то результат “перемножения” их принимается положительным, если по разные – отрицательным.

При использовании правила Верещагина сложные по очертанию эпюры усилий следует представлять в виде суммы простых, для каждой из которых известны формулы для вычисления площади и положения ее центра тяжести. Примерами таких простых эпюр являются эпюры изгибающих моментов для консольных или однопролетных балок, нагруженных сосредоточенной силой или равномерно распределенной нагрузкой (рис. 7.19).

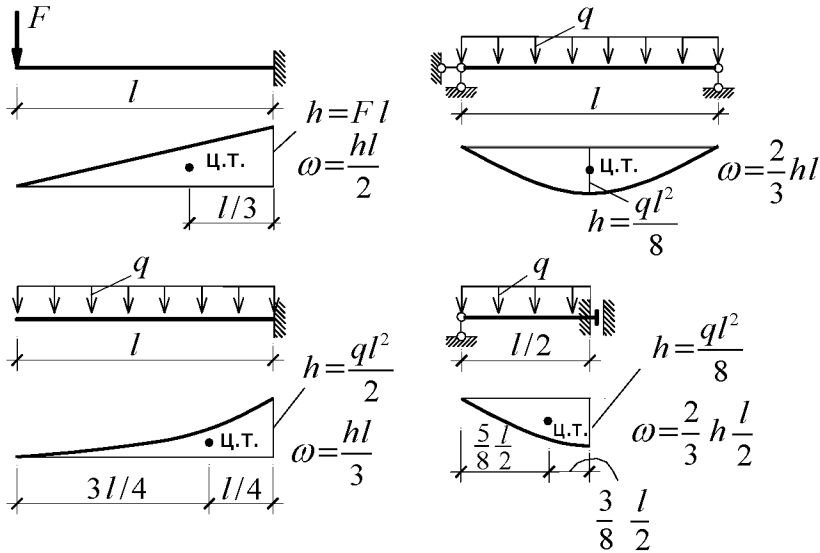


Рис. 7.19

Для получения простых эпюр следует иногда использовать принцип независимости действия сил.

Пример. Определить вертикальное перемещение точки  $D$  и угол поворота сечения  $C$  балки постоянной жесткости (рис. 7.20,а).

Эпюра изгибающих моментов для балки от заданной нагрузки показана на рис. 7.20,б.



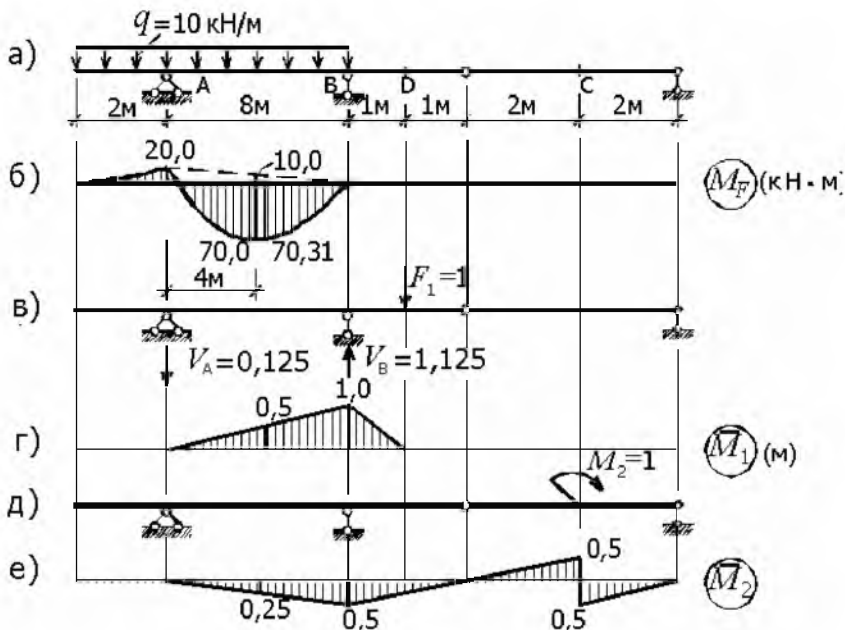


Рис. 7.20

Для определения вертикального перемещения точки  $D$  нагрузим балку силой  $F_1 = 1$  (рис. 7.20,в) и построим соответствующую ей эпюру изгибающих моментов (рис. 7.20,г).

Используя принцип независимости действия сил, представим эпюру  $M_F$  в виде двух простых (рис. 7.21) и определим перемещение по правилу Верещагина:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_0}{EJ} =$$

$$= \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 20 \cdot 8 \frac{1}{3} - \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} 80 \cdot 8 \cdot 0,5 = -\frac{186,67}{EJ} \text{ м.}$$

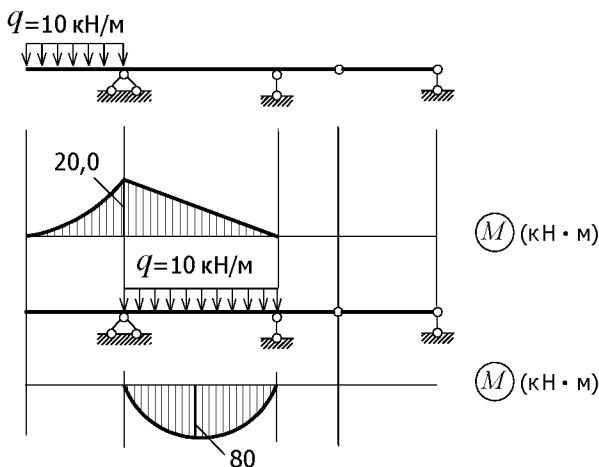


Рис. 7.21

Вспомогательное состояние к определению угла поворота сечения  $C$  показано на рис. 7.20,д, а соответствующая ему эпюра изгибающих моментов – на рис. 7.20,е.

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F dx}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 20 \cdot 8 \frac{1}{3} 0,5 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} 80 \cdot 8 \cdot 0,25 = \frac{93,33}{EJ} \text{ рад.}$$

Пример. Найти горизонтальное перемещение точки  $A$  рамы, показанной на рис. 7.22,а.

Вспомогательное состояние (состояние 1) показано на рис. 7.22,б. Соответствующие состояниям рамы эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 7.22,в,г.

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{3} 16 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 4 \frac{16+32}{2} +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 32 \cdot 4 \frac{2}{3} 4 = \frac{1568}{3EJ} \text{ м.}$$

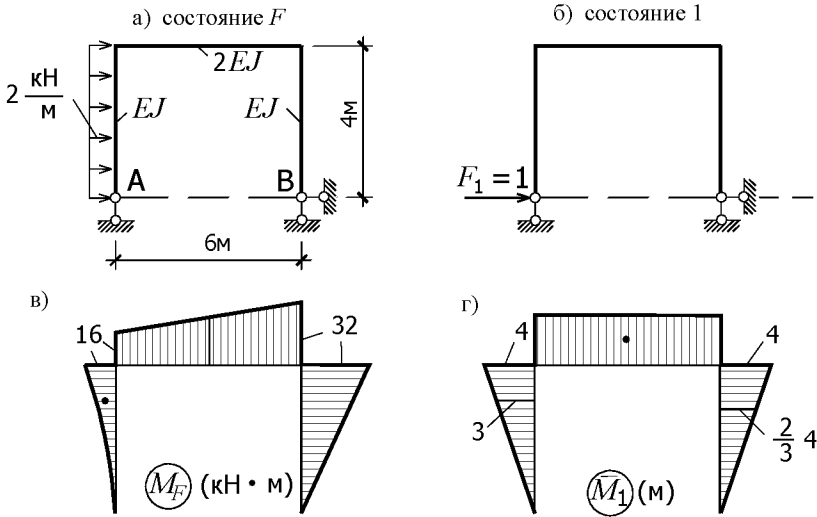


Рис. 7.22

В этом примере искомое перемещение вычислено в виде суммы интегралов по трем стержням. На каждом из них функции  $\bar{M}_1(x)$  и  $M_F(x)$  имеют вполне определенные аналитические выражения. Если по длине одного стержня эпюры моментов описываются различными функциональными зависимостями, то стержень необходимо разбить на соответствующие участки, вычислить интегралы отдельно для каждого участка и результаты вычислений суммировать.

Еще раз отметим, что способ Верещагина нельзя применять в случае, когда обе эпюры усилий являются нелинейными. Так, например, его нельзя применить к вычислению площади эпюры прогибов балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Такое же правило вычисления интегралов применимо и к двум другим слагаемым в формуле Мора для определения перемещений.

Величину определенного интеграла, как известно, можно вычислить с помощью формул численного интегрирования, основанных на замене интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k),$$

где  $x_k$  – точки отрезка  $[a, b]$ ;  
 $c_k$  – числовые коэффициенты.

Записанное равенство, в общем случае приближенное, называют квадратурной формулой, точки  $x_k$  – узлами квадратурной формулы, а числа  $c_k$  – коэффициентами квадратурной формулы. Погрешность квадратурной формулы

$$\psi = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$$

зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициентов. Наиболее часто в практических приложениях к задачам строительной механики используется равномерная сетка узлов; при этом исходный интеграл представляется в виде суммы интегралов по частичным отрезкам, на каждом из которых применяется квадратурная формула.

Простейшими квадратурными формулами для одного интервала являются формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

и формула трапеций (Т)

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Естественно, что даже в случае функций  $f(x)$  близких к линейным, использование этих формул приведет к погрешности в вычислениях перемещений.

При действии на систему, составленную из прямолинейных элементов, сосредоточенных сил или равномерно распределенной нагрузки эпюра изгибающих моментов на отдельных участках стержня ограничивается прямой линией или параболой. Если для этой системы необходимо определить линейное или угловое перемещение какой-нибудь точки, то во вспомогательном состоянии от действия силы  $F_1 = 1$  очертание эпюры “ $M$ ” будет определяться линейными зависимостями  $M(x)$ . В таком случае при  $f_3(x) = const$  функция  $f(x) = f_1(x) f_2(x)$  будет представлена кривой второй или третьей степени. Тогда на участках стержней с постоянной жесткостью интеграл Мора можно вычислить точно с помощью формулы Т. Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3), \quad (7.10)$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – значения функции в концевых точках отрезка  $[a, b]$  и посередине его (рис. 7.23).

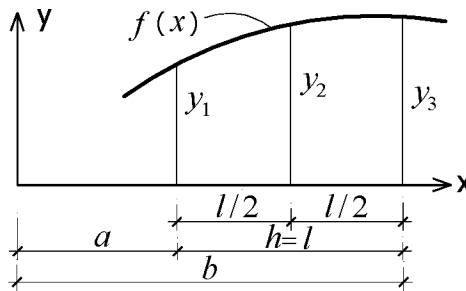


Рис. 7.23

Формула Симпсона является точной для любого многочлена не выше третьей степени.

Определим с помощью формулы Симпсона вертикальное перемещение сечения  $D$  и угол поворота сечения  $C$  для балки, показанной на рис. 7.20:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p dx}{EJ} = \frac{8}{6EJ} (0 - 4 \cdot 70 \cdot 0,5 + 0) = -\frac{186,67}{EJ} \text{ м,}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{8}{6EJ} (0 + 4 \cdot 70 \cdot 0,25 + 0) = \frac{93,33}{EJ} \text{ рад.}$$

Полученные значения перемещений совпадают с найденными по правилу Верещагина.

Пример. Определить горизонтальное перемещение конца консоли ломаного стержня (рис. 7.24,а).

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки показана на рис. 7.24,б, от единичной силы  $F_1 = 1$  – на рис. 7.24,в.

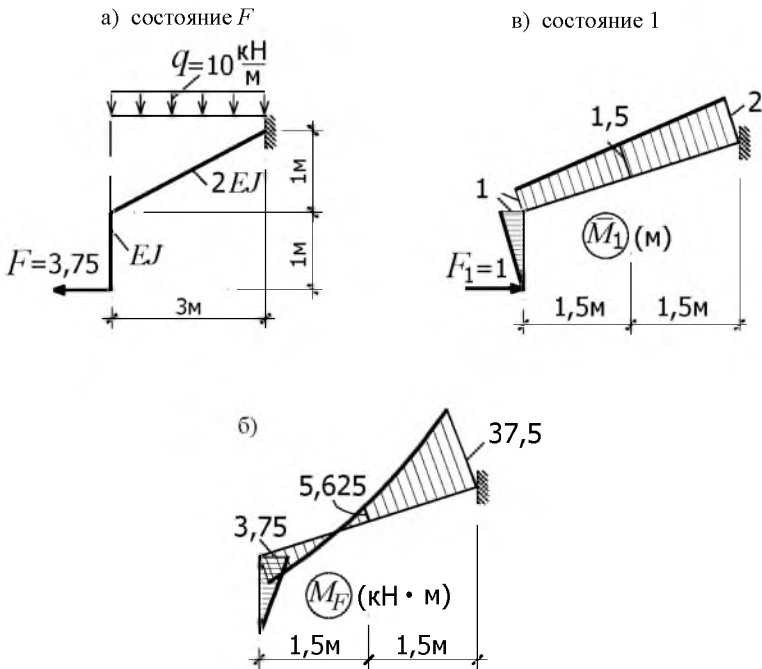


Рис. 7.24

“Перемножение” эпюр  $M_F$  и  $\bar{M}_1$  на вертикальном стержне выполним по правилу Верещагина, на наклонном (его длина равна  $\sqrt{10}$  м) – по Симпсону:

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3,75 \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6 \cdot 2EJ} (-1 \cdot 3,75 + 4 \cdot 5,625 \cdot 1,5 + 37,5 \cdot 2) =$$

$$= \frac{-1,25 + 8,75 \sqrt{10}}{EJ} = \frac{26,42}{EJ} \text{ м.}$$

Если функция  $f(x)$  на некотором участке стержня будет представляться более сложным выражением, чем многочлен третьей степени, что возможно для стержней криволинейного очертания, или при изменении жесткости вдоль оси стержня, или при действии на него неравномерно распределенной нагрузки, то результат вычисления по формуле Симпсона будет приближенным.

На частичном отрезке погрешность оценивается так:

$$|\psi| \leq \frac{h^5}{2880} M,$$

где

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|^*,$$

то есть на этом отрезке формула Симпсона имеет точность  $O(h^5)$ , на всем отрезке –  $O(h^4)$ , в то время как формула трапеций, так же как и формула прямоугольников, имеет второй порядок точности.

**Пример.** Определить с помощью формулы Симпсона площадь эпюры прогибов консольной балки постоянного поперечного сечения, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

---

\* Лат. supremus – высший.

Эпюры  $M_F$  и  $\bar{M}_1$  показаны на рис. 7.25.

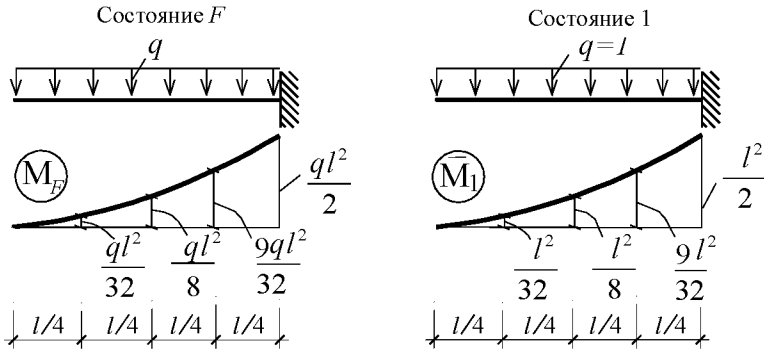


Рис. 7.25

Здесь:

$$f(x) = M_F(x) \bar{M}_1(x) = \frac{qx^4}{4}.$$

Для варианта с одним участком длиной  $l$  получим:

$$\Delta_{1F} = \frac{l}{6EJ} \left( 4 \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} + \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{2} \right) = \frac{ql^5}{19,2 EJ}.$$

Точное решение получено ранее непосредственным интегрированием. Площадь равна  $\Delta_{1F} = \frac{ql^5}{20 EJ}$ .

Если принять  $\frac{q}{EJ} = 1$ , то погрешность вычисления  $\psi = \frac{l^5}{19,2} - \frac{l^5}{20} = 2,083 \cdot 10^{-3} l^5$ , что соответствует указанной ранее оценке  $\frac{l^5}{2880} M = \frac{l^5}{2880} 6 = 2,083 \cdot 10^{-3} l^5$ , где принято:



$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \left( \frac{x^4}{4} \right)^{IV} \right| = 6.$$

Для варианта с двумя участками длиной  $\frac{l}{2}$  получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \left( 4 \frac{ql^2}{32} \frac{l^2}{32} + \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} \right) + \\ &+ \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \left( \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} + 4 \frac{9ql^2}{32} \frac{9l^2}{32} + \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{2} \right) \approx \frac{ql^5}{19,95 EJ}. \end{aligned}$$

Погрешность равна  $\psi = \frac{l^5}{19,95} - \frac{l^5}{20} = 1,253 \cdot 10^{-4} l^5$ . На всем отрезке интегрирования погрешность оценивается так:

$$|\psi| \leq \frac{h^4(b-a)}{2880} M.$$

В данном случае  $h = \frac{l}{2}$ ,  $b - a = l$  и, значит,  $\psi < \frac{l^5}{16 \cdot 2880} 6 = 1,302 \cdot 10^{-4} l^5$ .

Формула Симпсона построена на трех равноотстоящих узлах. В некоторых случаях применяются квадратурные формулы и с большим числом равноотстоящих узлов. В частности, такой формулой, построенной на четырех узлах, является следующая:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[ f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right].$$

Ее иногда удобно использовать для перемножения линейных эпюр усилий. Результат вычисления получается точным. Например, если перемножаемые эпюры имеют вид, показанный на рис. 7.26, то интеграл Мора на этом участке будет равен:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx = \frac{l}{8EJ} (-a c - b d).$$

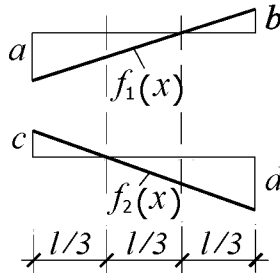


Рис. 7.26

В общем случае, формулы с большим числом равноотстоящих узлов применяются относительно редко.

### 7.8. Определение перемещений от тепловых воздействий

Пусть для системы в состоянии  $a$  (раздел 7.6) внешним воздействием является тепловое, то есть температура ее элементов изменилась по отношению к некоторому начальному состоянию. Примем для бесконечно малого элемента (рис. 7.27) этой системы температуру нижнего волокна равной  $t_1$ , верхнего –  $t_2$ , и распределение температуры по высоте сечения по линейному закону.

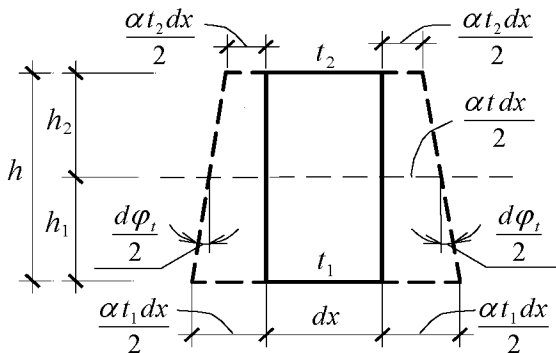


Рис. 7.27

Температура на оси, проходящей через центр тяжести сечения, будет равной  $t = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{h} h_2$ . При  $h_1 = h_2$  получим  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ .

Переход элемента под воздействием температуры в новое положение (показано штриховой линией) представим как результат удлинения всех волокон на  $d\varepsilon_t = \varepsilon dx = \alpha t dx$  и затем поворота каждой боковой грани относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, на угол  $\frac{d\varphi_t}{2}$ .

Удлинение нижнего волокна равно  $\alpha t_1 dx$ , а верхнего –  $\alpha t_2 dx$ , ( $\alpha$  – коэффициент линейного расширения). Тогда, вследствие малости деформаций, получим:

$$d\varphi_t = k dx = \frac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{h} dx = \frac{\alpha t' dx}{h},$$

где  $t' = t_1 - t_2$  – перепад температур.

Так как температурные деформации не вызывают сдвига сечений, то, подставляя  $d\varepsilon_t$  и  $d\varphi_t$  в общую формулу (7.6) для определения перемещений и заменяя в обозначении  $\Delta_{ia}$  индекс  $a$  на  $t$  (указывает от чего возникает перемещение), получим:

$$\Delta_{it} = \sum_i \int \bar{N}_i \alpha t dx + \sum_i \int \bar{M}_i \frac{\alpha t'}{h} dx. \quad (7.11)$$

Заметим, что каждый из интегралов в этом выражении определяет работу внутренних сил вспомогательного состояния системы на перемещениях, вызываемых изменением температуры. Поэтому на участке интегрирования значения интегралов принимаются положительными в том случае, когда совпадают соответствующие направления деформаций стержня, вызываемые усилиями  $i$ -го (вспомогательного) состояния и тепловым воздействием.

Если на отдельных участках стержней  $\alpha$ ,  $t$ ,  $t'$  и  $h$  остаются неизменными, то выражение (7.11) преобразуется к виду:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha t \Omega_N + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_M, \quad (7.12)$$

где  $\Omega_N = \int_l \bar{N}_i dx$ ,  $\Omega_M = \int_l \bar{M}_i dx$  – площади эпюр продольных

сил и изгибающих моментов на участках стержней с указанными особенностями.

**П р и м е р.** Определить горизонтальное перемещение точки  $B$  рамы (рис. 7.28,а) от указанного на схеме теплового воздействия. Неизменные по длине каждого из стержней поперечные сечения принять симметричными. Высота сечения вертикального стержня равна  $h_1$ , горизонтального  $h_2$ .

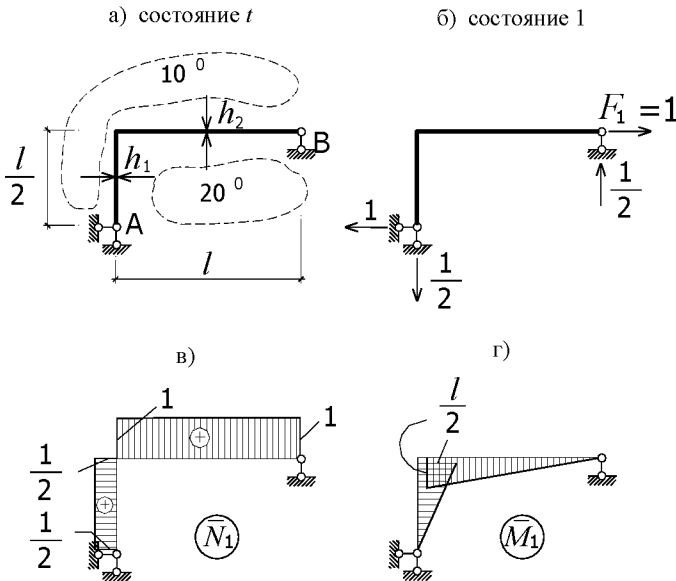


Рис. 7.28

Температура по оси каждого стержня равна  $t = \frac{20+10}{2} = 15^0$ ,

перепад температур  $t' = 20 - 10 = 10^0$ .

На рис. 7.28,б показано вспомогательное состояние рамы, а на рис. 7.28,в,г – эпюры усилий  $\bar{N}_1$  и  $\bar{M}_1$ .

Вычисляем искомое перемещение:

$$\Delta_{lt} = \sum \alpha t \Omega_N + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_M = \alpha 15^0 \frac{1}{2} \frac{l}{2} + \alpha 15 \cdot 1 \cdot l +$$

$$+ \frac{\alpha 10}{h_1} \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} + \frac{\alpha 10}{h_2} \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} = 18,75\alpha + \left( \frac{1,25l^2}{h_1} + \frac{2,5l^2}{h_2} \right) \alpha.$$

### 7.9. Определение перемещений, вызываемых перемещениями опор

Предположим, что опорные связи заданной статически определимой системы (рис. 7.29,а) под влияниями каких-то воздействий переместились в положения, показанные на рис. 7.29,а: защемление повернулось по часовой стрелке на угол  $c_1$ , а шарнирно-подвижная опора сместилась вверх на  $c_2$ . Обозначим это состояние системы как состояние  $c$ . Для определения перемещения какой-нибудь точки, например горизонтального перемещения узла  $D$ , во вспомогательном состоянии по направлению искомого перемещения приложим силу  $F_i = 1$  (рис. 7.29,б).

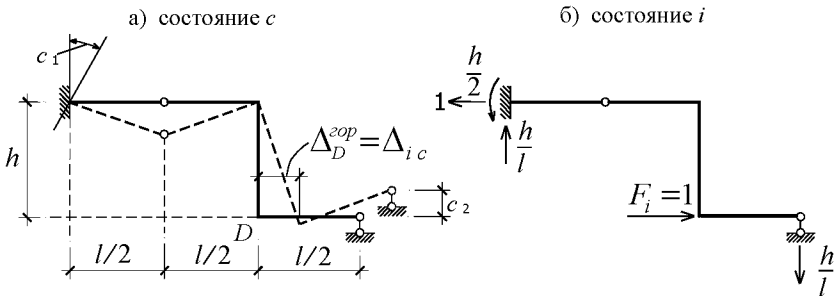


Рис. 7.29

Определим работу сил  $i$ -го состояния системы на перемещениях ее в состоянии  $c$ . В состоянии  $c$  внутренние силы отсутствуют: перемещения опор статически определимой системы не вызывают усилий в ее элементах. Поэтому на перемещениях состояния  $c$  совершают работу только внешние силы, к которым относятся и опорные реакции. В соответствии с принципом возможных перемещений получим:

$$1 \cdot \Delta_{ic} + \sum R_{ki} c_k = 0,$$

где  $R_{ki}$  – реакция в связи с номером  $k$  от  $F_i = 1$ ;

$c_k$  – заданное смещение связи  $k$ .

Отсюда следует, что

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ki} c_k. \quad (7.13)$$

Знак произведения  $R_{ki} c_k$  принимается положительным, если направления  $R_{ki}$  и  $c_k$  совпадают.

Для рассматриваемого примера получим:

$$\Delta_D^{op} = \Delta_{ic} = -\sum R_{ki} c_k = -\left(-\frac{h}{2} c_1 - \frac{h}{l} c_2\right) = h\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{l}\right).$$

В заключение отметим, что если заданная линейно деформируемая система испытывает одновременно несколько воздействий (внешняя нагрузка, изменение температуры, смещение опорных или других связей), то искомое перемещение определяется суммированием составляющих от каждого воздействия в отдельности.

Особенности определения перемещений в статически неопределимых системах будут изложены в дальнейшем.

## 7.10. Матричная форма определения перемещений

Рассмотрим вначале этот вопрос применительно к плоским фермам. В практических задачах расчета их на заданные воздействия важно уметь определять перемещения каждого узла по горизонтальному и вертикальному направлениям. Общее число неизвестных переме-



или в матричной форме записи:

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{21} & \dots & \bar{N}_{n1} \\ \bar{N}_{12} & \bar{N}_{22} & \dots & \bar{N}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{N}_{1m} & \bar{N}_{2m} & \dots & \bar{N}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \vdots \\ \Delta I_n \end{bmatrix} = L_N^T \vec{\Delta} I, \quad (7.14)$$

где  $\vec{\Delta}$  – вектор узловых перемещений;

$L_N^T$  – матрица, транспонированная по отношению к матрице влияния  $L_N$ ;

$\vec{\Delta} I$  – вектор абсолютных деформаций стержней.

Для статически определимой фермы  $m = 2U - C_0 = C$ , то есть  $m = n$  и в этом случае матрица  $L_N$  будет квадратной.

Итак, для того чтобы найти перемещения узлов фермы необходимо знать деформации стержней  $\Delta I$ , определяемые в соответствии с заданным на систему воздействием.

При изменении температуры:

$$\Delta I_k = \alpha t_k l_k,$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;

$t_k$  – изменение температуры  $k$ -го стержня.

Если находятся перемещения, вызванные неточностью изготовления стержней, то  $\Delta I_k$  определяются как разности между реальными и проектными значениями длин стержней.

При расчете физически нелинейной системы на действие нагрузки  $F$  можно, пользуясь нелинейной диаграммой растяжения (сжатия), по известному усилию  $N_{kF}$  определить соответствующее ему удлинение (укорочение)  $\Delta I_k$ .

Если материал стержней при заданной нагрузке  $F$  работает в линейно-упругой стадии, то:



$$\Delta l_k = \frac{N_{kF} l_k}{EA_k} = d_k N_{kF},$$

где  $EA_k$  – жесткость стержня на растяжение (сжатие);

$$d_k = \frac{l_k}{EA_k} \text{ – коэффициент податливости } k\text{-го стержня.}$$

Тогда для вектора деформаций, вызываемых заданной нагрузкой  $F$ , существует зависимость:

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \vdots \\ \Delta l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1F} \\ N_{2F} \\ \vdots \\ N_{nF} \end{bmatrix} = D \vec{N}_F, \quad (7.15)$$

где  $D$  – матрица внутренней податливости стержней фермы;

$\vec{N}_F$  – вектор усилий в стержнях фермы от нагрузки  $F$ .

Подставляя выражение (7.15) в формулу (7.14), получим матричную запись формулы для определения узловых перемещений фермы от нагрузки  $F$ :

$$\vec{\Delta} = L_N^T D \vec{N}_F. \quad (7.16)$$

Для определения перемещений изгибаемых систем от нагрузки  $F$  воспользуемся формулой Симпсона. На  $k$ -м участке стержня с переменной изгибной жесткостью интеграл Мора запишется в виде:

$$\int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{l_k}{6} \left( \frac{\bar{M}_i^H M_F^H}{EJ^H} + 4 \frac{\bar{M}_i^C M_F^C}{EJ^C} + \frac{\bar{M}_i^K M_F^K}{EJ^K} \right),$$

где верхние индексы  $H$ ,  $C$  и  $K$  указывают на значения  $\bar{M}_i$ ,  $M_F$ , ... и  $EJ$  в начале, середине и конце участка интегрирования.

Представим это выражение в матричной форме записи:

$$\int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^H & \bar{M}_i^C & \bar{M}_i^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_k}{6EJ^H} & & \\ & \frac{4l_k}{6EJ^C} & \\ & & \frac{l_k}{6EJ^K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_F^H \\ M_F^C \\ M_F^K \end{bmatrix} = \\ = L_{ki}^T D_k \vec{M}_{kF},$$

где  $D_k$  – диагональная матрица податливости  $k$ -го участка.

Для варианта линейных эпюр  $\bar{M}_i, M_F, \dots$  получим:

$$\bar{M}_i^C = \frac{\bar{M}_i^H + \bar{M}_i^K}{2}, \quad M_F^C = \frac{M_F^H + M_F^K}{2},$$

и тогда при  $EJ = \text{const}$  вычисления на участке сведутся к следующему:

$$\int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^H & \bar{M}_i^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2l_k}{6EJ} & \frac{l_k}{6EJ} \\ \frac{l_k}{6EJ} & \frac{2l_k}{6EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_F^H \\ M_F^K \end{bmatrix}.$$

Суммируя результаты вычислений по всем участкам, получим:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \sum_k L_{ki}^T D_k \vec{M}_{kF}. \quad (7.17)$$

Используя последовательную стыковку векторов изгибающих моментов на всех  $n$  участках системы и введя в расчет матрицу податливости  $D$  всей системы, вычисление перемещений можно представить и так:

$$\Delta_{iF} = \begin{bmatrix} L_{1i}^T & L_{2i}^T & \dots & L_{mi}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{1F} \\ \vec{M}_{2F} \\ \vdots \\ \vec{M}_{nF} \end{bmatrix} = L_i^T D \vec{M}_F. \quad (7.18)$$

Если необходимо определить перемещения нескольких точек системы, то следует вектор-строку  $L_i^T$  заменить на матрицу  $L^T$ , в каждой строке которой будут записаны значения изгибающих моментов, вызываемых  $i$ -м вспомогательным состоянием.

Если ставится задача определения перемещений, вызываемых различными загружениями, то необходимо вектор  $\vec{M}_F$  заменить на матрицу, в каждом столбце которой записываются значения усилий, соответствующие определенному загружению.

С учетом этих замечаний выражение для определения перемещений изгибаемой системы в общем случае может быть записано в виде:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1t} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \dots & \Delta_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{12}^T & \dots & L_{1n}^T \\ L_{21}^T & L_{22}^T & \dots & L_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{m1}^T & L_{m2}^T & \dots & L_{mn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_{1F}^{(1)} & \vec{M}_{1F}^{(2)} & \dots & \vec{M}_{1F}^{(t)} \\ \vec{M}_{2F}^{(1)} & \vec{M}_{2F}^{(2)} & \dots & \vec{M}_{2F}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{M}_{nF}^{(1)} & \vec{M}_{nF}^{(2)} & \dots & \vec{M}_{nF}^{(t)} \end{bmatrix} = L^T D M. \quad (7.19)$$

В этом выражении индекс  $m$  соответствует числу определяемых перемещений для одного загружения, индекс  $t$  – числу независимых загружений.

Если  $M = L$ , то матрица  $\Delta$  будет представлять собой матрицу внешней податливости  $A$  изгибаемой стержневой системы:

$$A = L_M^T D L_M. \quad (7.20)$$

Это же замечание относится и к формуле (7.16). Заменяв вектор  $\vec{N}_F$  на матрицу  $N = L_N$ , получим в результате вычислений матрицу податливости фермы:

$$A = L_N^T D L_N. \quad (7.21)$$

### 7.11. Линии влияния перемещений

Теорема о взаимности перемещений используется при решении различных задач механики. В частности, с ее помощью относительно легко получают линии влияния перемещений. Пусть, например, необходимо построить линию влияния угла поворота  $\varphi_k$  (рис. 7.31,а). Каждому новому положению единичной силы (рис. 7.31,б) соответствует определенное значение угла поворота ( $\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots$ ). В то же время, на основании теоремы о взаимности эти перемещения можно определить каждый раз от нагружения балки неподвижной обобщенной силой  $M_k = 1$  (рис. 7.31,в). Следовательно, очертание линий влияния  $\varphi_k$  совпадает с эпюрой вертикальных перемещений оси балки, вызванных силой  $M_k = 1$ . Соответствующее этому нагружению уравнение изогнутой оси балки записано в разделе 7.5.

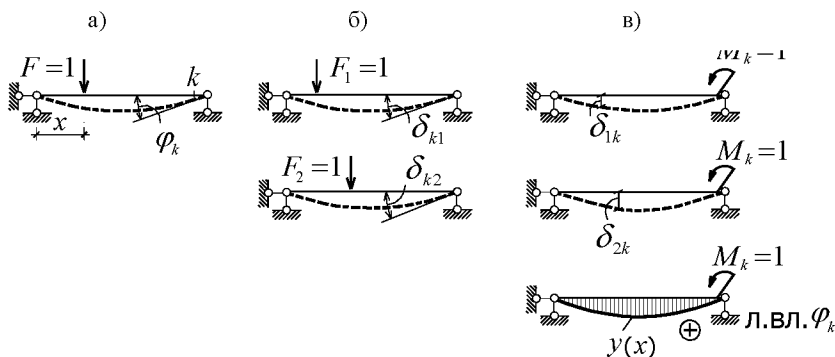


Рис. 7.31

Анализ результатов последнего примера (рис. 7.31) показывает, что практическая задача построения линий влияния перемещений линейно деформируемой системы может быть связана или с расчетом ее на множество единичных нагрузений в характерных сечениях и последующим определением для каждого из них искомого перемещения или с расчетом заданной системы на одно нагружение и определением соответствующих перемещений в тех сечениях, в которых по известным перемещениям можно представить правильный вид линии влияния. Второй вариант решения является, как правило, более предпочтительным. Проиллюстрируем сказанное еще раз на примере многопролетной статически определимой балки (рис. 7.32), для которой построим линию влияния  $\delta_3$ . Из расчета балки на нагружение силой  $F_1 = 1$  можно найти только одну ординату линии влияния  $\delta_3 - \delta_{31}$  (рис. 7.32,б), из расчета на действие  $F_2 = 1 - \delta_{32}$  и т. д. Более простой является техника построения линии влияния  $\delta_3$  как эпюры вертикальных перемещений оси балки от действия  $F_3 = 1$  (рис. 7.32,в). На рис. 7.32,г показан вид л.вл.  $\delta_3$  с учетом общепринятых правил построения: положительные ординаты л.вл.  $\delta_3$  располагаются выше оси балки, отрицательные – ниже.

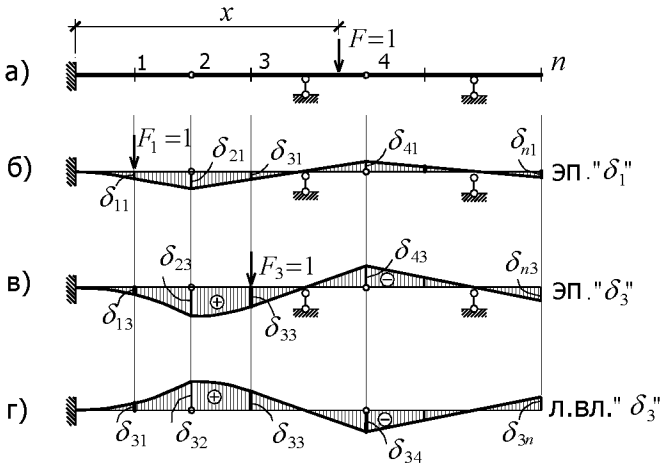


Рис. 7.32

## 7.12. Матрица влияния перемещений

Вертикальное перемещение сечения  $i$ , для которого построена линия влияния перемещения, от действия на балку заданной нагрузки можно вычислить по формуле:

$$\Delta_{iF} = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \dots + \delta_{in} F_n,$$

где  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – сосредоточенные вертикальные силы, приложенные в характерных сечениях.

При значении индекса  $i = 3$  получим выражение для определения  $\Delta_{3F}$  с помощью линии влияния  $\delta_3$  (рис. 7.32,г).

Применяя выражение для  $\Delta_{iF}$  к каждому характерному сечению и используя матричную форму записи преобразований, получим значение вектора перемещений  $\vec{\Delta}_F$ :

$$\vec{\Delta}_F = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \vdots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = A \vec{F},$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \text{ – матрица влияния перемещений.}$$

Компонентами  $i$ -го столбца являются значения ординат эпюр перемещений, построенных от  $F_i = 1$ , что соответствует общему определению матриц влияния. В силу выполнения условия  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  матрица  $A$  является симметрической матрицей и, значит, по элементам  $i$ -го столбца или  $i$ -й строки можно построить линии влияния  $\delta_i$ .

В случае систем произвольного очертания, не обязательно балочных, перемещения  $\delta_{ik}$  могут иметь различную ориентацию в пространстве. Они определяют податливость системы в некоторой точке  $i$  по заданному ( $i$ -му) направлению от единичной силы, приложенной в точке  $k$ . Поэтому матрицу  $A$  называют матрицей податливости системы. Для ее вычисления можно использовать формулы (7.20) и (7.21).

**Пример.** Вычислить матрицу внешней податливости  $A$  рамы по заданным направлениям (рис. 7.33).

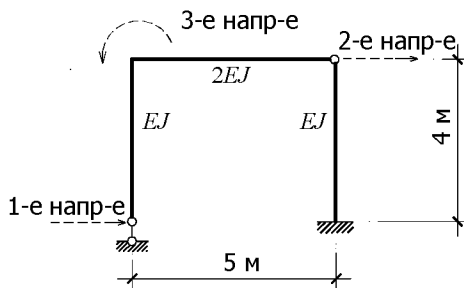


Рис. 7.33

Эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил по заданным направлениям показаны на рис. 7.34.

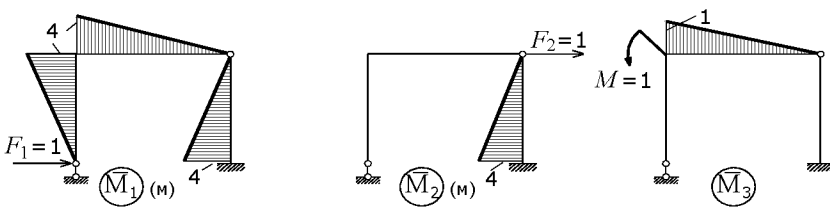


Рис. 7.34

При составлении матрицы влияния  $L_M$  будем считать ординаты эпюр  $M$ , расположенные внутри контура рамы, положительными.





**МЕТОД СИЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ  
К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ**

**8.1. Статически неопределимые системы и их свойства**

Статически неопределимыми системами называют такие системы, у которых не все внутренние силы могут быть найдены из уравнений равновесия твердого тела или системы твердых тел.

В статически неопределимых системах число неизвестных усилий превышает число возможных (независимых) уравнений равновесия. Например, для определения четырех опорных реакций балки (рис. 8.1,а), возникающих от действия на нее любой нагрузки, можно составить только три независимых уравнения равновесия.

Следовательно, во всех сечениях балки на участке  $AC$  усилия определить невозможно. Если в этой балке удалить опорный стержень в точке  $B$  или ввести в некотором сечении шарнир на участке  $BC$ , то получим расчетные схемы статически определимых балок, показанные на рис. 8.1,а,б. Связи, которые можно удалить в балке (а в общем случае, в любой системе), не нарушая ее свойства геометрической неизменяемости и неподвижности, называют лишними. Количество лишних связей, устранение которых обращает систему в статически определимую, называют степенью статической неопределимости системы. Балка, изображенная на рис. 8.1,а, является один раз статически неопределимой.

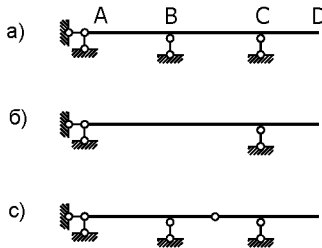


Рис. 8.1

То же можно сказать и о расчетной схеме фермы (рис. 8.2). От нагрузки, приложенной к ее узлам, можно с помощью уравнений равновесия найти опорные реакции и усилия в стержнях 3–5 и 4–5, но усилия в остальных стержнях останутся неизвестными. Среди этих стержней имеется один лишний, поэтому ферма является один раз статически неопределимой.

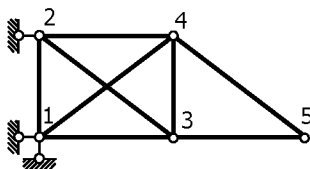


Рис. 8.2

Еще раз отметим, что термин “лишняя связь” нужно понимать с точки зрения геометрической неизменяемости и неподвижности системы. По условиям же работы конструкции эти связи необходимы, при их отсутствии прочность и жесткость конструкции могут оказаться недостаточными.

В качестве лишней может быть принята любая связь, устранение которой не повлияет на неизменяемость и неподвижность системы. Так, для схемы на рис. 8.1 за лишнюю связь можно принять любой вертикальный опорный стержень или, в любом сечении на участке  $AC$ , связь, через которую передается изгибающий момент с одного участка балки на другой.

Степень статической неопределимости сооружения является важной характеристикой сооружения.

Статически неопределимые системы обладают следующими свойствами.

1. Тепловое воздействие на систему, смещение опор или неточность изготовления ее элементов с последующим натяжением их во время сборки вызывают, в общем случае, в статически неопределимой системе дополнительные усилия. В статически определимой системе эти факторы вызывают только перемещения сечений, усилий же при этом не возникает.

Приведем некоторые примеры.

Пусть температура нижних волокон балки (рис. 8.3,а) будет равна  $t_1$ , а верхних –  $t_2$ , причем  $t_1 > t_2$ . Если бы в точке  $B$  опорная связь отсутствовала, то консольный стержень при указанном воздействии занял бы положение  $AB'$  (показано штриховой линией). Чтобы вернуть его из этого положения в начальное (недеформированное) необходимо в точке  $B'$  приложить силу  $X_1$ , равную реакции, возникающей в опоре  $B$  от изменения температуры.

Смещение опорной точки  $C$  в положение  $C'$  сопровождается изгибом балки  $AC$  (рис. 8.3,б), что свидетельствует о появлении в сечениях балки изгибающих моментов и поперечных сил.

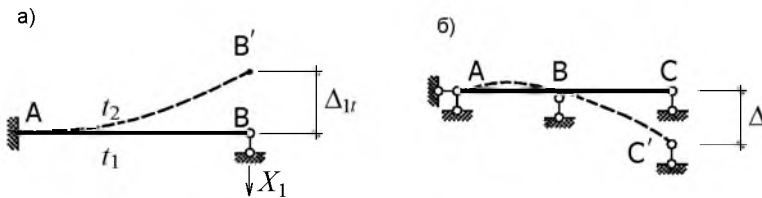


Рис. 8.3

Если предположить, что в ферме, расчетная схема которой показана на рис. 8.2, длина заготовки стержня 1–4 оказалась меньше требуемого по проекту размера, то для того чтобы концы его присоединить к узлам, стержень придется натянуть. Значит, вся группа стержней этой панели фермы будет еще до приложения заданной нагрузки испытывать дополнительные усилия, в частности, стержни 1–4 и 2–3 будут растянутыми, а четыре других стержня – сжатыми (возникает начальное напряженное состояние).

2. Усилия в статически неопределимых системах, возникающие от внешней нагрузки, зависят от соотношения жесткостей элементов этой системы.

Сравните, например, распределение изгибающих моментов в раме (рис. 8.4,а,б) с различными соотношениями изгибных жесткостей стержней.

Усилия в этих системах, возникающие от теплового воздействия и осадки опор, зависят от значений жесткостей стержней.

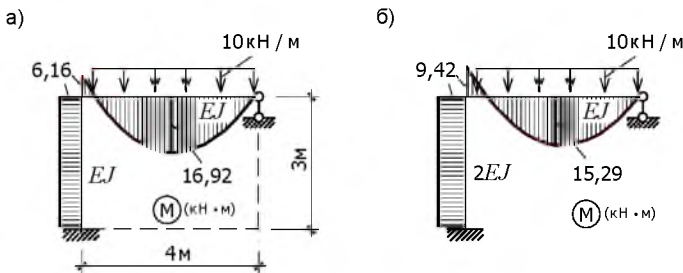


Рис. 8.4

3. Система с  $n$  лишними связями сохраняет геометрическую неизменяемость и после потери этих связей, в то время как статически определяемая система после устранения хотя бы одной связи превращается в изменяемую.

4. Перемещения статически неопределимых систем, как правило, меньше соответствующих перемещений тех статически определяемых систем, из которых они образуются. Например, как следует из анализа работы под нагрузкой балок, показанных на рис. 8.5,  $\Delta_2 > \Delta_1$ .

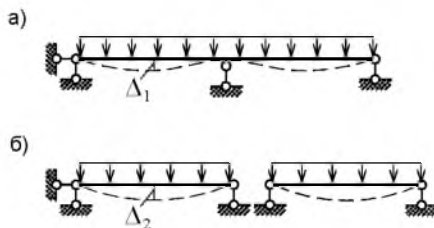


Рис. 8.5

Другие особенности распределения усилий и перемещений в статически неопределимых системах будут поясняться в последующих параграфах главы.

## 8.2. Определение степени статической неопределимости

По определению, степень статической неопределимости равна количеству лишних связей. Из формулы (1.1), устанавливающей

количественные соотношения между числом степеней свободы дисков и числом связей, наложенных на них, следует, что число лишних связей ( $L$ ) будет равно  $L = -W$ , то есть вычисляется по формуле:

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д, \quad (8.1)$$

а если диски соединяются между собой только связями первого (одиночная связь) и второго (шарнир) видов, то по формуле:

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д. \quad (8.2)$$

Как и при определении  $W$ , обе формулы можно использовать в том случае, когда ни один из дисков системы не представляется в виде замкнутого контура.

Если контур рамы замкнутый, то при использовании формулы (8.1) его нужно разбить на несколько незамкнутых.

Замкнутый бесшарнирный контур является трижды статически неопределимым. Действительно, чтобы раму в виде замкнутого контура (рис. 8.6,а) превратить в статически определимую, например, показанную на рис. 8.6,б, необходимо удалить три связи в сечении  $k$  (через эти связи осуществляется передача внутренних сил с одного конца стержня на другой).

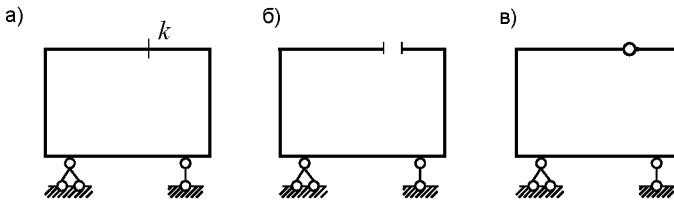


Рис. 8.6

Если в сечении  $k$  удалить связь, через которую передается изгибающий момент с одной части стержня на другую, т.е. поставить шарнир, то получим дважды статически неопределимую раму (рис. 8.6,в).

Таким образом, степень статической неопределимости рамы может быть определена по формуле:

$$L = 3K - Ш, \quad (8.3)$$

где  $K$  – число замкнутых контуров в раме;  
 $Ш$  – число простых шарниров.

Заметим, что и рама, показанная на рис. 8.7, также представляет собой замкнутый бесшарнирный контур. Основание, к которому рама прикрепляется в точках  $A$  и  $B$ , в этом случае рассматривается как диск, соединяющий эти точки.

Приведем некоторые примеры. Определим степень статической неопределимости для рамы, изображенной на рис. 8.8.

По формуле (8.2) получим:

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = 9 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4.$$

По формуле (8.3):

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Замкнутые контуры показаны на рис. 8.8 волнистой линией.

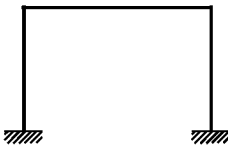


Рис. 8.7

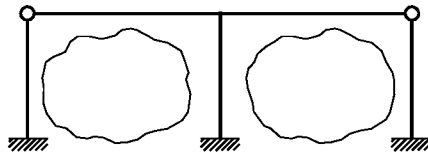


Рис. 8.8

При использовании формулы (8.1) для рамы, изображенной на рис. 8.9, учтем, что жестко соединяются между собой диски 1 и 2, а также 2 и 3.

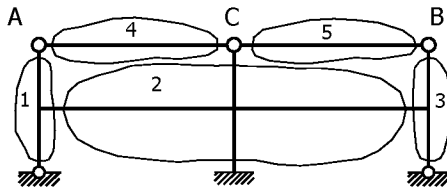


Рис. 8.9

Очертания дисков выделены волнистыми линиями. Шарнир в точке  $C$  является двукратным.

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д = 7 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 6.$$

По формуле (8.3) получим:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 6 = 6.$$

Разбиение рамы (рис. 8.10) на отдельные диски примем таким, как показано на рисунке.

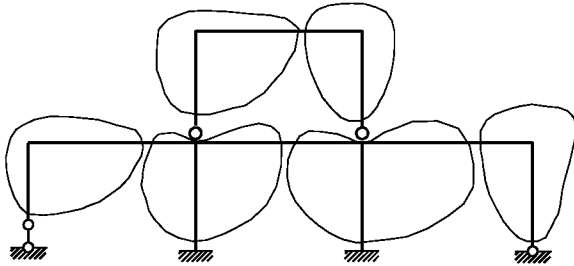


Рис. 8.10

Тогда получим:  $Д = 6$ ,  $Ш = 2$ , число жестких соединений  $Ж = 4$ . По формуле (8.1):

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д = 9 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 7.$$

По формуле (8.3):

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 5 = 7.$$

В предыдущем выражении принято  $Ш = 2$ , так как на схеме имеются два простых шарнира (каждый из них соединяет только два диска).

В последнем выражении  $Ш = 5$ , так как дополнительно к двум шарнирам в верхнем контуре учитываются два шарнира в нижнем левом контуре и один шарнир в нижнем правом контуре.

Степень статической неопределимости определяет то число дополнительных уравнений, которые нужно составить для определения неизвестных усилий. Этими неизвестными являются усилия в лишних связях.

### 8.3. Основная система и основные неизвестные

Последовательность операций по раскрытию статической неопределимости заданной системы сводится к следующему.

В заданной статически неопределимой системе удаляются лишние связи, а вместо них прикладываются неизвестные силы. Полученную таким образом систему называют основной системой метода сил, а неизвестные силы – основными неизвестными этого метода. Их обозначают буквами  $X_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n \leq L$ ).

С целью уменьшения числа неизвестных опытные специалисты применяют иногда и статически неопределимые основные системы. Число неизвестных ( $n$ ) в этом случае будет меньше числа лишних связей ( $L$ ). Такой способ расчета требует дополнительных вычислений для включенных в основную систему статически неопределимых фрагментов.

В дальнейшем, сопоставляя перемещения заданной и основной систем, получают уравнения для определения основных неизвестных.

Поясним некоторые особенности выбора основной системы. Прежде всего, отметим, что основная система должна быть геометрически неизменяемой и неподвижной. Для любой статически неопределимой рамы можно выбрать несколько основных систем. Рассмотрим следующий пример. Степень статической неопределимости рамы, изображенной на рис. 8.11,а, равна трем. Возможные варианты основных систем показаны на рис. 8.11,б–в. На рис. 8.11,б показано, что за основные неизвестные метода сил приняты усилия в опорных связях заданной рамы, а по рис. 8.11,в основными неизвестными являются  $X_1$ ,  $X_3$  – реакции в опорных связях и  $X_2$  – силы взаимодействия между примыкающими к шарниру стержнями. Системы, показанные на рис. 8.11,г,д, не могут быть выбраны в качестве основных, так как являются мгновенно изменяемыми.



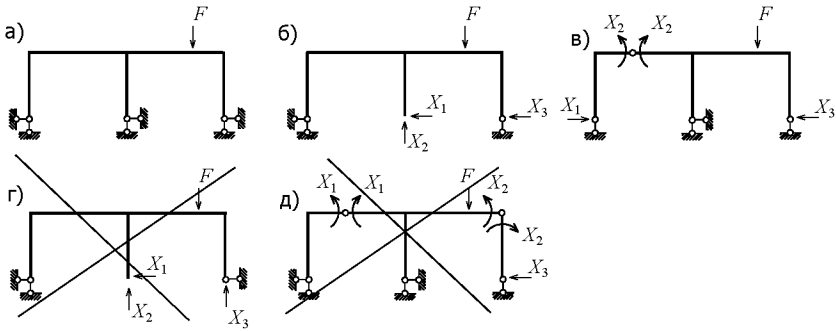


Рис. 8.11

Все последующие вычисления в методе сил связаны с основной системой. Поэтому от удачного выбора варианта основной системы будет существенно зависеть трудоемкость расчета. Способы выбора рациональных основных систем изложены в разделе 8.8.

#### 8.4. Канонические уравнения метода сил

Деформации заданной и основной систем будут одинаковыми только в том случае, если перемещения точек приложения основных неизвестных по их направлениям в основной системе будут такими же, как и в заданной системе, то есть равными нулю. Действительно, например, перемещение по направлению силы  $X_1$  или  $X_3$  (рис. 8.11,в) равно нулю, также равно нулю в заданной системе и угол взаимного поворота сечений по направлению неизвестной  $X_2$  (рис. 8.11,в).

Перемещения в основной системе по направлениям основных неизвестных зависят от действующей на систему внешней нагрузки и основных неизвестных, поэтому можно записать, что:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ &\vdots \\ \Delta_n(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

здесь  $\Delta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – полное перемещение по направлению неизвестной  $X_i$ , то есть перемещение, вызванное неизвестными  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и внешней нагрузкой  $F$ .

Число  $n$  таких уравнений, естественно, соответствует числу основных неизвестных. Если воспользоваться принципом независимости действия сил, то  $i$ -е уравнение из системы (8.4) можно записать в форме, позволяющей видеть вклад каждого силового фактора в конечный результат:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF}, \quad (8.5)$$

где  $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots, \Delta_{in}$  – перемещения точки приложения  $i$ -й основной неизвестной по ее направлению, вызванные силами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ;

$\Delta_{iF}$  – перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой.

Перемещение по направлению  $i$ -й неизвестной, вызываемое силой  $X_k$ , может быть представлено как:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad (8.6)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по тому же направлению, вызываемое силой  $X_k = 1$ .

Учитывая выражения (8.5) и (8.6), систему уравнений (8.4) запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Эти уравнения называют каноническими уравнениями метода сил для расчета системы на действие внешней нагрузки. Суть  $i$ -го

уравнения сводится к тому, что перемещение точки приложения неизвестной  $X_i$  по ее направлению, вызываемое всеми неизвестными и внешней нагрузкой, равно нулю.

В матрично-векторной форме записи система (8.7) имеет вид:

$$A \vec{X} + \vec{B} = 0, \quad (8.8)$$

где:

– матрица коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях (матрица податливости основной системы):

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad (8.9)$$

– вектор неизвестных:

$$\vec{X}^T = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \cdots \ X_n]; \quad (8.10)$$

– вектор свободных членов канонических уравнений (вектор грузовых перемещений):

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1F} \ \Delta_{2F} \ \cdots \ \Delta_{nF}]. \quad (8.11)$$

Коэффициенты типа  $\delta_{ii}$ , то есть расположенные на главной диагонали, называют главными (главные перемещения), а коэффициенты  $\delta_{ik}$ , если  $i \neq k$  – побочными (побочные перемещения). Согласно теореме о взаимности перемещений  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ , то есть матрица  $A$  является симметричной.

При расчете статически неопределимой системы на тепловое воздействие вектор  $\vec{B}$  в уравнении (8.8) имеет вид:

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1t} \Delta_{2t} \cdots \Delta_{nt}], \quad (8.12)$$

где  $\Delta_{it}$  – перемещение точки приложения  $i$ -й неизвестной по ее направлению, вызванное изменением температуры стержней.

При расчете системы на смещение связей:

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1c} \Delta_{2c} \cdots \Delta_{nc}], \quad (8.13)$$

где  $\Delta_{ic}$  – перемещение  $i$ -й неизвестной, вызванное смещением связей.

### 8.5. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены уравнений вычисляются по правилам определения перемещений, изложенным в главе 7. Для рамных систем, испытывающих преимущественно изгибные деформации, при неавтоматизированных вычислениях (“ручной” счет) ограничиваются учетом влияния на перемещения только изгибающих моментов. Поэтому  $\delta_{ik}$  и  $\Delta_{iF}$  вычисляются по формулам:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ},$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ},$$

где  $\bar{M}_i, \bar{M}_k$  – изгибающие моменты, вызываемые безразмерными силами соответственно  $X_i = 1$  и  $X_k = 1$ ;

$M_F$  – изгибающий момент, вызываемый внешней нагрузкой.

Так, например, если для рамы (рис. 8.12,а) принять основную систему по варианту рис. 8.12,б, то при определении перемещения  $\delta_{21}$  необходимо состояние рамы под действием  $X_1 = 1$  (рис. 8.12,в) рассматривать как грузовое, а второе, соответствующее действию

$X_2 = 1$  (рис. 8.12,г), – как вспомогательное. Тогда, после построения эпюр изгибающих моментов (рис. 8.12,е,ж), можно воспользоваться известными способами вычисления интеграла Мора вида:

$$\delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_1 dx}{EJ}.$$

Перемещение  $\Delta_{1F}$  (рис. 8.12,д) вычисляется с помощью эпюр  $M_F$  (рис. 8.12,з) и  $\overline{M}_1$  (рис. 8.12,е):

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_F dx}{EJ}.$$

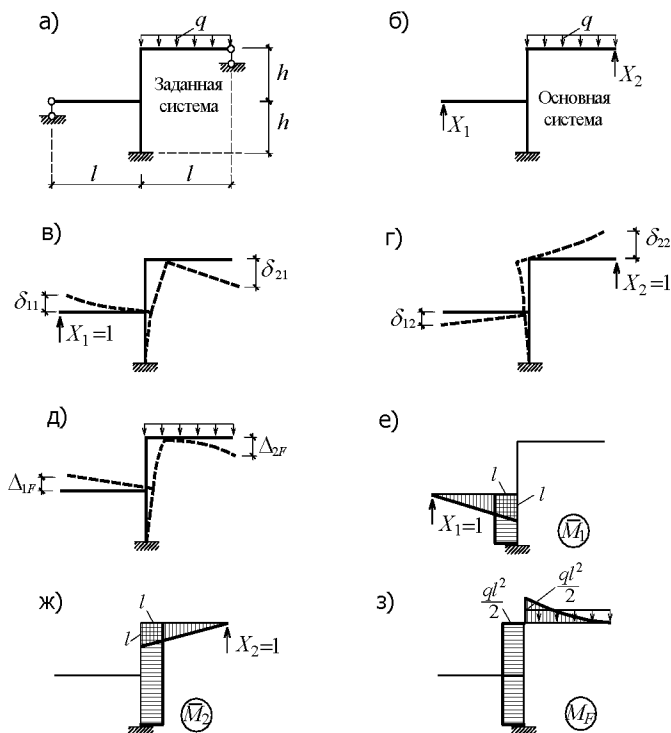


Рис. 8.12

Матричная форма определения перемещений изложена в разделе 7.10.

Естественно, что значения коэффициентов и свободных членов уравнений получаются более точными, если при их определении учитываются, кроме изгибающих моментов, продольные и поперечные силы в элементах рамы.

После определения коэффициентов и свободных членов система канонических уравнений может быть записана в численном виде.

### 8.6. Построение окончательных эпюр усилий

Решение системы канонических уравнений позволяет найти значения основных неизвестных. Окончательные усилия ( $S \in \{M, Q, N\}$ ) в  $k$ -м сечении заданной системы, на основании принципа независимости действия сил, вычисляются по выражению:

$$S_k = S_{kF} + \bar{S}_{k1} X_1 + \bar{S}_{k2} X_2 + \dots + \bar{S}_{kn} X_n, \quad (8.14)$$

где  $S_{kF}$  – усилие в  $k$ -м сечении от действия внешней нагрузки;

$\bar{S}_{ki}$  – усилие в  $k$ -м сечении от  $X_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

В соответствии с выражением (8.14) строятся окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n, \quad (8.15)$$

$$Q = Q_F + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n,$$

$$N = N_F + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n.$$

Построение эпюр  $Q$  и  $N$  по приведенным выше формулам не всегда удобно. Более простой способ построения эпюры  $Q$  основан на использовании дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$ .

Чтобы воспользоваться этой зависимостью получим аналитическое выражение для определения изгибающего момента в сечении стержня рамы. Рассмотрим такой стержень как балку на двух опорах. Предположим, что пролет балки загружен так, как показано на рис. 8.13,а. Оба опорных момента (левый (*л*) и правый (*н*)) – положительные.

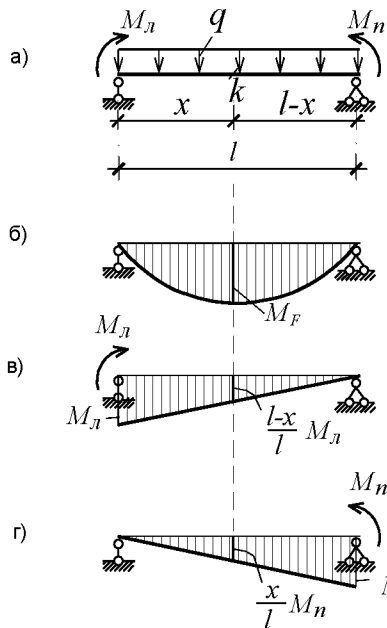


Рис. 8.13

Построив для этого пролета эпюры моментов от нагружения его пролетной нагрузкой (рис. 8.13,б) и опорными моментами (рис. 8.13,в,г), определим, на основании принципа независимости действия сил, окончательную ординату в сечении *k* на эпюре *M* как сумму составляющих ее:

$$M = M_F + \frac{l-x}{l} M_{\text{л}} + \frac{x}{l} M_{\text{н}}. \quad (8.16)$$

Взяв первую производную от выражения (8.16), получим формулу для определения поперечной силы в том же сечении:

$$Q = Q_F + \frac{M_n - M_d}{l}. \quad (8.17)$$

### 8.7. Алгоритм расчета. Проверка расчета

Процесс расчета статически неопределимых рам методом сил включает следующие операции.

1. Определение степени статической неопределимости системы.
2. Выбор основной системы.
3. Запись в общем виде системы канонических уравнений.
4. Построение эпюр усилий в основной системе от внешней нагрузки и единичных значений основных неизвестных.
5. Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений.
6. Запись системы канонических уравнений в численном виде и решение ее.
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов.
8. Построение эпюр  $Q$  и  $N$ .

Чтобы не ошибиться в ходе расчета, вычисления на каждом этапе алгоритма следует проверять. Для этого, разумеется, необходимо глубоко понимать суть выполняемых операций и правильно использовать знания, накопленные в ходе изучения курса строительной механики.

Поясним особенности контроля правильности расчета на отдельных этапах алгоритма.

Прежде всего, сделаем замечание к вопросу о выборе основной системы. Для всех возможных вариантов основной системы следует выполнить кинематический анализ их в той последовательности, которая рекомендована в главе 1. Особое внимание надо уделить анализу структуры системы и проверке ее на мгновенную изменяемость.

На этапе построения эпюр усилий в основной системе применяется, как правило, статический метод. Для проверки эпюр наиболее часто используются условия равновесия фрагментов расчетной схемы, в частности, узлов рамы.



Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений производится с помощью суммарной единичной эпюры моментов  $\bar{M}_s$ , строящейся по правилу:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (8.18)$$

Если “перемножить” единичную эпюру  $M_i$  и эпюру  $M_s$ , то получим:

$$\begin{aligned} \delta_{is} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s dx}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) dx}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2 dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n dx}{EJ} = \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum \delta_{ik}, k=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8.19)$$

то есть сумма коэффициентов при неизвестных в  $i$ -м ( $i=1, 2, \dots, n$ ) уравнении должна быть равна  $\delta_{is}$ . Такая проверка называется построчной.

Вместо “перемножения” каждой единичной эпюры моментов на суммарную  $M_s$  на практике производится “перемножение”  $\bar{M}_s$  на  $\bar{M}_s$ . Используя (8.19), несложно показать, что:

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s dx}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}, \quad (8.20)$$

то есть  $\delta_{ss}$  равно сумме всех коэффициентов канонических уравнений. Эту проверку называют универсальной.

Аналогично выполняется проверка правильности вычисления свободных членов:

$$\Delta_{sF} = \sum \int \frac{\bar{M}_s M_F dx}{EJ} = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF}. \quad (8.21)$$

Сумма всех свободных членов уравнений равна  $\Delta_{sF}$ .

Необходимо отметить, что выполнение упомянутых здесь проверок коэффициентов и свободных членов не всегда является гарантией правильных вычислений. В ходе определения  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{iF}$  и  $\delta_{ss}$ ,  $\Delta_{sF}$  на некоторой операции может быть допущена одна и та же ошибка и, как следствие, она окажется незамеченной. Поэтому, еще раз напомним, основой правильных расчетов на этом этапе является знание и умение правильно применять способы вычисления интегралов Мора.

Для проверки окончательной эпюры моментов используются статическая и кинематическая проверки. Статическая проверка эпюры “ $M$ ” сводится к проверке равновесия узлов рамы. С ее помощью выявляются только ошибки, которые могут быть допущены при операции построения эпюры моментов с помощью формулы (8.15).

Основной проверкой является кинематическая (другие ее названия: деформационная проверка, проверка перемещений). Перемещение точки приложения  $i$ -й основной неизвестной по ее направлению в заданной системе должно быть равно нулю. Поэтому, пользуясь общим правилом определения перемещений, получим:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i M dx}{EJ} = 0. \quad (8.22)$$

В таком случае понятно, что и сумма перемещений по направлениям всех основных неизвестных тоже равна нулю. Следовательно,

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s M dx}{EJ} = 0, \quad (8.23)$$

то есть результат “перемножения” суммарной единичной эпюры  $\overline{M}_s$  на окончательную эпюру моментов должен быть равен нулю.

Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$  заключается в проверке равновесия отсеченной от опорных закреплений части рамы.

**П р и м е р.** Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для рамы, изображенной на рис. 8.14,а.

Заданная рама является дважды статически неопределимой. Основная система и основные неизвестные показаны на рис. 8.14,б. Система канонических уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  и внешней нагрузки показаны на рис. 8.14, в, г, е.

Определяем коэффициенты при неизвестных и свободные члены в канонических уравнениях:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{203}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = -\frac{66}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{2EJ} \cdot 320 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{6}{6EJ} (320 \cdot 3 + 4 \cdot 125 \cdot 3 + 20 \cdot 3) = \frac{3160}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{2EJ} \cdot 320 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{6}{6EJ} (-320 \cdot 6 - 4 \cdot 125 \cdot 3) = -\frac{7260}{EJ}.$$

Для проверки коэффициентов и свободных членов построена суммарная единичная эпюра моментов  $\overline{M}_s$ . Используя формулу (8.20), получим:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6EJ} (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{239}{3EJ}. \end{aligned}$$

Действительно:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{203}{3EJ} - \frac{66}{EJ} - \frac{66}{EJ} + \frac{144}{EJ} = \frac{239}{3EJ}.$$

По формуле (8.21) имеем:

$$\Delta_{sF} = -\frac{1}{2EJ} 320 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{6}{6EJ} (-320 \cdot 3 + 20 \cdot 3) = -\frac{4100}{EJ},$$

что равно  $\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{3160}{EJ} - \frac{7260}{EJ} = -\frac{4100}{EJ}$ .

Записываем систему уравнений в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{203}{3EJ} X_1 - \frac{66}{EJ} X_2 + \frac{3160}{EJ} &= 0; \\ -\frac{66}{EJ} X_1 + \frac{144}{EJ} X_2 - \frac{7260}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$X_1 = 4,477 \text{ кН}; \quad X_2 = 52,468 \text{ кН}.$$

Для построения окончательной эпюры моментов используем формулу (8.15). Эпюры  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  показаны на рис. 8.14, ж, з, а окончательная эпюра  $M$  – на рис. 8.14, и. Статическая проверка ее выполняется (советуем читателю провести ее самостоятельно). Выполним кинематическую проверку:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s M dx}{EJ} &= \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (-2 \cdot 3 \cdot 18,62 - 2 \cdot 7 \cdot 0,71 - 3 \cdot 0,71 - 7 \cdot 18,62) + \\ &+ \frac{6}{6EJ} (-3 \cdot 18,62 + 3 \cdot 33,43) + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \frac{2}{3} 13,43 = \\ &= -\frac{140,57}{EJ} + \frac{140,55}{EJ} = -\frac{0,02}{EJ}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность вычислений составляет:

$$\varepsilon = \left| \frac{-0,02}{140,55} \right| \cdot 100 \approx 0,01\%,$$

что меньше допустимого значения, принимаемого равным примерно 1 %.

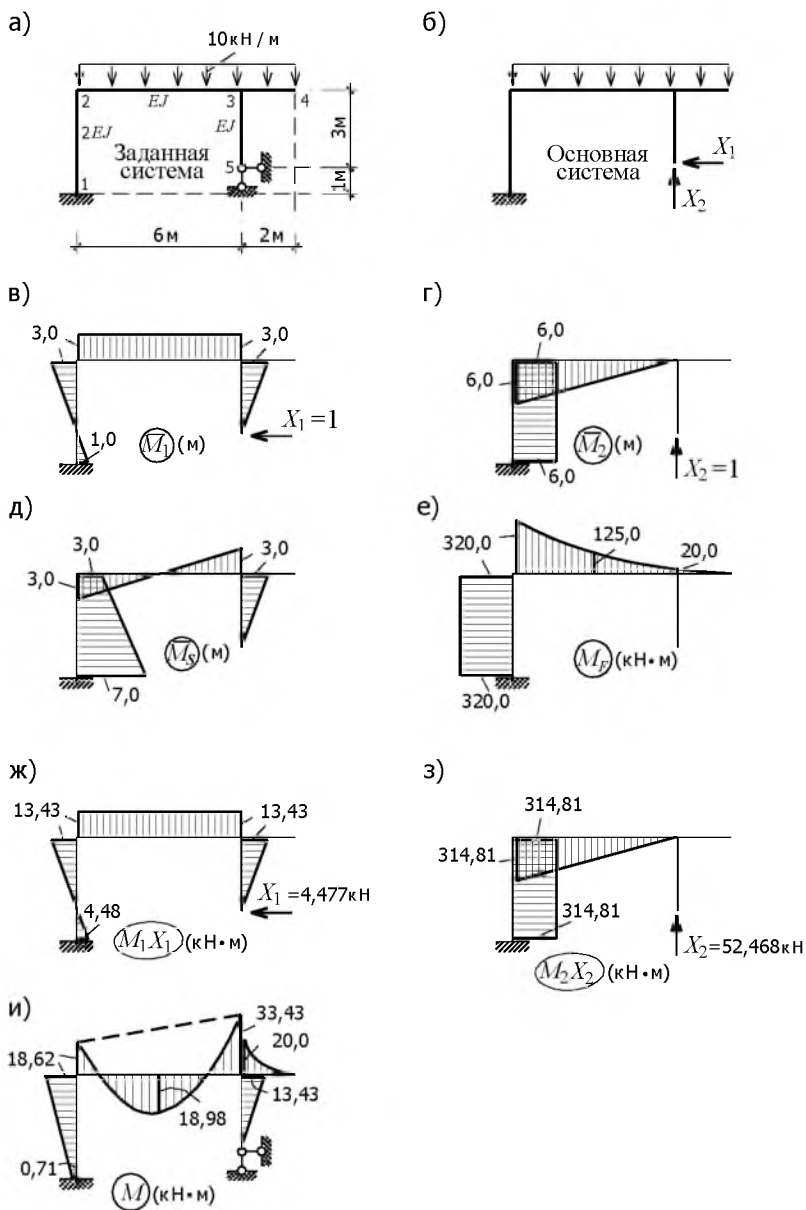
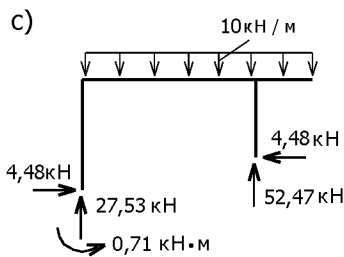
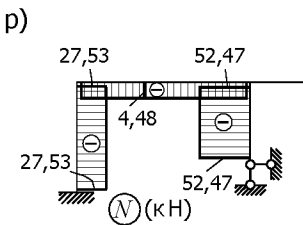
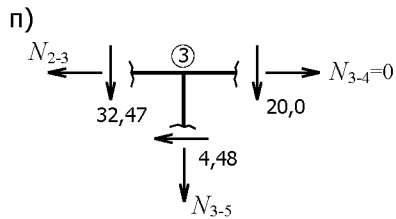
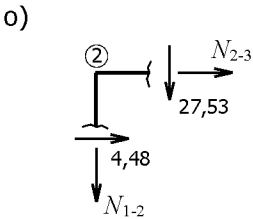
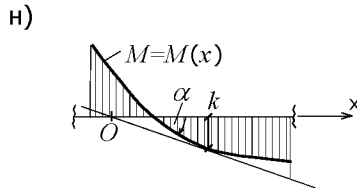
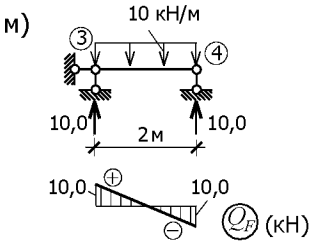
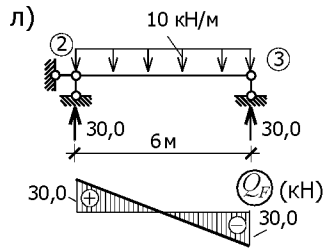
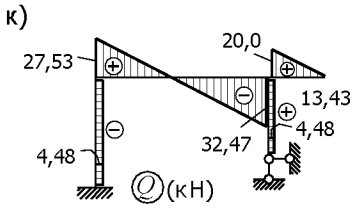


Рис. 8.14



Окончание рис. 8.14

Эпюра  $Q$  (рис. 8.14,к) строится по эпюре  $M$ . Еще раз отметим, что более простой способ ее построения основывается на зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$ . Воспользуемся формулой (8.17).

Рассматривая стержень 2–3 как простую балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой, построим эпюру поперечных сил (балочную эпюру поперечных сил). Она показана на рис. 8.14,л.

Учитывая распределение моментов на этом стержне (рис. 8.14,и) с помощью формулы (8.17) найдем, что в сечении, примыкающем к узлу 2:

$$Q_2 = 30 + \frac{-33,43 - (-18,62)}{6} = 27,53 \text{ кН},$$

а в сечении, примыкающем к узлу 3:

$$Q_3 = -30 + \frac{-33,43 - (-18,62)}{6} = -32,47 \text{ кН}.$$

Эпюра  $Q$  на консоли 3–4 строится как для статически определимого фрагмента рамы. Впрочем, и в этом случае можно воспользоваться формулой (8.17), если рассмотреть участок 3–4 как балку на двух опорах (рис. 8.14,м).

Тогда в сечении, примыкающем к узлу 3:

$$Q_3 = 10 + \frac{0 - (-20)}{2} = 20 \text{ кН},$$

а в сечении, примыкающем к узлу 4:

$$Q_4 = -10 + \frac{0 - (-20)}{2} = 0.$$

Для стержня 1–2 получим:

$$Q_1 = 0 + \frac{-18,62 - (-0,71)}{4} = -4,48 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 0 + \frac{-18,62 - (-0,71)}{4} = -4,48 \text{ кН}.$$

Напомним, что  $\frac{dM}{dx} = tg\alpha$ . Эпюра изгибающих моментов стро-

ится на растянутых волокнах стержня. Для балочных схем положительные ординаты эпюры расположены ниже оси балки. Поэтому знак поперечной силы в заданном сечении  $k$  стержня можно определять следующим образом. Проведя касательную к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , в точке, соответствующей положению сечения  $k$  (рис. 8.14,н), необходимо найти точку пересечения касательной и оси стержня (точка  $O$ ).

Если ось стержня необходимо поворачивать вокруг точки  $O$  до совмещения с касательной кратчайшим путем по ходу часовой стрелки, то поперечная сила в сечении  $k$  будет положительной ( $Q > 0$ ). При движении оси стержня против хода часовой стрелки  $Q < 0$ .

На линейных участках эпюры изгибающих моментов положение касательной совпадает с линией, ограничивающей эпюру  $M$ . Поперечная сила на всей длине этого участка будет постоянной. Для стержня 3-5  $Q = \frac{13,43}{3} = -4,48$  кН, а для стержня 1-2

$$Q = -\frac{18,62 - 0,71}{4} = -4,48 \text{ кН.}$$

При известных значениях поперечных сил в стержнях из уравнений равновесия узлов определяются продольные силы  $N$ . Вычисления  $N$  начинают с узла, в котором стыкуются стержни не более чем с двумя неизвестными усилиями, и далее, последовательно вырезая узлы, определяют усилия во всех остальных стержнях. Уравнения равновесия записывают в виде суммы проекций всех усилий (и приложенных к узлу внешних сил, если они имеются) на вертикальную и горизонтальную оси, или, при наличии наклонных стержней, если вычисления упрощаются, на оси, перпендикулярные направлениям стержней.

Составив для узла 2 (рис. 8.14,о) уравнения  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  найдем  $N_{2-3} = -4,48$  кН,  $N_{1-2} = -27,53$  кН.

Из уравнения  $\sum Y = 0$  для узла 3 (рис. 8.14,п) получим  $N_{3-5} = -52,47$  кН.



Уравнение  $\sum X = 0$  для узла 3 является проверочным. Эпюра  $N$  показана рис. 8.14,р.

Для проведения статической проверки эпюр  $Q$  и  $N$  отсекаем раму от опорных закреплений, нагружаем ее заданной нагрузкой и поперечными и продольными силами в сечениях, отделяющих стержни от опорных закреплений (рис. 8.14,с). Составляя уравнения  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и  $\sum M = 0$ , убеждаемся в том, что рама находится в равновесии.

### 8.8. Понятие о рациональной основной системе и способы ее выбора

Рациональной основной системой называют такую систему, для которой в канонических уравнениях возможно большее число побочных коэффициентов обращается в нуль. При этом очень важно установить нулевые коэффициенты лишь на основе визуального анализа очертания эпюр усилий, не затрачивая время на их определение. Обращение в нуль побочных коэффициентов приводит к значительным упрощениям в расчете.

Если некоторый коэффициент  $\delta_{ik}$  равен нулю, то соответствующие эпюры  $\bar{M}_i$  и  $\bar{M}_k$  принято называть взаимно ортогональными (аналогия со скалярным произведением взаимно ортогональных векторов).

К наиболее часто используемым способам получения рациональных основных систем относятся: использование симметрии системы, группировки неизвестных, преобразование нагрузки, расчленение многопролетных рам.

**1. Использование симметрии системы.** Основную систему для рамы, имеющей симметричное распределение линейных размеров и жесткостей стержней, следует принимать симметричной. Если основные неизвестные можно расположить на оси симметрии, то часть из них будет относиться к симметричным, а другая – к обратносимметричным (иначе, кососимметричным). От действия на раму симметричной нагрузки распределение усилий в ее элементах окажется симметричным, и наоборот: обратносимметричная нагрузка вызывает обратносимметричные усилия. Поэтому эпюры изгибаю-

щих моментов в основной системе будут либо симметричными, либо обратносимметричными. Симметричные и обратносимметричные эпюры являются взаимно ортогональными.

Например, приняв для рамы, показанной на рис. 8.15,а, основную систему, изображенную на рис. 8.15,б, получим симметричные эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_4$  (рис. 8.15,в,г,е) и обратносимметричную  $\bar{M}_3$  (рис. 8.15,д). Следовательно, коэффициенты  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{31}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{32}$ ,  $\delta_{34}$ ,  $\delta_{43}$  равны нулю.

Вычеркнув в системе уравнений (читатель должен записать их) слагаемые, включающие перечисленные коэффициенты, увидим, что она распалась на подсистему, содержащую только симметричные неизвестные и уравнение с обратносимметричной неизвестной.

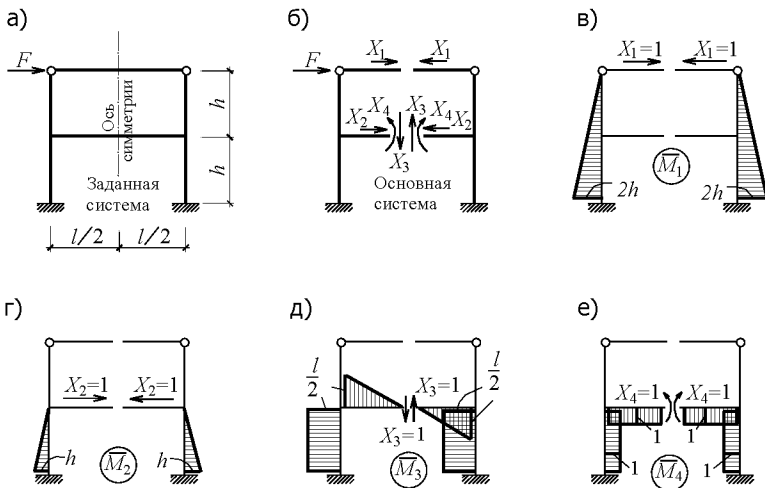


Рис. 8.15

Несложно, очевидно, распространить приведенные рассуждения на примеры рам с большим количеством неизвестных.

**2. Группировки неизвестных.** Во многих случаях основные неизвестные невозможно расположить на оси симметрии. Так, для рамы, изображенной на рис. 8.16,а, число лишних связей равно

шести. Симметричная основная система может быть принята по варианту, показанному на рис. 8.16,б. Однако в этом случае при нагружении ее силами  $X_i = 1$  ни одна из эпюр изгибающих моментов не получится симметричной или обратносимметричной, а значит, все побочные коэффициенты  $\delta_{ik}$  будут отличными от нуля.

Чтобы получить симметричные и обратносимметричные эпюры усилий необходимо вместо традиционных неизвестных  $X_i$  ввести новые (будем обозначать их  $Z_i$ ), представляющие собой группы сил. Переход от старых неизвестных к новым, и наоборот, должен быть однозначным.

На рис. 8.16,в показана та же основная система с новыми неизвестными. Сопоставляя расположение неизвестных на рис. 8.16,б,в, находим правила преобразования их: каждой паре симметрично расположенных неизвестных  $X_i$  соответствует операция сложения или вычитания симметричных и обратносимметричных групповых неизвестных  $Z_i$ .

В частности,  $X_1 = Z_1 + Z_2$ ,  $X_4 = Z_1 - Z_2$ , откуда следуют и выражения для  $Z$ :

$$Z_1 = \frac{X_1 + X_4}{2}, \quad Z_2 = \frac{X_1 - X_4}{2}.$$

Эпюры усилий от групповых неизвестных показаны на рис. 8.16,г–и. Вследствие взаимной ортогональности симметричных и обратносимметричных эпюр система канонических уравнений распадается на две независимые: в одну из них войдут только симметричные неизвестные  $Z_1, Z_3, Z_5$ , а в другую – обратносимметричные ( $Z_2, Z_4, Z_6$ ).

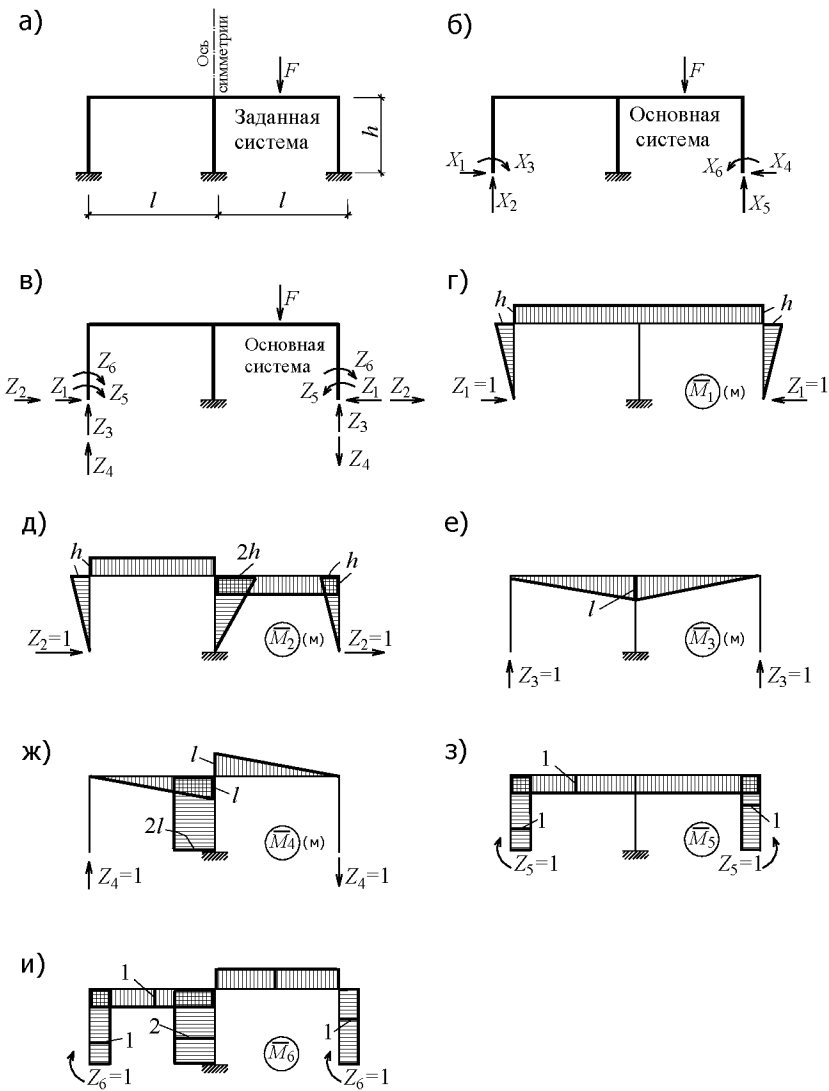


Рис. 8.16

**3. Преобразование нагрузки.** Дальнейшие упрощения в расчете симметричных систем (рис. 8.17,а) связаны с разложением нагрузки на симметричную и обратносимметричную составляющие.

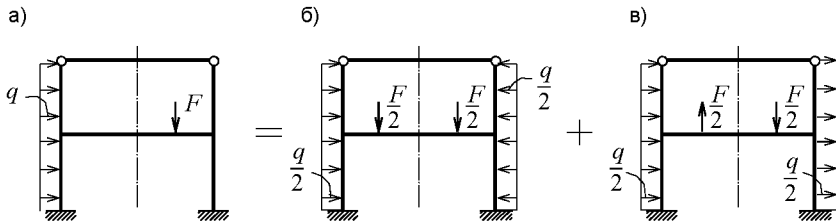


Рис. 8.17

Используя свойство взаимной ортогональности эпюр, несложно показать, что при действии на систему симметричной нагрузки обратносимметричные неизвестные обращаются в нуль, а при действии обратносимметричной нагрузки оказываются равными нулю симметричные неизвестные. Применительно к расчетной схеме рамы, показанной на рис. 8.17,б, это означает, что расчет ее надо выполнять как системы с неизвестными  $X_1, X_2, X_4$  (основная система изображена на рис. 8.15,б), а расчет рамы на действие обратносимметричной нагрузки (рис. 8.17,в) – как системы с одной неизвестной  $X_3$ .

**4. Расчленение многопролетных рам.** Этот способ применяется как для симметричных, так и для несимметричных рам. Меньшая вычислительная работа по определению  $\delta_{ik}$  будет в том случае, если эпюры усилий в основной системе будут распространяться на небольшие фрагменты рамы, то есть будут “локализованы” в окрестности действия нагрузки.

Для рамы (рис. 8.18,а) с четырьмя неизвестными на рис. 8.18,б,в представлены два варианта основной системы. Анализируя распределение моментов от  $X_i = 1$  в раме, показанной на рис. 8.18,б, убедимся в том, что ни один из коэффициентов  $\delta_{ik}$  не равен нулю.

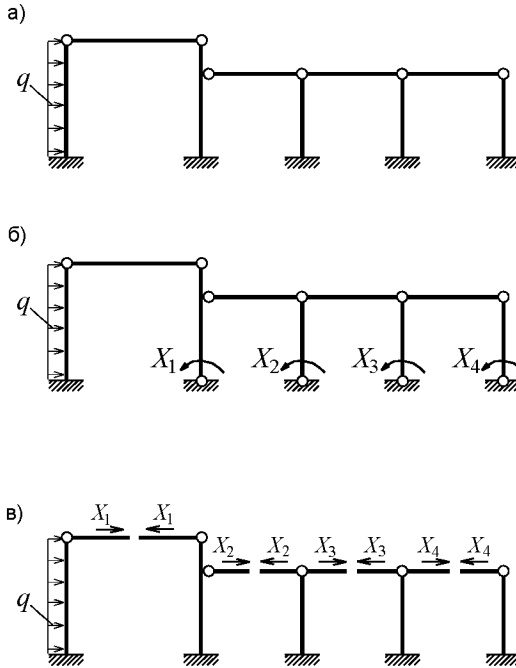


Рис. 8.18

В системе же, показанной на рис. 8.18,в, эпюры изгибающих моментов имеют место только на стойках, непосредственно воспринимающих действие  $X_i = 1$ . Поэтому  $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ ,  $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$ ,  $\delta_{24} = \delta_{42} = 0$ , следовательно, основная система является рациональной.

### 8.9. Определение перемещений в статически неопределимых системах

Для определения перемещений с помощью формулы Мора необходимо, следуя изложенному в разделе 7.6, построить эпюры изгибающих моментов для заданного нагружения системы (рис. 8.19,а) и для вспомогательного (рис. 8.19,б). Тогда искомое перемещение будет вычисляться по формуле:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M dx}{EJ}. \quad (8.24)$$

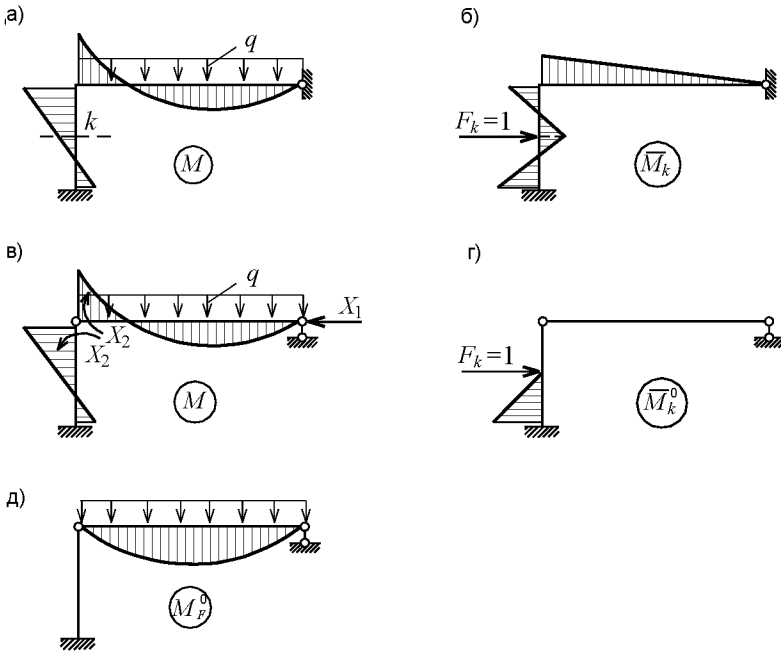


Рис. 8.19

Однако такой способ вычисления не совсем удобен, так как потребуется дважды рассчитать статически неопределимую систему.

Более простой способ вычисления можно получить из следующих рассуждений. Если загрузить основную систему заданной нагрузкой и основными неизвестными, которые определены из канонических уравнений, то эпюра моментов в этой статически определимой системе (рис. 8.19,в) будет полностью совпадать с окончательной эпюрой моментов (рис. 8.19,а). Следовательно, рассматривая состояние рамы на рис. 8.19,в как исходное, можно для определения перемещения точки  $k$  во вспомогательном состоянии принимать статически определимую систему (рис. 8.19,г). В этом случае:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\overline{M}_k^0 M dx}{EJ}, \quad (8.25)$$

где  $\overline{M}_k^0$  – изгибающие моменты в статически определимой системе, возникающие от  $F_k = 1$ .

Для вычисления перемещения можно применить и другой способ: эпюру моментов от заданной нагрузки можно строить в основной системе, а эпюру от  $F_k = 1$  – в заданной статически неопределимой системе. Покажем это.

Применяя к состояниям рамы, изображенным на рис. 8.19,а,б, теорему о взаимности работ, получим:

$$F_k \Delta_{kF} = F \Delta_{Fk}, \quad (8.26)$$

где  $F_k = 1$ ;

$F$  – силы, действующие в состоянии  $a$  (на рис. 8.19,а этой силой является равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ );

$\Delta_{Fk}$  – перемещение по направлению силы  $F$ , возникающее от  $F_k = 1$  (в этом примере – площадь эпюры вертикальных перемещений горизонтального стержня).

Так как эпюры моментов в состояниях  $a$  (рис. 8.19,а) и  $b$  (рис. 8.19,в) полностью совпадают, то выражение (8.26) применимо к состояниям рамы  $b$  (рис. 8.19,б) и  $b$ . В этом случае под  $F$  на рис. 8.19,в надо понимать распределенную нагрузку и основные неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ . Но работа основных неизвестных на перемещениях рамы в состоянии  $b$  равна нулю. Поэтому:

$$\Delta_{kF} = \sum F \Delta_{Fk}, \quad (8.27)$$

то есть в правой части выражения (8.27) записана работа внешних сил, приложенных к основной системе, на перемещениях статически неопределимой системы в состоянии  $k$ .

Заметим, что в приведенных пояснениях на выбор основной системы никаких ограничений не накладывалось.



Записывая выражение (8.27) через работу изгибающих моментов, получим:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_F^0 dx}{EJ}, \quad (8.28)$$

где  $M_F^0$  – изгибающие моменты в основной системе (рис. 8.19,д).

Таким образом, при определении перемещений в статически неопределимых системах можно одну из “перемножаемых” эпюр строить в заданной статически неопределимой системе, а вторую – в любой статически определимой, полученной из заданной системы.

Обратимся к вычислениям. На рис. 8.20,а показана эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой раме от заданной нагрузки, а на рис. 8.20,б – эпюра моментов в той же раме от  $F_k = 1$ . По формуле (8.24) получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{kF} &= \sum \int \frac{\bar{M}_k M dx}{EJ} = \\ &= \frac{l}{24EJ} \left[ -2 \frac{15l}{176} \frac{ql^2}{22} - 2 \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{44} + \frac{15l}{176} \frac{ql^2}{44} + \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{22} \right] + \\ &+ \frac{l}{24EJ} \left[ 2 \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{11} - 2 \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{44} - \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{11} + \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{44} \right] + \\ &+ \frac{l}{6EJ} \left[ \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{11} - 4 \frac{3l}{352} \frac{7}{88} ql^2 \right] = -\frac{ql^4}{1408} \frac{1}{EJ} \text{ м.} \end{aligned}$$

На рис. 8.20,в показана эпюра моментов в статически определимой раме (основной системе) от  $F_k = 1$ , а на рис. 8.20,г – эпюра моментов в основной системе от заданной нагрузки. По формуле (8.25) получим:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k^0 M dx}{EJ} = \frac{l}{24EJ} \left[ -2 \frac{l}{4} \frac{ql^2}{22} + \frac{l}{4} \frac{ql^2}{44} \right] = -\frac{ql^4}{1408} \frac{1}{EJ} \text{ м.}$$



Для вычисления свободных членов уравнений применяется формула (7.12).

В статически определимых системах от действия температуры усилий не возникает. Поэтому окончательная эпюра изгибающих моментов в заданной раме строится посредством суммирования единичных эпюр моментов, умноженных на найденные из уравнений соответствующие значения неизвестных:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n. \quad (8.29)$$

Кинематическая проверка ее сводится к проверке перемещений рамы по направлениям отброшенных связей, то есть состоит в проверке выполнения условия:

$$\sum \int \frac{M \bar{M}_s dx}{EJ} + \sum_{i=1}^n \Delta_{it} = 0. \quad (8.30)$$

При расчете рам на смещение опор канонические уравнения записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1c} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2c} &= 0; \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nc} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Свободные члены уравнений вычисляются, в общем случае, по формуле (7.13).

**Пример.** Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в раме от теплового воздействия (рис. 8.21,а). Высота сечения стержней  $AC$  и  $BD$   $h_1 = 0,3$  м, стержня  $CD$  –  $h_2 = 0,4$  м. Коэффициент теплового линейного расширения материала  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  м/град,  $EJ = 60$  МН·м<sup>2</sup>.

Основная система в исходном и деформированном состояниях изображена на рис. 8.21,б. При определении коэффициентов канонических уравнений будем учитывать влияние только изгибающих моментов. Используя эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  (рис. 8.21,д,ж), получим:

$$\delta_{11} = \frac{272}{3EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{180}{EJ}, \quad \delta_{12} = -\frac{84}{EJ}.$$

Для удобства вычислений свободных членов  $\Delta_{1t}$  и  $\Delta_{2t}$  (соответствующие отрезки показаны на рис. 8.21,б) по формуле (7.12) значения используемых расчетных параметров запишем в табл. 8.1.

Таблица 8.1

№ стержня	$h$ , м	$t$ , град	$t'$ , град	$\omega_{M_1}$ , м <sup>2</sup>	$\omega_{N_1}$ , м	$\omega_{M_2}$ , м <sup>2</sup>	$\omega_{N_2}$ , м
<i>AC</i>	0,3	-5	50	8	0	0	4
<i>CD</i>	0,4	-5	50	24	6	18	0
<i>BD</i>	0,3	-5	50	8	0	24	4

Напомним, что при вычислениях по формуле (7.12) каждое слагаемое в ней принимается положительным в том случае, когда соответствующие направления деформации стержней, вызываемые единичными силами и тепловым воздействием, совпадают.

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \sum \alpha t \Omega_{N_1} + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_{M_1} = \\ &= \alpha \cdot 5 \cdot 6 - \frac{\alpha \cdot 50}{0,3} 8 - \frac{\alpha \cdot 50}{0,4} 24 - \frac{\alpha \cdot 50}{0,3} 8 = -5636,67 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t} &= \sum \alpha t \Omega_{N_2} + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_{M_2} = \\ &= \alpha \cdot 5 \cdot 4 - \alpha \cdot 5 \cdot 4 + \frac{\alpha \cdot 50}{0,4} 18 + \frac{\alpha \cdot 50}{0,3} 24 = 6250 \alpha. \end{aligned}$$

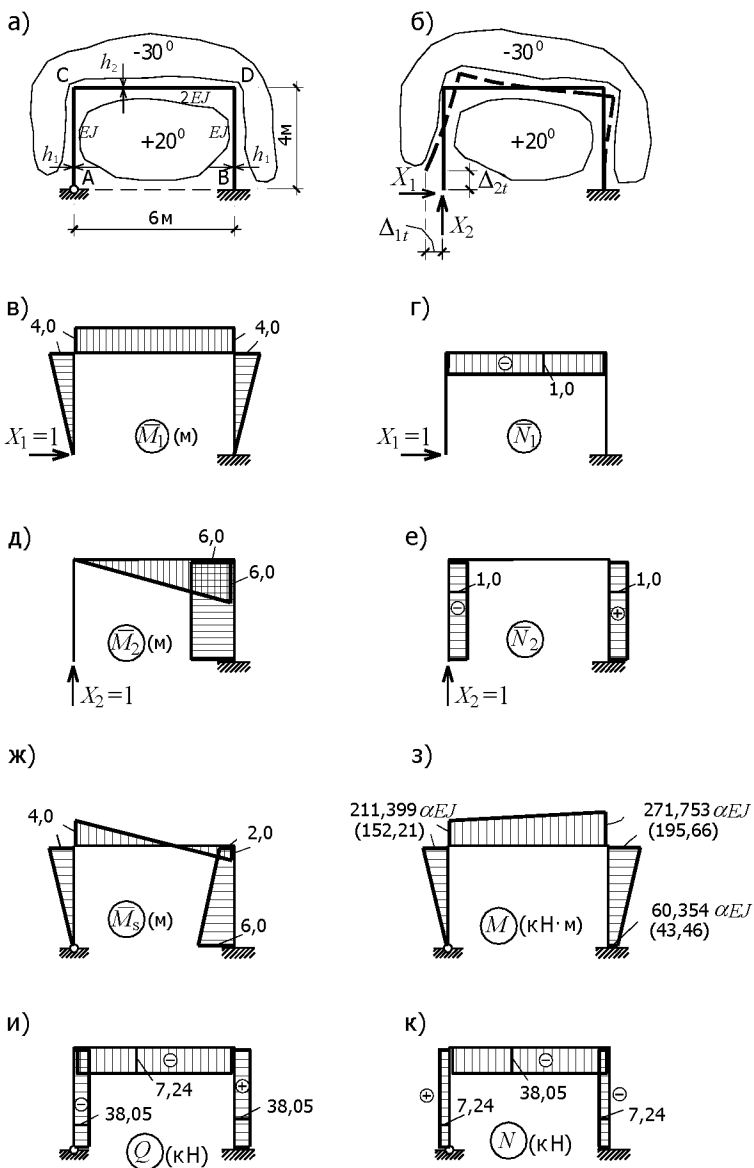


Рис. 8.21

Следуя алгоритму расчета (раздел 8.7), запишем систему уравнений в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{272}{3EJ} X_1 - \frac{84}{EJ} X_2 - 5636,67 \alpha &= 0; \\ -\frac{84}{EJ} X_1 + \frac{180}{EJ} X_2 + 6250,0 \alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив ее, найдем  $X_1 = 52,8498 \alpha EJ$  кН,  $X_2 = -10,0590 \alpha EJ$  кН.

Статическая неопределимость рамы раскрыта. Так как грузовая эпюра моментов в основной системе (статически определенной) при расчете на действие температуры отсутствует, то окончательную эпюру моментов строим по выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Она показана на рис. 8.21,з. Изгибающие моменты в раме зависят от значений жесткостей стержней, то есть подтверждается одно из общих свойств статически неопределимых систем (раздел 8.1). В скобках указаны значения ординат для принятых в примере исходных данных.

Выполняем кинематическую проверку. Суммарная единичная эпюра моментов  $M_s$  изображена на рис. 8,21,ж.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \bar{M}_s}{EJ} + \sum_{i=1}^2 \Delta_{it} &= \frac{\alpha EJ}{EJ} \left[ \frac{1}{2} 211,399 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right. \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 211,399 \cdot 4 - 2 \cdot 271,753 \cdot 2 + 271,753 \cdot 4 - 211,399 \cdot 2) - \\ &- \frac{4}{6} (2 \cdot 271,753 \cdot 2 + 2 \cdot 60,354 \cdot 6 + 60,354 \cdot 2 + 271,753 \cdot 6) - \\ &\left. - 5636,67 \alpha + 6250,0 \alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

Условие (8.30) выполняется. Эпюры  $Q$  и  $N$  изображены на рис. 8.21,и,к.

Пример. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в раме от указанного на рис. 8.22,а смещения опорных связей, приняв жесткости стержней равными  $EJ = 60 \text{ МН}\cdot\text{м}^2$ , а смещения связей  $c_1 = c_2 = c = 0,01 \text{ м}$ .

Заданная рама дважды статически неопределима. Выбрав основную систему (рис. 8.22,б), запишем канонические уравнения метода сил для расчета рамы на смещение опор в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1c} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2c} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Построим единичные эпюры моментов (рис. 8.22,в,г) и вычислим коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{11} = \frac{225}{3EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{16}{3EJ}, \quad \delta_{12} = \frac{20}{3EJ}.$$

Учитывая распределение реакций в опорных связях от  $X_1 = 1$  (рис. 8.22,в) и  $X_2 = 1$  (рис. 8.22,г), по формуле (7.13) получим:

$$\Delta_{1c} = -\sum R_{k1}c_k = -(-1c_1 - 2,5c_2) = c_1 + 2,5c_2 = 3,5c;$$

$$\Delta_{2c} = -\sum R_{k2}c_k = -(-0,5c_2) = 0,5c_2 = 0,5c.$$

Канонические уравнения, после несложных преобразований, получают следующую форму записи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{225}{3}X_1 + \frac{20}{3}X_2 + 3,5cEJ &= 0; \\ \frac{20}{3}X_1 + \frac{16}{3}X_2 + 0,5cEJ &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив их, найдем:

$$X_1 = -0,043125 cEJ, \quad X_2 = -0,039844 cEJ.$$

Так как смещение опор не вызывает усилий в статически определимой системе, то окончательная эпюра изгибающих моментов строится по выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

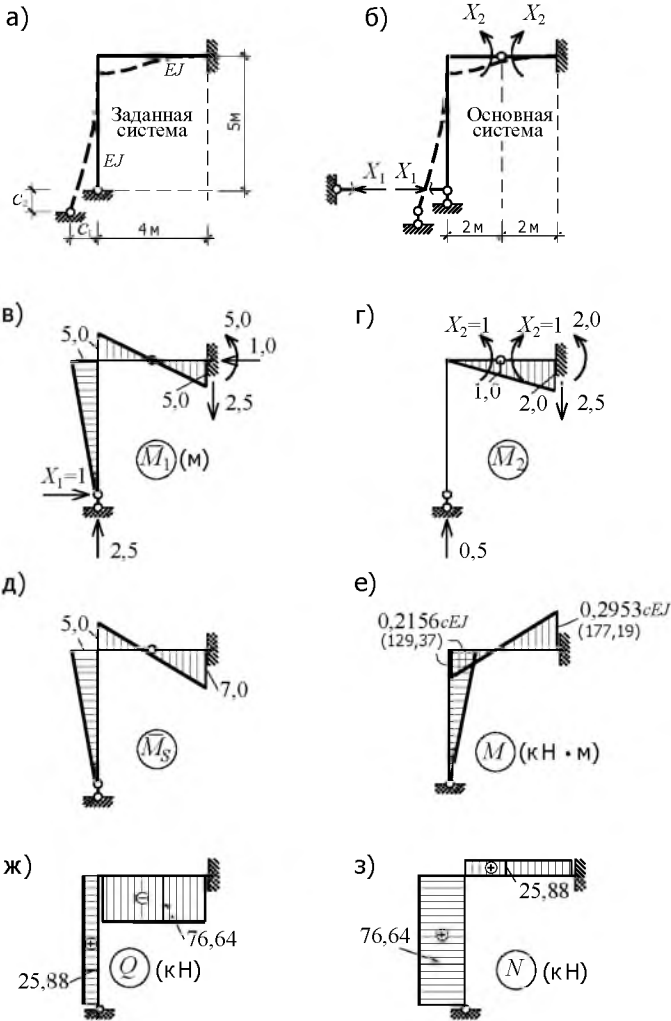


Рис. 8.22



Она показана на рис 8.22,д. В скобках указаны значения ординат моментов для принятых исходных данных. Кинематическая проверка ее, также как и при расчете на тепловое воздействие, сводится к проверке выполнения условия:

$$\sum \int \frac{M\bar{M}_s dx}{EJ} + \sum \Delta_{ic} = 0.$$

Проведем ее, используя суммарную единичную эпюру  $M_s$  (рис. 8.22,д):

$$\begin{aligned} & \frac{cEJ}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} 0,2156 \cdot 5 \frac{2}{3} 5 + \frac{4}{6} \times \right. \\ & \left. \times (-2 \cdot 0,2156 \cdot 5 - 2 \cdot 0,2953 \cdot 7 + 0,2156 \cdot 7 + 0,2953 \cdot 5) \right] + \\ & + 3,5 c + 0,5 c = 0. \end{aligned}$$

Проверка выполняется. Эпюры  $Q$  и  $N$  показаны на рис. 8.22,ж,з.

### 8.11. Линии влияния усилий

Для построения линии влияния какого-нибудь усилия необходимо, как известно, вначале, пользуясь известными методами строительной механики, получить зависимость (аналитическую или в численном виде) этого усилия от положения силы  $F=1$  ( $S=f(x)$ ), а затем, с помощью этой зависимости, определить значения ординат линии влияния для всех характерных сечений.

Если для определения зависимости  $S=f(x)$  применяются методы статики сооружений, то соответствующий метод построения линии влияния называется статическим.

В статически неопределимых системах усилие в сечении стержня определяется по выражению (8.14). Если его использовать для построения линий влияния, то необходимо иметь в виду, что от подвижной силы  $F=1$  меняются и значения основных неизвестных  $X_i$  и значение усилия в сечении  $k$  основной системы. Поэтому выражение (8.14) для построения линии влияния усилия в сечении  $k$  следует переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{л.вл. } S_k &= \text{л.вл. } S_k^0 + \bar{S}_{k1} (\text{л.вл. } X_1) + \\ &+ \bar{S}_{k2} (\text{л.вл. } X_2) + \dots + \bar{S}_{kn} (\text{л.вл. } X_n), \end{aligned} \quad (8.31)$$

где л.вл.  $S_k^0$  – линия влияния усилия  $S$  в сечении  $k$  основной системы;

$\bar{S}_{ki}$  – усилие в сечении  $k$  основной системы от  $X_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Используем это выражение для построения линии влияния изгибающего момента в сечении  $k$  однажды статически неопределимой балки (рис. 8.23,а).

Выбрав основную систему (рис. 8.23,б), построим грузовую эпюру моментов (рис. 8.23,в) и единичную (рис. 8.23,г), после чего определим:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \delta_{1F} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EJ}.$$

Из канонического уравнения  $\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0$  найдем:

$$X_1 = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}.$$

Отсюда следует, что линия влияния  $X_1$  описывается кривой третьей степени относительно координаты  $x$  подвижной силы  $F = 1$ . Она показана на рис. 8.23,д.

В статически определимых системах линии влияния усилий имели прямолинейное очертание или кусочно-ломаное (прямолинейное очертание на ограниченной длине движения силы). Вспомните, например, линии влияния опорных реакций в простых балках, линии влияния изгибающих моментов и т. д.

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_k$  выражение (8.31) запишем в виде:

$$\text{л.вл. } M_k = \text{л.вл. } M_k^0 + \overline{M}_{k1} (\text{л.вл. } X_1). \quad (8.32)$$

В рассматриваемом примере  $M_{k1} = \frac{l}{2}$  (рис. 8.23,г). На рис. 8.24,б изображена л.вл.  $M_k^0$ , а на рис. 8.23,в – л.вл.  $M_{k1} X_1$ . Суммируя их, получим л.вл.  $M_k$  (рис. 8.24,г).

Изложенный способ построения линии влияния может быть применен и для систем с небольшим числом неизвестных при “ручном” (неавтоматизированном) способе вычисления координат.

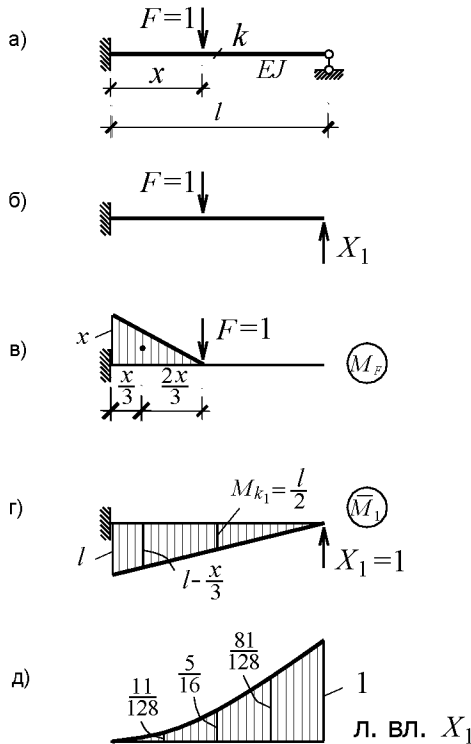


Рис. 8.23

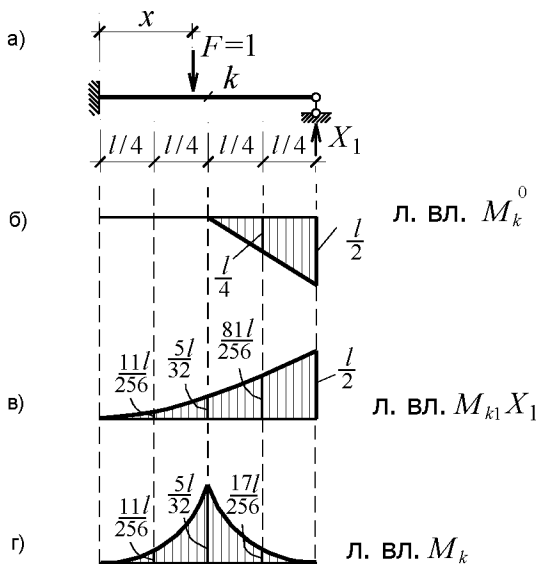


Рис. 8.24

Для сложных систем, к которым относятся и рамы, получить аналитические зависимости исследуемого фактора от координаты груза  $F=1$  трудно, поэтому для них используются численные методы решения. С помощью компьютерных программ, в которых реализованы методы расчета различных систем, можно найти искомое усилие при положениях силы  $F=1$  в различных характерных сечениях рамы.

Решение задачи о построении линии влияния усилия сводится, таким образом, к расчету заданной системы на несколько одновременных загрузений ее силами  $F=1$ . Поясним этот подход к построению линий влияния на примере двухпролетной рамы (рис. 8.25) все стержни которой имеют одинаковую изгибную жесткость.

Предположим, что сила  $F=1$  может двигаться по стержням 4–8 и 9–13. Построим линию влияния изгибающего момента в сечении 6. Определив на каждом из стержней три промежуточных сечения и считая, что все стержни рамы имеют  $EA \rightarrow \infty$ , выполним расчет заданной рамы на шесть загрузений ее единичными силами (в каждом промежу-

точном сечении стержней 4–8 и 9–13 прикладывается сила  $F = 1$ ). Выбрав из результатов расчета на каждое загрузение значение момента в сечении 6, построим линию влияния  $M_6$  (рис. 8.25).

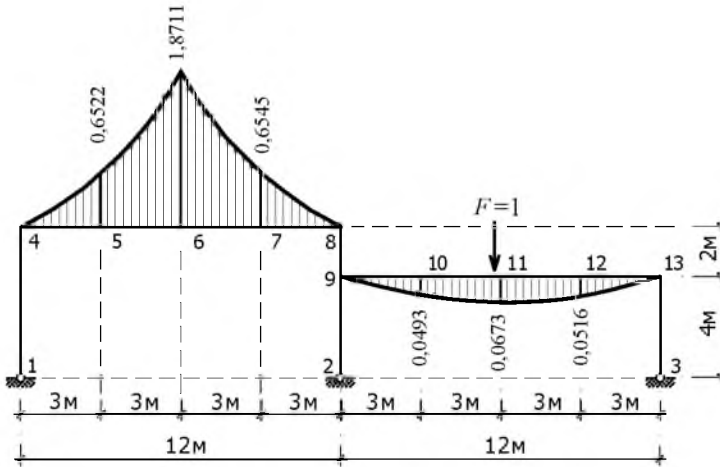


Рис. 8.25

В изложенной форме решения статический метод является в настоящее время основным методом построения линий влияния усилий и перемещений в стержневых и континуальных системах.

Более подробно такой подход к построению линий влияния усилий (или других факторов) изложен в разделе 9.11.

Кратко поясним суть кинематического метода построения линий влияния усилий в статически неопределимых рамах.

Если для заданной системы, имеющей  $n$  лишних связей, в качестве основной системы принять статически неопределимую систему с  $n - 1$  лишними связями, то каноническое уравнение метода сил для расчета рамы на действие силы  $F = 1$  примет вид:

$$\delta_{11}^{(n-1)} X_1 + \delta_{1F}^{(n-1)} = 0. \quad (8.33)$$

Так как по теореме о взаимности перемещений  $\delta_{1F}^{(n-1)} = \delta_{F1}^{(n-1)}$ , то:

$$X_1 = -\frac{\delta_{F1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}, \quad (8.34)$$

где  $\delta_{11}^{(n-1)}$  – перемещение в системе с  $n-1$  неизвестной точки приложения силы  $X_1$  по ее направлению; оно вычисляется “перемножением” эпюры  $M_1^{(n-1)}$  самой на себя;

$\delta_{F1}^{(n-1)}$  – перемещение в той же системе точки приложения силы  $F=1$ , вызванное силой  $X_1=1$ .

Сила  $F=1$  может занимать любое положение на стержнях рамы, поэтому  $\delta_{F1}$  определяет перемещения стержней рамы от силы  $X_1=1$ .

Таким образом, выражение (8.34) для построения линии влияния  $X_1$  можно записать следующим образом:

$$\text{л.вл. } X_1 = -\frac{\text{эп. } \delta_{F1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}. \quad (8.35)$$

Итак, чтобы построить линию влияния  $X_1$  необходимо построить от  $X_1=1$  эпюру перемещений стержней рамы, по которым движется сила  $F=1$ , и все ординаты ее поделить на  $(-\delta_{11})$ .

Очертание линии влияния, оказывается, подобно эпюре перемещений сечений стержней. Множитель  $(-\frac{1}{\delta_{11}})$  является коэффици-

ентом подобия. В этом и состоит основное достоинство кинематического метода. С его помощью легко представить форму линии влияния усилия. Для этого необходимо удалить связь, в которой возникает искомое усилие и загрузить раму (или другую систему) соответствующей силой  $X_1=1$ . Обладая достаточной инженерной интуицией, несложно показать эпюру перемещений, то есть форму линии влияния.

Для построения, например, линии влияния  $M_k$  в статически неопределимой балке (рис. 8.24,а) необходимо ввести в сечении  $k$  шарнир и загрузить балку моментами  $X_1$  (рис. 8.26). Эпюра вертикальных перемещений точек балки будет подобна л. вл.  $M_6$ .

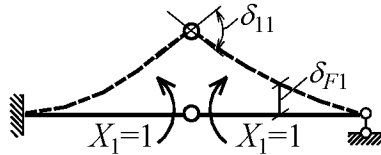


Рис. 8.26

Для построения линии влияния  $M_6$  в раме (рис. 8.25) введем в 6-м сечении шарнир и загрузим раму моментами  $X_1 = 1$  (рис. 8.27). Эпюра вертикальных перемещений грузовой линии от данного нагружения будет подобна линии влияния  $M_6$ . Ординаты  $\delta_{F1}$  эпюры перемещений, если нужно, могут быть вычислены по правилам, изложенным в разделе 8.9.

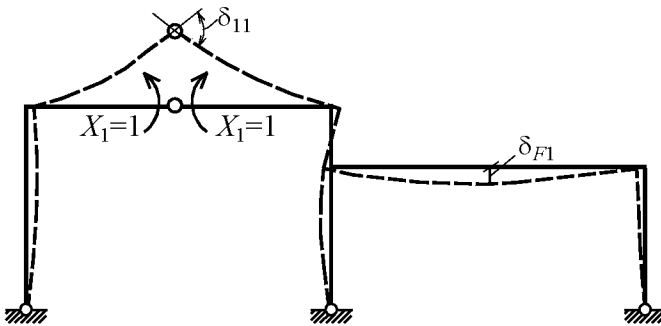


Рис. 8.27

## МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ

### 9.1. Степень кинематической неопределимости. Основные неизвестные

Положения концов стержня, входящего в состав рамы или другой системы, испытывающей заданное воздействие, полностью характеризуют его деформированное состояние. При этом, если стержень примыкает к узлу жестко, то положение его конца для плоской системы определяется тремя параметрами: углом поворота торцевого сечения и двумя компонентами линейных перемещений, если шарнирно – то только линейными. В стержневых системах соответствующие перемещения концов нескольких стержней, соединенных в узле, равны между собой, однако они, как правило, неизвестны. Поэтому системы, содержащие такие узлы, являются кинематически неопределеными. Общее число неизвестных перемещений узлов называют степенью кинематической неопределенности системы. Например, рама, показанная на рис. 9.1, является четыре раза кинематически неопределенной: перемещение узла 2 характеризуется тремя компонентами ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ), узла 3 – одним ( $Z_4$ ). Кинематически неопределеными системами являются не только статически неопределенные. К ним, в общем случае, относятся и статически определимые.

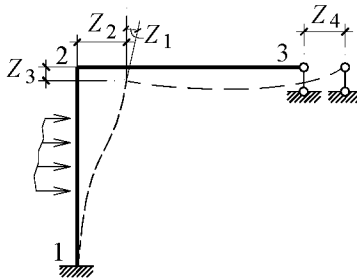


Рис. 9.1



Например, балку, показанную на рис. 9.2, можно рассматривать как два раза кинематически неопределимую (считаем, что на конце консоли расположен не закрепленный связями узел), а статически определимую раму (рис. 9.3) – как четыре раза кинематически неопределимую.

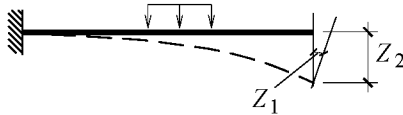


Рис. 9.2

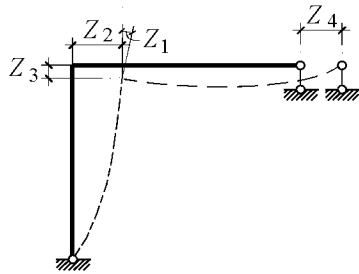


Рис. 9.3

Если бы каким-либо методом удалось найти перемещения концевых сечений стержня, то последующая задача определения усилий в его сечениях решалась бы достаточно просто, так как для линейно деформируемых систем существует однозначная зависимость между усилиями, перемещениями узлов и нагрузкой.

Именно с помощью метода перемещений, суть которого излагается далее, и определяются вначале перемещения узлов, которые являются основными неизвестными этого метода расчета, а затем и усилия в стержнях (в методе сил сначала определялись усилия, а потом – перемещения).

Ранее, в первой главе, указывались основные допущения, принимаемые при определении линейно деформируемой системы. Дополнительно к ним, при расчете рам методом перемещений вводятся следующие:

- 1) деформации стержней, вызываемые поперечными силами, не учитываются;
- 2) не учитывается влияние продольных сил на деформации (расчет рам с учетом продольных деформаций будет рассмотрен в разделе 9.12);
- 3) первоначальная длина прямого стержня полагается равной длине хорды, стягивающей его концы после деформации.

Эти допущения позволяют существенно уменьшить число основных неизвестных метода перемещений. Так, для рамы (рис. 9.1) перемещение узла 2 можно характеризовать уже только двумя компонентами: углом поворота  $Z_1$  и горизонтальным перемещением  $Z_2$ . Поскольку продольные деформации стержня 1–2 не учитываются, то перемещение  $Z_3 = 0$ . В деформированном состоянии положение узла 2 следует показывать на линии 2–3 (дуга, описываемая из центра 1 радиусом  $r = l_{1-2}$ , заменяется касательной к ней в точке 2). Горизонтальное перемещение узла 3, вследствие третьего допущения, необходимо принять равным  $Z_2$ . Следовательно, рассматриваемая рама является два раза кинематически неопределимой. Измененная с учетом принятых допущений деформированная схема рамы и основные неизвестные показаны на рис. 9.4,а.

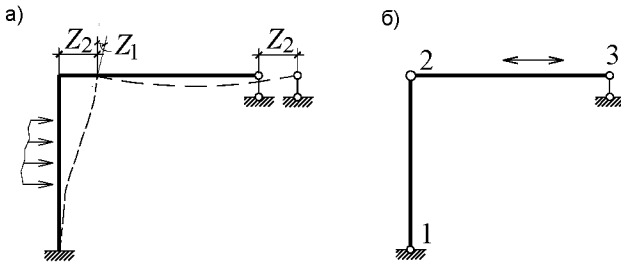


Рис. 9.4

Из приведенных рассуждений к изображению деформированного состояния рамы следует, что общее число неизвестных  $n$  метода перемещений определяется как сумма неизвестных углов поворота  $n_y$  жестких узлов и независимых линейных перемещений  $n_l$  узлов, то есть:

$$n = n_y + n_l.$$

Число  $n_y$  называют степенью угловой подвижности, а  $n_l$  – степенью линейной подвижности узлов. При этом, если определение  $n_y$

сводится к подсчету числа жестких узлов, то для определения степени линейной подвижности  $n_l$  заданную раму необходимо превратить в шарнирно-стержневую систему посредством введения шарниров во все жесткие узлы, в том числе и опорные, и определить для нее степень свободы  $W$ . При превращении рамы в шарнирно-стержневую систему статически определимые консоли можно отбросить (уменьшается степень линейной подвижности).

Для рассматриваемой рамы (рис. 9.4,а)  $n_y = 1$ , а для соответствующей ей шарнирно-стержневой системы (рис. 9.4,б)  $W = 1$ , то есть  $n_l = 1$ . Кинематический анализ схемы показывает, что подвижностью по горизонтальному направлению (показана стрелка  $\leftrightarrow$ ) обладают узлы 2 и 3. Следовательно,  $n = n_y + n_l = 1 + 1 = 2$ .

Определим число основных неизвестных метода перемещений другой рамы (рис. 9.5,а). Степень линейной подвижности ее узлов найдем с помощью шарнирно-стержневой системы (рис. 9.5,б), для которой  $W = 3$ .

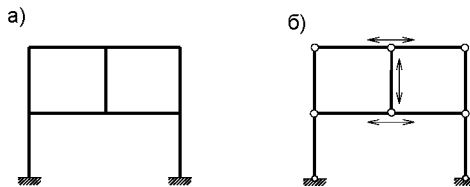


Рис. 9.5

Независимые направления перемещений узлов показаны на этом рисунке стрелками. Общее число неизвестных перемещений равно  $n = n_y + n_l = 6 + 3 = 9$ .

## 9.2. Основная система

Расчет рамы методом перемещений на заданное воздействие начнем с того, что примем сначала неизвестные перемещения узлов равными нулю. Это состояние рамы зафиксируем, для чего закрепим все узлы с неизвестными перемещениями с помощью дополнительных

связей, препятствующих угловым и линейным перемещениям узлов. Очевидно, что число дополнительных угловых связей будет равно  $n_y$ , а число линейных –  $n_l$ .

Связи, препятствующие угловым перемещениям, представляют собой, так называемые, плавающие заделки. Они не позволяют жестким узлам поворачиваться, линейная же подвижность узлов не ограничивается. В такой связи возможен единственный вид усилия – момент. На расчетных схемах рам они изображаются заштрихованными квадратиками. Линейные связи необходимо ставить по направлениям возможных независимых перемещений узлов. Полученная таким образом система носит название основной системы метода перемещений.

В качестве примера на рис. 9.6,а изображена основная система метода перемещений для рамы, показанной на рис. 9.4,а, а на рис. 9.6,б – для рамы, показанной на рис. 9.5,а.

Перемещения узлов основной системы известны: они равны нулю. Поэтому ее называют кинематически определенной.

Анализ структуры рам (рис. 9.6) показывает, что основная система метода перемещений представляется составленной из однопролетных статически неопределимых балок, заземленных по концам, или с заземленным одним концом и шарнирно опертых другим.

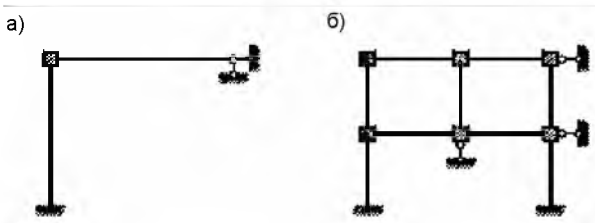


Рис. 9.6

При переводе любой из балок, входящей в состав основной системы, в состояние, соответствующее ее деформированному положению в заданной раме под нагрузкой (рис. 9.7), в ней возникают усилия. В соответствии с принципом независимости действия сил, эти усилия можно представить в виде суммы усилий, вызываемых:

- 1) действием нагрузки, расположенной на балке (стержне);

2) поворотом левого конца стержня (и правого, если стержень заземлен по двум концам) на угол  $Z_A$ , равный истинному значению угла поворота узла  $A$ ;

3) взаимным линейным перемещением  $\Delta_{AB}$  концов стержней по направлению, перпендикулярному к его оси.

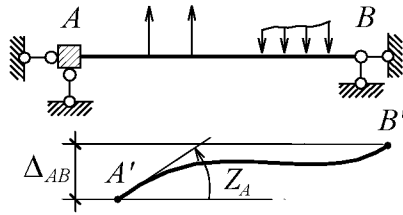


Рис. 9.7

Вспомогательными величинами при расчете рам методом перемещений служат опорные реакции, возникающие в статически неопределимой балке постоянной жесткости при различных воздействиях на нее. Их значения могут быть найдены методом сил. Покажем это.

Пример 1. Определим реакции в опорных связях и построим эпюру изгибающих моментов в балке, загруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (рис. 9.8,а). Приняв основную систему метода сил в виде консольной балки (рис. 9.8,б), построим единичную (рис. 9.8,в) и грузовую (рис. 9.8,г) эпюры изгибающих моментов.

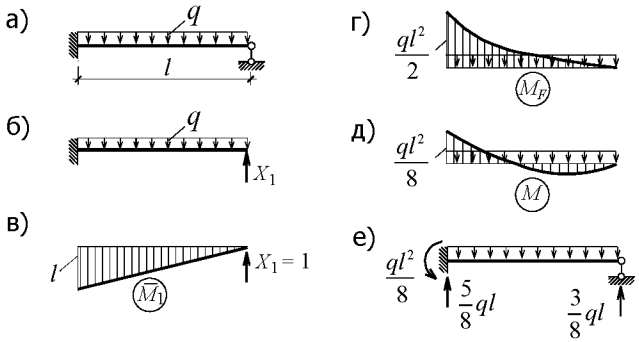


Рис. 9.8

Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов, построенная по выражению  $M = M_F + \overline{M}_1 X_1$ , показана на рис. 9.8,д, а на рис. 9.8,е приведены значения опорных реакций.

**Пример 2.** Рассмотрим загрузку балки сосредоточенной силой  $F$  (рис. 9.9,а), где  $u$  и  $v$  – дробные числа, сумма которых равна единице. Используя основную систему из примера 1, построим эпюру  $M_F$  (рис. 9.9,б).

Вычислим свободный член канонического уравнения:

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} F ul ul \left( l - \frac{1}{3} ul \right) = -\frac{F}{6EJ} u^2 l^3 (3-u).$$

Так как  $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$ , то  $X_1 = \frac{F}{2} u^2 (3-u)$ .

Из условия равновесия  $\sum Y = 0$  следует, что:

$$R_A = F - X_1 = \frac{F}{2} v (3-v^2).$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 9.9,в; на рис. 9.9,г даны значения опорных реакций.

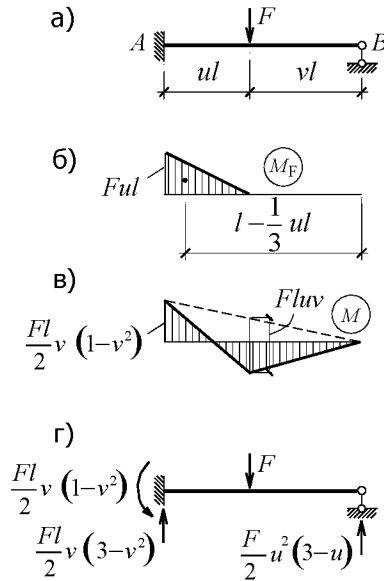


Рис. 9.9

Пример 3. Построим эпюру изгибающих моментов от поворота заземленного конца балки на угол  $\varphi$  (рис. 9.10,а).

Каноническое уравнение метода сил запишем в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = 0.$$

Свободный член можно вычислить по выражению:

$$\Delta_{1c} = -\sum^i R_i c_i,$$

где, как известно из (7.13),  $R_i$  – реакции в связях основной системы, вызванные силой  $X_1 = 1$  (показаны на рис. 9.10,б).

$$\Delta_{1c} = -(l\varphi) = -l\varphi.$$

Это же значение  $\Delta_{1c}$  можно получить из анализа кинематики расчетной схемы: перемещение точки  $B$  противоположно направлению силы  $X_1$  (рис. 9.10,в).

Тогда:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = \frac{3EJ}{l^2} \varphi.$$

Эпюра изгибающих моментов  $M$  и распределение опорных реакций показаны соответственно на рис. 9.10,г,д.

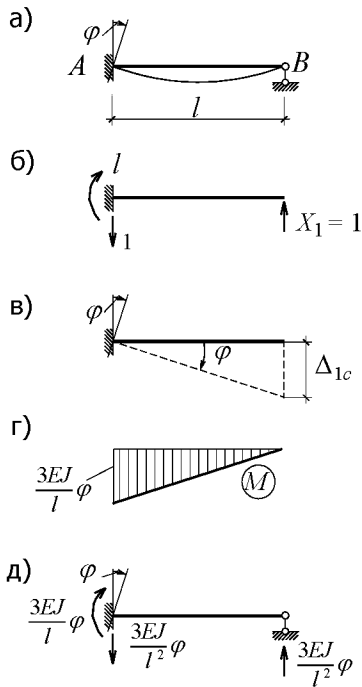


Рис. 9.10

Пример 4. Определим усилия в балке от перемещения защемления на величину  $\Delta$  по направлению, перпендикулярному к ее оси (рис. 9.11,а).



Как и в примере 3 о расчете балки на смещение опор, перемещение  $\Delta_{1c}$  можно найти, например, с помощью формулы (7.13):

$$\Delta_{1c} = -\sum R_c = -(-1 \cdot \Delta) = \Delta.$$

Опорная реакция в точке  $B$ , равная  $X_1$ , найдется как

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = -\frac{3EJ}{l^3} \Delta.$$

Эпюра  $M$  и значения опорных реакций показаны на рис. 9.11,б,в.

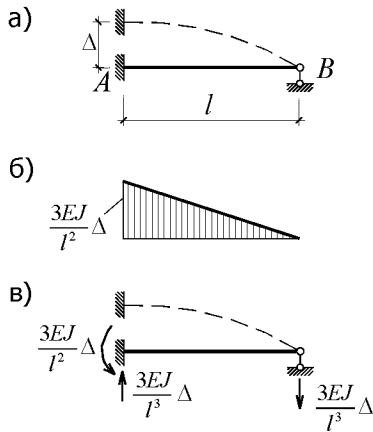


Рис. 9.11

Пример 5. В качестве внешнего воздействия на балку рассмотрим тепловое воздействие (рис. 9.12,а).

Каноническое уравнение метода сил для расчета на изменение температуры имеет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Полагая  $t_1 > t_2$ , изобразим деформированное состояние основной системы на рис. 9.12,б.

Значение  $\Delta_{1t}$  найдем по формуле (7.12). Для изгибаемого стержня:

$$\Delta_{1t} = \frac{\alpha t'}{h} \Omega_M = -\frac{\alpha t'}{h} \frac{l^2}{2},$$

где  $t' = t_1 - t_2$ .

Решение канонического уравнения дает:

$$X_1 = \frac{3EJ \alpha t'}{2hl}.$$

Эпюра изгибающих моментов и опорные реакции показаны на рис. 9.12,в,г.

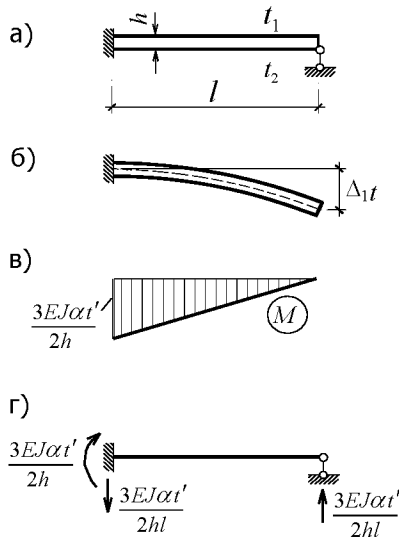


Рис. 9.12

Пример 6. Покажем расчет дважды статически неопределимой балки на поворот защемления в точке  $A$  на угол  $\varphi$  (рис. 9.13,а). Основная система, изображенная на рис. 9.13,б, является симметричной. На рис. 9.13,в,г представлены единичные эпюры изгибающих моментов, а на рис. 9.13,д – состояние основной системы, вызванной поворотом защемления на угол  $\varphi$ . Так как  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ , то канонические уравнения для определения основных неизвестных представляются в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1c} = 0,$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2c} = 0.$$

Коэффициенты при неизвестных равны:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{12EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l}{6EJ}.$$

Вычислим свободные члены уравнений:

$$\Delta_{1c} = -\sum Rc = -\left(-\frac{l}{2}\varphi\right) = \frac{l}{2}\varphi,$$

$$\Delta_{2c} = -\sum Rc = -(1 \cdot \varphi) = -\varphi.$$

Решение уравнений дает:

$$X_1 = -\frac{6EJ}{l^2}\varphi, \quad X_2 = \frac{EJ}{l}\varphi.$$

Эпюры  $M$  и опорные реакции балки показаны на рис. 9.13,е,ж.

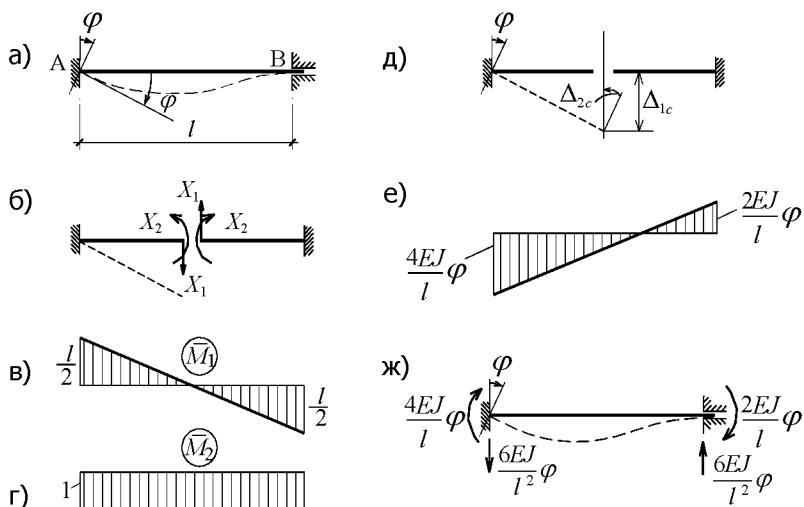


Рис. 9.13

Результаты расчетов рассмотренных и других балок на различные виды воздействий приведены в табл. 9.1. Эта таблица будет использоваться при расчете рам методом перемещений.

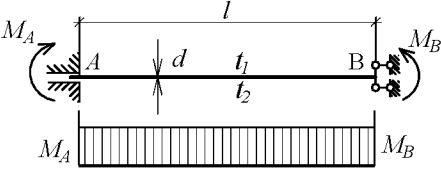
Таблица 9.1

№№ п/п	Схемы балок и эпюры изгибающих моментов	Формулы для определения реакций
1	2	3
1		$i = \frac{EJ}{l}; \quad M_A = \frac{3i}{l};$ $V_A = V_B = \frac{3i}{l^2}$
2		$M_A = 3i;$ $V_A = V_B = \frac{3i}{l}$

1	2	3
3		$M_A = \frac{ql^2}{8};$ $V_A = \frac{5}{8}ql;$ $V_B = \frac{3}{8}ql$
4		$M_A = \frac{Fl}{2}v(1-v^2);$ $V_A = \frac{Fv}{2}(3-v^2);$ $V_B = \frac{Fu^2}{2}(3-u)$
5	<p>Неравномерный нагрев</p>	$M_A = \frac{3EJ\alpha t'}{2d};$ $V_A = V_B = \frac{3EJ\alpha t'}{2dl};$ <p><math>\alpha</math> – коэффициент линейного расширения;  <math>t_1 &gt; t_2</math>; <math>t' = t_1 - t_2</math></p>
6		$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $V_A = V_B = \frac{12i}{l^2}$

1	2	3
7		$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ $V_A = V_B = \frac{6i}{l}$
8		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$
9		$M_A = uv^2Fl;$ $M_B = u^2vFl;$ $V_A = v^2(1+2u)F;$ $V_B = u^2(1+2v)F$
10	<p style="text-align: center;">Неравномерный нагрев</p>	$M_A = M_B = \frac{i\alpha t'l}{d};$ $V_A = V_B = 0;$ <p><math>\alpha</math> – коэффициент линейного расширения;  <math>t_1 &gt; t_2; t' = t_1 - t_2</math></p>

1	2	3
11		$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $V_A = Q_B = \frac{12i}{l^2}$
12		$M_A = M_B = i;$ $V_A = V_B = 0$
13		$M_A = \frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6};$ $V_A = ql; V_B = 0$
14		$M_A = \frac{Fl}{2} u (2-u);$ $M_B = \frac{Fl}{2} u^2;$ $V_A = F; V_B = 0$

1	2	3
15		$M_A = M_B = \frac{i\alpha t'l}{d};$ $V_A = V_B = 0;$ <p><math>\alpha</math> – коэффициент линейного расширения;</p> $t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2$

### 9.3. Канонические уравнения

Исследуем изменение усилий в дополнительных связях основной системы при переводе ее в положение, соответствующее деформированному состоянию заданной системы. От заданного воздействия в них возникают реакции. Если каждой угловой и линейной связи дать перемещение, равное перемещению заданной системы по соответствующему направлению, то реакции в дополнительных связях окажутся равными нулю. Следовательно, реакции в связях являются функциями узловых перемещений  $Z_i$  и нагрузки  $F$ , а условие статической эквивалентности основной и заданной систем сводится к уравнениям вида:

$$R_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, F) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.1)$$

где  $R_i$  – полная реакция в  $i$ -й дополнительной связи, вызванная перемещениями  $Z_i$  и нагрузкой  $F$ .

Число таких уравнений равно, естественно, общему числу неизвестных метода перемещений.

На основании принципа независимости действия сил функциональную зависимость (9.1) можно представить как:

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{im} + R_{iF} = 0, \quad (9.2)$$

где  $R_{ik}$  – реакция в  $i$ -й связи, вызванная смещением связи  $k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) на истинное значение перемещения  $Z_k$ ;  
 $R_{iF}$  – реакция в связи  $i$  от нагрузки.



Величину  $R_{ik}$  запишем в виде:

$$R_{ik} = r_{ik} Z_k, \quad (9.3)$$

где  $r_{ik}$  – реакция в  $i$ -й связи, вызываемая единичным смещением связи  $k$  ( $Z_k = 1$ );

$Z_k$  – истинное значение смещения по направлению связи  $k$ .

Подставляя (9.3) в уравнение (9.2) и принимая  $i = 1, 2, \dots, n$ , получим следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} &= 0, \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nm}Z_n + R_{nF} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Эти уравнения называют каноническими уравнениями метода перемещений. Как следует из предыдущих рассуждений, физический смысл  $i$ -го уравнения заключается в том, что суммарная реакция в дополнительной связи  $i$ , вызываемая перемещениями  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и заданной нагрузкой, равна нулю. При расчете на тепловое воздействие свободные члены уравнений заменяются на  $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$ , а при расчете на смещение опор – на  $R_{1c}, R_{2c}, \dots, R_{nc}$ .

Коэффициенты (реакции)  $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{mm}$ , расположенные на главной диагонали, называют главными; коэффициенты (реакции)  $r_{ik}, i \neq k$ , называют побочными, а свободные члены  $R_{1F}, R_{2F}, \dots, R_{nF}$  – грузовыми реакциями. При определении реакции в  $i$ -й связи ее направление принимается совпадающим с направлением перемещения  $Z_i$ , принятым в основной системе за положительное.

В матричной форме записи уравнения (9.4) имеют вид:

$$RZ + R_F = 0, \quad (9.5)$$

где  $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов канонических уравнений (матрица жесткости системы по направлениям дополнительных связей);

$Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]^T$  – матрица (при расчете на одно загрузление – вектор) неизвестных;

$R_F = [R_{1F}, R_{2F}, \dots, R_{nF}]^T$  – матрица (при расчете на одно загрузление – вектор) свободных членов канонических уравнений (грузовых реакций).

#### 9.4. Статический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений суть реакции в дополнительных связях. Для определения их необходимо знать распределение усилий в основной системе от единичных перемещений этих связей и от нагрузки.

Построение эпюр изгибающих моментов от указанных воздействий покажем на примере рамы, изображенной на рис. 9.14,а. Примем  $EJ_1 = 2EJ$ ,  $EJ_2 = EJ$ .

На этом же рисунке показано и возможное деформированное состояние рамы, что позволяет визуально определить число основных неизвестных. Найдем, однако, число неизвестных по общим правилам. В раме имеется один жесткий узел, следовательно,  $n_y = 1$ . Как следует из кинематического анализа шарнирно-стержневой системы (рис. 9.14,б), степень линейной подвижности ее узлов тоже равна единице. Возможное направление перемещения узлов на рис. 9.14,б показано стрелкой  $\leftrightarrow$ . Общее число неизвестных равно  $n = n_y + n_n = 1 + 1 = 2$ . Основная система показана на рис. 9.14,в.

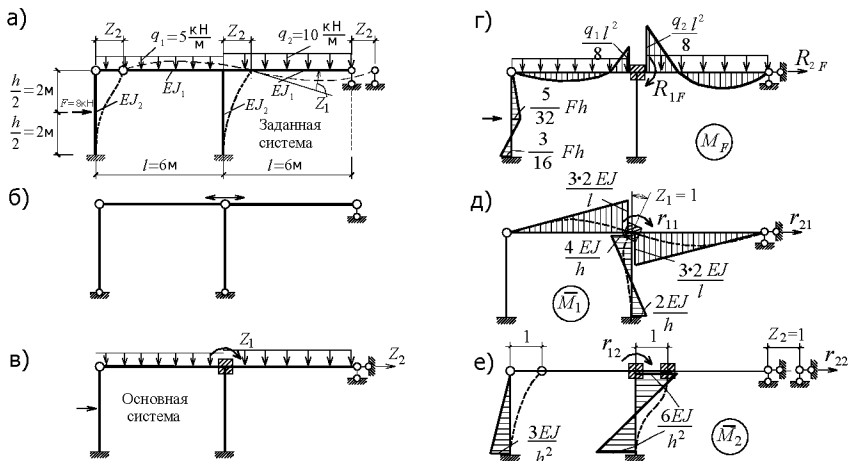


Рис. 9.14

Построение эпюр изгибающих моментов производится с помощью данных табл. 9.1. Эпюра  $M_F$  (грузовая эпюра) и эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  (единичные эпюры) показаны на рис. 9.14, г–е. На рис. 9.14, д, е, кроме того, штриховой линией показаны изогнутые оси балок, что позволяет установить положения растянутых волокон на каждой из них и правильно изобразить эпюру моментов. На этих же рисунках показаны и реакции в связях, их направления приняты положительными (по направлениям положительных перемещений связей). Напомним, что в обозначении реакции  $r_{ik}$  первый индекс ( $i$ ) указывает номер связи, в которой возникает реакция, а второй ( $k$ ) – номер перемещения, вызвавшего эту реакцию. В обозначении  $R_{iF}$  второй индекс ( $F$ ) означает, что причиной реакции является нагрузка  $F$ .

Для определения реакций статическим способом используются уравнения равновесия. В частности, поскольку в “плавающей” заделке может возникнуть только момент, то для определения его следует использовать уравнение равновесия вида  $\sum M = 0$ . Так, для определения  $R_{1F}$  покажем усилия, действующие на узел в вырезанном состоянии (рис. 9.15, а), и составим уравнение:

$$R_{1F} + \frac{q_2 l^2}{8} - \frac{q_1 l^2}{8} = 0, \text{ из которого найдем } R_{1F} = \frac{q_1 l^2}{8} - \frac{q_2 l^2}{8}.$$

Уравнение равновесия для определения  $r_{11}$  (рис. 9.15,б) запишется так:

$$r_{11} - \frac{6EJ}{l} - \frac{6EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0.$$

Следовательно,

$$r_{11} = \frac{12EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}.$$

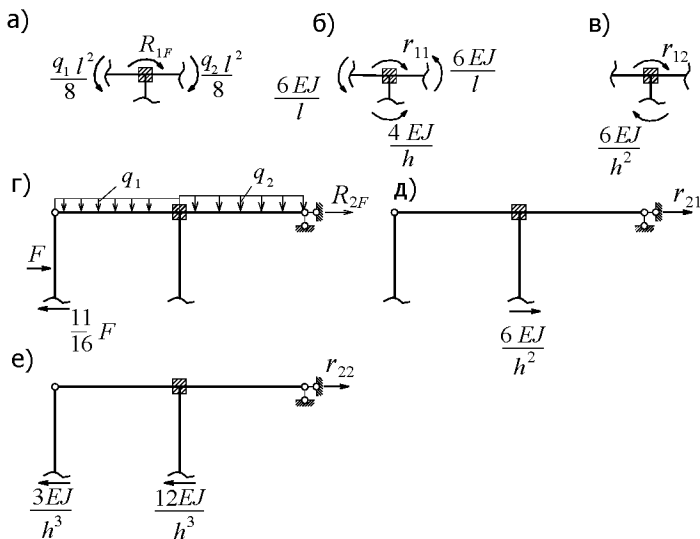


Рис. 9.15

Для определения  $r_{12}$  (рис. 9.15,в) запишем уравнение:

$$r_{12} + \frac{6EJ}{h^2} = 0, \text{ из которого найдем } r_{12} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Реакции в связях, препятствующих поступательным перемещениям узлов, определяются из условий равновесия фрагмента рамы. Все внешние и внутренние силы, действующие на фрагмент, кроме вычисляемой реакции, должны быть известны.

Для рассматриваемого примера при определении реакций  $R_{2F}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  такими фрагментами могут быть схемы, показанные на рис. 9.15,г–е.

Записывая условия равновесия сил, показанных на каждом из этих рисунков, получим уравнения для определения неизвестных. В частности:

– из уравнения  $\sum X = 0$  (рис. 9.15,г) получим:

$$R_{2F} + F - \frac{11}{16}F = 0, \quad R_{2F} = -\frac{5}{16}F;$$

– из уравнения  $\sum X = 0$  (рис. 9.15,д) получим:

$$r_{21} + \frac{6EJ}{h^2} = 0, \quad r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2};$$

– из уравнения  $\sum X = 0$  (рис. 9.15,е) получим:

$$r_{22} - \frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} = 0, \quad r_{22} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

### 9.5. Кинематический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Рассмотрим какую-либо основную систему метода перемещений в единичных состояниях “ $k$ ” и “ $m$ ” (рис. 9.16,а,б). Возможная работа внешних сил состояния “ $k$ ” на перемещениях состояния “ $m$ ” равна:

$$W_{km} = r_{mk} \cdot 1.$$

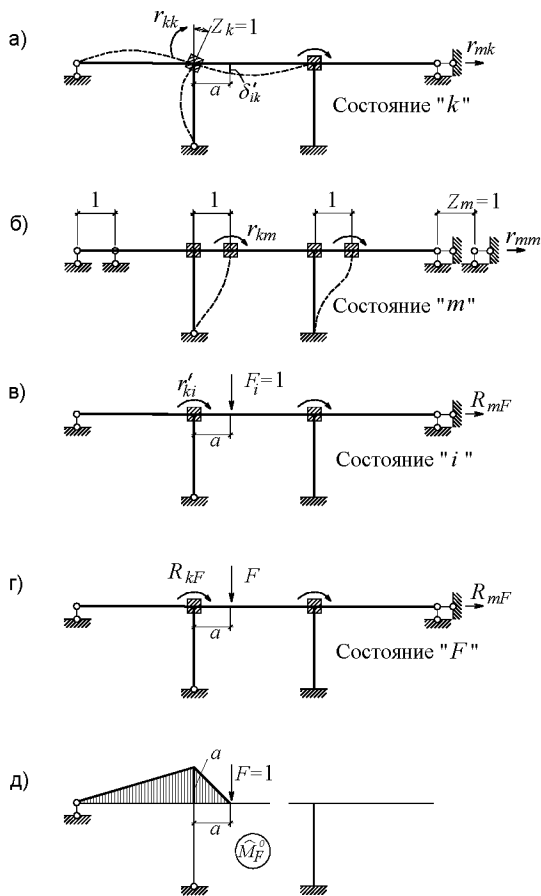


Рис. 9.16

Известно, что возможная работа внешних сил  $W_{km}$  равна (со знаком «минус») возможной работе внутренних сил. Поэтому, выражая работу внутренних сил через изгибающие моменты  $\bar{M}_k$  в состоянии « $k$ » на соответствующих деформациях  $\frac{\bar{M}_m dx}{EJ}$  рамы в состоянии « $m$ », получим:

$$r_{mk} = \sum \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_m dx}{EJ}. \quad (9.6)$$

Вычисление интегралов вида  $\int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_m dx}{EJ}$  сводится к численному интегрированию (см. раздел 7.7), в простейших случаях – к “перемножению” эпюр изгибающих моментов. Следовательно, коэффициенты канонических уравнений метода перемещений можно вычислять так же, как и коэффициенты уравнений метода сил, посредством “перемножения” соответствующих эпюр изгибающих моментов.

Определив возможную работу внешних сил состояния “ $m$ ” на перемещениях состояния “ $k$ ” получим:

$$W_{mk} = r_{km} \cdot 1.$$

На основании теоремы о взаимности работ (7.4) запишем, что:

$$W_{km} = W_{mk},$$

или

$$r_{mk} = r_{km}. \quad (9.7)$$

Получена формальная запись теоремы о взаимности реакций (первая теорема Дж. Рэлея (1842–1919)): **реакция в связи “ $m$ ” от единичного смещения связи “ $k$ ” по своему направлению равна реакции в связи “ $k$ ” от единичного смещения связи “ $m$ ” по своему направлению.**

Рассмотрим далее состояние рамы “ $k$ ” и состояние “ $i$ ”. В первом из них задано перемещение  $Z_k = 1$ , а во втором –  $F_i = 1$ .

Возможная работа внешних сил состояния “ $k$ ” на перемещениях состояния “ $i$ ” (нет перемещений узлов):

$$W_{ki} = 0.$$

Следовательно, равна нулю и работа внутренних сил:

$$\int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i dx}{EJ} = 0.$$

Однако, возможная работа внешних сил состояния “ $i$ ” на перемещениях состояния “ $k$ ” равна:

$$W_{ik} = 1 \cdot \delta'_{ik} + r'_{ki} \cdot 1.$$

По теореме о взаимности работ (7.4) получим:

$$1 \cdot \delta'_{ik} + r'_{ki} \cdot 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta'_{ik} = -r'_{ki}. \quad (9.8)$$

Выражение (9.8) представляет собой формальную запись теоремы о взаимности реакций и перемещений (вторая теорема Дж. Рэлея): **перемещение точки приложения силы  $F_i = 1$  по ее направлению, вызванное единичным перемещением “ $k$ ”-й связи, равно (с обратным знаком) реакции в связи “ $k$ ” от  $F_i = 1$ .**

Размерности реакций и перемещений в этом выражении совпадают. Они устанавливаются так:

$$\text{размерность } r'_{ki} = \frac{\text{размерность реакции в связи “} k \text{”}}{\text{размерность силы } F};$$

$$\text{размерность } \delta'_{ik} = \frac{\text{размерность перемещения, соответствующего силе } F}{\text{размерность перемещения, соответствующего реакции в связи “} k \text{”}}.$$



Для определения свободных членов  $R_{kF}$  рассмотрим основную систему метода перемещений в состояниях “ $k$ ” и “ $F$ ” (грузовое состояние, рис. 9.16,г).

На основании теоремы о взаимности работ  $W_{kF} = W_{Fk}$ . Раскрывая это равенство, получим  $R_{kF} \cdot 1 + F \cdot \delta'_{ik} = 0$ . Отсюда следует, что:

$$R_{kF} = -F \delta'_{ik}.$$

Для определения перемещения  $\delta'_{ik}$  (рис. 9.16,а) в статически неопределимой системе по формуле Мора, как известно, одна из двух “перемножаемых” эпюр изгибающих моментов может быть построена в статически определимой системе, полученной из заданной (в данном случае заданной является основная система метода перемещений). Тогда, обозначив эпюру изгибающих моментов в статически определимой системе от  $F = 1$  через  $\hat{M}_F^0$  (рис. 9.16,д), получим:

$$\delta'_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \hat{M}_F^0 dx}{EJ}. \quad (9.9)$$

Если внешней нагрузкой является группа сил, то под  $\hat{M}_F^0$  необходимо понимать эпюру изгибающих моментов, построенную в основной системе метода сил от обобщенной единичной силы, соответствующей характеру заданного воздействия.

Подставив значение  $\delta'_{ik}$  в выражение для  $R_{kF}$ , получим:

$$R_{kF} = -F \sum \int \frac{\bar{M}_k \hat{M}_F^0 dx}{EJ}.$$

Внося  $F$  под знак интеграла и вводя обозначение  $M_F^0 = F \hat{M}_F^0$ , найдем:

$$R_{kF} = - \sum \int \frac{\bar{M}_k M_F^0 dx}{EJ}. \quad (9.10)$$

Итак, вычисление грузовой реакции  $R_{kF}$  сводится к вычислению выражения (9.10), в котором:  $\bar{M}_k$  – единичная эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе метода перемещений;  $M_F^0$  – эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки, построенная в статически определимой системе, полученной из основной системы метода перемещений с обязательным отбрасыванием “ $k$ ”-й связи или полученная из заданной статически неопределимой системы.

Пример. Определить кинематическим способом реакции  $r_{12}$ ,  $R_{1F}$  и  $R_{2F}$  для рамы, показанной на рис. 9.14.

$$r_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{h}{6EJ} \left[ -\frac{4EJ}{h} \frac{6EJ}{h^2} - \frac{2EJ}{h} \frac{6EJ}{h^2} \right] = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Для определения  $R_{1F}$  построим в статически определимой системе, полученной из основной системы метода перемещений (рис. 9.14,в), эпюру изгибающих моментов  $M_F^{0(a)}$  (рис. 9.17,а). Индекс ( $a$ ) в обозначении  $M_F^{0(a)}$  соответствует варианту основной системы  $a$ ):

$$\begin{aligned} R_{1F} &= -\sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F^{0(a)}}{EJ} dx = \\ &= -\left( -\frac{1}{2EJ} \frac{2}{3} \frac{q_1 l^2}{8} l \frac{3 \cdot 2EJ}{2l} + \frac{1}{2EJ} \frac{2}{3} \frac{q_2 l^2}{8} l \frac{3 \cdot 2EJ}{2l} \right) = \frac{q_1 l^2}{8} - \frac{q_2 l^2}{8}. \end{aligned}$$

Для определения  $R_{2F}$  выберем статически определимую систему, полученную из заданной системы (рис. 9.14,а), и построим эпюру  $M_F^{0(\bar{\sigma})}$  (рис. 9.17,б):

$$R_{2F} = -\sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F^{0(\bar{\sigma})}}{EJ} dx = -\left( \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{Fh}{4} \frac{h}{2} \frac{5EJ}{2h^2} \right) = -\frac{5}{16} F.$$

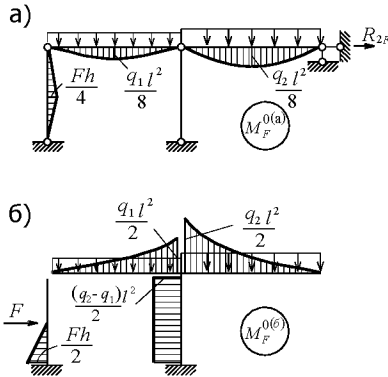


Рис. 9.17

### 9.6. Построение и проверки эпюр $M$ , $Q$ , $N$ в заданной системе от внешней нагрузки

Решив систему канонических уравнений (9.4), найдем значения основных неизвестных метода перемещений. Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов необходимо предварительно построить скорректированные единичные эпюры  $M$  (их называют “исправленными единичными эпюрами” моментов). Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в заданной статически неопределимой системе строится суммированием грузовой эпюры  $M_F$  с “исправленными единичными”, то есть ордината эпюры  $M$  в каждом сечении стержня вычисляется по формуле:

$$M_k = M_{kF} + \bar{M}_{k1} Z_1 + \bar{M}_{k2} Z_2 + \dots + \bar{M}_{kn} Z_n.$$

Основной проверкой правильности окончательной эпюры изгибающих моментов  $M$  в методе перемещений является статическая проверка, сводящаяся, как известно, к проверке равновесия моментов в узлах рамы.

Кроме того, как и в методе сил, для проверки правильности эпюры  $M$  может быть применена кинематическая проверка: результат “перемножения” каждой единичной (или суммарной) эпюры моментов метода сил на окончательную эпюру моментов должен быть равен нулю.

Эпюра поперечных сил  $Q$  строится, как и в методе сил, по эпюре  $M$ , а эпюра продольных сил  $N$  – по эпюре  $Q$ . Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$  производится так же, как и в методе сил (в методе перемещений относится к основной).

**Пример 1.** Построить эпюру изгибающих моментов в раме, изображенной на рис. 9.18,а.

Чтобы уменьшить число неизвестных, при подсчете степени линейной подвижности узлов рамы консоль, как статически определимый фрагмент, отбрасываем. Тогда степень свободы  $W$  шарнирно-стержневой системы (рис. 9.18,б) будет равна единице, то есть  $n_{л} = 1$ . Общее число неизвестных метода перемещений равно  $n = n_y + n_{л} = 2 + 1 = 3$ . На рис. 9.18,в показаны основная система и положительные направления основных неизвестных, а на рис. 9.18,г-ж – грузовая и единичные эпюры моментов.

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} &= 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отметим некоторые особенности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений. Для определения коэффициента  $r_{32}$  запишем условие равновесия фрагмента (рис. 9.18,з) расчетной схемы, взятого из рис. 9.18,е:

$$\sum X = 0; r_{32} - 0,24EJ + 0,375EJ = 0, r_{32} = -0,135EJ.$$

Пользуясь данными рис. 9.18,ж, можно убедиться в том, что соблюдается взаимность реакций:  $r_{23} = r_{32}$ . Действительно, из условия равновесия моментов в узле (рис. 9.18,и) следует, что:

$$r_{23} - 0,24EJ + 0,375EJ = 0, r_{23} = -0,135EJ.$$

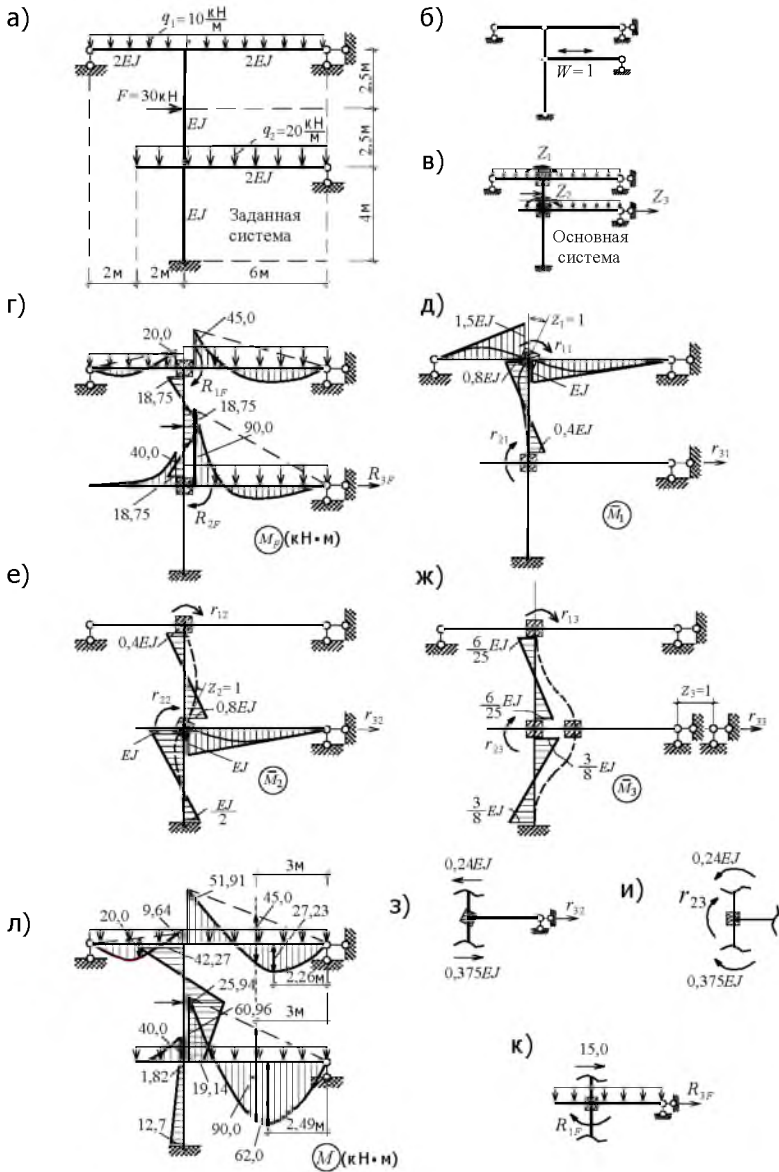


Рис. 9.18

Свободный член  $R_{3F}$  можно определить из уравнения равновесия для фрагмента (рис. 9.18,к), полученного из рис. 9.18,г:

$$\sum X = 0; \quad R_{3F} + 15,0 = 0, \quad R_{3F} = -15,0.$$

В численном виде система канонических уравнений запишется так:

$$\left. \begin{aligned} 3,3 Z_1 + 0,4 Z_2 + 0,24 Z_3 - 6,25 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ 0,4 Z_1 + 2,8 Z_2 - 0,135 Z_3 - 68,75 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ 0,24 Z_1 - 0,135 Z_2 + 0,2835 Z_3 - 15,0 \frac{1}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение:

$$Z_1 = -6,905 \frac{1}{EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = 29,040 \frac{1}{EJ} \text{ рад}, \quad Z_3 = 72,584 \frac{1}{EJ} \text{ м.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 9.18,л.

**Пример 2.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 9.19,а.

Для определения степени линейной подвижности узлов используем шарнирно-стержневую систему (рис. 9.19,б). Общее количество неизвестных равно  $n = n_y + n_d = 2 + 1 = 3$ . Основная система метода перемещений и положительные направления основных неизвестных показаны на рис. 9.19,в. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 9.19,г–ж.

Система канонических уравнений в численной форме записи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 2,6EJ Z_1 + 0,8EJ Z_2 - 0,375EJ Z_3 - 38,0 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ 0,8EJ Z_1 + 3,2EJ Z_2 - 15,0 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ -0,375EJ Z_1 + 0,234375EJ Z_3 - 60,0 \frac{1}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение ее дает:

$$Z_1 = 72,361 \frac{1}{EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = -13,403 \frac{1}{EJ} \text{ рад},$$

$$Z_3 = 371,778 \frac{1}{EJ} \text{ м.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 9.19,з.

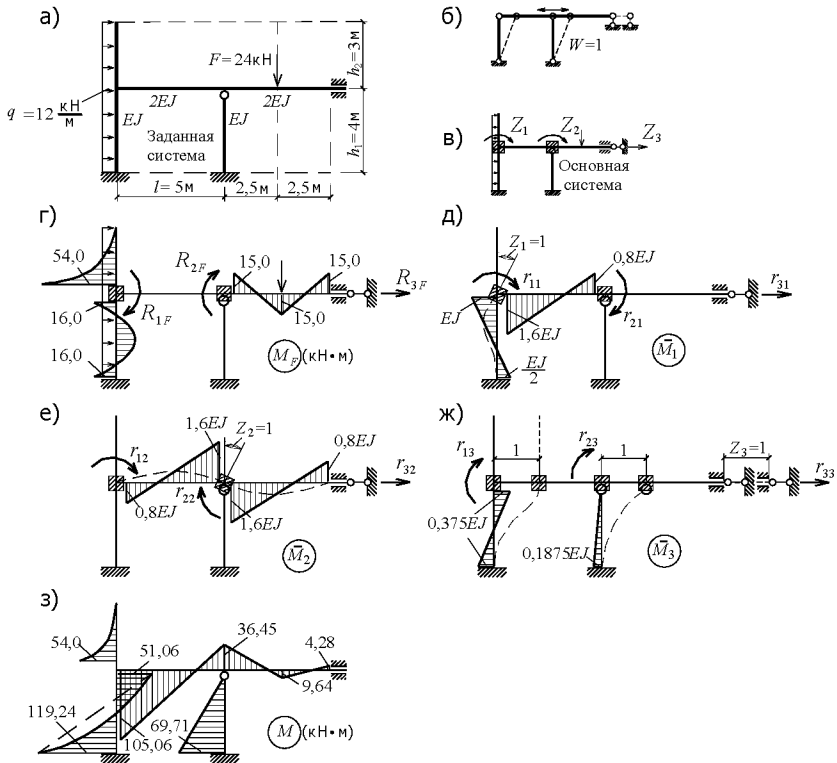


Рис. 9.19

## 9.7. Расчет рам с наклонными элементами

В рамах с наклонными элементами смещение линейной связи какого-нибудь узла на заданное, например, единичное значение, вызывает линейные смещения и других узлов, зависящие не только от заданного смещения, но и от геометрии рамы (расположения ее элементов). Поэтому для построения эпюр изгибающих моментов в основной системе необходимо, прежде всего, найти взаимные перемещения концов стержней, образующих раму. Значения перемещений находятся из анализа перемещений шарнирно-стержневой системы, соответствующей заданной раме.

При построении какой-либо единичной эпюры рассматривается смещение одной связи при неподвижных остальных. Поэтому шарнирно-стержневая система в этом случае представляет собой кинематический механизм с одной степенью свободы. При известном смещении одного узла смещения остальных можно определить из диаграммы перемещений механизма. Поясним это на следующих примерах.

Рассмотрим раму с одной наклонной стойкой (рис. 9.20,а).

Степень кинематической неопределимости ее равна  $n=2$ . Связь, препятствующую линейному перемещению узлов, расположим перпендикулярно к стержню 2–3 (рис. 9.20,б). Для определения взаимных перемещений концов стержней рамы при  $Z_1=1$  придадим шарнирно-стержневой системе возможное по условиям ее закрепления положение 0–1'–2'–3 (рис. 9.20,в). Из прямоугольного треугольника 2–k'–2' следует, что взаимное смещение концов стержня 1–2 равно  $\cos \alpha$ , стержня 0–1 –  $\sin \alpha$ , стержня 2–3 равно 1.

Те же значения перемещений получаются из диаграммы перемещений (рис. 9.20,г). Поясним ее построение.

Опорные узлы 0 и 3 являются неподвижными. Соответствующую им на диаграмме точку называют полюсом. Из этой точки проведем лучи перпендикулярно к стержням 0–1 и 2–3, узлы (0, 3) которых совпадают с полюсом, то есть по направлениям возможных перемещений узлов 1 и 2 (дуги, описываемые точками 1 и 2 при повороте стержней вокруг опорных точек 0 и 3, заменяются касательными к ним в этих точках). На луче, перпендикулярном к стержню 2–3, на расстоянии, равном единице, будет лежать точка 2'.



Для определения положения точки 1' необходимо провести из точки 2' линию, перпендикулярную стержню 1–2. Отрезки 1'–2' и 1'–0 на диаграмме равны взаимным смещениям концов стержней 1–2 и 0–1 при  $Z_1=1$ .

**Пример 1.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 9.20,а, полагая изгибные жесткости всех стержней равными,  $\alpha = 60^\circ$ . Длина стержня 2–3 равна  $l_{2-3} = 8/\sqrt{3}$  м.

Для построения единичной эпюры  $\bar{M}_1$  (рис. 9.20,д) используем найденные ранее значения взаимных линейных смещений концов стержней. Эпюры  $\bar{M}_2$  и  $M_F$  показаны на рис. 9.20,е,ж.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяются статическим или кинематическим методами. Покажем, например, определение  $r_{11}$  и  $R_{1F}$ :

$$r_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3} EJ}{32} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} EJ}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 EJ}{50} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3 EJ}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9 EJ}{32} \cdot \frac{8}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9 EJ}{32} \cdot 2 \right) = 0,1629 EJ.$$

Это же значение  $r_{11}$  можно получить статическим методом из уравнения равновесия узла 2 (рис. 9.20,з). Поперечную и продольную силы в стержне 1–2 получим из уравнения равновесия для узла 1. Множитель  $EJ$  в обозначениях на рисунке поперечных и продольных сил опущен:

$$\sum F_{n-n} = 0,$$

$$r_{11} = \left( 0,1218 + 0,0406 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,012 \cdot \frac{1}{2} \right) EJ = 0,1629 EJ.$$

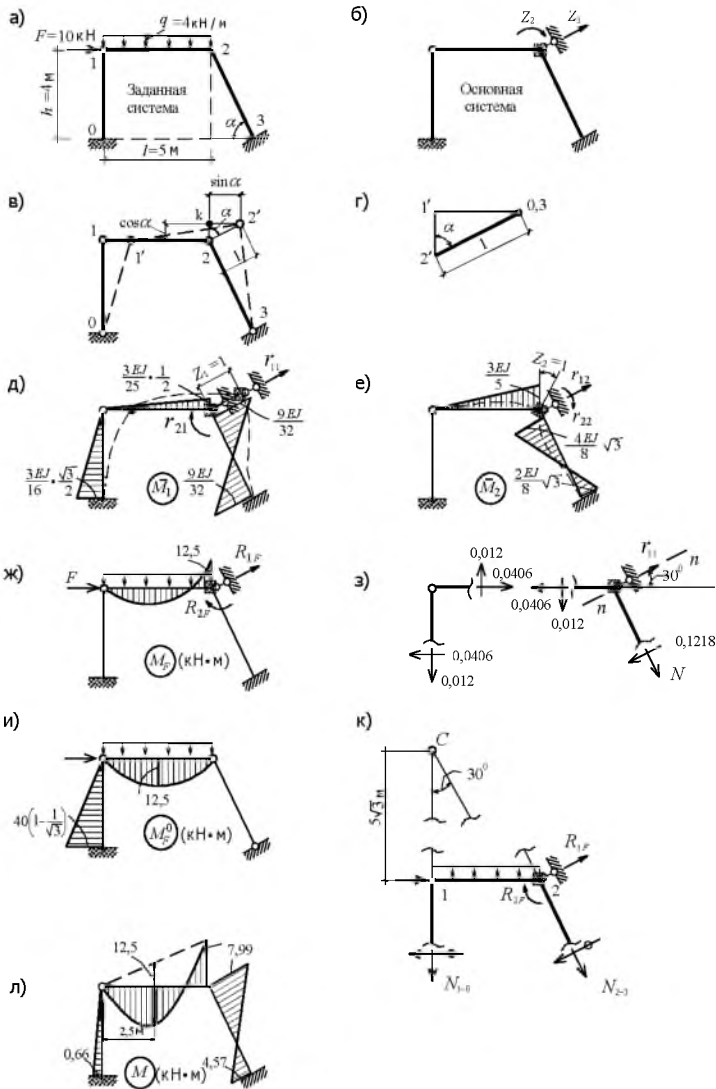


Рис.9.20

Для вычисления  $R_{1F}$  кинематическим методом используем эпюру изгибающих моментов  $M_F^0$  (рис. 9.20,и), построенную в основной системе метода сил:

$$R_{1F} = -\sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F^0 dx}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left[ -\frac{2}{3} \cdot 12,5 \cdot 5 \cdot \frac{3EJ}{100} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 40 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} EJ}{32} \right] = -2,41.$$

Из уравнения равновесия  $\sum M_c = 0$  для фрагмента рамы (рис. 9.20,к) найдем то же значение  $R_{1F}$ .

Запишем канонические уравнения в численном виде.

$$\left. \begin{aligned} 0,1629Z_1 - 0,2213Z_2 - 2,41 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ -0,2213Z_1 + 1,4660Z_2 + 12,50 \frac{1}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение их даст:

$$Z_1 = 4,0409 \frac{1}{EJ} \text{ м}, \quad Z_2 = -7,9168 \frac{1}{EJ} \text{ рад.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 9.20,л.

**Пример 2.** Расчетная схема рамы изображена на рис. 9.21,а. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , полагая жесткости всех стержней на изгиб равными. Как и в предыдущих примерах, жесткости стержней на растяжение-сжатие  $EA \rightarrow \infty$  (продольные деформации стержней не учитываются).

Степень кинематической неопределимости рамы равна трем. Основная система показана на рис. 9.21,б. Грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  показаны на рис. 9.21,д-ж. Чтобы построить эпюру  $\bar{M}_3$ , необходимо определить взаимные смещения концов стержней.

Дадим шарнирно-стержневой системе (рис. 9.21,в), соответствующей заданной раме, смещение линейной связи на  $Z_3 = 1$ , покажем новое положение узлов  $3', 4', 5'$  и построим диаграмму перемещений (рис. 9.21,г). Длины отрезков  $1-4'$  и  $2-5'$  равны единице (стойки  $1-4$  и  $2-5$  имеют разную высоту, но так как они параллельные, то узлы  $4$  и  $5$  перемещаются по горизонтали на равные отрезки). Отрезок  $0-3'$  равен перемещению узла  $3$  по направлению, перпендикулярному к стержню  $0-3$ ; взаимное смещение по вертикали концов стержня  $3-4$  определяется длиной отрезка  $3'-4'$ .

Эпюра  $\bar{M}_3$  представлена на рис. 9.21,з.

Коэффициент  $r_{33}$  канонического уравнения, а также свободный член  $R_{3F}$  удобно вычислять кинематическим методом. Один из возможных вариантов эпюры  $M_F^0$  для определения  $R_{3F}$  показан на рис. 9.21,и.

После определения коэффициентов и свободных членов система канонических уравнений запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} 1,2155 Z_1 + 0,25 Z_2 - 0,167785 Z_3 - 44,17 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ 0,25 Z_1 + 1,30 Z_2 - 0,193125 Z_3 + 106,67 \frac{1}{EJ} &= 0, \\ -0,167785 Z_1 - 0,193125 Z_2 + 0,194830 Z_3 - 40,0 \frac{1}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ее решение:

$$Z_1 = 78,593 \frac{1}{EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = -66,389 \frac{1}{EJ} \text{ рад},$$

$$Z_3 = 207,182 \frac{1}{EJ} \text{ м.}$$

Окончательные эпюры усилий  $M, Q$  и  $N$  изображены на рис. 9.21,к-м.

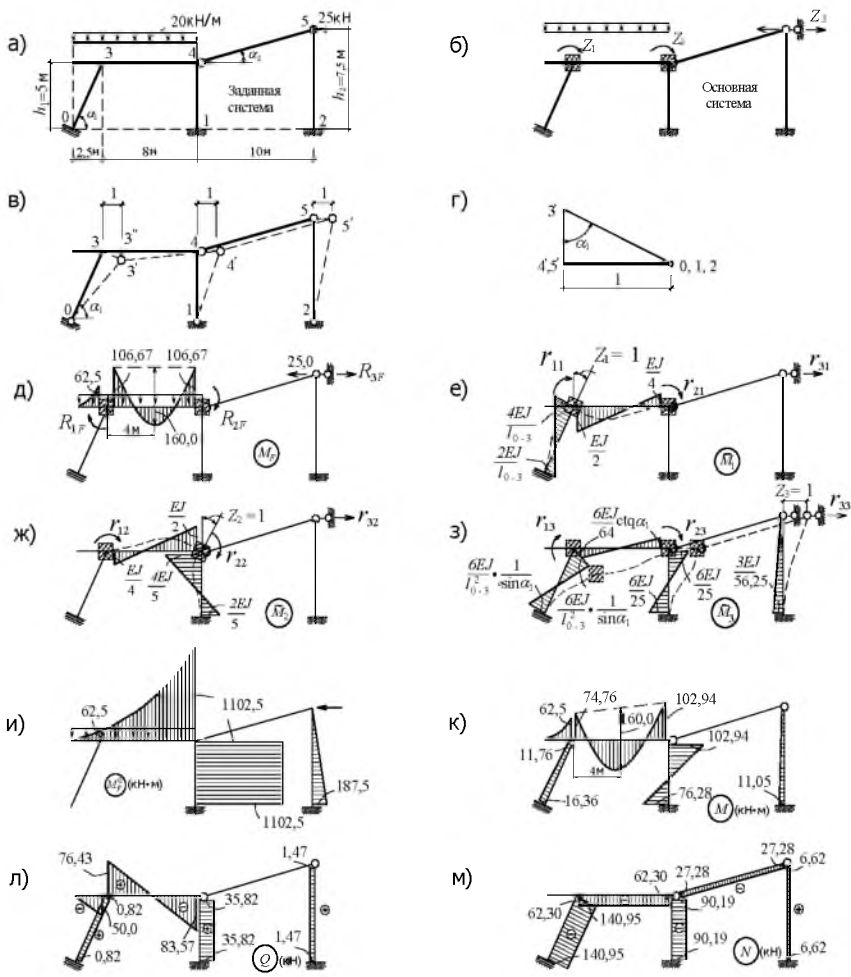


Рис. 9.21

### 9.8. Использование симметрии системы

Известно, что любую нагрузку, действующую на симметричную систему (рис. 9.22,а), можно представить в виде суммы симметричной и反对称ной составляющих.

Первой из них соответствует симметричная форма деформирования рамы (рис. 9.22,б), а второй –反对称ная (рис. 9.22,в).

Следовательно, углы поворота узлов заданной рамы (рис. 9.22,а) можно найти как сумму или разность симметричных и обратносимметричных (кососимметричных) неизвестных:

$$\varphi_1 = Z_1 + Z_2, \quad \varphi_2 = Z_1 - Z_2.$$

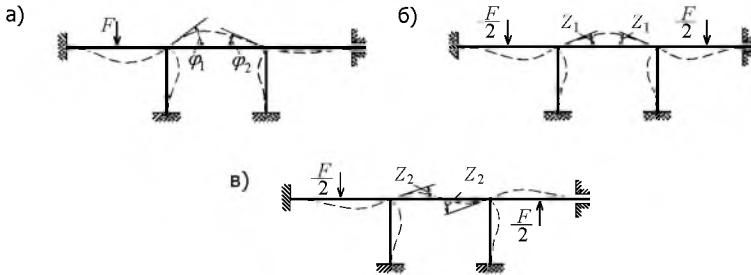


Рис. 9.22

Аналогичные соотношения имеют место и для линейных перемещений. Например, для рамы (рис. 9.23,а) перемещения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , используя симметричное (рис. 9.23,б) и обратносимметричное (рис. 9.23,в) нагружения, можно вычислять по выражениям:  $\Delta_1 = Z_1 + Z_2$ ,  $\Delta_2 = Z_1 - Z_2$ , а углы поворота узлов как:

$$\varphi_1 = -Z_3 + Z_4, \quad \varphi_2 = Z_3 + Z_4.$$

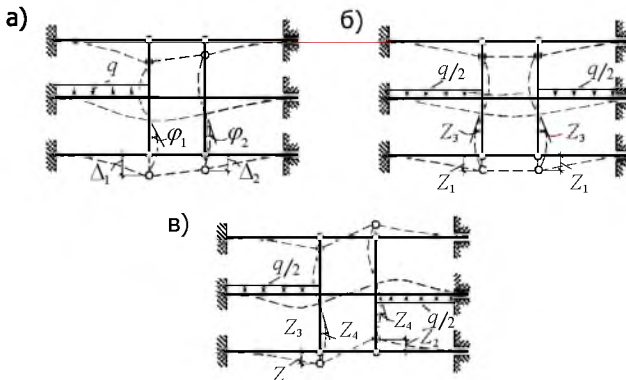


Рис. 9.23

Эти соотношения показывают, что неизвестные перемещения узлов  $\Delta_1, \Delta_2, \varphi_1$  и  $\varphi_2$  («старые» неизвестные) можно выразить через «новые» неизвестные  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ , которые представляют собой групповые перемещения симметрично расположенных узлов. Введение в расчет новых неизвестных приводит к значительным упрощениям в расчете. Единичные эпюры усилий от групповых перемещений разделяются только на симметричные или обратносимметричные. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, и поэтому система канонических уравнений распадается на две независимые подсистемы уравнений, одна из которых содержит только симметричные неизвестные, а вторая – обратносимметричные. Изложенный способ расчета рам называют способом группировки неизвестных перемещений.

Заметим, что если на оси симметрии имеется стержень рамы (положение его совпадает с осью симметрии), то симметричные неизвестные не вызывают в нем изгибающих моментов и, значит, результат “перемножения” симметричной эпюры на обратносимметричную будет равен нулю.

Коэффициенты  $r_{ik}$  и свободные члены  $R_{iF}$  в канонических уравнениях суть обобщенные реакции, вызываемые смещением групповых (парных) неизвестных. Определяются они статическим или кинематическим способом.

Пример 1. Расчетная схема рамы изображена на рис. 9.24,а. Полагая изгибные жесткости всех стержней равными  $EJ$ , построить окончательную эпюру изгибающих моментов.

Степень кинематической неопределимости рамы  $n = n_y + n_\pi = 2 + 3 = 5$ . На рис. 9.24,б показаны основная система и положительные направления групповых неизвестных. Единичные эпюры изгибающих моментов и грузовая эпюра представлены на рис. 9.24,в–ж. Эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_3$  являются симметричными, а эпюры  $\bar{M}_2, \bar{M}_4$  и  $\bar{M}_5$  – обратносимметричными. Вследствие их ортогональности, система из пяти канонических уравнений метода перемещений разделяется на подсистему, содержащую симметричные неизвестные:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{13}Z_3 + R_{1F} &= 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{33}Z_3 + R_{3F} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

и подсистему с обратносимметричными неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} r_{22}Z_2 + r_{24}Z_4 + r_{25}Z_5 + R_{2F} &= 0, \\ r_{42}Z_2 + r_{44}Z_4 + r_{45}Z_5 + R_{4F} &= 0, \\ r_{52}Z_2 + r_{54}Z_4 + r_{55}Z_5 + R_{5F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

После определения единичных и грузовых реакций (советуем читателю найти их) эти подсистемы уравнений будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} 5,0Z_1 + \frac{1}{12}Z_3 + 90,0\frac{1}{EJ} &= 0, \\ \frac{1}{12}Z_1 + \frac{199}{288}Z_3 + 6,0\frac{1}{EJ} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 5,0Z_2 - \frac{1}{12}Z_4 - \frac{2}{3}Z_5 &= 0, \\ -\frac{1}{12}Z_2 + \frac{199}{288}Z_4 - \frac{2}{9}Z_5 - 6,0\frac{1}{EJ} &= 0, \\ -\frac{2}{3}Z_2 - \frac{2}{9}Z_4 + \frac{2}{9}Z_5 - 14,0\frac{1}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив их, получим:

$$Z_1 = -17,8912\frac{1}{EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = 41,1114\frac{1}{EJ} \text{ рад},$$

$$Z_3 = -6,5257\frac{1}{EJ} \text{ м}, \quad Z_4 = 108,445\frac{1}{EJ} \text{ м}, \quad Z_5 = 294,78\frac{1}{EJ} \text{ м}.$$



Окончательная эпюра изгибающих моментов строится по выражению:

$$M = M_F + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + \bar{M}_4 Z_4 + \bar{M}_5 Z_5.$$

Она изображена на рис. 9.24,и.

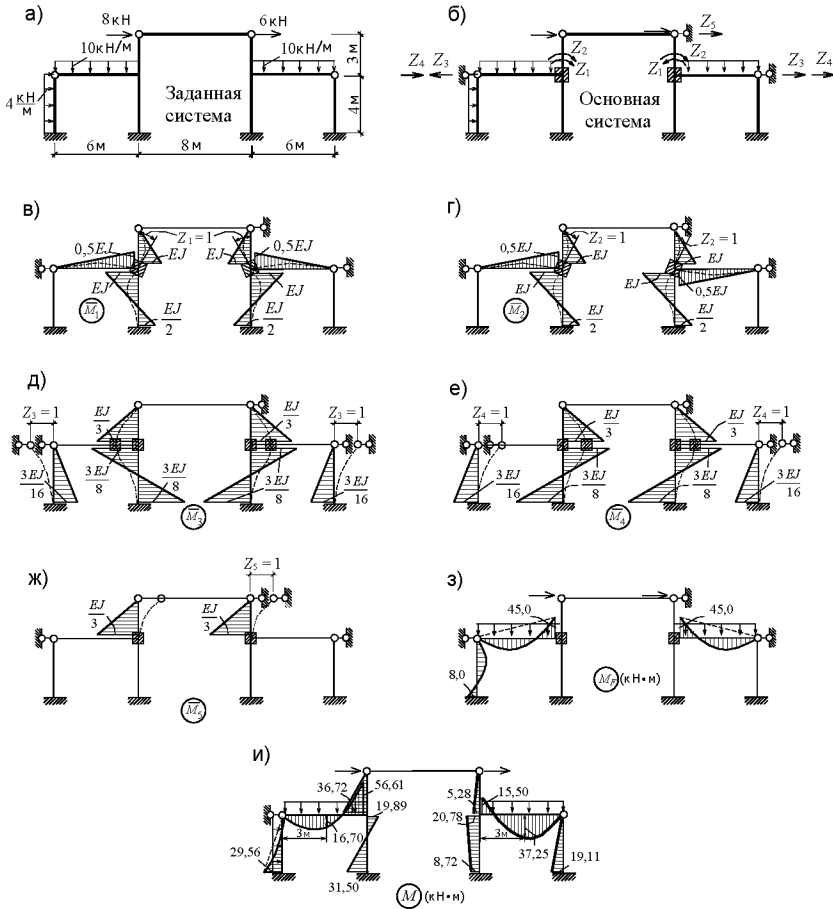


Рис. 9.24

Анализируя записанные в этом примере подсистемы уравнений, можно сделать заключение: если на симметричную раму оказывается симметричное воздействие, то свободные члены в системе с обратносимметричными неизвестными будут равны нулю и, значит, обратносимметричные неизвестные будут равны нулю (из решения системы однородных уравнений); если же внешнее воздействие будет обратносимметричным, то нулевыми становятся симметричные неизвестные.

Как следствие способа группировки неизвестных, отметим, что расчет симметричной системы на симметричную или обратносимметричную нагрузки можно выполнять для одной половины расчетной схемы. В зависимости от воздействия на второй половине схемы распределение усилий будет симметричным по отношению к первой или обратносимметричным. В частности, если ось симметрии пересекает некоторый стержень, то при расчете на действие симметричной нагрузки в этом сечении необходимо поставить подвижное защемление. Например, для рамы, показанной на рис. 9.22,а, соответствующая “полурама” представлена на рис. 9.25,а. При действии обратносимметричной нагрузки в этом сечении изогнутая ось стержня имеет перегиб и, кроме того, перемещение сечения по вертикали (по направлению, перпендикулярному оси стержня) равно нулю. Поэтому на расчетной схеме “полурамы” в указанном сечении ставится шарнирно-подвижная опора (рис. 9.25,б).

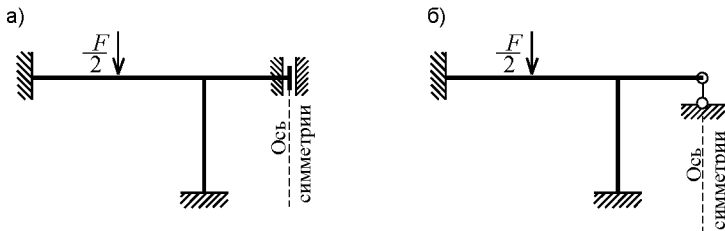


Рис. 9.25

### 9.9. Расчет рам на тепловое воздействие

Расчет ведется на изменение температуры системы по отношению к температуре ее начального состояния. Принимая линейный закон изменения температуры по высоте сечения стержня, тепловое воздействие, как и силовое, можно представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной составляющих этого воздействия.

Пусть, например, для стержня, имеющего симметричное поперечное сечение высотой  $d$  (рис. 9.26,а),  $t_1 > t_2$ , то есть верхние волокна стержня являются “холодными”, нижние – “теплыми”.

Разложим это нагружение на симметричное (рис. 9.26,б), при котором температура верхнего и нижнего волокон будет одинаковой и равной  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$  (имеет место равномерный нагрев, удлинение стержня равно  $\alpha t l$ ), и обратносимметричное (рис. 9.26,в), для которого температура верхнего волокна равна  $-\frac{t_1 - t_2}{2} = -\frac{t'}{2}$ , а ниж-

него  $\frac{t'}{2}$ . При обратносимметричном нагреве температура по оси стержня равна нулю. Стержень от такого воздействия не удлиняется, а только искривляется. Значение перемещения любой его точки определяется по правилам, изложенным в разделе 7.8.

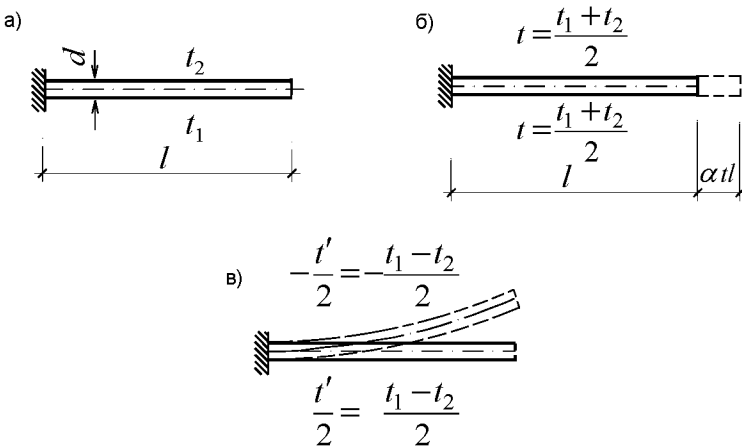


Рис. 9.26

Аналогичное разложение теплового воздействия можно сделать и для стержней с условиями закрепления его концов, соответствующими закреплениям стержней в основной системе метода перемещений.

При симметричном распределении температур, вследствие удлинения (укорочения) стержней, узлы основной системы перемещаются, что приводит к взаимным смещениям концов стержней и вызывает изгибные деформации их.

При обратносимметричном распределении температур узлы основной системы не смещаются, но так как связи по концам стержней препятствуют свободному перемещению их, то в каждом из них появляются усилия. Эпюры моментов для таких стержней представлены в табл. 9.1 (строки 5, 10, 15). Техника их построения приведена в разделе 9.2 (пример 5).

Канонические уравнения для расчета рам на изменение температуры имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1t} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2t} &= 0, \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Для определения свободных членов канонических уравнений  $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$ , как следует из предыдущих рассуждений, необходимо построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от симметричного воздействия ( $M'_i$ ) и от обратносимметричного ( $M''_i$ ). Используя их, найдем, что:

$$R_{it} = R'_{it} + R''_{it}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $R'_{it}, R''_{it}$  – реакции в  $i$ -й дополнительной связи, вызываемые этими воздействиями.

Окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = M'_i + M''_i + \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n.$$

**Пример 1.** Построить окончательную эпюру изгибающих моментов в раме (рис. 9.27,а) от указанного теплового воздействия, приняв жесткости стержней одинаковыми и равными  $60 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ ,

высоту сечения  $d = 0,6$  м, коэффициент теплового линейного расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  град<sup>-1</sup>.

Степень кинематической неопределенности рамы равна двум. На рис. 9.27,б показано симметричное распределение температур по каждому стержню, а на рис. 9.27,в – обратносимметричное.

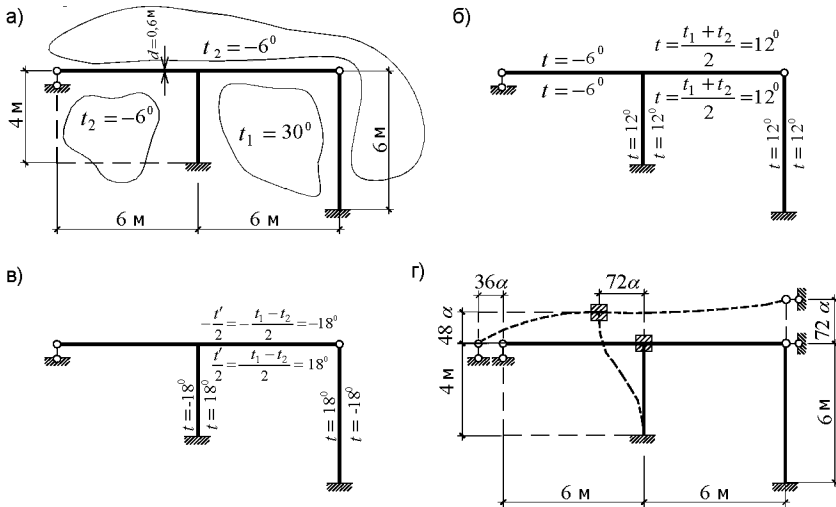


Рис. 9.27

Система канонических уравнений в этом случае запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1t} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2t} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для построения эпюры моментов  $M'_i$  от симметричного воздействия температур необходимо сначала определить удлинение каждого стержня по формуле  $\Delta = \alpha t l$ , а затем изобразить на схеме рамы новое положение узлов и деформированное положение стержней в основной системе (рис. 9.27,г). Зная взаимные перемещения

концов стержня по направлению, перпендикулярному его оси, можно, пользуясь данными табл. 9.1 (строки 1, 6, 11), построить для него эпюру изгибающих моментов. Эпюра  $M'_t$  показана на рис. 9.28,а.

Для построения эпюры  $M''_t$  (рис. 9.28,б) в этом примере использованы из табл. 9.1 строки 5 и 10. На каждом стержне рамы растянутыми волокнами являются более “холодные”. Именно с этой стороны стержня и располагается эпюра изгибающих моментов.

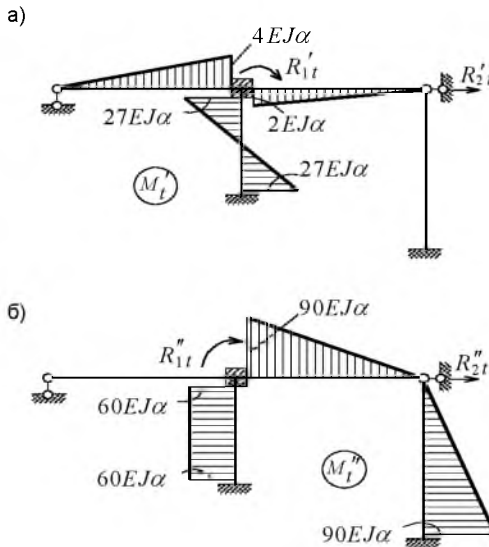


Рис. 9.28

Единичные эпюры моментов показаны на рис. 9.29,а,б.

Определив реактивные усилия в дополнительных связях, запишем систему канонических уравнений в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} 2Z_1 - 0,375Z_2 + 3\alpha &= 0, \\ -0,375Z_1 + 0,2013888Z_2 - 28,5\alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение:  $Z_1 = 38,4636\alpha$  рад;  $Z_2 = 213,1391\alpha$  м.

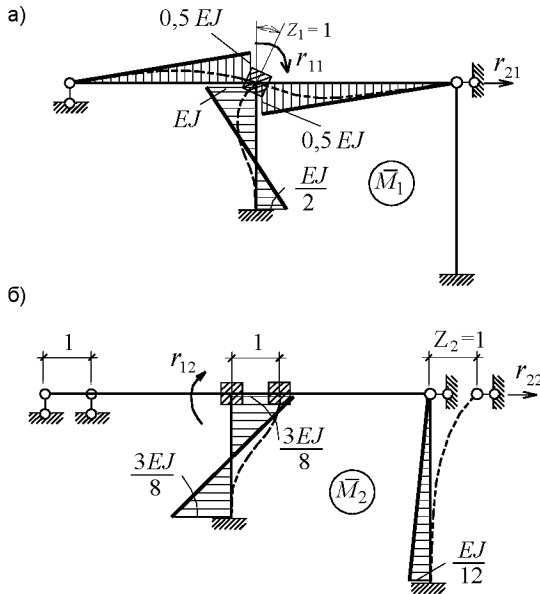


Рис. 9.29

Эпюра изображена на рис. 9.30. В скобках указаны значения ординат моментов (в  $\text{кН} \cdot \text{м}$ ) при  $EJ = 60 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$  и  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$ .

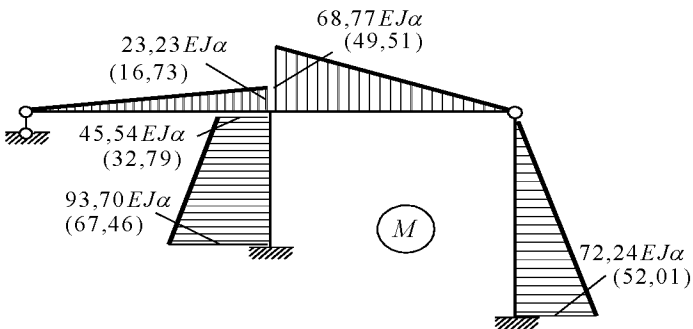


Рис. 9.30

Правильность построенной эпюры изгибающих моментов проверяется с помощью условий равновесия любых фрагментов рамы, в частности, узлов рамы. Как правило, этой проверки достаточно для заключения о правильности эпюры  $M$ .

Однако дополнительно к ней можно использовать и другую проверку: результат “перемножения” единичной (или суммарной единичной) эпюры моментов метода перемещений на окончательную эпюру должен быть равен нулю, то есть:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S M dx}{EJ} = 0.$$

### 9.10. Расчет рам на смещение опор

Отличительная особенность расчета рам на смещение опор связана с построением в основной системе метода перемещений эпюры изгибающих моментов. В дальнейшем будем обозначать ее через  $M_c$ .

При этом построении надо помнить о том, что плавающие заделки в основной системе препятствуют только повороту жестких узлов, линейные же смещения узлов они допускают. Поэтому влияние линейного (горизонтального или вертикального) смещения какой-либо опорной связи может распространяться на множество элементов рамы, примыкающих к смещаемой стойке или смещаемому ригелю.

При построении эпюры  $M_c$  рекомендуется использовать принцип независимости действия сил, т.е. вначале следует построить эпюры моментов от смещения каждой опорной связи в отдельности на заданное значение, а затем – суммарную эпюру  $M_c$ , с помощью которой и определяются свободные члены  $R_{ic}$  канонических уравнений:

$$R\vec{z} + \vec{R}_c = 0.$$

Последующий алгоритм расчета остается таким же, как и при расчете рам на силовое воздействие.

Основная проверка правильности окончательной эпюры изгибающих моментов сводится к проверке выполнения условий равновесия узлов и других частей рамы.



Как и при расчете на тепловое воздействие, результат “перемножения” суммарной единичной эпюры моментов  $\bar{M}_S$  метода перемещений на окончательную эпюру моментов должен быть равен нулю, то есть:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S M dx}{EJ} = 0.$$

Заметим, что независимо от того, каким методом строилась окончательная эпюра изгибающих моментов, для проверки ее правильности можно применить кинематическую проверку, использующуюся в методе сил. В частности, при расчете рам на смещение опор результат “перемножения” единичной (или суммарной единичной) эпюры моментов метода сил на окончательную эпюру моментов должен быть равен сумме свободных членов канонических уравнений метода сил, взятой с обратным знаком:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S M dx}{EJ} = -\sum \Delta_{ic},$$

где  $\bar{M}_S$  – суммарная единичная эпюра в основной системе метода сил.

Пример 1. Проследим особенности расчета на смещение опор рамы, показанной на рис. 9.31,а. Пусть  $c_1 = 0,02$  м,  $c_2 = 0,04$  м и  $c_3 = 0,1$  рад. Изгибные жесткости всех стержней примем равными.

Основная система и основные неизвестные метода перемещений показаны на рис. 9.31,б.

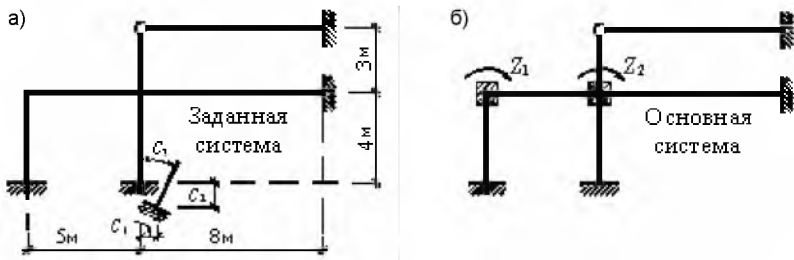


Рис. 9.31

Единичные эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 9.32,а,б.

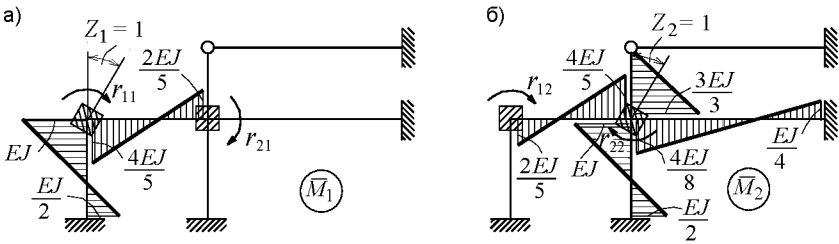


Рис. 9.32

На рис 9.33,а,б,в показаны грузовые эпюры моментов, вызываемые смещениями опорных связей соответственно на  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ .

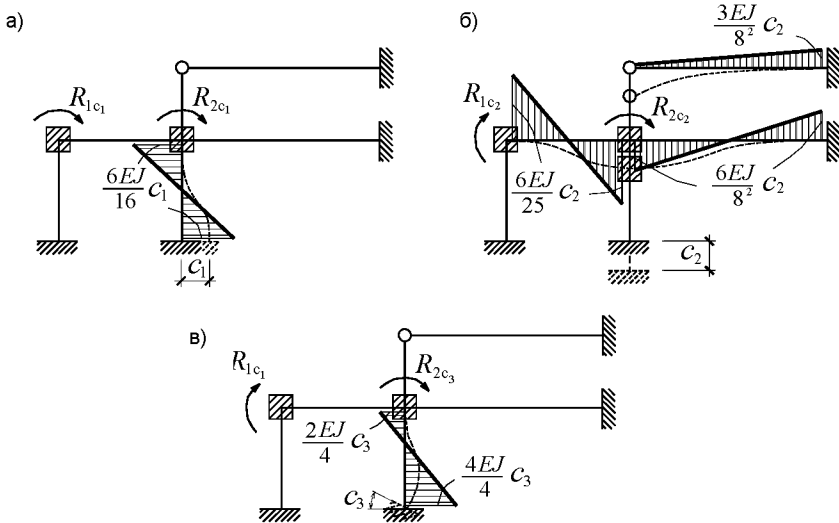


Рис. 9.33

Построение их, также как и единичных, выполняется с помощью данных табл. 9.1. Эпюра  $M_c$  (в этом примере не показана) строится по выражению:

$$M_c = M_{c_1} + M_{c_2} + M_{c_3}.$$

Канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1c} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2c} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где

$$R_{1c} = R_{1c_1} + R_{1c_2} + R_{1c_3}, \quad R_{2c} = R_{2c_1} + R_{2c_2} + R_{2c_3}.$$

После определения значений коэффициентов и свободных членов решим систему уравнений и найдем:

$$Z_1 = 0,00905 \text{ рад}; \quad Z_2 = -0,01675 \text{ рад}.$$

Окончательная эпюра моментов показана на рис. 9.34.

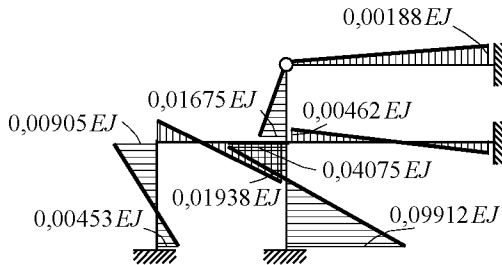


Рис. 9.34

### 9.11. Построение линий влияния усилий

Методология построения линий влияния усилий в статически неопределимых системах сводится к реализации формул, по которым они вычисляются. При расчете рам методом перемещений усилия вычисляются по формуле:

$$S_k = S_{kF} + \sum_{i=1}^n \bar{S}_{ki} Z_i.$$

В этом выражении справа от знака равенства переменными величинами, зависящими от положения силы  $F = 1$ , являются  $S_{kF}$  и  $Z_i$ , а  $\bar{S}_{ki}$  – это усилие в сечении  $k$  основной системы, вызываемое смещением  $i$ -й связи на единицу. Следовательно, применительно к задаче о построении линий влияния эту запись можно представить в виде:

$$\text{л.вл. } S_k = \text{л.вл. } S_{kF} + \sum_{i=1}^n \bar{S}_{ki} \quad (\text{л.вл. } Z_i),$$

где л.вл.  $S_{kF}$  – линия влияния усилия  $S_k$  в основной системе метода перемещений. (Обозначение усилия  $S_{kF}$  можно заменить на  $S_k^0$ ).

Построение ее особых трудностей не вызывает. Действительно, в основной системе концы каждого стержня в узлах зашлемлены или шарнирно оперты и поэтому нагрузка, расположенная на нем, не влияет на усилия в смежных стержнях. Как следствие, линия влияния  $S_{kF}$  будет иметь ординаты, не равные нулю, только на том стержне, к которому относится сечение  $k$ . Определив  $S_k$  по данным табл. 9.1 при различных положениях силы  $F = 1$ , построим л.вл.  $S_k^0$ .

Более сложной, в общем случае, является задача о построении л.вл.  $Z_i$ . Построение их на основе статического метода сводится к определению значений основных неизвестных при положениях груза  $F = 1$  в различных характерных сечениях.

Рассмотрим следующий пример. Рама, изображенная на рис. 9.35,а, является один раз кинематически неопределимой. Каноническое уравнение  $r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0$  при  $F = 1$  может быть переписано в виде

$$r_{11}Z_1 + r_{1F} = 0. \quad \text{Следовательно, } z_1 = -\frac{r_{1F}}{r_{11}}.$$

Эпюра  $M_1$  в основной системе показана на рис. 9.35,б. Из уравнения равновесия  $\sum M_B = 0$  следует, что  $r_{11} = \frac{11EJ}{l}$ .

Рассмотрим грузовые состояния основной системы. При положениях  $F = 1$  левее узла  $B$  (рис. 9.35,в):

$$r_{1F} = \frac{l}{2}v(1-v^2).$$

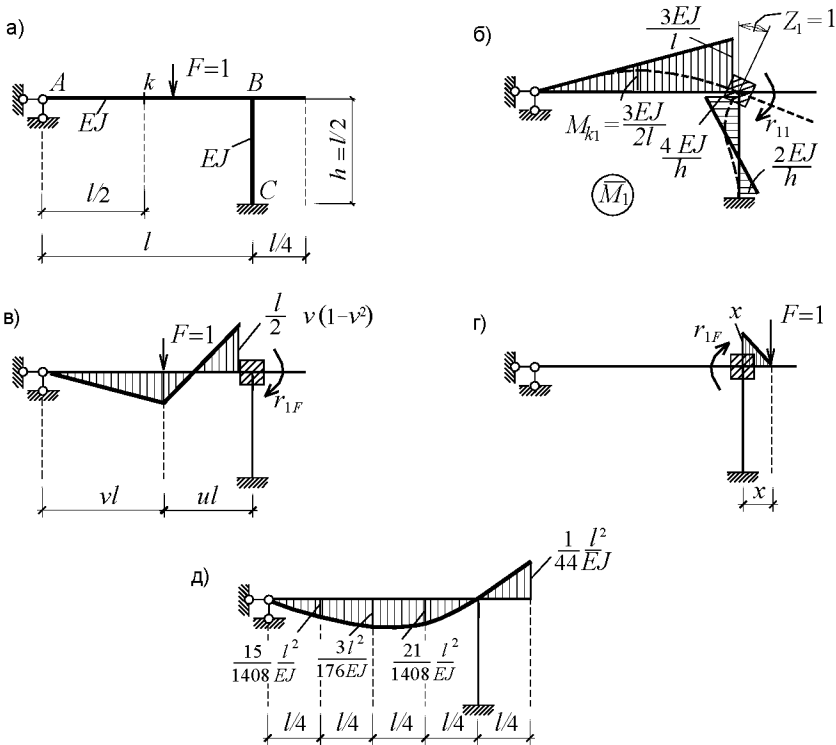


Рис. 9.35

Соответствующий угол поворота  $Z_1$  будет определяться по выражению:

$$Z_1 = -\frac{l^2}{22EJ}v(1-v^2).$$

Задавая  $v$  и  $u = 1 - v$  значения от 0 до 1, вычислим  $Z_1$  и построим линию влияния на участке  $AB$ .

При расположении  $F = 1$  на консольном участке рамы (рис. 9.35,г) получим  $r_{1F} = -1 \cdot x$  и  $Z_1 = \frac{x}{11EJ}l$ .

Л.вл.  $Z_1$  изображена на рис. 9.35,д.

Форму л. вл.  $Z_1$  можно проверить с помощью кинематического метода. В разделе 7.11 показано, что для построения линии влияния перемещения  $i$ -го сечения необходимо в этом сечении приложить единичную силу и построить эпюру перемещений. Положение изогнутых осей стержней, по которым движется груз  $F = 1$ , будет соответствовать очертанию линии влияния исследуемого перемещения. Этот способ основан на теореме о взаимности перемещений. В рассматриваемом примере для построения линии влияния угла поворота узла  $B$  (л. вл.  $Z_1$ ) необходимо в этом узле приложить по положительному направлению  $Z_1$  единичный момент и показать положение изогнутых осей стержней (рис. 9.36).

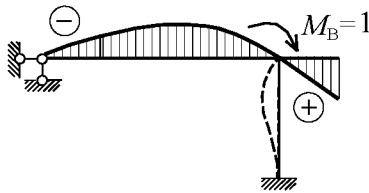


Рис. 9.36

Ординаты полученной таким образом эпюры перемещений, отсчитанные от начального положения стержней в направлении силы  $F = 1$ , считаются положительными.

Численные значения их, при необходимости, можно найти по известным правилам строительной механики.

Для построения, например, л.вл.  $M_k$  в заданной системе необходимо предварительно построить л.вл.  $M_k^0$  в основной системе. Ограничимся рассмотрением положения единичной силы на балке  $AB$  в трех характерных сечениях (рис. 9.37,а).

Определив для каждого положения силы значение изгибающего момента в сечении  $k$ , построим л.вл.  $M_k^0$  (рис. 9.37,б).

Далее, пользуясь выражением:

$$\text{л.вл. } M_k = \text{л.вл. } M_k^0 + \bar{M}_{k1} \quad (\text{л.вл. } Z_1),$$

и учитывая, что  $\bar{M}_{k1} = -\frac{3EJ}{2l}$  (рис. 9.35,б), получим л.вл.  $M_k$  (рис. 9.38).

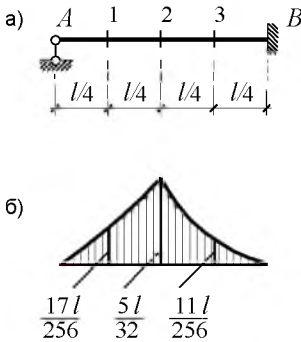


Рис. 9.37

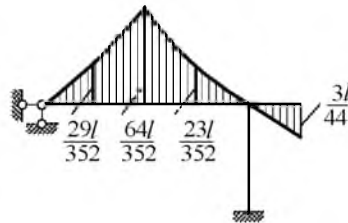


Рис. 9.38

Понятно, что для рамы с большим количеством неизвестных объем вычислений к построению линий влияния значительно увеличивается. Поэтому практическое решение задачи о построении линий влияния усилий в раме сводится к расчету ее с помощью сертифицированных программных комплексов на множество единичных нагрузжений и составлению соответствующей матрицы влияния.

Она, как известно, имеет вид:

$$L_S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{i1} & S_{i2} & \cdots & S_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{bmatrix}.$$

По определению,  $S_{ik}$  – усилие в  $i$ -м сечении конструкции, вызываемое единичной силой, приложенной в сечении  $k$ . Элементы  $i$ -й строки матрицы  $L$  дают значения ординат линии влияния, усилия. Чтобы найти элементы  $k$ -го столбца матрицы влияния, необходимо рассчитать заданную конструкцию на загрузку ее силой  $F_k = 1$ . Число таких единичных загрузок равно  $n$ .

Особенности расчета и построения линии влияния усилий с помощью матрицы  $L_S$  поясним на следующем примере.

Расчетная схема рамы показана на рис. 9.39,а. Форму любой линии влияния на участке между смежными узлами можно представить по значениям ординат усилий в трех равноотстоящих сечениях. Поэтому выполним расчет рамы на загрузку ее силами  $F = 1$ , приложенными последовательно в каждом характерном сечении между узлами, и составим, например, матрицу влияния изгибающих моментов.

$$L_M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1,6647 & 0,9135 & 0,3305 & -0,1052 & -0,1042 & -0,0511 & 0,0210 & 0,0240 & 0,0150 \\ \hline 0,8293 & 1,8269 & 0,6611 & -0,2103 & -0,2083 & -0,1022 & 0,0421 & 0,0481 & 0,0300 \\ \hline -0,0060 & 0,2104 & 0,9916 & -0,3155 & -0,3125 & -0,1532 & 0,0631 & 0,0721 & 0,0451 \\ \hline -0,2654 & -0,4247 & -0,3716 & 1,0196 & 0,2778 & 0,0220 & 0,0070 & 0,0080 & 0,0050 \\ \hline -0,1302 & -0,2083 & -0,1823 & 0,5208 & 1,5278 & 0,5208 & -0,1823 & -0,2083 & -0,1302 \\ \hline 0,0050 & 0,0080 & 0,0070 & 0,0220 & 0,2778 & 1,0196 & -0,3716 & -0,4247 & -0,2654 \\ \hline 0,0451 & 0,0721 & 0,0631 & -0,1532 & -0,3125 & -0,3155 & 0,9916 & 0,2404 & -0,0060 \\ \hline 0,0300 & 0,0481 & 0,0421 & -0,1022 & -0,2083 & -0,2103 & 0,6611 & 1,8269 & 0,8293 \\ \hline 0,0150 & 0,0240 & 0,0210 & -0,0511 & -0,1042 & -0,1052 & 0,3305 & 0,9135 & 1,6647 \\ \hline \end{array}$$

По данным второй и пятой строк матрицы  $L_M$  построены л.в.  $M_2$  (рис. 9.39,б) и л.в.  $M_5$  (рис. 9.39,в). Так как в этом расчете жесткости стержней на растяжение-сжатие  $EA \rightarrow \infty$  (продольные деформации пренебрегаются), то в точках, соответствующих узлам  $B$  и  $C$ , ординаты линий влияния равны нулю.

Разумеется, расчеты таких и более сложных систем на множество загрузок целесообразно выполнять с помощью программных комплексов, имеющихся в проектно-конструкторских организациях.

Таким же образом можно было бы составить матрицы влияния поперечных и продольных сил и построить необходимые линии влияния этих усилий. На рис. 9.39,г показана линия влияния  $Q_5$ .



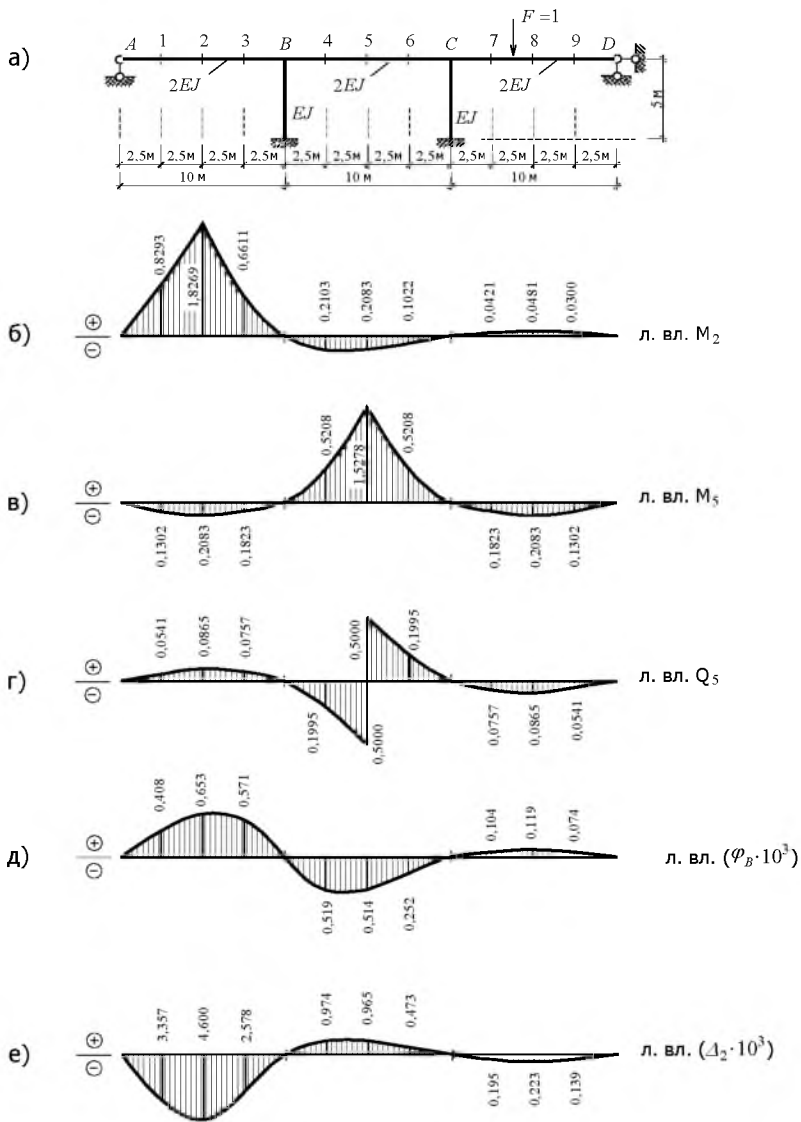


Рис. 9.39

Результаты расчетов позволяют получить и матрицы влияния перемещений. Обратим внимание на линию влияния вертикального перемещения сечения 2 (рис. 9.39,д) и линию влияния угла поворота узла  $B$  (рис. 9.39,е). Очертание их согласуется с рекомендациями раздела 7.11: для получения первой следует в сечении 2 приложить силу  $F = 1$ ; во втором случае – в точке  $B$  прикладывается момент  $M = 1$  (направлен против хода часовой стрелки). Численные значения ординат соответствуют  $EJ = 13,5 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ .

### 9.12. Расчет рам с учетом продольных деформаций стержней

Как отмечалось в разделе 9.1, каждый жесткий узел плоской рамы имеет три степени свободы, каждый шарнирный – две. По этой причине степень кинематической неопределимости рам, при расчете которых учитываются продольные деформации стержней, значительно выше, чем рам, при расчете которых продольными деформациями пренебрегают.

Основная система образуется из заданной посредством наложения на каждый жесткий узел трех связей, на каждый шарнирный – двух линейных связей. Для определения коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений необходимо построить в основной системе эпюры изгибающих моментов и продольных сил, вызываемые единичными смещениями связей и заданным воздействием.

При использовании статического метода значения коэффициентов и свободных членов находятся из уравнений равновесия узлов основной системы.

Определение коэффициентов канонических уравнений метода перемещений кинематическим способом сводится к вычислению их по формуле:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k dx}{EA}.$$

Второе слагаемое в этом выражении вычисляется теми же способами, что и первое, в частности, например, “перемножением” соответствующих эпюр усилий.

Влияние же этого слагаемого на значение  $r_{ik}$ , как следует из приведенного выражения, возрастает с уменьшением жесткостей стержней на растяжение-сжатие.

Некоторые особенности вычисления коэффициентов и распределения изгибающих моментов покажем на примере рамы, изображенной на рис. 9.40,а.

Основная система и положительные направления неизвестных показаны на рис. 9.40,б. Ограничимся рассмотрением эпюр  $\bar{M}_1, \bar{N}_1$  и  $M_F$  (рис. 9.40, в-д). Из условия равновесия ( $\sum X = 0$ ) узла 3 (рис. 9.40,е) найдем  $r_{11} = \frac{EJ}{9} + \frac{EA}{6}$ .

Естественно, что то же значение  $r_{11}$  получится по кинематическому методу:

$$r_{11} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{EJ}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \frac{EJ}{3} + \frac{1}{EA} \frac{EA}{6} \cdot 6 \cdot \frac{EA}{6} = \frac{EJ}{9} + \frac{EA}{6}.$$

Для определения свободных членов уравнений следует использовать распределение усилий в узлах, показанное на рис. 9.40,ж,з, или воспользоваться кинематическим методом. В последнем случае:

$$R_{iF} = -\sum \int \frac{\bar{M}_i M_F^0 dx}{EJ} - \sum \int \frac{\bar{N}_i N_F^0 dx}{EA},$$

где  $\bar{M}_i, \bar{N}_i$  – функции изгибающих моментов и продольных сил от единичных смещений узлов в основной системе метода перемещений;

$M_F^0, N_F^0$  – функции изгибающих моментов и продольных сил от заданной нагрузки в основной системе метода сил.

О влиянии продольных деформаций на распределение усилий в раме можно судить по окончательным эпюрам изгибающих моментов, построенным при соотношении  $\frac{EA \cdot h^2}{EJ} = 10$ , где  $h = 1$  м (рис. 9.40,и) и при  $EA \rightarrow \infty$  (отсутствуют продольные деформации) (рис. 9.40,к).

При  $\frac{EA \cdot h^2}{EJ} < 10$  результаты расчетов будут еще более отличаться от тех, которые соответствуют варианту расчета с  $EA \rightarrow \infty$ .

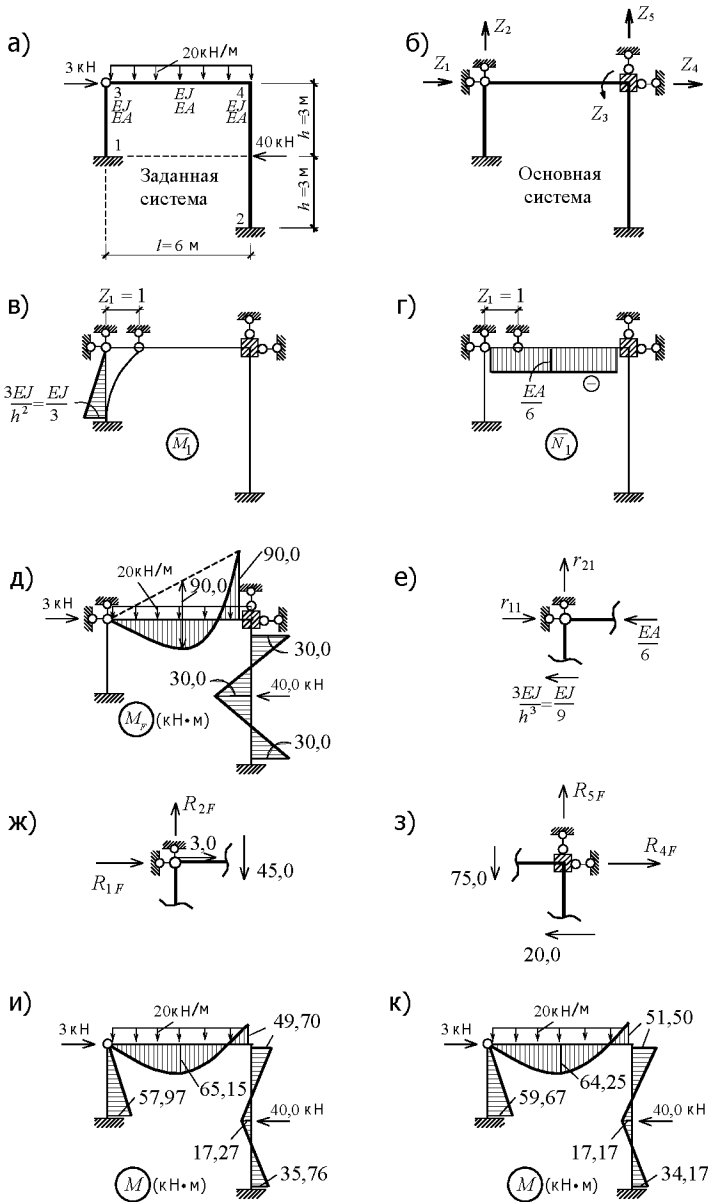


Рис. 9.40

Увеличение податливости стержней на растяжение-сжатие приводит к увеличению перемещений узлов, и поэтому расчет таких рам по недеформированной схеме следует рассматривать как приближенный.

## ГЛАВА 10

# СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

### 10.1. Сопоставление метода сил и метода перемещений

И метод сил, и метод перемещений имеют свои достоинства и недостатки. Каждый из них, с учетом принимаемых в расчете предпосылок, является точным. И в том и в другом методе возможен учет влияния, кроме деформаций изгиба, продольных и поперечных деформаций. Какой из них следует применять для расчета?

При неавтоматизированных вычислениях поиск лучшего метода расчета заданной системы сводится, в большинстве случаев, к поиску варианта расчета с наименьшими трудозатратами. При этом наиболее часто выбор того или иного метода зависит от количества неизвестных.

Расчет рам, узлы которой не обладают линейной подвижностью, как правило, лучше выполнять методом перемещений. Эпюры усилий строятся легко, имеют локальный характер и, благодаря этому, система канонических уравнений получается разреженной. Однако при учете продольных деформаций количество неизвестных по методу перемещений значительно возрастает.

Выбор рациональной основной системы метода сил и построение эпюр в ней связаны с более сложной логикой понимания структуры системы. Достаточно трудоемкой является и операция по вычислению коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. В методе перемещений эта часть вычислений, выполняемая, например, статическим способом, является менее трудоемкой. Как достоинство метода сил отметим, что степень статической неопределимости заданной системы не зависит от того, учитывается или нет в расчете влияние продольных деформаций.

Приведенные замечания по обсуждаемым методам представляют собой качественную характеристику их. Отметим, кроме того, что в

каждом конкретном случае расчетчик вправе выбирать любой из них, руководствуясь собственным уровнем знаний этих методов расчета.

Принятие решения о выборе метода для автоматизированных вычислений связывается не столько с вычислительными процедурами по каждому из них, сколько с особенностями получения основной системы. Логика автоматизации процесса выбора основной системы метода перемещений является более простой. Идеи метода перемещений нашли широкое применение при разработке программных комплексов расчета и проектирования строительных систем.

## 10.2. Совместное использование метода сил и метода перемещений

Глубокое понимание инженером основных положений метода сил и метода перемещений позволяет ему выбирать рациональные методики расчетов. В частности, для расчетов как симметричных, так и несимметричных систем возможно совместное использование названных методов.

Рассмотрим вначале особенности **расчета симметричных систем**. Нагрузку, действующую на такую систему, всегда можно разложить на симметричную и обратносимметричную (иначе, кососимметричную) составляющие. Как правило, оказывается, что расчет на симметричную составляющую удобно выполнять одним методом, например, методом перемещений, а на действие обратносимметричной составляющей – другим, методом сил. Окончательный результат расчета рамы на заданную нагрузку получается суммированием результатов ее расчета на обе составляющие. Теперь обратимся к примеру.

Рама, изображенная на рис. 10.1,а, имеет четыре неизвестные по методу перемещений (основная система и основные неизвестные показаны на рис. 10.1,б) и четыре неизвестные по методу сил (рис. 10.1,в). Симметричная и обратносимметричная составляющие заданной нагрузки представлены на рис. 10.1,г,д. Расчет на действие симметричной нагрузки выполним методом перемещений, так как в этом случае единственной неизвестной, не равной нулю, будет неизвестная  $Z_1$ . Для расчета рамы на действие обратносимметричной нагрузки используем метод сил. Из всех четырех неизвестных не равной нулю будет только  $X_3$ .

На рис. 10.1,е,ж показаны эпюры изгибающих моментов, соответствующие действию на раму симметричной и обратносимметричной нагрузок, а на рис. 10.1,з приведена окончательная эпюра моментов.

Изложенный вариант расчета рам в учебной литературе иногда называют комбинированным способом расчета.

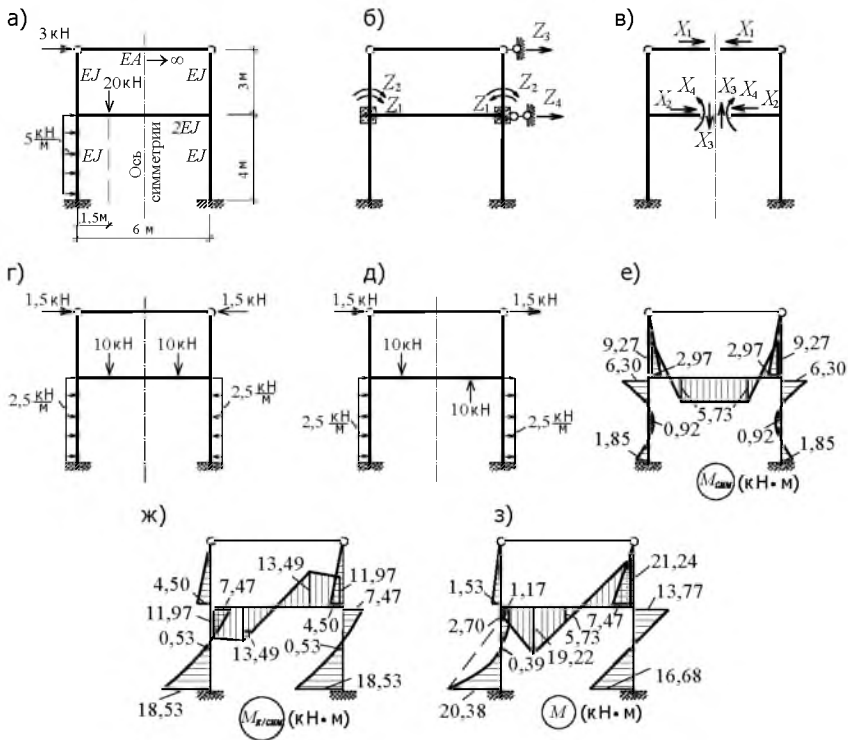


Рис. 10.1

Совместное использование метода сил и метода перемещений возможно и при **расчете несимметричных систем**.

С целью уменьшения числа неизвестных основные системы метода сил или метода перемещений могут приниматься соответственно статически или кинематически неопределимыми. При этом, если расчет выполняется методом сил, то основная система выбирается такой,

чтобы статически неопределимый фрагмент системы удобно рассчитывался методом перемещений. В этом случае метод сил является основным методом расчета, а метод перемещений – вспомогательным. Если же за основной метод принимается метод перемещений, то кинематически неопределимый фрагмент рассчитывается методом сил (вспомогательный метод).

Указанные особенности расчета поясним на следующих примерах.

Для рамы (рис. 10.2,а) за основной метод расчета примем метод перемещений, а основную систему выберем по варианту, показанному на рис. 10.2,б, т.е. заданную раму будем рассчитывать как дважды кинематически неопределимую систему.

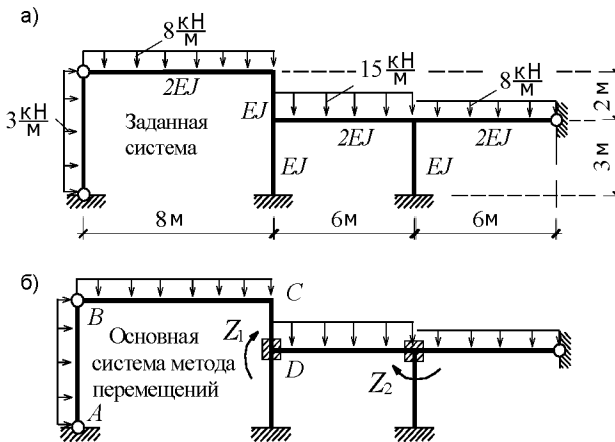


Рис. 10.2

Для построения грузовой и единичных эпюр  $M$  необходимо предварительно рассчитать статически неопределимый фрагмент  $ABCD$  на действие заданной нагрузки и поворот опорной связи в точке  $D$  на угол  $Z_1 = 1$ . Рама  $ABCD$  является один раз статически неопределимой (по методу перемещений число неизвестных равно двум), поэтому расчет ее выполняется методом сил, который в этом варианте его использования рассматривается как вспомогательный. Соответствующие окончательные эпюры моментов от упомянутых нагружений приведены на рис. 10.3,а,б.



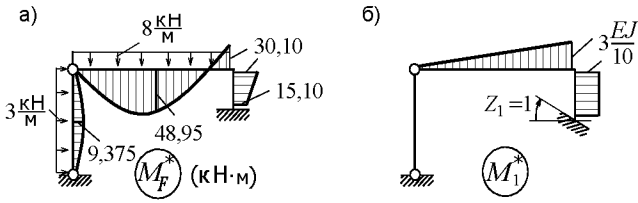


Рис. 10.3

Далее, следуя известному алгоритму расчета рам методом перемещений, построим в основной системе грузовую эпюру  $M_F$  (рис. 10.4,а), единичные  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  (рис. 10.4,б,в) и, в конечном итоге, – окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 10.4,г).

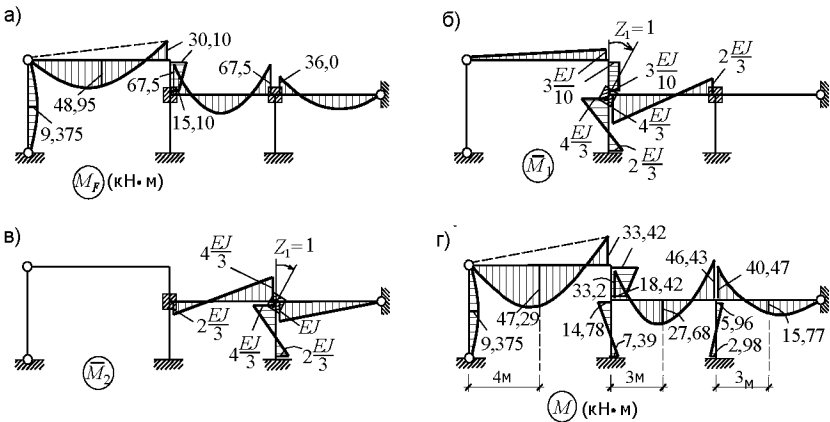


Рис. 10.4

Рассмотрим другой пример. Рама, изображенная на рис. 10.5,а, содержит семь лишних связей. Однако, расчет ее на действие заданной нагрузки проведем как системы, содержащей три неизвестные.

Основная система метода сил (этот метод здесь является основным) приведена на рис. 10.5,б. Она включает в себя статически неопределимый фрагмент  $ABC$  и симметричный ему  $A'B'C'$ . Чтобы построить эпюры моментов в основной системе метода сил, необходимо предварительно выполнить расчет этих фрагментов на те нагрузки, которые они воспринимают.

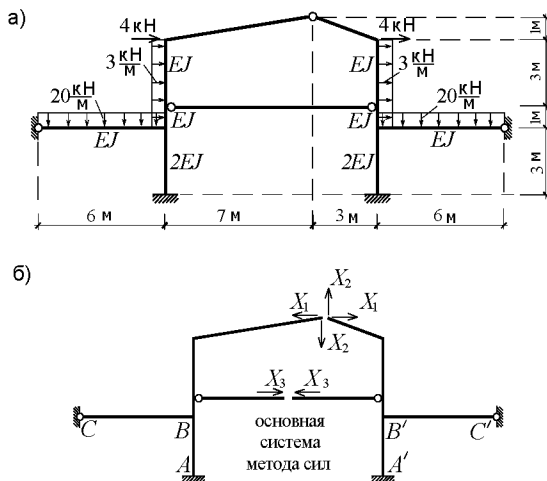


Рис. 10.5

Рама  $ABC$  содержит одну неизвестную метода перемещений. Эпюры моментов от действия на нее единичной распределенной нагрузки и единичного момента приведены на рис. 10.6,а,б.

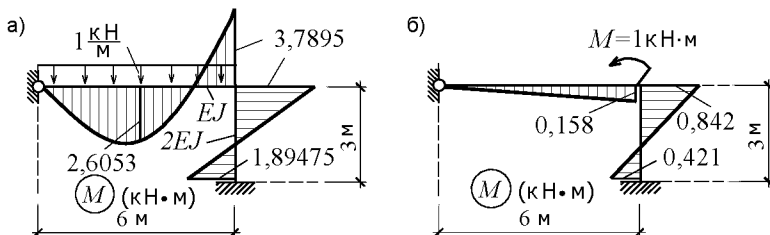


Рис. 10.6

С их помощью, используя свойства линейно деформируемых систем, построим грузовую (рис. 10.7,а) и, как пример, вторую единичную (рис. 10.7,б) эпюры моментов в основной системе метода сил.

Две другие единичные эпюры строятся с учетом распределения моментов на фрагменте  $ABC$  от  $M = 1$  (рис. 10.6,б). Дальнейший ход вычислений соответствует алгоритму метода сил.

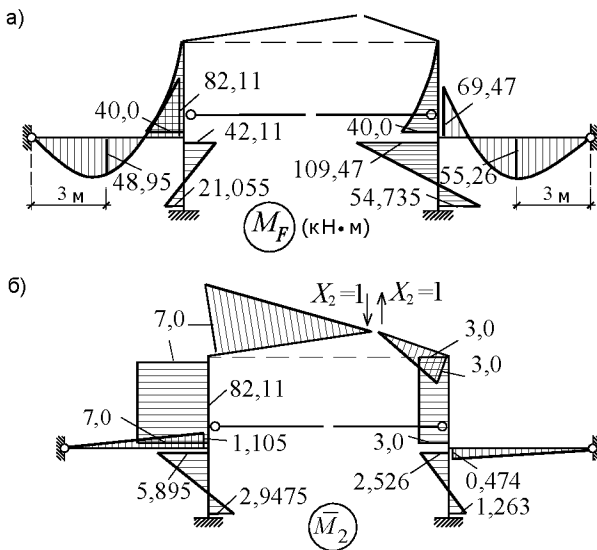


Рис. 10.7

### 10.3. Смешанный метод

При расчете рамы смешанным методом за основные неизвестные в одной ее части принимаются усилия в лишних связях, а в другой, оставшейся, – перемещения узлов, то есть в ходе расчета обе группы неизвестных (неизвестные метода сил и неизвестные метода перемещений) находятся одновременно. Выбор неизвестных, естественно, определяется структурой заданной рамы и, как правило, в той части, где наблюдается малое число лишних связей, вводятся основные неизвестные метода сил, а в другой – основные неизвестные метода перемещений. Система уравнений, из которой определяются эти неизвестные, записывается на основании условий, аналогичных тем, которые используются для записи канонических уравнений метода сил и метода перемещений.

Более полные пояснения по сути смешанного метода дадим на примере расчета рамы, изображенной на рис. 10.8,а.

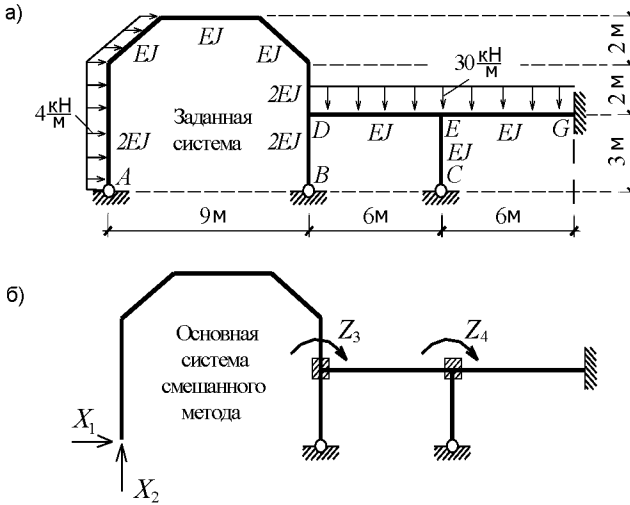


Рис. 10.8

Фрагмент  $AD$  этой рамы (в узле  $D$  имеется защемление) содержит только две лишние связи, его удобно рассчитывать методом сил, для расчета остальной части рамы (ее узлы расположены в точках  $B, C, D, E, G$ ) удобнее использовать метод перемещений. Исходя из этих рассуждений, примем основную систему такой, какой она показана на рис. 10.8,б.

Единичные и грузовая эпюры моментов в основной системе показаны на рис. 10.9. Из эпюры  $M_1$  (рис. 10.9,а) видно, что сила  $X_1 = 1$  вызывает в третьей дополнительной связи (ее номер соответствует номеру неизвестной) реактивное усилие  $r'_{31}$  (обратите внимание: реакция вызывается силой).

В методе перемещений обозначение  $r_{31}$  указывало бы на реакцию в третьей связи, вызываемую перемещением  $Z_1 = 1$ , то есть причины возникновения реакций  $r'_{31}$  и  $r_{31}$  различные, поэтому и обозначаются они по разному. Аналогично необходимо понимать и физический смысл реакции  $r'_{32}$ .

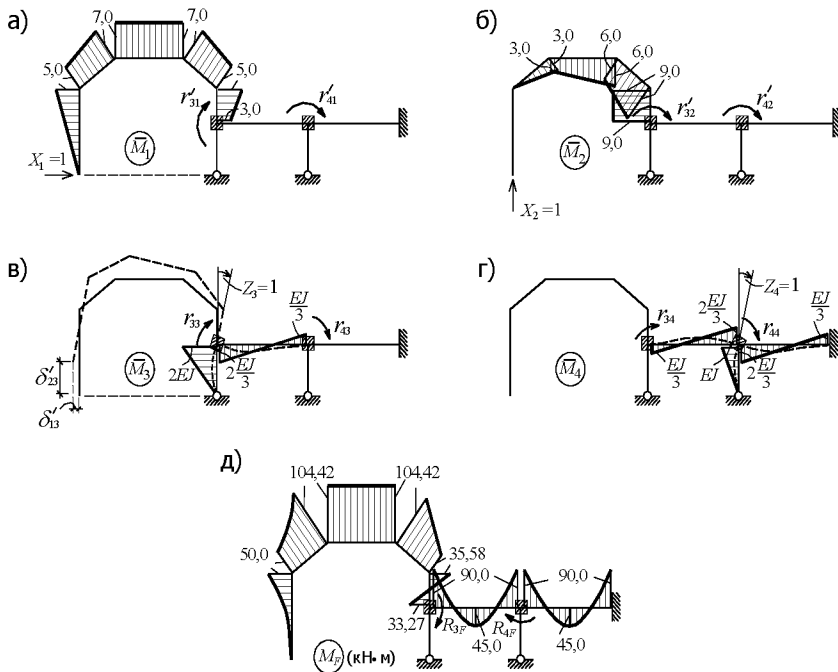


Рис. 10.9

На рис. 10.9,в показана эпюра  $\overline{M}_3$ . Перемещение точки приложения силы  $X_1$  по ее направлению, вызываемое перемещением  $Z_3 = 1$ , обозначено через  $\delta'_{13}$ . Как и в случае с обозначениями реакций, в написании  $\delta'_{13}$  штрихом подчеркивается отличие этого перемещения от перемещения  $\delta_{13}$ , вызываемого силой  $X_3 = 1$  (см. метод сил).

В соответствии с теоремой о взаимности реакций и перемещений (9.8)  $r'_{31} = -\delta'_{13}$ . Действительно, из уравнения равновесия узла  $D$  (рис. 10.9,а) следует, что  $r'_{31} = 3,0$ , а по рис. 10.9,в видно, что перемещение  $\delta'_{13}$  направлено в сторону, противоположную силе  $X_1 = 1$ .

Найти значение  $\delta'_{13}$  можно также и по правилам определения перемещений, вызываемых смещением опор.

Запишем теперь канонические уравнения смешанного метода:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta'_{13}Z_3 + \delta'_{14}Z_4 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta'_{23}Z_3 + \delta'_{24}Z_4 + \Delta_{2F} &= 0, \\ r'_{31}X_1 + r'_{32}X_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + R_{3F} &= 0, \\ r'_{41}X_1 + r'_{42}X_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + R_{4F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Первое уравнение из этой системы выражает условие равенства нулю перемещения точки приложения силы  $X_1$  по ее направлению, при этом первое и второе слагаемые – это перемещения, вызываемые силами  $X_1$  и  $X_2$ , третье и четвертое – перемещения, вызываемые поворотами узлов на углы  $Z_3$  и  $Z_4$ , а пятое – перемещение от нагрузки. Смысл второго уравнения раскрывается аналогично.

Третье и четвертое уравнения имеют смысл уравнений метода перемещений: суммарные реакции в третьей и четвертой дополнительных связях, вызываемые единичными силами  $X_1$ ,  $X_2$  и единичными перемещениями  $Z_1$ ,  $Z_2$ , а также нагрузкой, равны нулю.

В уравнениях (10.1) коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta_{iF}$  определяются так же, как в методе сил. Например,

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ}, \quad \Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ}.$$

Коэффициенты  $r_{ik}$  и свободные члены  $R_{iF}$  определяются способами, применяемыми в методе перемещений. Например, из уравнения равновесия сил в узле  $D$  (рис. 10.9,г) найдем  $r_{34} = \frac{EJ}{3}$ .

Из уравнения равновесия моментов в этом же узле на грузовой эпюре получим  $R_{3F} = -123,27$ .

Коэффициенты  $r'_{ik}$  и  $\delta'_{ki}$ , как уже отмечалось, связаны соотношением:

$$r'_{ik} = -\delta'_{ki}.$$

Анализируя распределение моментов на рис. 10.9,а, заметим, что  $r'_{41} = 0$  и  $r'_{42} = 0$ .

Определив коэффициенты и свободные члены, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{446,17}{EJ} X_1 - \frac{325,2}{EJ} X_2 - 3 Z_3 + 0 + \frac{5571,96}{EJ} &= 0; \\ -\frac{325,2}{EJ} X_1 + \frac{360,34}{EJ} X_2 + 9 Z_3 + 0 - \frac{3704,6}{EJ} &= 0; \\ 3 X_1 - 9 X_2 + \frac{8}{3} EJ \cdot Z_3 + \frac{1}{3} EJ \cdot Z_4 - 123,27 &= 0; \\ 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{1}{3} EJ \cdot Z_3 + \frac{7}{3} EJ \cdot Z_4 + 0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы:

$$X_1 = -16,165 \text{ кН}; \quad X_2 = -5,476 \text{ кН};$$

$$Z_3 = 46,765 \frac{1}{EJ} \text{ рад}; \quad Z_4 = -6,681 \frac{1}{EJ} \text{ рад}.$$

Окончательная эпюра моментов строится по формуле:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 Z_3 + \bar{M}_4 Z_4.$$

Она показана на рис. 10.10.

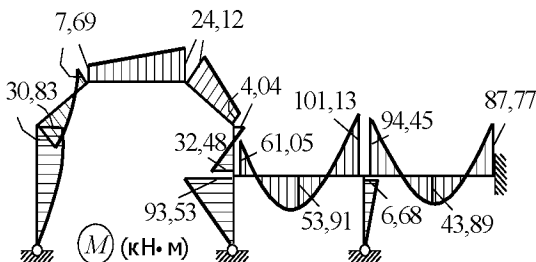


Рис. 10.10

## РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

### 11.1. Общие сведения

Неразрезной балкой называют балку, которая перекрывает два или более пролетов, не прерываясь по своей длине шарнирами.

Степень статической неопределимости неразрезных балок может быть определена по общим правилам (раздел 8.2). Поскольку балка представляет собой один диск, перекрывающий несколько пролетов, то формула (8.2) преобразуется к виду:

$$L = C_0 - 3. \quad (11.1)$$

Балки, показанные на рис. 11.1,а,б, содержат соответственно две и три лишние связи.

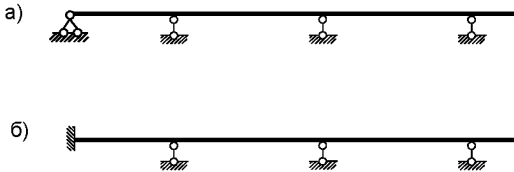


Рис. 11.1

Читатель уже знаком с методами расчета статически неопределимых рам на различные виды внешних воздействий (см. главы 8, 9, 10). Особенности применения их к расчету неразрезных балок рассматриваются в следующем параграфе.

### 11.2. Примеры расчета неразрезной балки

**Пример 1.** Используя метод сил, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки (рис. 11.2,а).



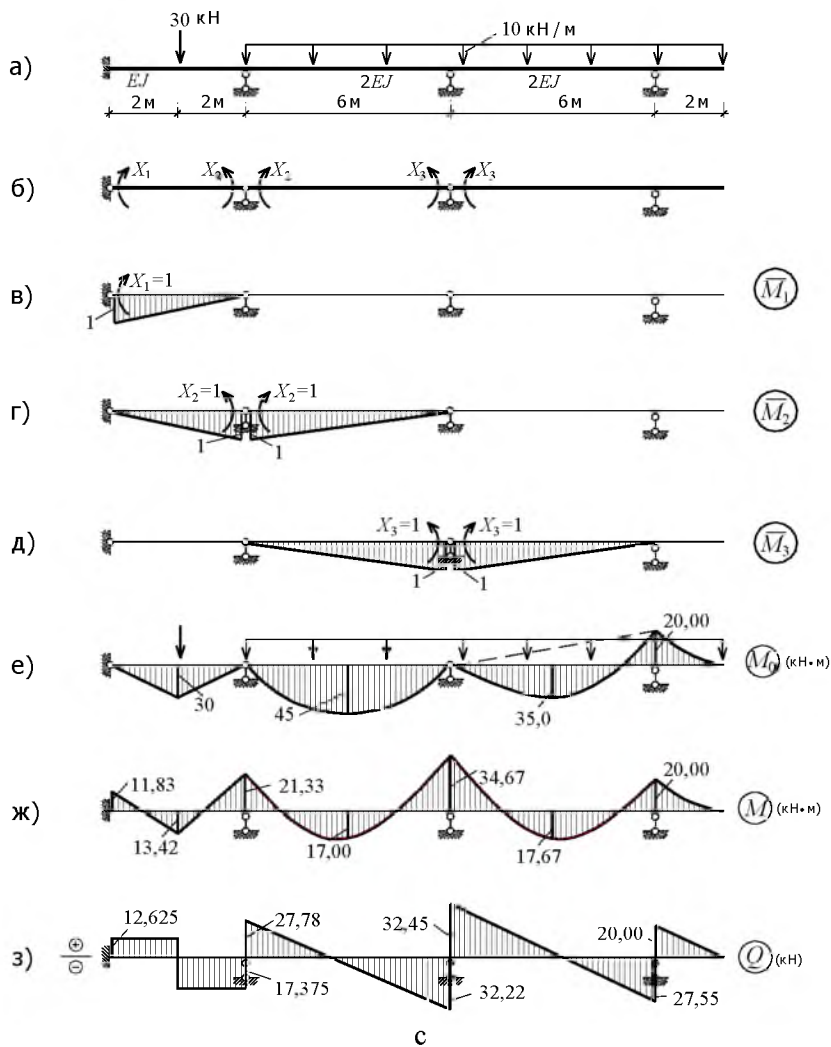


Рис. 11.2

Балка является трижды статически неопределимой. Основную систему метода сил можно получить посредством устранения опорных связей (рис. 11.3,б). Тогда в качестве неизвестных будут приня-

ты опорные реакции. Несложно заметить, что в этом случае ни один из побочных коэффициентов канонических уравнений не равен нулю (рис. 11.3,в). В этом же можно убедиться, “перемножая” соответствующие единичные эпюры моментов. Значит, такая основная система является нерациональной.

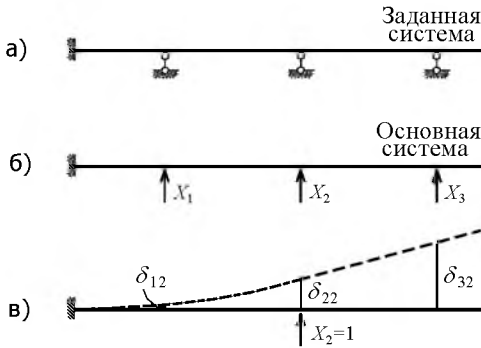


Рис. 11.3

Более удачной (рациональной) будет основная система, полученная введением шарниров в надопорные сечения (рис. 11.2,б). При таком выборе основной системы неразрезная балка расчленяется на отдельные однопролетные балки. Основными неизвестными в этом случае являются опорные моменты.

Построив в основной системе единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 11.2,в-д) и грузовую эпюру (рис. 11.2,е), вычислим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений.

После несложных преобразований получим уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 + 30 &= 0; \\ \frac{2}{3}X_1 + \frac{7}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + 75 &= 0; \\ \frac{1}{2}X_2 + 2X_3 + 80 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Обратим внимание на то, что при указанном способе выбора основной системы для неразрезной балки первое и последнее уравнения получаются двухчленными, а все промежуточные – трехчленными ( $i$ -е уравнение содержит неизвестные  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$ ).

Решив систему уравнений, найдем:

$$X_1 = -\frac{71}{6} \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_2 = -\frac{64}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_3 = -\frac{104}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов (рис. 11.2,ж) строится по выражению:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3.$$

Аналитическое выражение для определения изгибающего момента в сечении, расположенном между опорными точками балки, можно получить по формуле (8.16).

Кинематическая проверка правильности эпюры  $M$  состоит в проверке перемещений по направлениям основных неизвестных и выполняется по формуле (8.23).

Эпюра поперечных сил показана на рис. 11.2,з.

Для определения реакции в опоре с номером  $n$  (рис. 11.4) вырежем двумя сечениями, расположенными по обе стороны от опоры, бесконечно малый участок балки и покажем в этих сечениях поперечные силы. Из уравнения  $\sum Y = 0$  следует, что:

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

В частности, в защемлении (рис. 11.5) и первой промежуточной опоре (рис. 11.6) вертикальные реакции равны соответственно 12,625 кН и 45,155 кН (рис. 11.6).

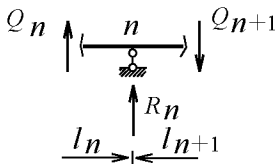


Рис. 11.4

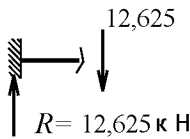


Рис. 11.5

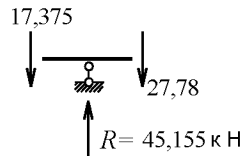


Рис. 11.6

Пример 2. Рассчитать ту же балку (рис. 11.2,а) методом перемещений.

Степень кинематической неопределимости неразрезной балки является переменной характеристикой. Действительно, любое сечение балки можно объявить узлом, в котором стыкуются два стержня. Такой узел, в общем случае, будет иметь две степени свободы: перемещение по вертикали и угол поворота (перемещение вдоль оси балки по принятым допущениям для линейно деформируемой системы не учитывается). В основной системе метода перемещений такой узел необходимо закреплять двумя дополнительными связями. Как следствие этого, размерность задачи расчета балки увеличивается.

С целью уменьшения размерности задачи целесообразно рассматривать только опорные узлы. Каждое надопорное сечение балки имеет только одну степень свободы – угол поворота.

Для заданной балки (рис. 11.2,а) выберем основную систему метода перемещений, показанную на рис. 11.7,а. Основными неизвестными являются углы поворота надопорных сечений балки.

На рис. 11.7,б–г показаны единичные эпюры моментов, а на рис. 11.7,д – грузовая эпюра.

Вычислив по известным правилам коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, получим систему уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{3}EJ Z_1 + \frac{2}{3}EJ Z_2 - 15 &= 0; \\ \frac{2}{3}EJ Z_1 + \frac{8}{3}EJ Z_2 + \frac{2}{3}EJ Z_3 &= 0; \\ \frac{2}{3}EJ Z_2 + \frac{4}{3}EJ Z_3 + 10 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Решив ее, найдем:

$$Z_1 = \frac{19}{3EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = \frac{1}{3EJ} \text{ рад}, \quad Z_3 = -\frac{23}{3EJ} \text{ рад}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов, построенная по выражению:

$$M = M_F + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3,$$

имеет вид, показанный на рис. 11.2,ж.

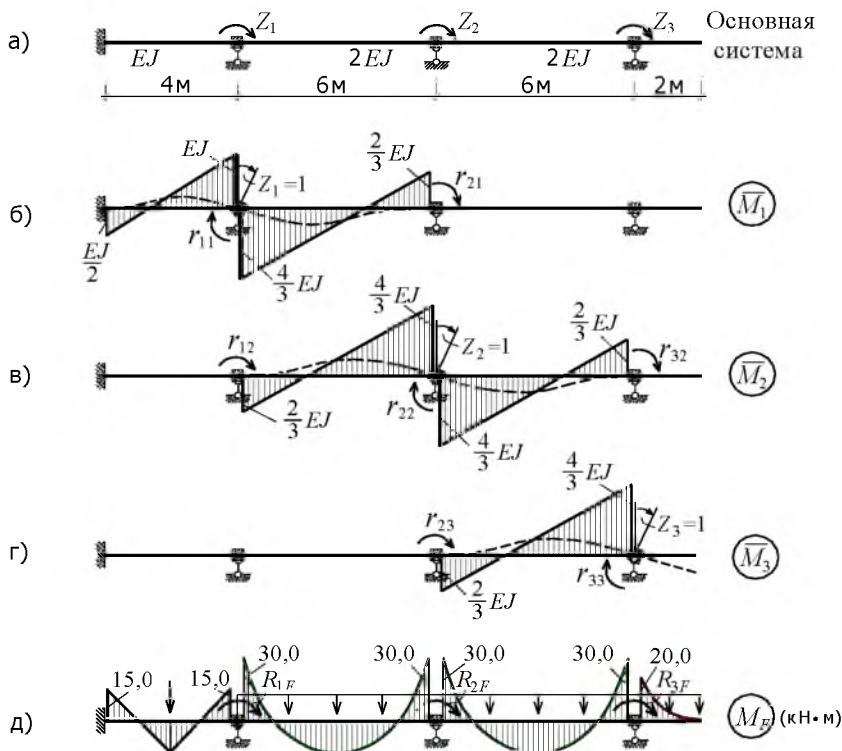


Рис. 11.7

Эту же балку (рис. 11.2,а) можно рассчитать по методу перемещений и как балку с двумя неизвестными. В основную систему (рис. 11.8,а) в этом случае необходимо включить "нестандартный" элемент, представленный на рис. 11.9,а (его нет в наборе элементов в табл. 9.1). Единичные эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 11.8,б,в.

Расчет "нестандартного" элемента (рис. 11.9,а) на действие равномерно распределенной нагрузки выполним методом сил. Полученную эпюру моментов (рис. 11.9,б) используем при построении грузовой эпюры изгибающих моментов (рис. 11.8,г).

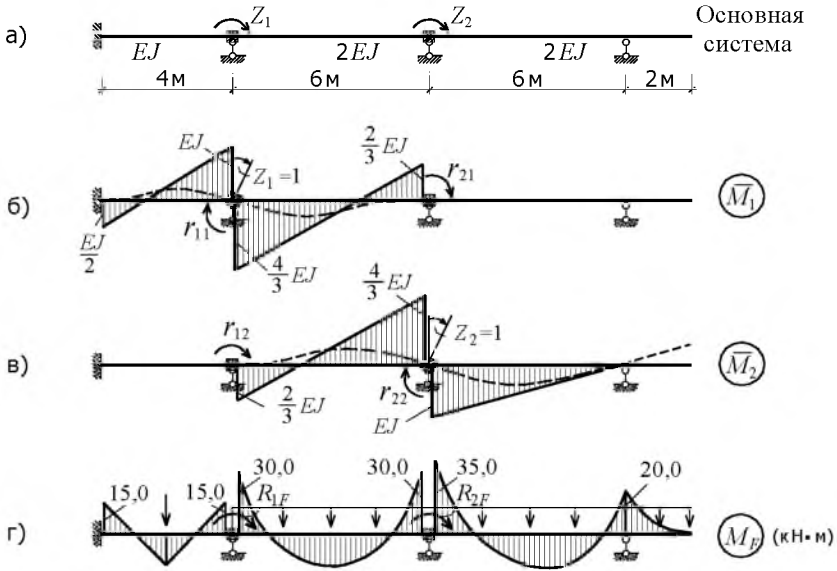


Рис. 11.8

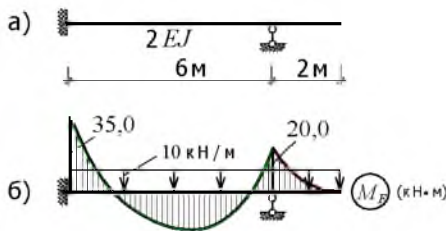


Рис. 11.9

Канонические уравнения, после определения коэффициентов и свободных членов, запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{3}EJ Z_1 + \frac{2}{3}EJ Z_2 - 15 &= 0; \\ \frac{2}{3}EJ Z_1 + \frac{7}{3}EJ Z_2 - 5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Решив их, получим:

$$Z_1 = \frac{19}{3EJ} \text{ рад}, \quad Z_2 = \frac{1}{3EJ} \text{ рад.}$$

Естественно, что окончательная эпюра моментов будет такой же, как и на рис. 11.2,ж.

Отметим следующее. Удаление дополнительной связи в основной системе (рис. 11.7,а) позволило перейти от системы уравнений (11.2) к системе (11.3). Этот переход можно было осуществить и без расчета балки как дважды кинематически неопределимой системы.

Применим для решения системы уравнений (11.2) жордановы исключения (способ Гаусса). Коэффициенты и свободные члены системы (11.2) запишем в форме табл. 11.1 (множители  $EJ$  перед неизвестными  $Z_i$  в таблицу не внесены) и сделаем один шаг обыкновенных жордановых исключений, принимая за разрешающий элемент коэффициент  $r_{33}$ .

Таблица 11.1

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	1
$0 =$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-15
$0 =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$0 =$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	10

Таблица 11.2

	$Z_1$	$Z_2$	0	1
$0 =$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	-15
$0 =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{2}$	-5
$Z_3 =$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{15}{2}$

Переход от табл. 11.1 к табл. 11.2 производится по следующим правилам.

1. Разрешающий элемент  $\left( a_{rs} = \frac{4}{3} \right)$  заменяется обратной величиной.
2. Остальные элементы разрешающего столбца ( $s$ ) делятся на разрешающий элемент.
3. Остальные элементы разрешающей строки ( $r$ ) делятся на разрешающий элемент и меняют знаки.
4. Прочие элементы вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}},$$

при  $i \neq r$ ,  $j \neq s$  (по правилу прямоугольника).

В табл. 11.2 представлена запись коэффициентов и свободных членов системы уравнений (11.3). Нулевой столбец можно было не записывать в таблицу. Из этой же таблицы следует, что:

$$EJ Z_3 = -\frac{1}{2}EJ Z_2 - \frac{15}{2}.$$

**Пример 3.** Показать расчет балки (рис. 11.2,а) смешанным методом.

Существует множество вариантов основных систем смешанного метода. Некоторые из них изображены на рис. 11.10. Для демонстрации особенностей смешанного метода выберем основную систему, показанную на рис. 11.11,а.

Единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 11.11,б–д.



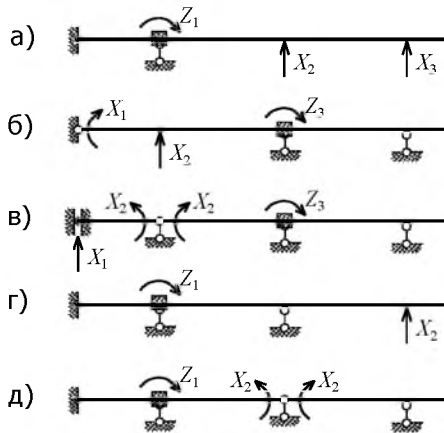


Рис. 11.10

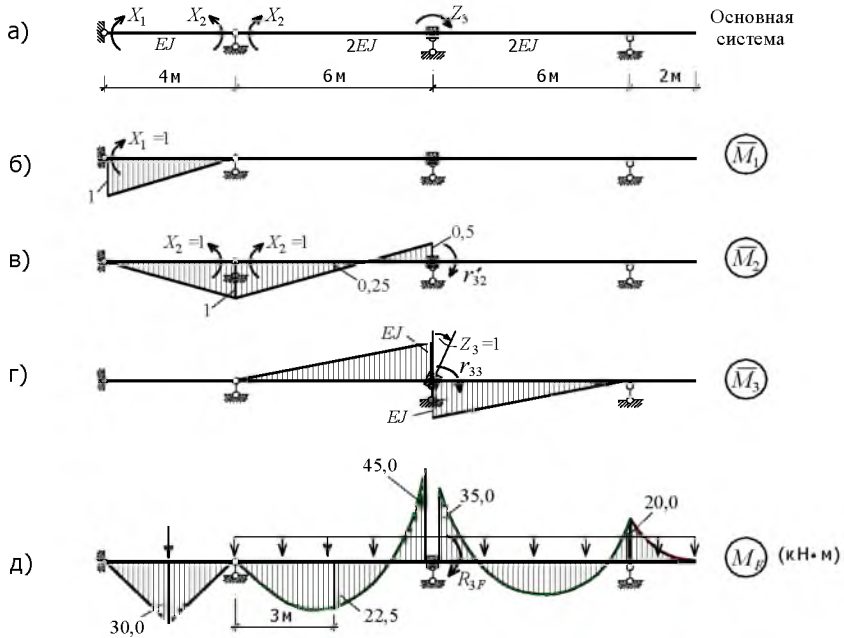


Рис. 11.11

Система канонических уравнений для принятых основных неизвестных имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta'_{13}Z_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta'_{23}Z_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ r'_{31}X_1 + r'_{32}X_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Свободные члены первого и второго уравнений определим, как и в методе сил, посредством “перемножения” эпюр моментов:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_F dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 30 \cdot 4 \cdot 0,5 = \frac{30}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 M_F dx}{EJ} = \frac{30}{EJ} + \frac{6}{6 \cdot 2EJ} (4 \cdot 0,25 \cdot 22,5 + 45 \cdot 0,5) = \frac{52,5}{EJ}.$$

Свободный член  $R_{3F}$  определяется из уравнения равновесия моментов в узле с дополнительным защемлением:  $R_{3F} = 10,0$ .

Так как  $r'_{ik} = -\delta'_{ki}$ , то  $r'_{32} = 0,5$ , а  $\delta'_{23} = -0,5$ .

Определение других коэффициентов при неизвестных производится по правилам, изложенным в главах 8, 9.

В численной форме записи канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3EJ}X_1 + \frac{2}{3EJ}X_2 + \frac{30}{EJ} &= 0; \\ \frac{2}{3EJ}X_1 + \frac{12,5}{6EJ}X_2 - 0,5Z_3 + \frac{52,5}{EJ} &= 0; \\ 0,5X_2 + 2EJZ_3 + 10 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив систему, получим:

$$X_1 = -11,83 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = -21,33 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Z_3 = \frac{1}{3EJ} \text{ рад.}$$

Окончательная эпюра моментов, построенная по выражению:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 Z_3,$$

имеет тот же вид, что и на рис. 11.2,ж.

Пример 4. Смещения опор неразрезной балки показаны на рис. 11.12,а. Построить эпюру изгибающих моментов, приняв  $c_1 = 0,01$  рад,  $c_2 = c_3 = 0,06$  м.

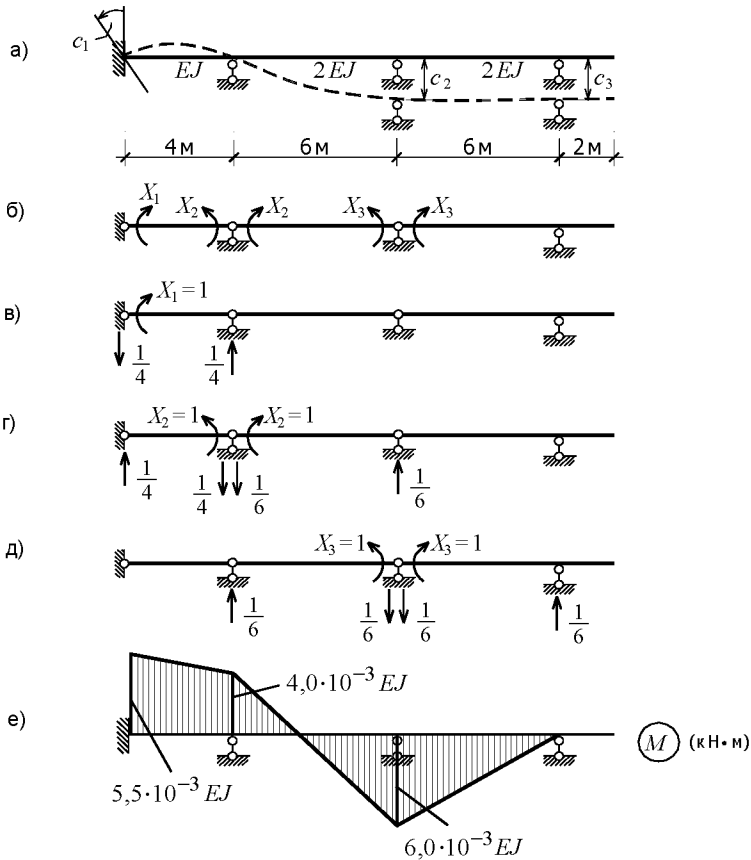


Рис. 11.12

Расчет балки на смещение опор выполняется методами, рассмотренными ранее. Покажем решение методом сил.

Пусть основная система будет такой, как показана на рис. 11.12,б. Свободные члены канонических уравнений определим по формуле (7.13). Используя распределение реакций в опорных связях (рис. 11.12,в-д), найдем:

$$\Delta_{1c} = -\sum R_{k1}c_k = -(-1 \cdot c_1) = c_1 = 0,01;$$

$$\Delta_{2c} = -\sum R_{k2}c_k = -\left(-\frac{1}{6}c_2\right) = \frac{1}{6}c_2 = 0,01;$$

$$\Delta_{3c} = -\sum R_{k3}c_k = -\left(\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{6}c_3\right) = -\frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{6}c_3 = -0,01.$$

Коэффициенты при неизвестных имеют те же значения, что и в примере 1.

Запишем канонические уравнения для расчета на заданные смещения опор:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 + 0,01EJ &= 0; \\ \frac{2}{3}X_1 + \frac{7}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + 0,01EJ &= 0; \\ \frac{1}{2}X_2 + 2X_3 - 0,01EJ &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив их, получим:

$$X_1 = -5,5 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = -4,0 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_3 = 6,0 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра  $M$  изображена на рис. 11.12,е.

### 11.3. Построение линий влияния усилий

Для построения линий влияния усилий статическим методом (см. разделы 8.11, 9.11) необходимо, в общем случае, выполнить расчет неразрезной балки на действие силы  $F = 1$ , приложенной в ряде характерных точек каждого пролета, и составить матрицу влияния усилий  $L_S$ . По значениям элементов  $i$ -й строки можно построить линию влияния  $S_i$ .

Рассчитаем балку (рис. 11.13,а) на действие единичной силы в обозначенных на рисунке сечениях и по результатам расчета построим линии влияния усилий.

Форма линии влияния на протяжении каждого пролета, как правило, определяется значениями ее ординат в трех промежуточных сечениях. Например, для построения л.вл.  $M_c$  (рис. 11.13,б) или л. вл.  $M_5$  (рис. 11.13,в) достаточно найти соответствующие моменты при положениях силы  $F = 1$  в сечениях, делящих пролет на четыре части.

Некоторые особенности очертания линии влияния изгибающих моментов возникают при построении их для сечений, расположенных вблизи опор. Так, при построении линии влияния момента для сечения  $K_2$  (рис. 11.13,г) оказывается, что сила  $F = 1$ , расположенная правее второго пролета, не вызывает в этом сечении изгибающего момента (точку  $K_2$  называют левым фокусом второго пролета).

Если же некоторое сечение  $K_1$  будет расположено между точками  $B$  и  $K_2$ , то линия влияния изгибающего момента в этом пролете будет двузначной (рис. 11.13,д). Поэтому, во избежание ошибок, в пролете, к которому относится исследуемое усилие, число пробных установок силы  $F = 1$  следует принимать увеличенным.

Известно, что форма линии влияния, в соответствии с кинематическим методом (см. раздел 8.11), подобна эпюре перемещений балки, вызываемой смещением соответствующей связи по ее направлению на единицу. Например, чтобы получить очертание л.вл.  $Q_5$  (рис. 11.13,е) необходимо торцы балок, примыкающие к пятому сечению, раздвинуть по вертикали на длину, равную единице, так, чтобы они оставались параллельными один другому. Численные же значения ординат линии влияния удобно вычислять статическим методом.

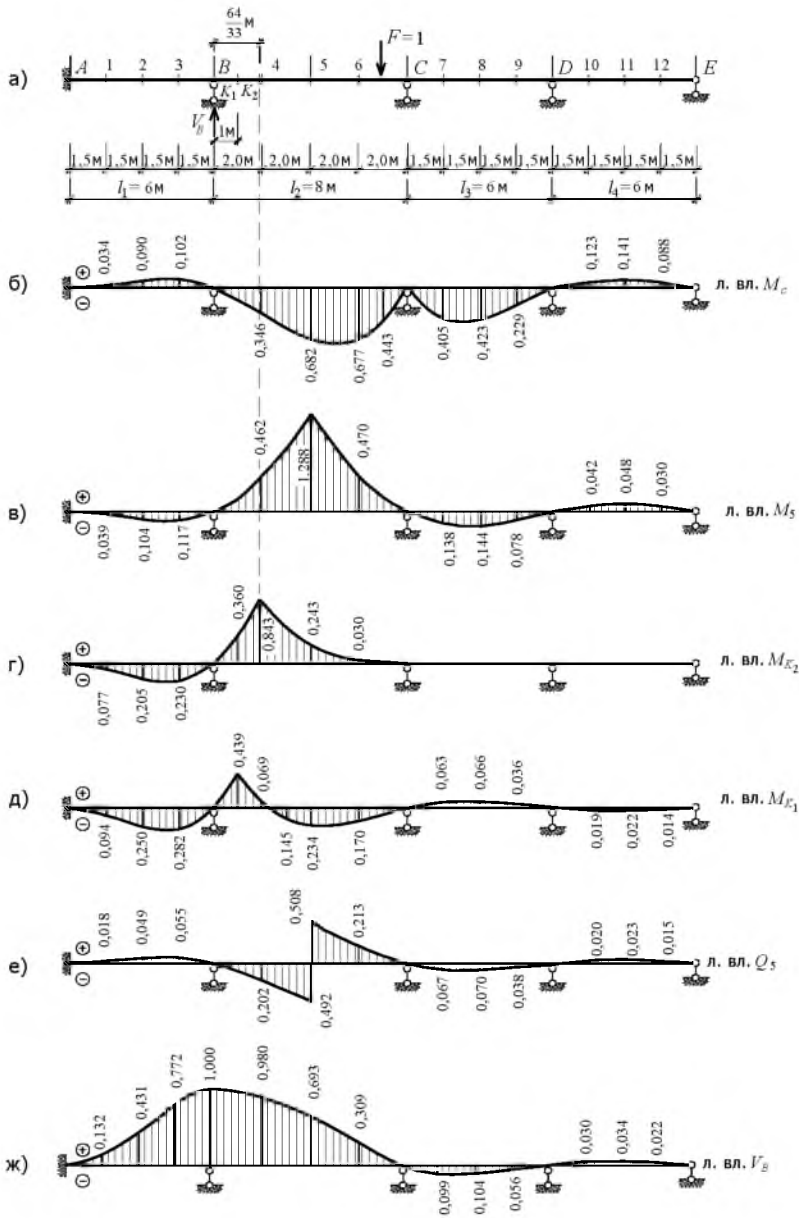


Рис. 11.13

Для установления формы л.вл.  $V_B$  (рис. 11.13,ж) необходимо в балке удалить опорную связь в точке  $B$  и дать ей единичное перемещение по направлению удаленной связи. Положение изогнутой оси балки будет соответствовать очертанию искомой линии влияния. Ординаты линии влияния определены статическим методом.

#### 11.4. Огибающие эпюры усилий

Неразрезные балки, как и большинство других конструкций, загружаются как постоянной нагрузкой, так и временной, характер действия которой, в общем случае, оказывается достаточно произвольным: она может быть во всех пролетах балки или только в некоторых из них. Экстремальные усилия в сечениях балки определяются с помощью невыгодных загрузжений линий влияния (см. главу 3). Однако такой способ нахождения их при отмеченном характере действия временной нагрузки является достаточно сложным и, к тому же, не дает наглядного представления о распределении максимальных и минимальных усилий по длине балки.

Более просто задача об определении экстремальных усилий решается с помощью огибающих эпюр усилий. Рассмотрим задачу построения огибающих эпюр изгибающих моментов в неразрезной балке, загруженной постоянной (рис. 11.14,а) и временной нагрузками (рис. 11.14,б). На рис. 11.14,в показана эпюра моментов от постоянной нагрузки, на рис. 11.14,г–ж – от последовательного загрузки каждого пролета временной нагрузкой.

Максимальный и минимальный изгибающие моменты в сечениях балки определим по выражениям:

$$\max M = M_{\text{пост}} + \sum M_{\text{вр}}^+ ; \quad \min M = M_{\text{пост}} + \sum M_{\text{вр}}^- ,$$

где  $M_{\text{пост}}$  – изгибающий момент от постоянной нагрузки в данном сечении;

$M_{\text{вр}}^+$  – изгибающие моменты от временных нагрузок, вызывающие в этом сечении положительный момент;

$M_{\text{вр}}^-$  – изгибающие моменты от временных нагрузок, вызывающие в этом сечении отрицательный момент.

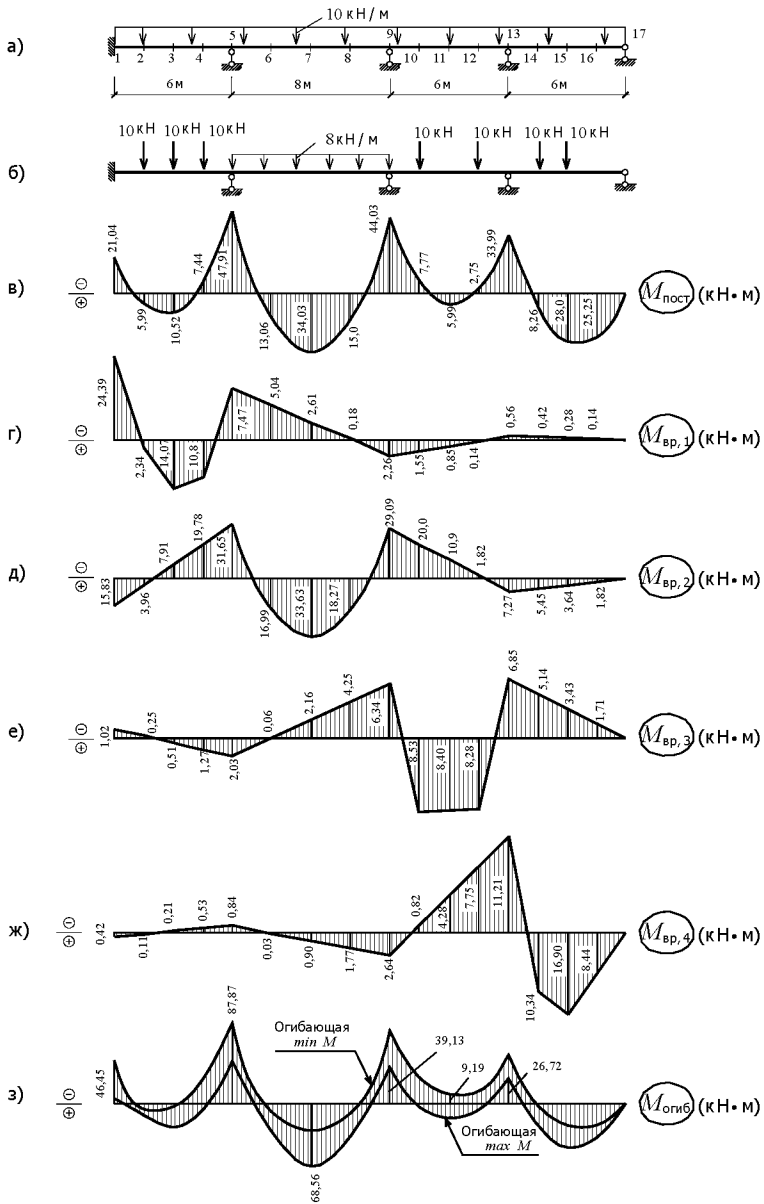


Рис. 11.14



Например,  $\max M_7 = 34,03 + 33,63 + 0,90 = 68,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$   
 $\max M_{10} = -44,03 + 2,26 + 2,64 = -39,13 \text{ кН} \cdot \text{м};$   
 $\min M_1 = -21,04 - 24,39 - 1,02 = -46,45 \text{ кН} \cdot \text{м};$   
 $\min M_{11} = 5,99 - 10,9 - 4,28 = -9,19 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Соединяя плавной кривой точки, соответствующие  $\max M$ , получим огибающую максимальных моментов (рис. 11.14,з). Огибающая минимальных моментов соответствует значениям  $\min M$ .

Из построенных графиков следует, что на отдельных участках растянутые волокна балки располагаются только внизу (или только сверху), а на других участках растянутые волокна могут располагаться как внизу, так и сверху. В сечении 11  $\max M_{11} = 15,24 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (на рис. 11.14,з не показан), а  $\min M_{11} = -9,19 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Сведения о распределении расчетных значений усилий используются при конструировании балок.

Аналогичный подход к построению огибающих эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил может быть применен при расчете других конструкций.

### 11.5. Расчет неразрезных балок на упругих опорах

Примерами упругих опор могут служить длинные колонны, на которые опирается неразрезная балка (рис. 11.15,а), поперечные балки проезжей части металлического моста, на которые опираются продольные неразрезные балки, а также понтоны, которые служат опорами наплавного моста.

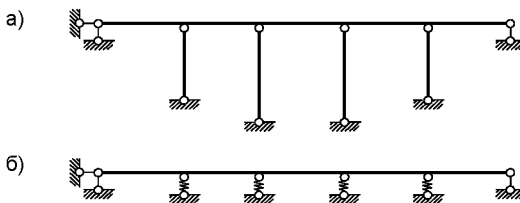


Рис. 11.15

На расчетной схеме балки такие опоры изображаются в виде пружин (рис. 11.15,б). Если упругие опоры являются линейно деформируемыми, то перемещения опорных точек балки пропорциональны реакциям опор:

$$y_m = c_m R_m,$$

где  $c_m$  – коэффициент податливости  $n$ -й опоры, м/кН.

Расчет неразрезных балок на упругих опорах удобно выполнять методом сил. Основная система метода сил принимается такой же, как и при расчете балок на неподатливых (жестких) опорах. На рис. 11.16,а показан фрагмент основной системы многопролетной неразрезной балки. Подчеркивая конкретный физический смысл основных неизвестных метода сил, в практических расчетах заменяют обозначения  $X_i$  на  $M_i$ .

Перемещение по направлению неизвестного  $M_n$  (угол взаимного поворота сечений балок, примыкающих к  $n$ -й опоре) будет вызываться только опорными моментами  $M_{n-2}$ ,  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ ,  $M_{n+2}$  и нагрузкой, расположенной в пролетах  $l_{n-1}$ ,  $l_n$ ,  $l_{n+1}$ ,  $l_{n+2}$ , поэтому соответствующее каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{n,n-2}M_{n-2} + \delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{nn}M_n + \\ + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \delta_{n,n+2}M_{n+2} + \Delta_{nF} = 0.$$

Его называют уравнением пяти моментов.

Деформированное состояние основной системы, вызванное  $M_n = 1$ , показано на рис. 11.16,б, а на рис. 11.16,в,г представлены эпюры моментов и даны значения опорных реакций от  $M_n = 1$  и  $M_{n-2} = 1$ .

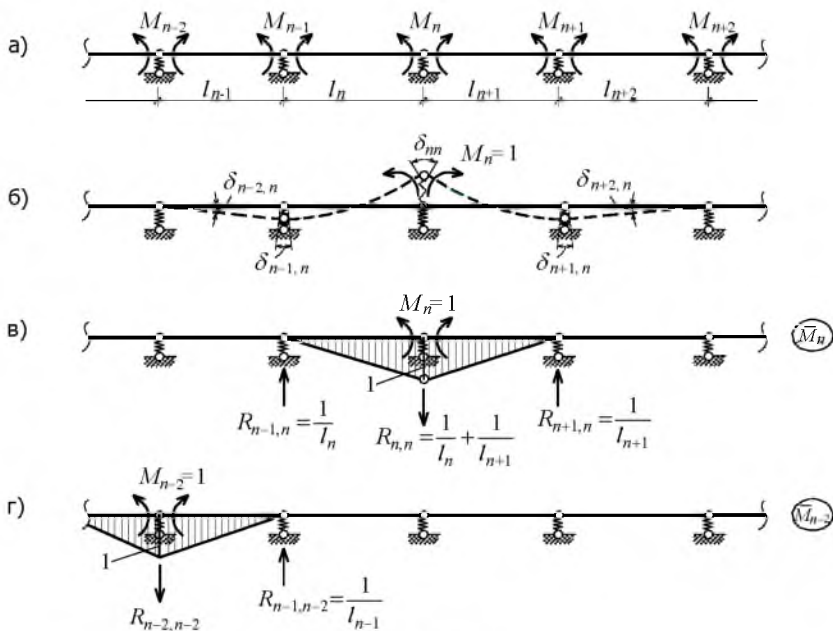


Рис. 11.16

Коэффициенты и свободные члены уравнений определяют по формуле Мора-Максвелла, учитывая влияние изгибающих моментов в балке и реакций в упругих опорах:

$$\delta_{ik} = \sum \int \bar{M}_i \frac{\bar{M}_k dx}{EJ} + \sum c_m R_{mi} R_{mk},$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \bar{M}_i \frac{M_F dx}{EJ} + \sum c_m R_{mi} R_{mF},$$

где  $\bar{M}_i, \bar{M}_k$  – моменты в балке соответственно от  $M_i = 1$  и  $M_k = 1$ ;

$M_F$  – моменты в балке от заданной нагрузки;

$R_{mi}, R_{mk}$  – реакции опоры  $m$  соответственно от  $M_i = 1$  и  $M_k = 1$ ;

$R_{mF}$  – реакция опоры  $m$  от нагрузки;

$c_m$  – коэффициент податливости опоры  $m$ .

Линии влияния усилий в балках на упругих опорах, как и в балках на абсолютно жестких опорах, строятся статическим и кинематическим методами.

## ГЛАВА 12

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

#### 12.1. Виды статически неопределимых ферм

В данной главе рассматриваются особенности расчета ферм как шарнирно-стержневых систем с лишними связями. Напомним, что узловые соединения шарнирно-стержневых систем представляют собой идеальные шарниры без трения.

Степень статической неопределимости  $L$  шарнирно-стержневой системы определяется по формуле:

$$L = C_0 + C - 2U,$$

где  $C_0$  – количество опорных стержней фермы;

$C$  – количество стержней, составляющих ферму;

$U$  – количество узлов фермы.

Примеры статически неопределимых ферм приведены на рис. 12.1, 12.2, а.

Трехпролетная неразрезная ферма с параллельными поясами и треугольной решеткой (рис. 12.1, а) является дважды внешне статически неопределимой. Отсоединенная от опор, она имеет геометрически неизменяемую статически определимую структуру.

Семипанельная балочная ферма с крестовой решеткой (рис. 12.1, б) содержит семь лишних связей. Данная ферма является внутренне статически неопределимой. Внешне она статически определима: реакции ее опор можно найти из уравнений равновесия, как у простой балки. Балочная ферма с параллельными поясами, треугольной решеткой и дополнительными стойками, усиленная шпренгелем (рис. 12.1, в), также внутренне один раз статически неопределима.

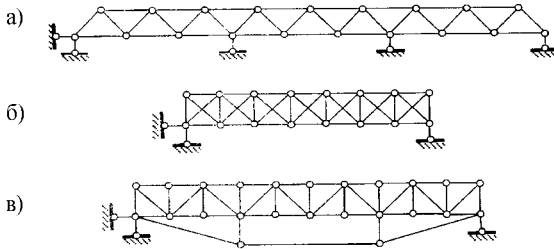


Рис. 12.1

Распорная ферма с дополнительным раскосом в центральной панели (рис. 12.2,а) статически неопределима как внешне, так и внутренне.

### 12.2. Особенности расчета статически неопределимых ферм

Расчет статически неопределимых ферм, как правило, производится методом сил. Основная система метода сил выбирается путем разрезания стержневой фермы, либо путем удаления опорных связей (рис. 12.2), которые не являются абсолютно необходимыми.

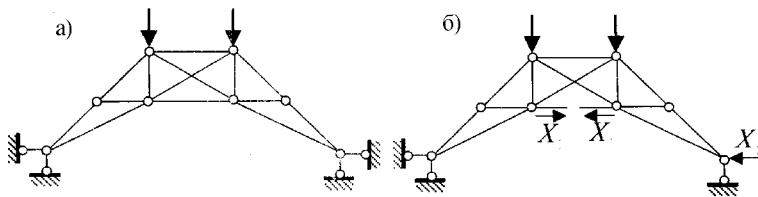


Рис. 12.2

Канонические уравнения метода сил имеют стандартный вид:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{11} & \dots & \delta_{11} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \dots & \delta_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & \dots & \delta_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = 0,$$

где индекс  $n$  означает количество неизвестных метода сил.

При узловой нагрузке в стержнях статически неопределимых ферм, как и других шарнирно-стержневых систем, будут возникать только продольные силы. Следовательно, перемещения в фермах будут зависеть только от продольных деформаций их стержней, и для вычисления перемещений следует использовать одночленную формулу Максвелла:

$$\delta_{ik} = \sum \frac{N_i N_k s}{EA}; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{N_i N_F s}{EA} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

где знак суммирования  $\sum$  распространяется на все стержни фермы;  
 $N_i, N_k, N_F$  – соответственно усилия в стержнях основной системы метода сил от единичных значений основных неизвестных ( $X_i = 1, X_k = 1$ ) и от заданной нагрузки  $F$ ;  
 $s$  и  $EA$  – длина и жесткость на растяжение-сжатие соответствующего стержня фермы.

Окончательные усилия в стержнях статически неопределимых ферм вычисляют по формуле:

$$N = N_F + \sum_{i=1}^n N_i X_i.$$

Все вычисления удобно вести в табличной форме. Для фермы с двумя лишними связями (рис. 12.2) такая таблица может иметь следующий вид (табл. 12.1).

Таблица 12.1

№ ст.	$b = \frac{s}{EA}$	$N_F$	$N_1$	$N_2$	$N_1 N_1 b$	$N_1 N_2 b$	$N_2 N_2 b$	$N_1 N_F b$	$N_2 N_F b$	$N_1 X_1$	$N_1 X_2$	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
...												
...												
$\sum$					$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{22}$	$\Delta_{1F}$	$\Delta_{2F}$			

В первом столбце таблицы указываются номера стержней в произвольном порядке. Во второй столбец вносятся податливости

стержней, то есть отношения  $b = s/(EA)$ , в третий, четвертый и пятый столбцы вносятся усилия в стержнях фермы, вычисленные в основной системе метода сил от заданной нагрузки и единичных значений основных неизвестных. В последующих пяти столбцах производятся собственно вычисления, смысл которых указан в шапке таблицы. Суммы элементов, полученных в столбцах 6–10, дают значения коэффициентов при неизвестных (единичных перемещений) и свободных членов (грузовых перемещений) канонических уравнений метода сил. После того как определены значения основных неизвестных из решения системы канонических уравнений, заполняются столбцы 11 и 12 (вычисляются исправленные значения усилий в основной системе от найденных значений основных неизвестных). Наконец, суммируя столбцы 3, 11 и 12, получают окончательные значения усилий в стержнях статически неопределимой фермы. При необходимости в таблицу могут быть внесены дополнительные столбцы для осуществления промежуточных и окончательных кинематических проверок в соответствии со смыслом метода сил.

Расчет ферм методом перемещений приводит к значительно большему количеству основных неизвестных. В плоских фермах каждый узел за счет продольных деформаций стержней обладает двумя линейными смещениями. Количество основных неизвестных метода перемещений для ферм независимо от их статической определенности или неопределенности вычисляется по формуле:

$$n = 2Y - C_0.$$

Как правило, метод перемещений применяют при автоматизированном расчете ферм на компьютерах в матричной форме на основе общих уравнений строительной механики (глава 15) или на основе метода конечных элементов (глава 16).

### 12.3. Построение линий влияния усилий

При расчете ферм на подвижную нагрузку для определения ее наиболее невыгодного расположения применяются линии влияния. На основании теоремы о взаимности реакций и перемещений (кинематический метод построения линий влияния) линия влияния усилия в любом стержне (связи) статически неопределимой фермы совпадает с линией прогибов

узлов грузового пояса фермы, вызванных действием единичного перемещения по направлению этого усилия (этой связи).

Процесс построения линии влияния усилия в некотором стержне (связи) статически неопределимой фермы можно осуществить и несколько по иному, на основании теоремы о взаимности перемещений. Разрезается стержень (удаляется связь), линию влияния усилия в котором (которой) требуется построить. Степень статической неопределимости фермы при этом уменьшается на единицу. Ферму с удаленной связью можно рассматривать как основную систему метода сил, в общем случае статически неопределимую. Основное неизвестное, реакция в удаленной связи, зависит от точки приложения единичной подвижной силы. Закон изменения этого основного неизвестного и определяет искомую линию влияния. Из соответствующего канонического уравнения находим:

$$\text{л. в. } X_1 = \frac{-\delta_{1F}(x)}{\delta_{11}} = \frac{-\delta_{F1}(x)}{\delta_{11}},$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение в основной системе по направлению удаленной связи от единичного значения усилия в этой связи, то есть величина постоянная;

$\delta_{1F}(x)$  – перемещение в основной системе по направлению удаленной связи от подвижной единичной силы, то есть функция аргумента  $x$  – абсциссы точки приложения единичной подвижной силы;

$\delta_{F1}(x)$  – функция того же аргумента  $x$ , но выражающая собой перемещения по направлению подвижной единичной силы от единичного значения неподвижного основного неизвестного  $X_1 = 1$ , то есть эпюра перемещений (эпюра прогибов грузового пояса) в ферме с удаленной связью от единичного значения усилия в этой связи.

Таким образом, чтобы построить в статически неопределимой ферме линию влияния некоторого усилия, необходимо удалить связь, воспринимающую это усилие. Затем к ферме с удаленной связью по направлению этой связи прикладывается единичная сила (единичное усилие в удаленной связи). От приложенной единичной



силы определяются прогибы всех узлов грузового пояса, и строится эпюра перемещений (линия прогибов). По направлению удаленной связи вычисляется также перемещение  $\delta_{11}$ . Обычно это перемещение отличается от единицы. Следовательно, ординаты линии прогибов, уменьшенные в  $\delta_{11}$  раз, и представляют собой ординаты искомой линии влияния.

Построение линии влияния усилия (реакции) в статически неопределимой ферме требует многократного вычисления перемещений в некоторой основной системе (статически неопределимой, если степень статической неопределимости исходной системы выше единицы), полученной из заданной, удалением одной связи. Вычисление перемещений в фермах по формуле Максвелла представляет собой громоздкий, утомительный процесс.

Поэтому для построения линий влияния усилий в «лишних» стержнях ферм или, что равноценно, линий прогибов узлов грузовых поясов рационально применять метод перемещений, где перемещения всех узлов являются основными неизвестными и определяются в первую очередь. Особенно эффективны в этом процессе компьютерные технологии и известные проектно-вычислительные комплексы (ПВК).

При использовании ПВК линию влияния любого усилия можно построить и по ее прямому определению, как результат многократного вычисления этого усилия от действия единичных вертикальных сил, прикладываемых поочередно к каждому из узлов грузового пояса.

Если тем или иным способом построены линии влияния усилий во всех «лишних» связях статически неопределимой фермы (л.в.  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ), то линия влияния усилия в любом другом стержне (л.в.  $N^j$ ) может быть построена по простой формуле:

$$\text{л.в. } N^j = \text{л.в. } N_0^j + \sum_{k=1}^n N_k^j (\text{л.в. } X_k),$$

где л.в.  $N_0^j$  – линия влияния рассматриваемого усилия в основной системе метода сил при  $n = J$  удаленных связях;

$N_k^j$  – усилие в рассматриваемом стержне в основной системе метода сил от единичного неизвестного  $X_k = 1$ .

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК, ВИСЯЧИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

### 13.1. Виды статически неопределимых арок

В строительной практике наиболее часто находят применение следующие виды статически неопределимых арок: двухшарнирные (рис. 13.1,а), характеризующиеся наличием двух шарниров, как правило, опорных, или пятовых; одношарнирные (рис. 13.1,б), содержащие один шарнир, как правило, ключевой; бесшарнирные (рис. 13.1,в), представляющие собой один криволинейный стержень, жестко защемленный по концам. Двухшарнирная арка имеет одну «лишнюю» связь, одношарнирная арка дважды статически неопределима, а бесшарнирная арка трижды статически неопределима.

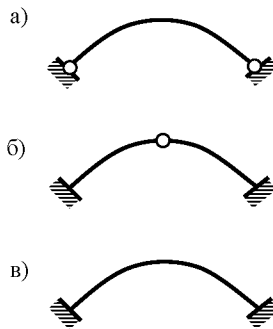


Рис. 13.1

По очертанию арки выполняются, как правило, симметричными. В зависимости от характера нагрузки ось арки может быть очерчена по квадратной параболе, по дуге окружности или иной кривой, может иметь переломы. Поперечное сечение арки может быть как постоянным по длине арки, так и переменным.

Все виды арок являются распорными системами, то есть при действии на арку только вертикальной нагрузки в ее опорах возникают и горизонтальные опорные реакции.

Следовательно, арки требуют создания мощных опорных устройств. Чтобы не передавать на ниже расположенные конструкции значительные горизонтальные усилия, применяют арки с затяжками. Обычно затяжки разной конструкции устраивают в двухшарнирных арках (рис. 13.2). Двухшарнирная арка с затяжкой, сохраняя свойства распорных систем, имеет балочные опоры и передает на опорные конструкции от вертикальной нагрузки только вертикальные усилия. Она может быть расположена на высоких колоннах или стенах без контрфорсов.

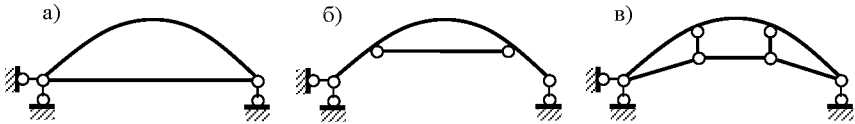


Рис. 13.2

Особенности расчета один раз статически неопределимых арок рассмотрим на примере расчета двухшарнирной арки с затяжкой.

### 13.2. Расчет двухшарнирной арки с затяжкой

Двухшарнирная арка с затяжкой является внешне безраспорной. Распор воспринят затяжкой, и его следует рассматривать как внутреннюю растягивающую силу в затяжке. Двухшарнирная арка с затяжкой является один раз статически неопределимой, и ее нетрудно рассчитать методом сил.

Рассмотрим двухшарнирную арку с прямолинейной затяжкой, расположенной в уровне опор (рис. 13.3,а). Арка имеет переменное по длине пролета поперечное сечение и загружена вертикальной нагрузкой. Основную систему метода сил можно получить, рассекая затяжку (точнее, удаляя из затяжки связь, воспринимающую продольную силу). Основным неизвестным метода сил будет усилие в затяжке  $N_{зам} = X_1$  (рис. 13.3,б).

Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где  $\delta_{11}$  – взаимное перемещение концов затяжки в месте разреза, вызываемое единичным усилием в затяжке  $X_1 = 1$ ;

$\Delta_{1F}$  – взаимное перемещение концов разрезанной затяжки от нагрузки.

При вычислении перемещений в основной системе учтем только изгибные деформации арки и продольные деформации затяжки. Продольными деформациями и деформациями сдвига в арке будем пренебрегать. Это допущение справедливо для достаточно подъемистых арок при отношении стрелы подъема арки к ее пролету, равном  $f/L = 1/6 \div 1/4$ .

При разрезанной затяжке основная система арки представляет собой криволинейную балку. Нагрузка, приложенная к арке, вызывает изгибающие моменты только в арке как в криволинейной балке  $\bar{M}_F = M_x^0$  (рис. 13.3,в). Усилий в разрезанной затяжке нагрузка не вызывает.

Единичное неизвестное вызывает изгибающие моменты в арке  $\bar{M}_1 = -y(x)$ . Единичная эпюра изгибающих моментов повторяет очертание оси арки (рис. 13.3,г). В затяжке единичное неизвестное вызывает постоянную растягивающую продольную силу  $\bar{N}_{зам} = 1$  (рис. 13.3,д).

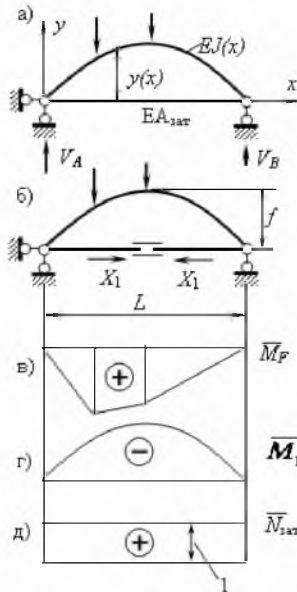


Рис. 13.3

Основная особенность расчета арок состоит в том, что интегралы Мора для вычисления перемещений в арках должны браться по длине оси арки, то есть являются криволинейными интегралами. Свободный член канонического уравнения, то есть грузовое перемещение, находят по одночленной формуле Мора:

$$\Delta_{1F} = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_F ds}{EJ(x)} = - \int_S \frac{y(x) M_F ds}{EJ(x)}.$$

Коэффициент при неизвестном (единичное перемещение), вычисляемый с учетом продольных деформаций затяжки, находят по двучленной формуле:

$$\delta_{11} = \int_S \frac{\overline{M}_1^2 ds}{EJ(x)} + \frac{\overline{N}_{зам}^2 L}{EA_{зам}} = \int_S \frac{[y(x)]^2 ds}{EJ(x)} + \frac{L}{EA_{зам}}.$$

Чтобы в этих криволинейных интегралах перейти к интегрированию по длине пролета, то есть по абсциссе  $x$ , введем замену:

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi(x)},$$

где  $\varphi(x)$  – угол наклона к горизонтали касательной к оси арки в сечении с абсциссой  $x$ .

В результате для вычисления коэффициента и свободного члена канонического уравнения метода сил получим следующие формулы:

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{[y(x)]^2 dx}{EJ(x) \cos \varphi(x)} + \frac{L}{EA_{зам}},$$

$$\Delta_{1F} = - \int_0^L \frac{y(x) M_F dx}{EJ(x) \cos \varphi(x)}.$$

Таким образом, вычисление перемещений в арках, как и в других криволинейных стержнях, оказывается значительно более трудоемким, чем вычисление перемещений в прямолинейных стержнях постоян-

ного сечения. Вычисление определенных интегралов по правилу перемножения эпюр (по правилу Верещагина) здесь невозможно, так как под знаками определенных интегралов стоит произведение нескольких нелинейных функций. Для вычисления перемещений в арках применяют методы численного интегрирования (формулы прямоугольников, трапеций, формула Симпсона).

Принимая во внимание введенные выше предположения о неучете продольных и сдвиговых деформаций арки, допустимо применить для вычисления перемещений в арке более простой численный метод – метод прямоугольников. Для этой цели пролет арки разбивают на достаточно малые участки, желательно, одинаковой длины, нумеруют их в определенной последовательности и в среднем сечении каждого участка вычисляют значения всех подынтегральных функций. В итоге процедура взятия определенного интеграла заменяется вычислением конечной суммы произведений значений подынтегральных функций в серединах участков:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k} + \frac{L}{EA_s},$$

$$\Delta_{1F} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k},$$

где  $k$  – номер участка;  
 $n$  – количество участков.

Обычно все вычисления проводят в таблицах (табл. 13.1).

Таблица 13.1

№ участка $k$	$x_k$	$y_k$	$EJ_k$	$\cos \varphi_k$	$(M_F)_k$	$\Delta x_k$	$\frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}$	$\frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
...								
...								
...								
$\Sigma$							$\delta_{11}^{(M)}$	$-\Delta_{1F}$

Сумма элементов предпоследнего столбца дает часть единичного перемещения, обусловленную изгибными деформациями арки. Полное единичное перемещение найдем как сумму:

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{(M)} + \frac{L}{EA_{зам}}.$$

После того как из решения канонического уравнения будет найдено усилие в затяжке:

$$N_{зам} = X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}},$$

внутренние силы в любом сечении двухшарнирной арки можно найти по тем же формулам, что и в трехшарнирной арке:

$$M_x = M_x^0 - X_1 y_x;$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - X_1 \sin \varphi_x;$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + X_1 \cos \varphi_x).$$

Индекс  $x$  в данных формулах обозначает произвольное сечение арки.

### 13.3. Влияние податливости затяжки на усилие в затяжке

В статически неопределимых системах распределение усилий в элементах зависит от соотношения их жесткостей (податливостей). Следовательно, и податливость затяжки  $L/(EA_{зам})$  будет влиять на значение усилия в затяжке. Полученную в предыдущем разделе формулу для вычисления усилия в затяжке можно переписать следующим образом:

$$N_{зам} = X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}^{(M)} + \frac{L}{EA_{зам}}}.$$

Графическое изображение зависимости усилия в затяжке от ее жесткости дано на рис. 13.4.

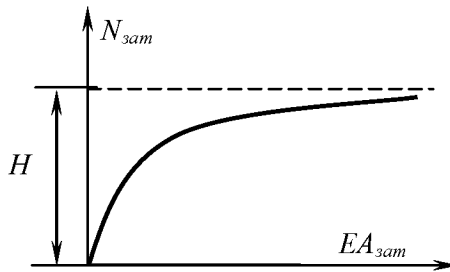


Рис. 13.4

Если постепенно уменьшать жесткость затяжки, то есть величину  $EA_{зам}$ , или, что то же самое, увеличивать податливость затяжки, величину  $L/(EA_{зам})$ , то усилие в затяжке будет уменьшаться. Чем слабее, податливее затяжка, тем меньше воспринимаемое ею усилие. В пределе, при затяжке нулевой жесткости, то есть при ее отсутствии, арка с затяжкой превращается в безраспорную криволинейную балку; усилие в затяжке равно нулю.

С другой стороны, если постепенно увеличивать жесткость затяжки  $EA_{зам}$  усилие в ней будет также увеличиваться, однако в гораздо меньшей степени. В пределе, при стремлении жесткости затяжки к бесконечности, а податливости – к нулю, усилие в затяжке будет асимптотически стремиться к величине:

$$H = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}^{(M)}},$$

где  $H$  – величина, численно равная распору двухшарнирной арки без затяжки на шарнирно-неподвижных опорах (рис. 13.1,а).

То есть в этом предельном случае, когда затяжка абсолютно не-растяжима, двухшарнирная арка с затяжкой превращается в двухшарнирную арку на неподвижных опорах – в обыкновенную двухшарнирную арку.



Таким образом, относительно слабая затяжка не позволяет полностью использовать преимущества арки с затяжкой как распорной системы. В противовес, чрезмерно жесткая затяжка практически оказывается бесполезной. Усилие в жесткой затяжке не может превысить распора арки без затяжки, вычисляемого по последней формуле.

При расчете двухшарнирных арок без затяжки за основное неизвестное также принимают распор ( $X_1 = H$ ). Основную систему метода сил получают, отбрасывая горизонтальный опорный стержень одной из опор. Единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов в основной системе для двухшарнирной арки без затяжки получаются такими же, как и для арки с затяжкой (рис. 13.3,в,г). Распор двухшарнирной арки без затяжки вычисляют по формуле:

$$X_1 = H = \frac{\sum_{k=1}^n y_k (M_F)_k \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n \frac{EJ_k \cos \varphi_k}{2} \Delta x_k}.$$

### 13.4. Особенности расчета бесшарнирной арки

Бесшарнирная арка является трижды статически неопределимой. Для определения трех основных неизвестных метода сил необходимо составить и решить три канонических уравнения. Соответствующим выбором основной системы метода сил можно добиться даже полного разделения системы канонических уравнений на три отдельных уравнения, каждое с одним неизвестным, при произвольном очертании оси арки и произвольной нагрузке. Варианты основных систем, представленные на рис. 13.5,а,б,в, позволяют обнулить побочные коэффициенты канонических уравнений и привести уравнения к виду:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Добиться такого результата можно ценою дополнительных вычислений по определению длины жестких консолей (рис. 13.5,а,б). Так, например, в симметричной арке (рис. 13.5,б) основное неизвестное  $X_1$  является кососимметричным и отделено от двух других прямосимметричных неизвестных. Разделить основные неизвестные  $X_2$  и  $X_3$  можно, подобрав длину абсолютно жестких консолей  $y_0$  так, чтобы перемещение  $\delta_{23}$  равнялось нулю. Точку, в которой находятся концы абсолютно жестких консолей, называют упругим центром арки. Полного разделения основных неизвестных можно добиться, поместив в упругий центр конец единственной консоли (рис. 13.5,а). Тот же результат можно получить и при основной системе в виде трехшарнирной арки (рис. 3.5,в), сгруппировав основные неизвестные  $X_1$  и  $X_3$  и определив положение крайних шарниров из условий, чтобы побочные коэффициенты канонических уравнений метода сил обратились в нуль.

Однако в век электронных калькуляторов и компьютеров решение систем линейных алгебраических уравнений второго-третьего порядка не представляет каких-либо затруднений. Поэтому можно отказаться от выбора оригинальных основных систем и дополнительных вычислений.

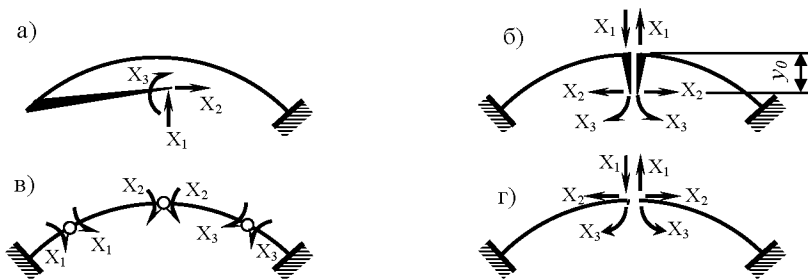


Рис. 13.5

Так, основная система, полученная сквозным разрезом бесшарнирной арки по оси симметрии (рис. 13.5,г), позволяет сразу разделить три совместных канонических уравнения на одно независимое уравнение

относительно кососимметричного основного неизвестного  $X_1$  и на систему двух совместных уравнений относительно двух симметричных основных неизвестных  $X_2$  и  $X_3$ :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

К таким же результатам приводит и основная система в виде криволинейной балки (рис. 13.6,б). Рассмотрим данный вариант более подробно, так как многие вопросы, свойственные такой основной системе, уже нашли свое отражение в расчете двухшарнирных и трехшарнирных арок.

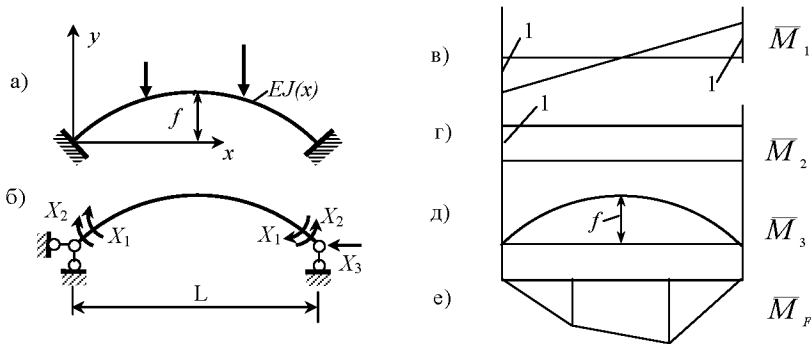


Рис. 13.6

Сгруппируем неизвестные опорные моменты, разложив их на кососимметричное групповое неизвестное  $X_1$  и симметричное групповое неизвестное  $X_2$ . Основное неизвестное  $X_1 = 1$  вызовет в арке линейную кососимметричную эпюру (рис. 13.6,в). Ординаты этой единичной эпюры можно вычислить в обычной системе координат с началом на левой опоре по уравнению  $M_1(x) = 1 - 2x/L$ .

Неизвестное  $X_2 = 1$  вызовет в арке постоянные положительные изгибающие моменты  $M_2(x) = 1$  (рис. 13.6,г). Неизвестное  $X_3 = 1$  вызовет в основной системе симметричную эпюру изгибающих моментов с отрицательными ординатами, совпадающую с очертанием оси арки,  $M_3(x) = -y(x)$  (рис. 13.6,д). Грузовая эпюра изгибающих моментов совпадает с балочной эпюрой изгибающих моментов  $M_F = M_x^0$  (рис. 13.6,е).

Криволинейные интегралы по длине арки, определяющие коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, вычислим по правилу прямоугольников, разбив пролет арки на  $n$  участков. С учетом введенных выше обозначений соответственно получим:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{M}_1)_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \delta_{22} = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\delta_{23} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \delta_{33} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{M}_1)_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \Delta_{2F} = \sum_{k=1}^n \frac{(M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\Delta_{3F} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}.$$

В приведенных выше формулах индекс  $k$  обозначает номер участка при вычислении интегралов Мора по правилу прямоугольников. Значения подынтегральных функций вычисляются обычно в серединах участков.

После определения из решения канонических уравнений основных неизвестных можно определить внутренние силы в любом сечении бесшарнирной арки точно так же как в трехшарнирных и двухшарнирных арках. Основное неизвестное  $X_1$  вызывает в основной системе вертикальные опорные реакции:

$$V_{A1} = -2X_1 / L; \quad V_{B1} = 2X_1 / L .$$

Основное неизвестное  $X_2$  в основной системе опорных реакций не вызывает. Основное неизвестное  $X_3$  вызывает в основной системе только горизонтальную опорную реакцию  $H_{A3} = X_3$ . Следовательно, для вычисления внутренних сил в произвольном сечении  $x$  бесшарнирной арки будем иметь следующие формулы:

$$M_x = M_x^0 + X_1(1 - 2x/L) + X_2 - y_x X_3 ;$$

$$Q_x = (Q_x^0 - 2X_1/L) \cos \varphi_x - X_3 \sin \varphi_x ;$$

$$N_x = -(Q_x^0 - 2X_1/L) \sin \varphi_x - X_3 \cos \varphi_x .$$

### 13.5. Применение метода перемещений к расчету статически неопределимых арок

Основная система метода перемещений должна представлять собой набор прямолинейных стержней постоянного сечения. Поэтому криволинейную арку (рис.13.7,а) необходимо заменить ломаным стержнем, разбив арку на ряд прямолинейных участков (рис.13.7,б).

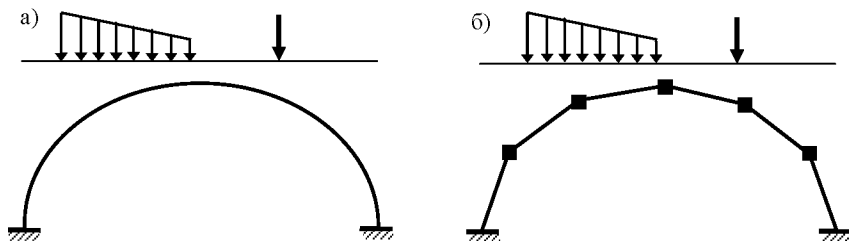


Рис. 13.7

Узлы ломаного стержня располагаются на оси арки. Для каждого участка вычисляется его длина и углы наклона к координатным осям. Жесткости каждого участка усредняются и принимаются постоянными по длине участка.

В результате арка превращается в раму с наклонными стержнями. При шести участках по длине арки полученная рама имеет пять

неизвестных углов поворота и при неучете продольных деформаций четыре линейных смещения. Однако при линейном смещении в основной системе одного из узлов перекосы (взаимные смещения узлов стержня поперек его оси) получают не только стержни, прилегающие к смещенному узлу, но и целая цепочка других стержней. Количество стержней в такой цепочке зависит от расположения дополнительных опорных связей, устраняющих линейные смещения узлов. Определение перекосов всех сместившихся стержней представляет чрезвычайно громоздкую процедуру. Поэтому расчет ломаных стержней методом перемещений ведут с учетом продольных деформаций. Число неизвестных метода перемещений при этом возрастает. Каждый промежуточный узел основной системы будет иметь по три перемещения: угловое и два линейных. Но в этом случае при линейном смещении одного узла будут деформироваться только прилегающие стержни. В данном примере (рис. 13.7,б) при учете продольных деформаций порядок системы канонических уравнений метода перемещений возрастает до пятнадцати. На практике для обеспечения достаточной точности число участков по длине арки приходится брать гораздо большим. Количество неизвестных возрастает. Следовательно, расчет арок методом перемещений следует вести на основе компьютерных технологий. Для этого применяют общие уравнения строительной механики (глава 15), метод конечных элементов (глава 16) и проектно-вычислительные комплексы.

### **13.6. Понятие о расчете комбинированных и висячих систем**

Напомним, что комбинированными системами называют расчетные схемы сооружений, у которых часть стержней работает на изгиб, а остальные только на сжатие-растяжение. Стержни, работающие на изгиб, обычно имеют более мощное поперечное сечение, и их называют жесткими элементами. Стержни, воспринимающие только сжимающие или растягивающие усилия, являются более легкими. Их называют гибкими элементами. Рассмотренные в шестой главе шпренгельная балка с промежуточным шарниром в середине пролета и цепь с балкой жесткости, также имеющей промежуточный шарнир, являются основными представителями статически определимых комбинированных систем. Виды статически неопределимых комбинированных систем практически необозримы.

Все виды арок с затяжками можно отнести к комбинированным системам. Сама арка представляет собой жесткий элемент. Элементы затяжки являются гибкими. Примеры других статически неопределимых комбинированных систем показаны на рис. 13.8.

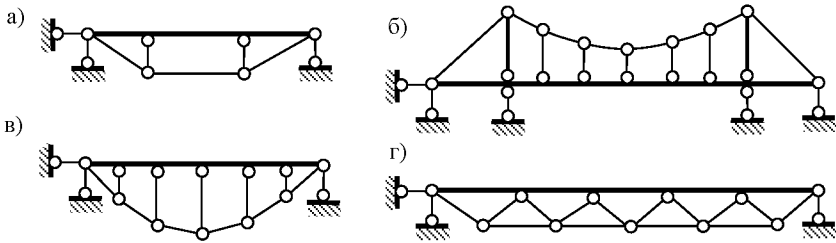


Рис. 13.8

Висячими называют такие системы, основные несущие элементы которых работают на растяжение. К висячим системам относятся висячие арки (рис. 13.9,а), разнообразные вантовые (тросовые) системы (рис. 13.9,б,в,г), некоторые виды комбинированных систем (рис. 13.8,б,в).

Расчет висячей (растянутой) двухшарнирной арки (рис. 13.9,а) отличается от расчета обыкновенной (сжатой) двухшарнирной арки только тем, что распор висячей арки направлен наружу от пролета. Если висячая арка выполнена из гибких элементов (тросов, канатов), то она превращается в гибкую нить (рис. 13.9,в). Расчет гибких нитей, как и других висячих, вантовых и комбинированных систем больших пролетов, ведется в нелинейной постановке по деформированной схеме. Особенности расчета сооружений по деформированной схеме будут рассмотрены в главах 23 и 25. В данном разделе рассмотрим особенности расчета некоторых комбинированных систем (в том числе и висячих) в классической постановке по недеформированной расчетной схеме.

Шпренгельная балка (рис. 13.8,а) и балка с многостоечным шпренгелем (рис. 13.8,в) являются примерами комбинированных систем с одной лишней связью. Висячая система в виде цепи с неразрезной балкой жесткости и распором цепи, переданным на балку (рис. 13.8,б), является трижды статически неопределимой. Ферма с неразрезным верхним поясом (рис. 13.8,г) содержит четыре лишних

связи. Вантовая комбинированная система (рис. 13.9,б) с неразрезной балкой и двумя оттяжками один раз статически неопределима при условии, что оттяжки из работы не выключаются. Вантовая ферма (рис. 13.9,г) трижды статически неопределима. Такие фермы подвергаются предварительному натяжению так, чтобы все их элементы не выключались из работы. При таком условии расчет вантовых ферм не отличается от расчета обычных статически неопределимых ферм, рассмотренных выше.

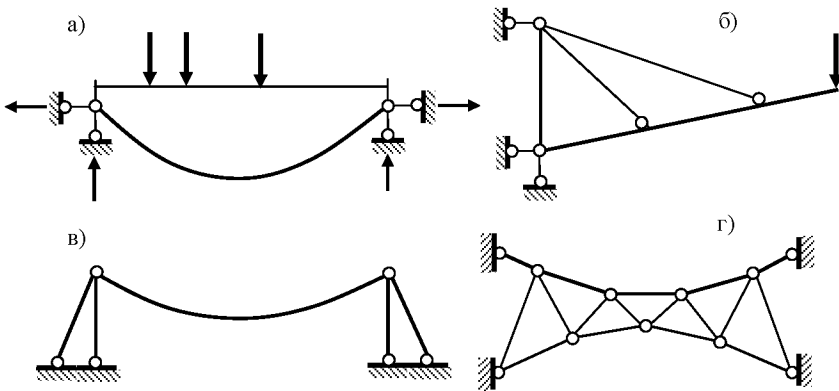


Рис. 13.9

Расчет комбинированных систем малых и средних пролетов при небольшом количестве лишних связей может быть выполнен по недеформированной расчетной схеме методом сил. Основную систему метода сил для комбинированных систем рекомендуется выбирать такой, чтобы от заданной нагрузки в ней возникали усилия только в жестких элементах. Это возможно, если вся нагрузка приложена к жестким элементам. На рис. 13.10 для двух комбинированных систем приведены варианты основных систем метода сил, построены грузовые и характерные единичные эпюры изгибающих моментов в жестких элементах. Единичные основные неизвестные вызывают также усилия в гибких элементах. Усилий от нагрузки в гибких элементах не будет.



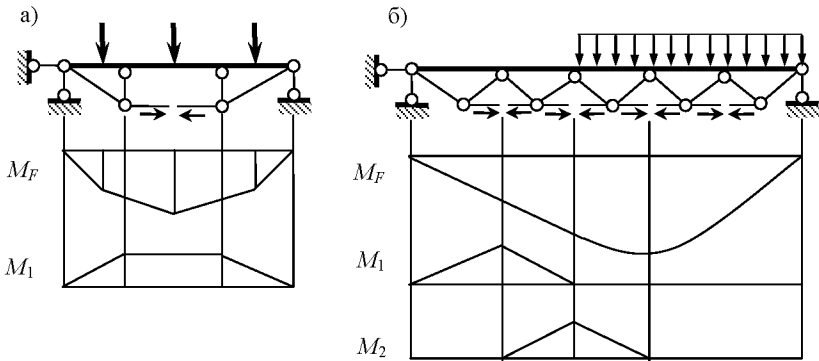


Рис. 13.10

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений метода сил в комбинированных системах вычисляются по двучленным формулам Максвелла-Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EJ} + \sum \frac{N_i N_k L}{EA};$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_i M_F ds}{EJ} + \sum \frac{N_i N_F L}{EA}.$$

Практически из-за большой разницы в площадях поперечных сечений гибких и жестких элементов суммирование во втором слагаемом приведенных формул распространяется только на гибкие элементы: поправки к перемещениям за счет продольных деформаций жестких элементов получаются незначительными.

Количество неизвестных метода перемещений в комбинированных и вантовых системах, как правило, оказывается значительным. Поэтому метод перемещений применяют при автоматизированном расчете комбинированных систем на компьютерах, с обязательным учетом продольных деформаций. Иногда комбинированные системы рассматривают как рамы со всеми жесткими узлами. Используются при этом общие уравнения строительной механики, метод конечных элементов и универсальные проектно-вычислительные комплексы.

На практике, чтобы убедиться в достоверности результатов, любое сооружение рекомендуется рассчитывать с применением нескольких расчетных схем (упрощенных и более точных), нескольких методов расчета и нескольких программных комплексов.

## ГЛАВА 14

### ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

#### 14.1. Виды пространственных систем

Стержневые системы называют пространственными, если оси их элементов и линии действия нагрузок расположены не в одной плоскости. К таким системам относятся каркасы гражданских и промышленных зданий, башни, мачты, стержневые купола и т. д.

Пространственные стержневые системы по характеру образования делятся на два основных вида: пространственные рамы и пространственные фермы (пространственные шарнирно-стержневые системы). В рамах пространственно расположенные стержни соединяются между собой преимущественно жесткими узлами (рис. 14.1,а), а в пространственных фермах – шаровыми шарнирами (рис. 14.1,б).

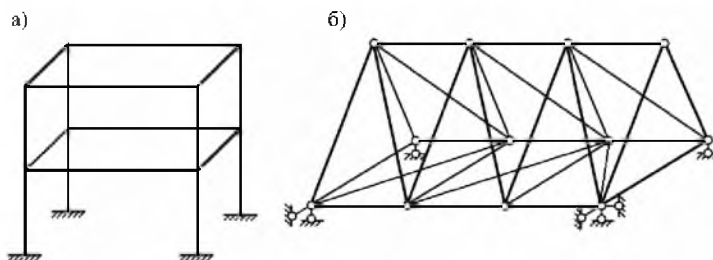


Рис. 14.1

В поперечном сечении пространственного стержня, ось которого совпадает с осью  $x$  локальной системы координат, внутренние силы можно разложить на шесть составляющих: изгибающие моменты

относительно двух осей ( $M_y, M_z$ ), крутящий момент относительно оси стержня ( $M_{кр} = M_x$ ), поперечные силы по направлениям двух осей ( $Q_z, Q_y$ ) и продольная сила ( $N = N_x$ ).

Стержни пространственных ферм при узловых нагрузках работают на растяжение-сжатие, в них возникают только продольные силы.

## 14.2. Опоры пространственных стержневых систем. Кинематический анализ

Пространственные системы, как и плоские, должны быть геометрически неизменяемыми. Рассуждения о неизменяемости, изменяемости и мгновенной изменяемости систем, изложенные ранее для плоских стержневых систем, принципиально справедливы и для пространственных систем. Всякую геометрически неизменяемую пространственную систему можно отождествить с пространственным «диском», точнее, блоком. Каждый пространственный блок имеет шесть степеней свободы. Соединение блоков между собой в пространственные системы может осуществляться жестко или шарнирно. Всякая заведомо геометрически неизменяемая пространственная система (блок) должна иметь как минимум шесть опорных связей.

Различают следующие основные типы опор пространственных систем.

1. Защемляющая опора (заделка). Такая опора эквивалентна шести связям первого вида. На расчетных схемах заделка изображается так же, как и для плоских систем (рис. 14.1,а). Реакция защемляющей опоры может быть представлена в виде трех реактивных сил ( $R_x, R_y, R_z$ ) и трех реактивных моментов ( $M_x, M_y, M_z$ ).

2. Неподвижная шаровая опора. Эта опора может быть представлена (рис. 14.2,а) как шар 1, вложенный в сферические углубления двух балансиров 2, 3, один из которых присоединяется жестко к сооружению 5, а второй – к опорной поверхности 4. Опора допускает три степени свободы, так как позволяет поворачиваться присоединенному блоку относительно трех осей  $x, y, z$ . На расчетных схемах эта опора может изображаться в трех вариантах, представленных на рис. 14.2,б. Реакция шаровой опоры проходит через центр опорного шарнира и может быть представлена в виде трех составляющих (рис. 14.2,в).

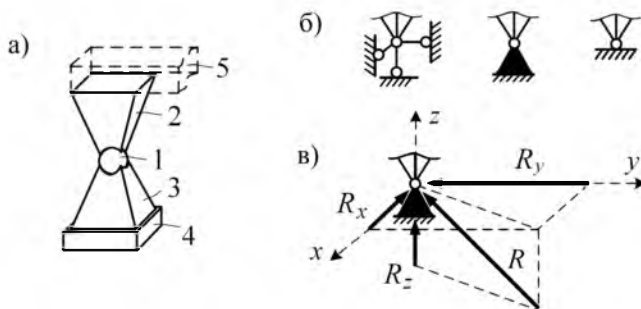


Рис. 14.2

3. Шаровая опора, подвижная в одном направлении. Такая опора отличается от неподвижной шаровой опоры лишь тем, что нижний балансир прикрепляется к опорной поверхности не жестко, а опирается на нее через цилиндрические катки (рис. 14.3,а). Эта опора эквивалентна двум связям первого вида, в ней возникают две составляющие опорной реакции. Одна из них направлена перпендикулярно опорной плоскости, а вторая – параллельна осям цилиндрических катков (рис. 14.3,б). Опора допускает четыре степени свободы: три поворота относительно трех координатных осей и линейное перемещение в одном направлении (по оси  $x$  на рис. 14.3).

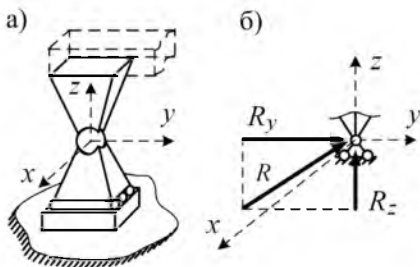


Рис. 14.3

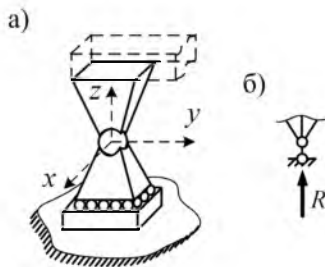


Рис. 14.4

4. Шаровая опора, подвижная в двух направлениях. Конструктивная схема такой опоры отличается от конструктивной схемы предыдущей опоры тем, что нижний балансир опирается не на цилиндрические, а на шаровые катки (рис. 14.4,а). Опора эквивалентна

одной связи первого вида и имеет пять степеней свободы. На расчетной схеме она изображается в виде одного опорного стержня со сферическими шарнирами по концам (рис. 14.4,б). Опорная реакция направлена перпендикулярно к опорной плоскости (плоскости касания шаровых катков).

5. Неподвижная цилиндрическая опора. В такой опоре между двумя балансирами располагается не шар, а цилиндр (рис. 14.5,а). Неподвижная цилиндрическая опора эквивалентна пяти связям первого вида. Она допускает только поворот вокруг оси цилиндра. Ее опорную реакцию можно представить в виде трех реактивных сил  $R_x, R_y, R_z$  и двух реактивных моментов  $M_x$  и  $M_z$  (рис 14.5,а). Расчетная схема этой опоры может изображаться в двух вариантах, представленных на рис. 14.5,б,в.

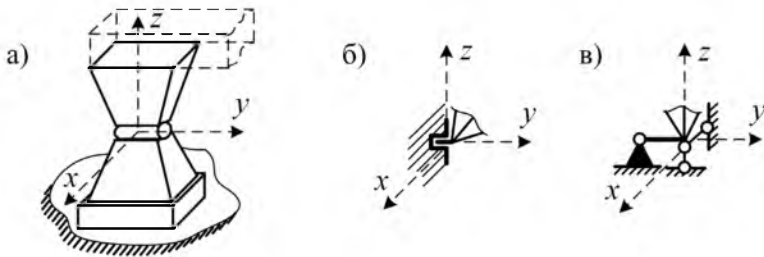


Рис. 14.5

Число степеней свободы произвольной пространственной стержневой системы может быть определено по формуле:

$$W = 6D - 6Ж - 3Ш - 5Ш_ц - C_0, \quad (14.1)$$

где  $D$  – число дисков (блоков) в системе (за диск может быть принят как прямолинейный, так и ломано-разветвленный пространственный стержень);

$Ж$  – число простых жестких соединений дисков между собой;

$Ш$  – число простых шаровых шарниров,

$Ш_ц$  – число простых цилиндрических шарниров, соединяющих диски;

$C_0$  – число простых опорных связей в системе.

В формуле (14.1) учтено, что каждый диск в пространстве имеет шесть степеней свободы, каждое жесткое соединение дисков отнимает шесть степеней свободы, каждый шаровой шарнир, соединяющий диски, отнимает три степени свободы, а каждый цилиндрический шарнир – пять степеней свободы.

Число степеней свободы для пространственных ферм может быть определено по формуле:

$$W = 3U - C - C_0, \quad (14.2)$$

где  $U$  – число шаровых узлов в ферме;

$C$  – число стержней;

$C_0$  – число опорных связей.

Степень изменяемости  $V$  пространственной фермы, отсоединенной от опор, вычисляется по формуле:

$$V = 3U - C - 6.$$

Как и в плоских стержневых системах условие  $W > 0$  означает, что система изменяема. Условия же  $W = 0$  и  $W < 0$  необходимы, но недостаточны для утверждения, что система геометрически неизменяема и соответственно статически определима или статически неопределима. Для окончательного решения этого вопроса необходимо выполнять анализ структуры сооружения.

Рассмотрим некоторые случаи образования явно геометрически неизменяемых пространственных систем.

1. Шарнирно-стержневая пирамида (рис. 14.6), все грани которой образуют треугольники, а в узлах стержни соединены шаровыми шарнирами, неизменяема ( $V = 0$ ), то есть является диском (блоком).

2. Если шарнирный узел присоединен к пространственному диску тремя не лежащими в одной плоскости стержнями, которые к диску прикрепляются шаровыми шарнирами (рис. 14.7), то полученная система в целом неизменяема ( $V = 0$ ) и является диском (блоком).

3. Два пространственных диска, соединенных между собой шестью стержнями с шаровыми шарнирами по концам (шестью связями первого вида) образуют новый диск, если соединяющие стержни расположены так, что (рис. 14.8):

а) три стержня, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной точке  $A$  (образуя как бы шаровую неподвижную опору);

б) два других стержня, лежащие в одной плоскости, не проходящей через точку  $A$ , не параллельны друг другу и пересекаются в другой точке  $B$  (образуя, по существу, шаровую подвижную в одном направлении опоры);

в) шестой стержень не пересекает линию  $AB$  (выполняет роль шаровой подвижной в двух направлениях опоры).

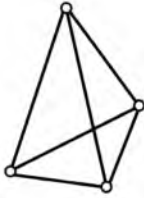


Рис. 14.6

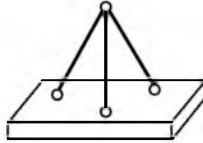


Рис. 14.7

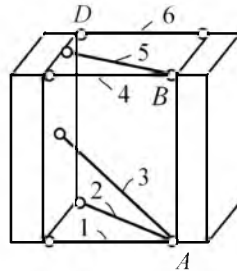


Рис. 14.8

4. Неизменяемыми являются и так называемые сетчатые структуры (фермы). Сетчатой называют пространственную ферму, имеющую вид многогранника, с треугольными гранями (рис. 14.9).

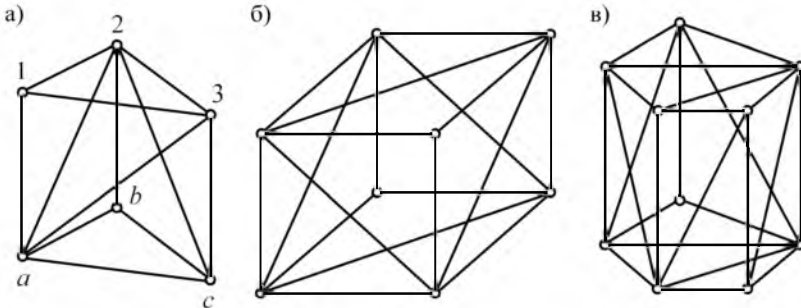


Рис. 14.9

Степень изменяемости каждой из систем, представленных на рис. 14.9, согласно (14.2) равна нулю. Так, для системы на рис.

14.9,а  $V = 3 \cdot 6 - 12 - 6 = 0$ ; для системы на рис. 14.9,б  $V = 3 \cdot 8 - 18 - 6 = 0$ ; для системы на рис. 14.9,в  $V = 3 \cdot 10 - 24 - 6 = 0$ .

Для неподвижности этих систем по отношению к опорной поверхности необходимо шесть опорных связей.

Сетчатые системы являются статически определимыми системами. Покажем это. Число стержней такой фермы равно:

$$C = 3 \Gamma / 2, \quad (\text{а})$$

где  $\Gamma$  – число граней.

В то же время, для выпуклого многогранника выполняется соотношение:

$$C = Y + \Gamma - 2. \quad (\text{а})$$

Исключив из выражений (а) и (б) число граней  $\Gamma$ , получим, что:

$$3 Y - C - 6 = 0,$$

то есть степень изменяемости сетчатой системы равна нулю. Таким образом, всякая сетчатая система, будучи закрепленной шестью опорными связями, является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Неизменяемость сетчатых ферм (структур) может быть доказана и способом нулевой нагрузки. Если при отсутствии нагрузки, усилия во всех стержнях фермы равны нулю, то система неизменяема. Если же в каком-либо из стержней усилие будет неопределенным, то система мгновенно изменяема. Например, при отсутствии нагрузки в системе на рис. 14.9,а, последовательно вырезая узлы 1, 3, 2, б, а (способы определения усилий в пространственных фермах рассмотрены в разделе 14.4), получим, что усилия во всех стержнях равны нулю, и, значит, система неизменяема.

### **14.3. Определение усилий и перемещений в статически определимых пространственных рамах**

В стержнях пространственных рам в общем случае возникает шесть составляющих внутренних сил (усилий): продольная сила ( $N_x$ ), действующая вдоль оси стержня (рис. 14.10,а), две поперечные



силы ( $Q_y$ ,  $Q_z$ ), действующие в плоскости поперечного сечения по направлениям главных осей сечения, изгибающие моменты ( $M_y$ ,  $M_z$ ) относительно главных осей сечения и крутящий момент ( $M_{кр} = M_x$ ). Изгибающие и крутящие моменты на пространственных (аксонометрических) чертежах, в отличие от векторов-сил, будем изображать в виде векторов с двойными стрелками (рис. 14.10,б). Положительные направления внутренних сил в поперечном сечении пространственного стержня показаны на рис. 14.10.

Для определения внутренних сил используется, как правило, метод сечений. Условия равновесия отсеченной части стержня или фрагмента пространственной рамы записываются в виде шести уравнений равновесия: трех уравнений проекций на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и трех уравнений моментов относительно этих же осей.

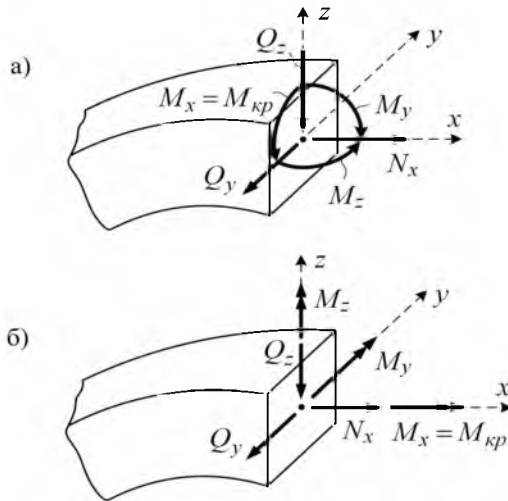


Рис. 14.10

Рассмотрим пространственную раму, представленную на рис. 14.11. Определим усилия в характерных сечениях рамы и построим эпюры усилий.

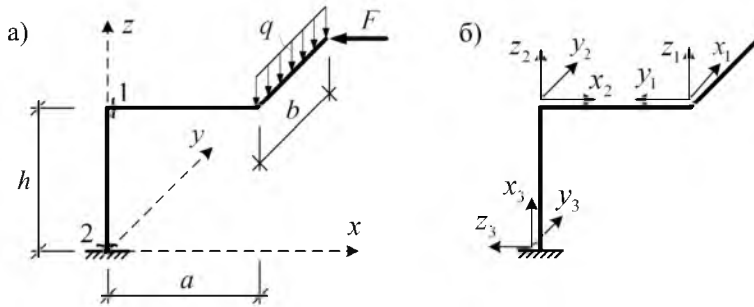


Рис. 14.11

Эпюры внутренних сил в пространственных рамах удобнее представлять не в общей системе координат  $x, y, z$ , а в локальных для каждого ( $i$ -го) из стержней системах координат  $x_i, y_i, z_i$ , которые можно выбирать следующим образом:

- ось  $x_i$  направляется вдоль оси стержня от его начала к концу;
- оси  $y_i, z_i$  составляют с осью  $x_i$  правую тройку осей координат и направляются так, чтобы они были либо параллельны осям  $y, z$  общей системы координат, либо образовывали с этими осями наименьший угол.

Местные системы координат для каждого из стержней рамы (рис. 14.11,а) можно принять в виде, представленном на рис. 14.11,б.

Вычислим усилия в сечениях 1 и 2, рассматривая равновесие отсеченной части рамы:

а) в сечении 1:

$$N = \sum F_{x2}^{npav} = -F; \quad M_{xp} = \sum M_{x2}^{npav} = -\frac{qb^2}{2};$$

$$M_{y2} = \sum M_{y2}^{npav} = qba; \quad M_{z2} = \sum M_{z2}^{npav} = Fb;$$

$$Q_{z2} = \sum F_{z2}^{npav} = qb; \quad Q_{y2} = \sum F_{y2}^{npav} = 0;$$

б) в сечении 2:

$$N = \sum F_{x3}^{\text{верхн}} = -qb; \quad M_{xp} = \sum M_{x3}^{\text{верхн}} = -Fb;$$

$$M_{y3} = \sum M_{y3}^{\text{верхн}} = qba - Fh; \quad M_{z3} = \sum M_{z3}^{\text{верхн}} = -\frac{qb^2}{2};$$

$$Q_{z3} = \sum F_{z3}^{\text{верхн}} = -F; \quad Q_{y3} = \sum F_{y3}^{\text{верхн}} = 0.$$

Эпюры усилий для рассматриваемой рамы (рис. 14.11) показаны на рис. 14.12.

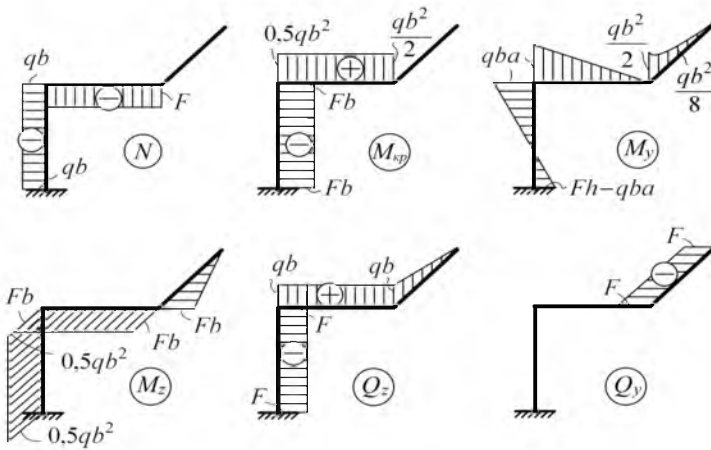


Рис. 14.12

Перемещения в пространственных стержневых системах определяются по формуле:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_{iy} M_{Fy}}{EJ_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{iz} M_{Fz}}{EJ_z} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{ikp} M_{Fkp}}{GJ_{kp}} ds +$$

$$+ \sum \int \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} ds + \sum \int \eta_y \frac{\bar{Q}_y Q_{Fy}}{GA} ds + \sum \int \eta_z \frac{\bar{Q}_z Q_{Fz}}{GA} ds, \quad (14.3)$$

где  $M_{Fy}, M_{Fz}, M_{Fkp}, N_F, Q_{Fy}, Q_{Fz}$  – усилия в системе от нагрузки;  
 $M_{iy}, M_{iz}, M_{ikp}, N_i, Q_{iy}, Q_{iz}$  – усилия в системе от действия единичной силы, приложенной в сечении, для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения;  
 $\eta_y, \eta_z$  – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений (соответственно в направлениях осей  $y_i$  и  $z_i$ );  
 $EJ_y, EJ_z, GJ_{kp}, EA, GA$  – жесткости стержней при изгибе, кручении, сжатии-растяжении и сдвиге.

Для пространственных ферм формула перемещений сохраняет такой же вид, как и для плоских: в выражении (14.3) сохраняется только четвертое слагаемое.

#### 14.4. Расчет пространственных ферм

Определение усилий в стержнях статически определимых пространственных ферм также выполняется методом сечений. Если, в частном случае, отсекается (вырезается) один узел пространственной фермы, то для определения усилий в стержнях, сходящихся в этом узле, можно составить три независимых уравнения равновесия. В общем случае, при отсечении фрагмента фермы для него составляются шесть независимых уравнений равновесия.

Применим способ вырезания узлов для нахождения усилий в стержнях 1, 2, 3 пространственной фермы (рис. 14.13).

Вырежем узел 4. Для определения усилия  $N_1$  в стержне 1 составим сумму проекций всех сил в узле на ось  $z'$ , перпендикулярную к плоскости, в которой лежат стержни 2 и 3 (рис. 14.14,а).

$$\sum z' = 0; \quad N_1 \sin \gamma - F_1 \sin \psi = 0; \quad N_1 = F_1 \frac{\sin \psi}{\sin \gamma},$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{c}{d}; \quad \gamma + \psi = \operatorname{arctg} \frac{b+c}{d}.$$

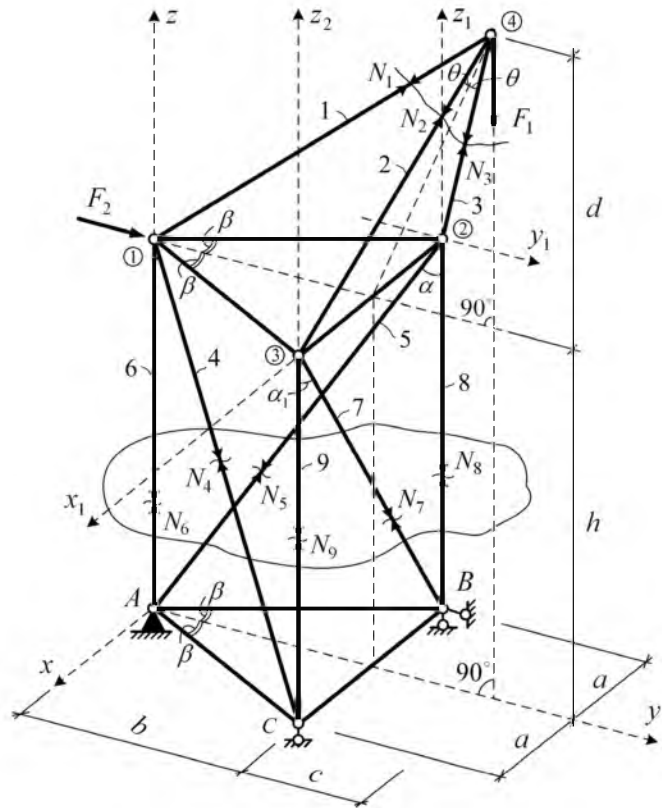


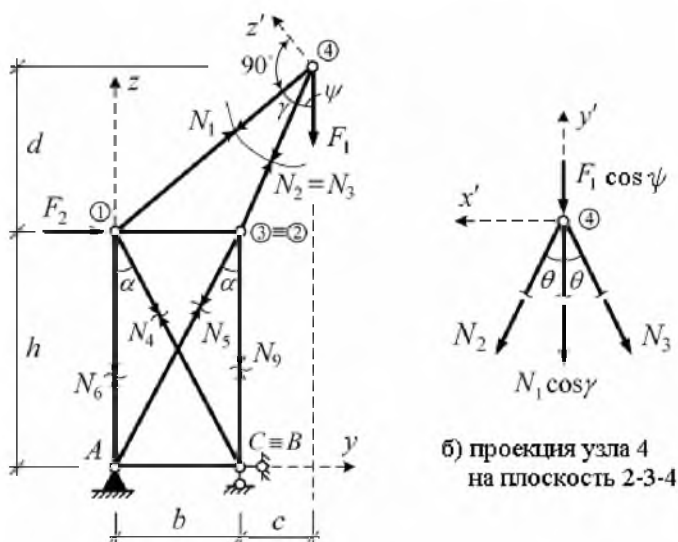
Рис. 14.13

После этого рассмотрим проекцию всех сил в узле 4 на плоскость, в которой лежат стержни 2 и 3 (рис. 4.14,б). Составим уравнения проекций сил в этой плоскости на две взаимно перпендикулярные оси  $x'$  и  $y'$ , из которых найдем продольные силы  $N_2$  и  $N_3$ :

$$\sum x' = 0; \quad -N_2 \sin \theta + N_3 \sin \theta = 0; \quad N_3 = N_2;$$

$$\sum y' = 0; \quad -F_1 \cos \psi - N_1 \cos \gamma - N_2 \cos \theta - N_3 \cos \theta = 0;$$

$$N_2 = N_3 = -\frac{F_1 \cos \psi + N_1 \cos \gamma}{2 \cos \theta} = \frac{-F_1 \left( \frac{\sin(\psi + \gamma)}{\sin \gamma \cos \theta} \right)}{2}.$$



а) проекция фермы на плоскость  $yz$

б) проекция узла 4 на плоскость 2-3-4

Рис. 14.14

При определении усилий способом вырезания узлов необходимо последовательно вырезать узлы в порядке, продиктованном структурой фермы, так чтобы в каждом вырезанном узле было не более трех стержней с неизвестными усилиями.

Способ вырезания узлов помогает выделить два частных случая, позволяющих определять стержни, в которых усилия заведомо равны нулю («нулевые» стержни):

а) если в ненагруженном узле сходятся три стержня, не лежащие в одной плоскости, то усилия во всех трех стержнях равны нулю;

б) если в ненагруженном узле все стержни, кроме одного, лежат в одной плоскости, то усилие в стержне, не лежащем в этой плоскости (одиночном), равно нулю; одиночный стержень останется нулевым, если в плоскости остальных стержней будет узловая нагрузка.

При применении метода сечений уравнения равновесия для отсеченного фрагмента фермы могут быть составлены в виде уравнений проекций всех сил на координатные оси и в виде сумм моментов всех сил относительно координатных осей. Общее число независимых уравнений равно шести, как для пространственного блока.

Покажем определение усилий в стержнях 4–9 пространственной фермы (рис. 14.13). Рассечем ферму горизонтальной плоскостью по названным стержням и рассмотрим равновесие верхней части. Усилие в стержне 4 (рис. 4.13) определим из уравнения суммы моментов относительно оси  $z_1$  (совпадает с направлением стержня В–2).

В этом случае моменты силы  $F_1$  и усилий в стержнях 6, 8 и 9, параллельных оси  $z_1$ , а в стержнях 5 и 7, которые пересекают эту ось, будут равны нулю. Следовательно, уравнение равновесия примет вид:

$$\sum M_{z_1} = -N_4 \sin \alpha \cos \beta a - N_4 \sin \alpha \sin \beta b - F_2 a = 0;$$

$$N_4 = -\frac{F_2 a}{(a \cos \beta + b \sin \beta) \sin \alpha}.$$

Усилие в стержне 5 можно определить из уравнения моментов сил относительно оси  $z_2$ . Из уравнения суммы моментов сил относительно оси  $z$  следует, что усилие в стержне 7 равно нулю. Аналогичным образом из уравнений моментов сил или проекций сил определяются усилия в остальных стержнях.

Вычисление усилий в стержнях пространственных ферм определенной структуры может выполняться и по способу их разложения на плоские фермы. Это возможно, если боковые грани пространственной фермы являются плоскими, и нет стержней, пересекающих объем фермы, заключенный между боковыми гранями.

При этом внешнюю узловую нагрузку разлагают на составляющие, действующие в плоскостях смежных граней. После этого про-

изводится расчет отдельных граней как плоских ферм на нагрузки, лежащие в их плоскостях. Усилия в стержнях, являющихся общими для нескольких плоских ферм, суммируются.

Сетчатая ферма, изображенная на рис. 14.15,а, является статически определимой.

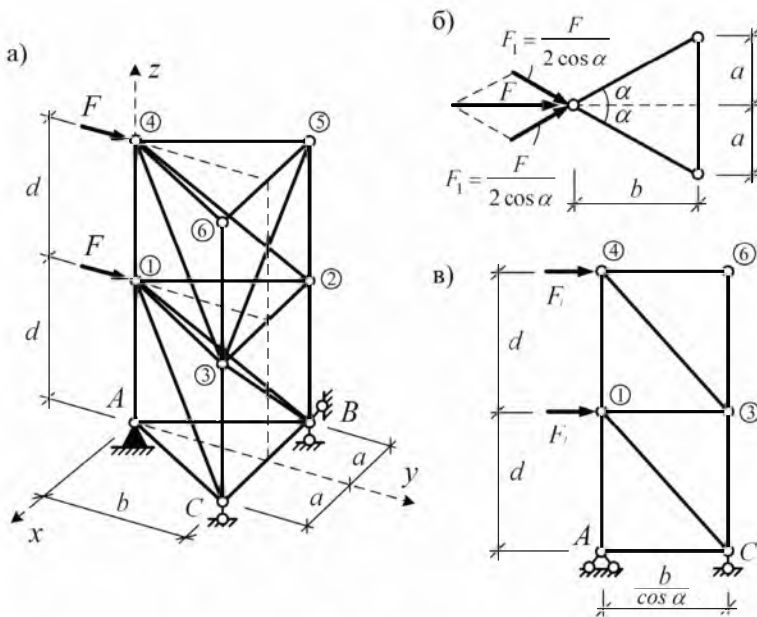


Рис. 14.15

Разложим силу  $F$  на составляющие  $F_1$ , действующие в плоскостях граней  $A46C$  и  $A45B$  (рис. 14.15,б).

На действие сил  $F_1$  работают плоские фермы  $A46C$  (рис. 14.15,в) и  $A45B$ . Усилия в стержнях этих ферм находятся с применением обычных методов расчета плоских ферм. В стержнях  $A-1$  и  $1-4$  пространственной фермы продольные силы будут определяться суммированием усилий, полученных в этих стержнях из расчета двух плоских ферм.



## 14.5. Особенности расчета статически неопределимых пространственных систем

Расчет пространственных статически неопределимых стержневых систем принципиально ничем не отличается от расчета плоских стержневых систем. К их расчету традиционно можно применять как метод сил, так и метод перемещений, а также другие методы.

Канонические уравнения принятого к расчету метода записываются в традиционной форме. Вычисление перемещений или реакций в пространственных шарнирно-стержневых системах производится с учетом продольных деформаций стержней. В пространственных рамах учитываются изгибные деформации в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, крутильные и продольные деформации. При «ручных вычислениях» вклад продольных и крутильных деформаций может не учитываться. Деформации сдвига в стержневых системах, как правило, не учитываются. После определения основных неизвестных окончательные усилия в пространственных стержневых системах вычисляются по той же методике, что и в плоских системах.

На практике пространственные стержневые системы (и плоские тоже) рассчитываются с помощью проектно-вычислительных комплексов. Вычисление усилий и перемещений в этих комплексах основано, как правило, на методе конечных элементов (глава 16) и общих уравнениях строительной механики (глава 15).

К числу пространственных систем относятся и плоские рамы, подверженные действию нагрузок произвольного направления (рис. 14.16,а).

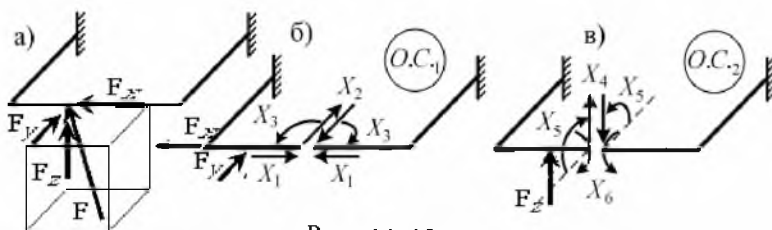


Рис. 14.16

Пространственную силу  $F$  можно разложить на три составляющие:  $F_x, F_y, F_z$ . Как видно из рисунка, составляющие  $F_x, F_y$  лежат в плоскости рамы. Расчет рамы на действие этих двух сил ведется как плоской системы. Основная система метода сил для этого нагружения показана на рис. 14.16,б. Для расчета рамы на составляющую  $F_z$  основная система показана на рис. 14.16,в. Эпюры усилий от группы неизвестных  $X_1, X_2, X_3$  и группы  $X_4, X_5, X_6$  и  $F_z$  взаимно ортогональны. Соответствующие побочные коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений равны нулю. Следовательно, основные неизвестные  $X_1, X_2, X_3$  равны нулю.

Построим эпюры изгибающих и крутящих моментов в раме, показанной на рис. 14.17,а. Жесткости стержней при изгибе и кручении примем одинаковыми ( $EJ_y = GJ_{кр} = EJ$ ). Основная система метода сил представлена на рис. 14.17,б. При симметричном нагружении неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ , являющиеся кососимметричными, равны нулю. Каноническое уравнение метода сил для определения  $X_3$  (рис. 14.17,в) примет вид:

$$\delta_{33} X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Единичные и грузовые эпюры изгибающих и крутящих моментов, совмещенные на одной схеме, показаны на рис. 14.17,г и 14.17,д. Вычислим коэффициент  $\delta_{33}$  и свободный член  $\Delta_{3F}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{3y}^2 dx}{EJ_y} + \sum \int \frac{\bar{M}_{3кр}^2 dx}{GJ_{кр}} = \frac{1}{EJ} (1a)1 + 2 \frac{1}{EJ} (1a)1 = \frac{4a}{EJ}, \\ \Delta_{3F} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{3y} M_{Fy}}{EJ_y} dx + \sum \int \frac{\bar{M}_{3кр} M_{Fкр}}{GJ_{кр}} dx = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{3} q a^2 a \right) 1 + \\ &+ 2 \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} q a^2 a \right) 0 + 2 \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} q a^2 a \right) 1 = \frac{7 q a^2}{6 EJ}. \end{aligned}$$

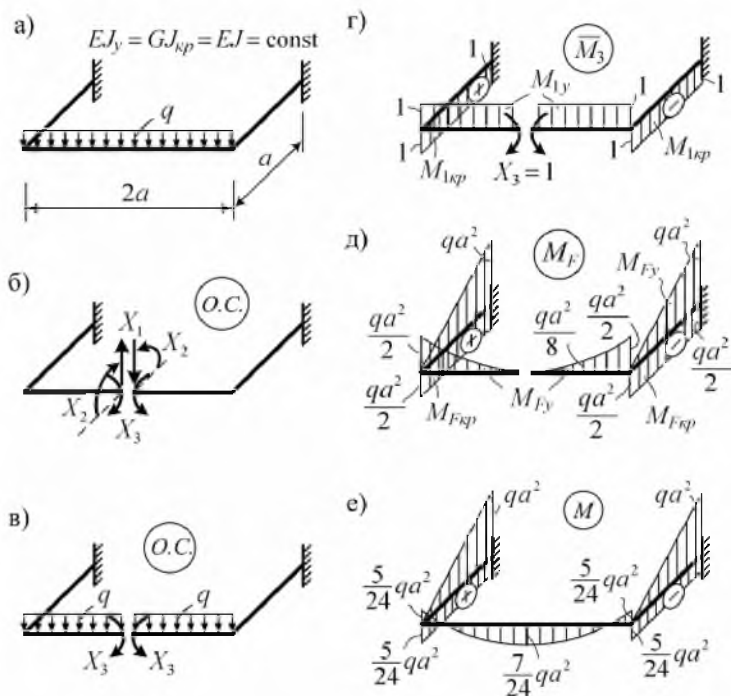


Рис. 14.17

Решая уравнение

$$\frac{4a}{EJ} X_3 + \frac{7qa^3}{6EJ} = 0,$$

найдем

$$X_3 = -\frac{7}{24} qa^2.$$

Окончательные эпюры изгибающих и крутящих моментов, построенные по формуле

$$M = \bar{M}_3 X_3 + M_F,$$

показаны на рис. 14.17,е.

## ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 15.1. Понятие о дискретной физической модели

Расчетные схемы стержневых систем, используемые в классических методах расчета их, обладают явно выраженным свойством непрерывности. Они представляются в виде взаимосвязанных одномерных элементов (стержней), при этом узел трактуется как точка, в которой стыкуются стержни или на которую накладываются связи. В результате расчета системы на заданное воздействие устанавливаются зависимости, описывающие характер изменения усилий и перемещений вдоль оси каждого стержня. Для практических задач информация в таком виде о напряженно-деформированном состоянии системы является избыточной. В ходе вычислений достаточно найти усилия или перемещения в ряде характерных расчетных сечений, а затем, если это необходимо, можно найти усилия или перемещения и в любом промежуточном сечении стержня.

Расчетные сечения обычно назначаются в местах примыкания стержней к узлам; они отделяют стержни от узлов. Вследствие этого расчетная схема исследуемого объекта представляется составленной из стержней и узлов. Эту схему называют дискретной физической моделью стержневой конструкции. Например, для расчетной схемы рамы, показанной на рис. 15.1,а, ее дискретная модель изображена на рис. 15.1,б.

Каждый жесткий узел дискретной модели плоской конструкции имеет три степени свободы (линейные перемещения вдоль координатных осей и угол поворота), каждый шарнирный – две (линейные перемещения вдоль тех же осей). Положение узлов системы определяет и положение ее стержней. Поэтому судить о степени свободы некоторой системы можно по числу степеней свободы всех ее узлов.

В данной главе степень свободы системы будем обозначать через  $m$ . Именно такое число независимых уравнений равновесия можно составить для всех узлов системы.

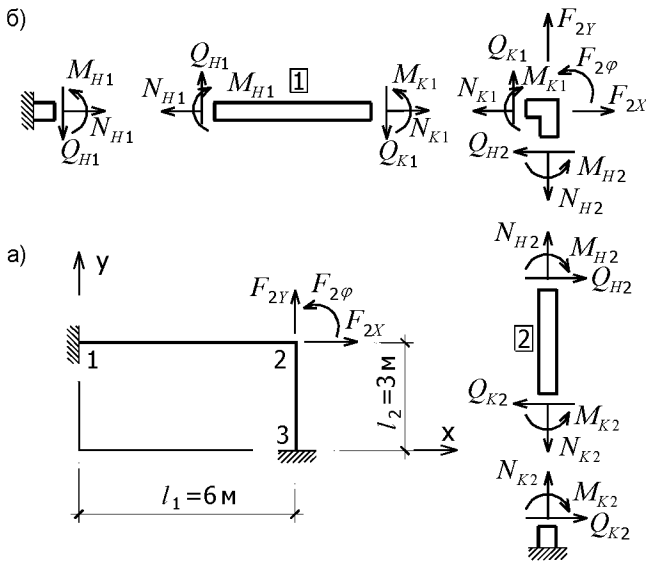


Рис. 15.1

Для плоских ферм  $m$  равно удвоенному числу узлов за вычетом числа опорных связей, а число неизвестных усилий  $n$  равно числу стержней. Используя введенные обозначения, степень статической неопределимости системы  $k$  можно вычислить по выражению

$$k = n - m. \quad (15.1)$$

Ранее, в главе 8, степень статической неопределимости системы обозначалась через  $L$  (число лишних связей), в главе 9 степень кинематической неопределимости (она же и степень свободы) системы – через  $n$ .

В этой главе степень статической неопределимости обозначена через  $k$ , а степень кинематической неопределимости – через  $m$ . Через  $n$  обозначается число неизвестных усилий.

Степень свободы узла конструкции определяет и размерность вектора перемещений этого узла. Суммарное число компонент вектора перемещений  $\vec{z}$  всех узлов соответствует степени кинематической неопределимости системы. Поэтому последнее соотношение

можно рассматривать как зависимость между степенью статической неопределенности  $k$  и степенью кинематической неопределенности  $m$  системы.

Так как любая точка, в которой стыкуются два и более стержней, может быть объявлена узлом, то, следовательно, для одной и той же системы, например рамы, можно принять несколько вариантов ее дискретной модели. Это значит, что степень свободы дискретной модели, в общем случае, является переменной характеристикой. Однако и в этом случае соотношение (15.1) позволяет правильно найти степень статической неопределенности системы, поскольку число неизвестных усилий в каждом дополнительном сечении совпадает с числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для узла, располагаемого в этом сечении.

## 15.2. Нагрузки и перемещения

С целью упрощения вычислительных процедур рассматривается расчет системы на узловые силовые воздействия.

Приемы сведения расчета конструкций с распределенной нагрузкой к расчету на узловое нагружение достаточно известны. Суть преобразования сводится к следующему.

Вначале каждый элемент, расположенный между двумя смежными узлами, рассматривается как стержень с концевыми (опорными) связями, соответствующими виду узла (жесткий или шарнирный). Рассчитав его на местную нагрузку, определим реакции в опорных связях и построим эпюры усилий в нем. Для определения реакций в опорных связях однопролетных балок можно использовать табл. 9.1.

В дальнейшем, загрузив узлы расчетной схемы силами, равными по значению и противоположными по направлению реакциям в опорных связях для отдельных стержней, проведем расчет системы на узловую нагрузку.

Окончательные эпюры усилий получаются суммированием соответствующих эпюр из расчета отдельных элементов и системы в целом.

На рис. 15.2 показан (символически) переход от схемы с распределенной нагрузкой к схеме с сосредоточенной нагрузкой.

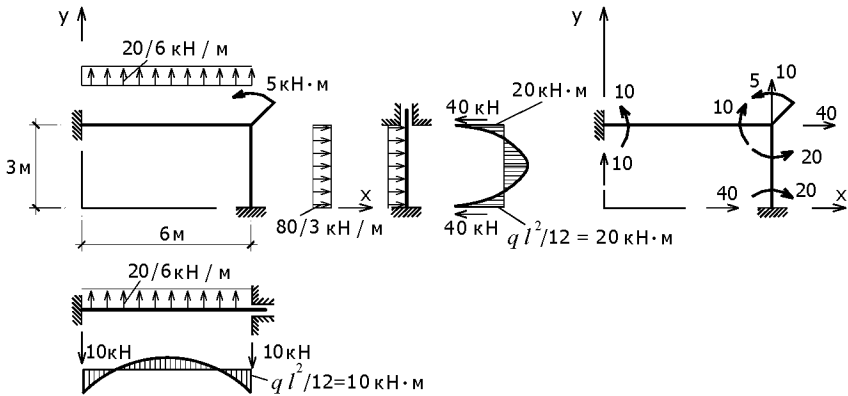


Рис. 15.2

Внешние силы, действующие на жесткий узел  $i$  плоской системы, задаются вектором нагрузки в виде:

$$\vec{F}_i = [F_i^x, F_i^y, m_i]^T,$$

где  $F_i^x, F_i^y$  – составляющие внешней нагрузки вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  
 $m_i$  – сосредоточенный момент в  $i$ -м узле.

Правило знаков для нагрузки: внешние силы считаются положительными, если их направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат; положительные моменты направляются против хода часовой стрелки.

Полный вектор нагрузки образуется последовательной стыковой соответствующих векторов для каждого узла системы:

$$\vec{F} = [\vec{F}_1^T, \vec{F}_2^T, \vec{F}_3^T, \dots, \vec{F}_p^T]^T.$$

Через  $p$  обозначается число узлов системы.

Под действием нагрузки система занимает новое (деформированное) положение. Узлы рамы испытывают в общем случае линейные и угловые перемещения.

Перемещение жесткого узла  $i$  характеризуется вектором:

$$\vec{z}_i = [z_i^x, z_i^y, \varphi_i]^T,$$

шарнирного – вектором:

$$\vec{z}_j = [z_j^x, z_j^y]^T.$$

Полный вектор перемещений узлов представляется в виде:

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T, \vec{z}_2^T, \vec{z}_3^T, \dots, \vec{z}_p^T]^T.$$

Вектор обобщенных перемещений должен соответствовать вектору обобщенной нагрузки. Размерности векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{z}$  совпадают. Скалярное произведение этих векторов определяет работу внешних сил. Такие векторы называют двойственными.

### 15.3. Усилия и деформации

В общем случае в сечении стержня возникают изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ . В совокупности они образуют вектор усилий в сечении:

$$\vec{S} = [M, Q, N]^T.$$

Компоненты этого вектора необходимо определить.

В частных случаях этот вектор может содержать две компоненты, например:

$$\vec{S} = [M, Q]^T \quad \text{или} \quad \vec{S} = [M, N]^T.$$

В первом случае в число неизвестных не включается продольная сила, а во втором – поперечная сила.

Не исключается ситуация, когда неизвестным фактором в сечении может быть только изгибающий момент. Тогда:

$$\vec{S} = [M].$$



При действии на систему узловой нагрузки напряженное состояние  $i$ -го стержня можно характеризовать вектором:

$$\vec{S}_i = [N_i, M_{Hi}, M_{Ki}, Q_i]^T,$$

где  $N_i$  – продольная сила в стержне;

$M_{Hi}$  – изгибающий момент в начале стержня;

$M_{Ki}$  – изгибающий момент в конце стержня;

$Q_i$  – поперечная сила в стержне.

Так как непосредственно на стержень нагрузка не действует, то поперечная сила по его длине не меняется и, как известно (8.17), вычисляется по формуле  $Q = \frac{M_K - M_H}{l}$ . Поэтому, сохранив в  $\vec{S}_i$  три первые компоненты, запишем его в виде:

$$\vec{S}_i = [N_i, M_{Hi}, M_{Ki}]^T.$$

Каждому виду усилий соответствует определенная деформация. Продольная сила вызывает удлинение или укорочение элемента, изгибающие моменты – повороты сечений, поперечные силы – взаимные сдвиги сечений.

Вектор деформаций  $\vec{\Delta}_i$ , соответствующий вектору  $\vec{S}_i$ , будет иметь вид:

$$\vec{\Delta}_i = [\Delta_i, \Delta\varphi_{Hi}, \Delta\varphi_{Ki}]^T,$$

где  $\Delta_i$  – линейная деформация элемента;

$\Delta\varphi_{Hi}, \Delta\varphi_{Ki}$  – углы поворота сечений в начале и в конце стержня относительно их положений, в котором узлы деформированной конструкции соединяются прямой линией.

Векторы усилий  $\vec{S}$  и деформаций  $\vec{\Delta}$  для всей системы, как и векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{z}$ , формируются последовательной стыковкой векторов усилий и деформаций для отдельных стержней.

Векторы  $\vec{S}$  и  $\vec{\Delta}$  являются двойственными, их скалярное произведение дает работу внутренних сил.

Для пространственной системы вектор усилий в сечении является, как правило, шестимерным.

#### 15.4. Уравнения равновесия

Рассмотрим произвольную, например, статически неопределимую раму (рис. 15.1,а), находящуюся в равновесии под действием заданной нагрузки. Соответствующая ей дискретная модель в виде совокупности узлов и стержней показана на рис. 15.1,б.

Составим уравнения равновесия для 2-го узла рамы:

$$\begin{aligned} \sum x = 0, & \quad -N_{K1} - Q_{H2} + F_{2x} = 0, \\ \sum y = 0, & \quad Q_{K1} - N_{H2} + F_{2y} = 0, \\ \sum M_2 = 0, & \quad -M_{K1} + M_{H2} + F_{2\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Записанные три уравнения содержат шесть неизвестных усилий.

Рассмотрим равновесие стержней рамы. Каждый из них находится под действием концевых усилий, показанных на том же рисунке.

Составляя три уравнения равновесия для первого стержня, получим:

$$\begin{aligned} \sum x = 0, & \quad N_{H1} = N_{K1} = N_1; \\ \sum y = 0, & \quad Q_{H1} = Q_{K1} = Q_1; \\ \sum M_H = 0, & \quad Q_{K1} l_1 + M_{H1} - M_{K1} = 0, \quad Q_1 = \frac{M_{K1} - M_{H1}}{l_1}. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения можно получить и для второго стержня, то есть:

$$N_{H2} = N_{K2} = N_2, \quad Q_{H2} = Q_{K2} = Q_2, \quad Q_2 = \frac{M_{K2} - M_{H2}}{l_2}.$$

Подставим выражения усилий из уравнений равновесия стержней в уравнения равновесия узлов. После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} -N_1 + \frac{1}{l_2} M_{H2} - \frac{1}{l_2} M_{K2} + F_{2x} &= 0, \\ -\frac{1}{l_1} M_{H1} + \frac{1}{l_1} M_{K1} - N_2 + F_{2y} &= 0, \\ -M_{K1} + M_{H2} + F_{2\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Матричная форма записи этой системы уравнений будет следующей:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} \\ 0 & -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ M_{H1} \\ M_{K1} \\ N_2 \\ M_{H2} \\ M_{K2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2\varphi} \end{bmatrix} = 0$$

или сокращенно:

$$A^* \vec{S} + \vec{F} = 0. \quad (15.2)$$

В уравнениях (15.2) знаки компонент вектора  $\vec{F}$  соответствуют принятым положительным направлениям узловых нагрузок. Для численного решения этих уравнений совместно с другими перепишем их в виде:

$$A \vec{S} = \vec{F}, \quad (15.3)$$

где  $A = -A^*$  – матрица равновесия:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} \\ 0 & \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right];$$

$\vec{S} = [N_1, M_{H1}, M_{K1}, N_2, M_{H2}, M_{K2}]^T$  – вектор усилий;

$\vec{F} = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2\varphi}]^T$  – вектор нагрузок.

Чтобы легко ориентироваться в структуре матрицы  $A$ , напомним, что в ее первой строке записаны коэффициенты при неизвестных усилиях в концевых сечениях стержней из уравнения равновесия  $\sum x = 0$ , во второй – из уравнения  $\sum y = 0$ , в третьей – из уравнения  $\sum M_2 = 0$ . При этом в первых трех столбцах матрицы записаны коэффициенты при усилиях  $N, M_H, M_K$  в первом стержне, то есть в стержне 1–2, а в последующих трех – при соответствующих усилиях во втором стержне (в стержне 2–3). Показанный способ формирования матрицы равновесия называют способом формирования матрицы “по узлам”. Для рам с большим количеством узлов он является трудоемким и поэтому используется на практике не часто. Другой, более эффективный, позволяющий организовать формирование матрицы  $A$  “по стержням”, изложен в разделе 15.14.

### 15.5. Геометрические уравнения

Представим процесс “перехода” рамы (рис. 15.3) в деформированное состояние как результат последовательного влияния сначала продольных сил в ее элементах, что равносильно загрузению соответствующей шарнирной системы узловой нагрузкой, вызывающей те же значения продольных сил, а затем, при положении узлов в точках 1, 2' и 3, влияния изгибающих моментов, переводящих стержни в изогнутое состояние. Согласно допущению о малости перемещений, второй этап деформирования не изменяет положения

узлов рамы. Поэтому деформацию каждого защемленного по концам стержня можно характеризовать тремя составляющими:

$\Delta l_i$  – абсолютное удлинение (укорочение)  $i$ -го стержня,

$\Delta \varphi_{Hi}$ ,  $\Delta \varphi_{Ki}$  – углы поворота концевых сечений.

Следовательно, векторы деформаций 1-го и 2-го стержней рамы (рис. 15.3) имеют вид:

$$\vec{\Delta}_1 = [\Delta l_1, \Delta \varphi_{H1}, \Delta \varphi_{K1}]^T,$$

$$\vec{\Delta}_2 = [\Delta l_2, \Delta \varphi_{H2}, \Delta \varphi_{K2}]^T.$$

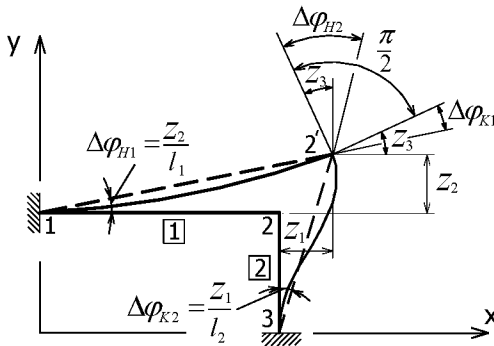


Рис. 15.3

При этом, как следует из рисунка, на котором все компоненты вектора перемещений 2-го узла показаны положительными, имеют место соотношения:

$$\Delta \varphi_{H1} = \frac{z_2}{l_1}, \quad \Delta \varphi_{K1} = z_3 - \frac{z_2}{l_1},$$

$$\Delta \varphi_{H2} = -z_3 - \frac{z_1}{l_2}, \quad \Delta \varphi_{K2} = \frac{z_1}{l_2}.$$

*Замечание* – В выражении для  $\Delta\varphi_{H2}$  угол принят отрицательным, т.к. направление угла поворота  $\Delta\varphi_{H2}$  не совпадает с направлением положительного момента в начале 2-го стержня.

Вследствие малости деформаций можно принять, что  $\Delta l_1 = z_1$  и  $\Delta l_2 = z_2$ .

Записанные соотношения позволяют установить взаимосвязь между вектором деформаций  $\vec{\Delta}$  и вектором перемещений  $\vec{z}$  в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta\varphi_{H1} \\ \Delta\varphi_{K1} \\ \Delta l_2 \\ \Delta\varphi_{H2} \\ \Delta\varphi_{K2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_1 & 0 \\ 0 & -1/l_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/l_2 & 0 & -1 \\ 1/l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя с (15.3), получаем уравнения с транспонированной матрицей равновесия

$$\vec{\Delta} = A^T \vec{z}, \quad (15.4)$$

называемые геометрическими уравнениями. Они же являются уравнениями неразрывности деформаций стержневой системы.

Матрицу  $A^T$  называют матрицей деформаций. С ее помощью вычисляются деформации элементов системы через перемещения узлов.

Чтобы у читателя не сложилось мнение о том, что матрица деформаций для рассмотренного примера оказалась случайно совпавшей с транспонированной матрицей равновесия, изучим вопрос о взаимосвязи этих матриц подробнее.

## 15.6. Принцип двойственности

Уравнения равновесия составлялись для недеформированного состояния системы, то есть в предположении малых деформаций ее элементов, вызывающих малые перемещения узлов.

Благодаря этому допущению, уравнения равновесия и геометрические уравнения получились линейными. Системы, к которым применимо это допущение, называют геометрически линейными.

Важным свойством уравнений является то, что матрицы уравнений равновесия и геометрических уравнений являются взаимно транспонированными. Эта связь может быть показана в общем виде. Пусть, например, между векторами  $\vec{z}$  и  $\vec{\Delta}$  существует зависимость в виде:

$$A_1 \vec{z} = \vec{\Delta}.$$

В соответствии с принципом возможных перемещений для системы, находящейся в равновесии, сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равна нулю. За возможные примем действительные перемещения. В таком случае:

$$F^T \vec{z} - S^T \vec{\Delta} = 0.$$

Подставляя в это выражение  $F^T = S^T A^T$  и  $\vec{\Delta} = A_1 \vec{z}$ , будем иметь  $S^T A^T \vec{z} - S^T A_1 \vec{z} = 0$ , откуда следует равенство  $A_1 = A^T$ .

Полученная зависимость является для линейных систем общей и выражает собой статико-геометрическую аналогию расчетных соотношений.

В случае больших перемещений задача определения напряженно-деформированного состояния становится нелинейной. Системы, в которых имеют место большие перемещения и малые деформации, и соответствующие им задачи называют геометрически нелинейными. Примером геометрически нелинейных систем могут быть некоторые вантовые системы. Для этих систем уравнения равновесия составляются для деформированного состояния их, то есть с

учетом узловых перемещений. Матрица  $A$  уравнений равновесия будет зависеть от перемещений  $z$ , матрица  $A_1$  геометрических уравнений тоже будет зависимой от  $z$ , причем

$$[A(z)]^T \neq A_1(z).$$

Статико-геометрическая аналогия для геометрически нелинейных задач проявляется в более сложной форме. Ее рассмотрение выходит за рамки данного учебного пособия.

В последующем изложении материала по расчету стержневых систем рассматриваются геометрически линейные системы.

### 15.7. Физические уравнения

Связь между вектором деформаций и вектором усилий для отдельного ( $i$ -го) стержня устанавливается линейной:  $\vec{\Delta}_i = D_i \vec{S}_i$ .

Напомним, что:

$$\vec{\Delta}_i = [\Delta l_i, \Delta \varphi_{Hi}, \Delta \varphi_{Ki}]^T, \quad \vec{S}_i = [N_i, M_{Hi}, M_{Ki}]^T.$$

Для определения компоненты  $\Delta \varphi_{Hi}$  следует рассмотреть загрузку стержня концевыми усилиями  $M_{Hi}$  и  $M_{Ki}$  (грузовое состояние) и загрузку единичным моментом в начале стержня (рис. 15.4). “Перемножая” эпюры, получим:

$$\Delta \varphi_{Hi} = \frac{2l}{6(EJ)_i} M_{Hi} + \frac{l}{6(EJ)_i} M_{Ki}.$$

Аналогичные рассуждения позволят записать выражение:

$$\Delta \varphi_{Ki} = \frac{l}{6(EJ)_i} M_{Hi} + \frac{2l}{6(EJ)_i} M_{Ki}.$$



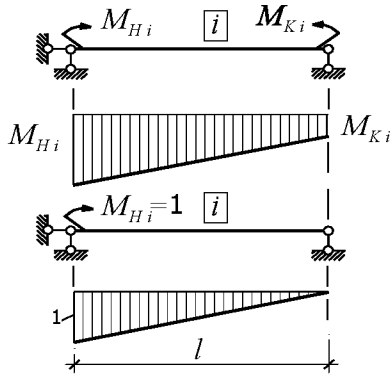


Рис. 15.4

Учитывая, что податливость стержня от продольной силы равна  $\frac{l}{(EA)_i}$ , матрица податливости стержня при учете деформаций растяжения-сжатия и изгиба будет следующей:

$$D_i = \begin{bmatrix} \frac{l}{(EA)_i} & & \\ & \frac{2l}{6(EJ)_i} & \frac{l}{6(EJ)_i} \\ & \frac{l}{6(EJ)_i} & \frac{2l}{6(EJ)_i} \end{bmatrix}.$$

В состав рамы (рис. 15.3) входят два стержня, поэтому матрица внутренней податливости системы является квазидиагональной:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{bmatrix},$$

а физические уравнения запишутся в виде:

$$\vec{\Delta} = D \vec{S}.$$

### 15.8. Особенности расчета системы на изменение температуры, осадку опор и неточность изготовления стержней

Учет этих факторов производится соответствующей корректировкой физических уравнений. Вектор деформаций, вызываемых усилиями от нагрузки  $\vec{F}$ , следует суммировать с вектором деформаций  $\vec{\Delta}'$  стержней от заданного воздействия.

При изменении температуры по отношению к некоторому начальному состоянию стержни рамы деформируются (рис. 15.5). Обозначим через  $t_1$  изменение температуры по верхней грани стержня, через  $t_2$  – по нижней.

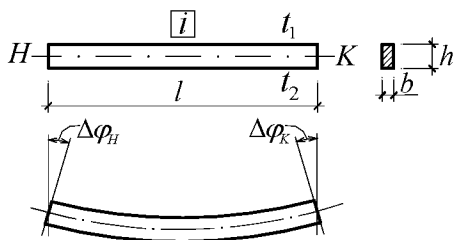


Рис. 15.5

Пусть  $t_2 > t_1$ . Изменение температуры по оси стержня  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$  вызывает его удлинение  $\Delta l = \alpha t l$ ; разность температур  $t' = t_2 - t_1$  вызывает поворот торцевых сечений на углы, определяемые по формуле (7.12):

$$\Delta\varphi_H = \Delta\varphi_K = \frac{\alpha t' l}{h} \frac{1}{2}.$$

Направления поворота сечений на рис. 15.5 показаны положительными.

В таком случае вектор деформаций для показанного стержня запишется:

$$\Delta'_{t_i} = [\Delta l_i, \Delta \varphi_{Hi}, \Delta \varphi_{Ki}]^T.$$

Для всей системы вектор деформаций образуется стыковкой векторов для отдельных стержней.

При расчете фермы на неточность изготовления ее стержней вектор  $\vec{\Delta}'_H$  известен по условию задачи. Компоненты вектора деформаций от неточного изготовления стержней определяются разностью реальных и проектных значений длин стержней.

Вектор деформаций стержней от осадки опор можно получить так. Выделим из матрицы  $A$  строки, связанные с условиями равновесия опорных узлов по направлениям опорных связей. Перемещения могут иметь все опорные узлы или только часть из них. Число таких строк, равное числу опорных связей, обозначим через  $r$ . Соответствующие условия равновесия для опорных узлов системы запишутся в виде:

$$A^{(r)} \vec{S} = 0.$$

Разобьем матрицу  $A^{(r)}$  на блоки с помощью вертикальной перегородки (табл. 15.1) и будем рассматривать ее как сложную матрицу  $A^{(r)} = [A_{n-r}^{(r)}, A_r^{(r)}]$ .

Таблица 15.1

	$S_1$	$S_2$	$\dots$	$S_{n-r}$	$S_{n-r+1}$	$\dots$	$S_n$
1	×	×	$\dots$	×	1		
⋮	⋮	⋮	$\dots$	⋮		⋮	
$r$	×	×	$\dots$	×			1

Матрица  $A_{n-r}^{(r)}$  имеет тип  $r \cdot (n - r)$ , а матрица  $A_r^{(r)} - r \cdot r$ .

Усилия  $S_{n-r+1}, \dots, S_n$  равны реакциям в опорных связях:

$$\vec{S}_r = \vec{R}.$$

Уравнения равновесия для опорных узлов можно записать следующим образом:

$$A_{n-r}^{(r)} \vec{S}_{n-r} + A_r^{(r)} \vec{S}_r = 0.$$

Так как  $A_r^{(r)}$  – единичная матрица, то:

$$\vec{R} = \vec{S}_r = -A_{n-r}^{(r)} \vec{S}_{n-r}.$$

При заданных перемещениях опорных связей вектор деформаций стержней определим по выражению:

$$\vec{\Delta}'_c = -A_{n-r}^{(r)\top} \vec{z}.$$

Длина вектора  $\vec{z}$  равна  $r$ .

С учетом изложенного о расчете на рассмотренные воздействия физические уравнения следует записать в виде:

$$\vec{\Delta} = D \vec{S} + \vec{\Delta}'. \quad (15.5)$$

### 15.9. Общие уравнения для расчета стержневой системы. Смешанный метод

Уравнения равновесия (15.3), геометрические (15.4) и физические уравнения (15.5) образуют в совокупности общую систему уравнений для расчета линейно деформируемой стержневой системы. Представим их в следующем виде:

$$\begin{cases} A \vec{S} = \vec{F}; \\ A^\top \vec{z} - \vec{\Delta} = 0; \\ \vec{\Delta} - D \vec{S} = \vec{\Delta}'. \end{cases} \quad (15.6)$$

Искомыми величинами в (15.6) являются  $n$ -мерный вектор усилий  $\vec{S}$ ,  $m$ -мерный вектор перемещений  $\vec{z}$  и  $n$ -мерный вектор деформаций  $\vec{\Delta}$ . Всего неизвестных –  $(2n + m)$ . Число уравнений в

системе также равно  $2n + m$ : уравнений равновесия –  $m$ , геометрических уравнений –  $n$ , физических уравнений –  $n$ . Следовательно, записанная система линейных независимых уравнений имеет единственное решение. Это значит, что при заданных на конструкцию воздействиях  $\vec{F}$  и  $\vec{\Delta}'$  из решения системы уравнений находится единственная картина распределения в ней усилий, перемещений и деформаций. Такую систему определяющих математических соотношений называют математической моделью расчета стержневой системы.

Порядок системы уравнений (15.6) можно понизить. Например, если из третьей группы уравнений найти вектор деформаций  $\vec{\Delta}$  и подставить его во вторую группу уравнений, то система уравнений (15.6) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} A \vec{S} = \vec{F}; \\ A^T \vec{z} - D \vec{S} = \vec{\Delta}', \end{cases} \quad (15.7)$$

или в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -D & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S} \\ \vec{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{\Delta}' \end{bmatrix}. \quad (15.8)$$

Неизвестными в этом варианте математической модели являются усилия и перемещения, поэтому систему уравнений вида (15.7) или (15.8) называют системой уравнений смешанного метода.

Решение уравнений смешанного метода позволяет найти усилия в стержнях системы и перемещения ее узлов.

### 15.10. Метод перемещений

Представим уравнения равновесия в перемещениях. При отсутствии в системе бесконечно жестких элементов диагональная матрица  $D$  является неособенной матрицей, ее определитель не равен нулю. Поэтому из второй группы уравнений (15.7) можно найти вектор  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = D^{-1} (A^T \vec{z} - \vec{\Delta}') = K (A^T \vec{z} - \vec{\Delta}'),$$

где  $K$  – матрица внутренней жесткости системы.

Подставив  $\vec{S}$  в первую группу уравнений (15.7), получим запись уравнений равновесия через перемещения  $\vec{z}$  в виде:

$$AK(A^T \vec{z} - \vec{\Delta}') = \vec{F} \quad \text{или} \quad AK A^T \vec{z} = \vec{F} + AK \vec{\Delta}'. \quad (15.9)$$

Эта система уравнений является системой уравнений метода перемещений. Введем обозначение  $R = AK A^T$  и перепишем ее в таком виде:

$$R \vec{z} = \vec{F} + AK \vec{\Delta}'. \quad (15.10)$$

Матрица  $R$  – это матрица внешней жесткости упругой системы, она имеет размер  $(m \cdot m)$ .

Как следует из схемы вычислений, матрица  $R$  является симметрической относительно главной диагонали, при этом элементы матрицы вычисляются с учетом влияния продольных и изгибных деформаций. Если расчет ведется только на действие нагрузки, то есть если вектор принудительных деформаций  $\vec{\Delta}' = 0$ , то система уравнений метода перемещений записывается в виде:

$$R \vec{z} = \vec{F}, \quad (15.11)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}.$$

По определению,  $r_{ik}$  – усилие (реакция) в  $i$ -й связи, вызванная смещением  $z_k = 1$ .

Пример. Рассчитаем методом перемещений раму, показанную на рис. 15.6. Соотношение жесткостей стержней на растяжение-сжатие и изгиб примем равным:

$$\frac{EA h^2}{EJ} = 1, (h = 1 \text{ м}).$$

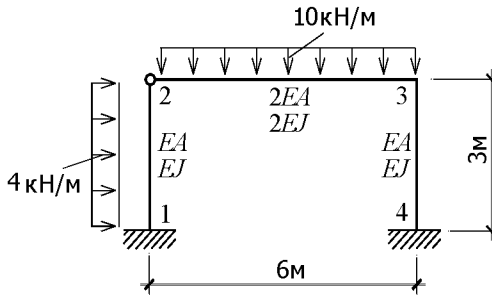


Рис. 15.6

Прежде всего, преобразуем заданную нагрузку к узловой. Концевые реакции в однопролетных статически неопределимых балках, нагруженных распределенной нагрузкой, и очертание эпюр изгибающих моментов в них (рис. 15.7) найдем с помощью табл. 9.1. Тогда расчетную схему рамы с узловой нагрузкой можно представить такой, какой она показана на рис. 15.8.

Основная система для расчета рамы с учетом продольных деформаций стержней изображена на рис 15.9. Положительные направления основных неизвестных соответствуют правилу знаков, указанному в разделе 15.2.

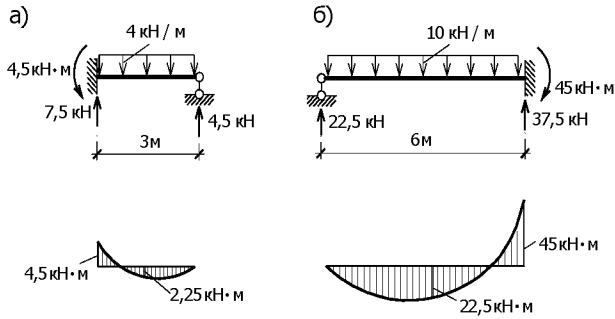


Рис. 15.7

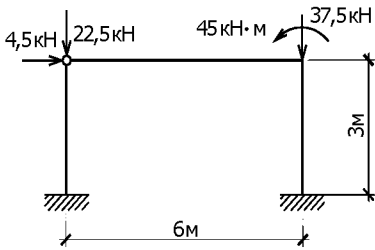


Рис. 15.8

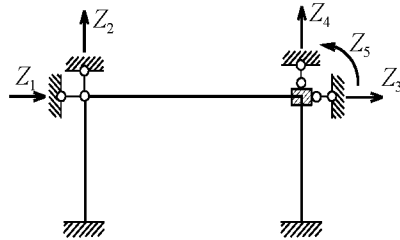


Рис. 15.9

Используя матрицу равновесия и матрицу внутренней жесткости рамы, вычислим матрицу внешней жесткости  $R = AK A^T$ .



$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -1/3 & -1 & & & & \\ \hline 1 & & & 1/6 & & & \\ \hline & & 1 & & & -1/3 & 1/3 \\ \hline & & & -1/6 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & & -1 & \\ \hline \end{array} \times$$

$$\times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1/3 & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ \hline & & 1/3 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1/3 & & \\ \hline & & & & & 4/3 & -2/3 \\ \hline & & & & & -2/3 & 4/3 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & & & & \\ \hline -1/3 & & & & & \\ \hline -1 & & 1 & & & \\ \hline & 1/6 & & -1/6 & 1 & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline & & & -1/3 & & -1 \\ \hline & & & 1/3 & & \\ \hline \end{array} \cdot EJ =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0,4444 & & -0,3333 & & \\ \hline & 0,3611 & & -0,0278 & 0,1667 \\ \hline -0,3333 & & 0,7778 & & 0,6667 \\ \hline & -0,0278 & & 0,3611 & -0,1667 \\ \hline & 0,1667 & 0,6667 & -0,1667 & 2,3333 \\ \hline \end{array} \cdot EJ .$$

Вектор нагрузки  $\vec{F}$  в уравнении вида  $R \vec{z} = \vec{F}$  соответствует нагружению, показанному на рис. 15.8:

$$\vec{F} = [4,5; -22,5; 0; -37,5; 45,0]^T .$$

Решив систему уравнений метода перемещений, получим:

$$\vec{z} = [-9,184; -81,619; -25,745; -98,381; 25,444]^T \cdot \frac{1}{EJ} .$$

Вектор усилий, вычисляемый по выражению  $\vec{S} = K A^T \vec{z}$ , запишем в виде:

$$\vec{S} = [-27,21; 3,06; -5,52; 28,24; -32,79; -16,76; -0,20]^T .$$

На рис. 15.10,а,б показаны соответствующие этому вектору эпюры усилий в раме.

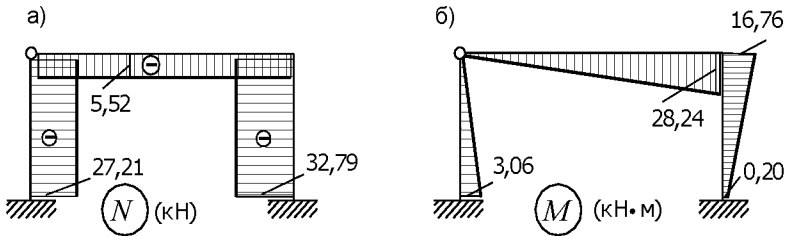


Рис. 15.10

Посредством наложения на эпюру  $M$  (рис. 15.10,б) эпюр изгибающих моментов в балках (рис. 15.7) получаем окончательную эпюру  $M$  в раме (рис. 15.11).

Естественно, что при другом исходном соотношении жесткостей  $EA/EJ$  ординаты эпюры  $M$  будут отличаться от найденных.

Чтобы оценить влияние продольных деформаций на распределение перемещений и усилий в раме, выполним ее расчет с учетом только изгибных деформаций (рис. 15.12,а). Пренебрегая продольными деформациями, выберем основную систему метода перемещений с двумя неизвестными (рис. 15.12,б).

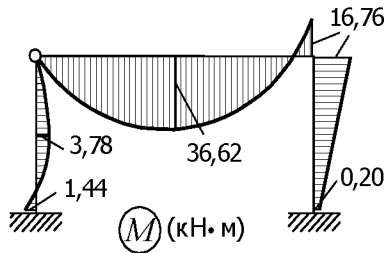


Рис. 15.11

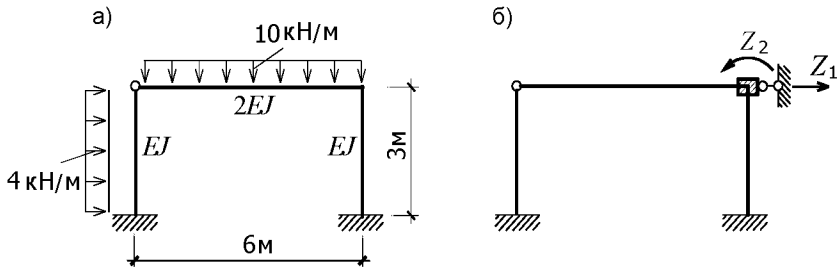


Рис. 15.12

Выполнив необходимые этапы вычислений, найдем значения основных неизвестных:

$$z_1 = 22,891 \frac{1}{EJ} \text{ м}, \quad z_2 = 25,826 \frac{1}{EJ} \text{ рад.}$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 15.13.

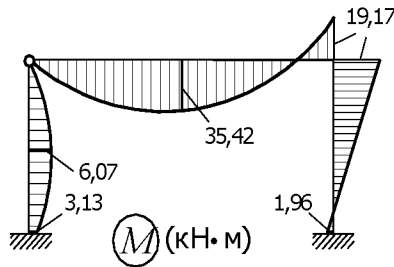


Рис. 15.13

### 15.11. Метод сил

Для статически неопределимой системы число уравнений равновесия ( $m$ ) меньше числа неизвестных усилий ( $n$ ). Матрица равновесия  $A$  имеет размеры ( $m \cdot n$ ). Выполним нумерацию неизвестных усилий так, чтобы последние номера (из общего их числа  $n$ ) были присвоены тем усилиям, которые принимаются за основные неиз-

вестные метода сил, и разобьем матрицу  $A$  вертикально на две матрицы  $A_0$  и  $A_x$ :

$$A = [A_0 \ A_x],$$

где  $A_0$  – это матрица равновесия основной системы,  $\det A_0 \neq 0$ .

Усилия в стержнях принятой основной системы обозначим  $\vec{S}_0$ .

Матрица  $A_x$  содержит те столбцы матрицы  $A$ , которые соответствуют основным неизвестным  $\vec{X}$  метода сил.

Запишем уравнения равновесия в следующем виде:

$$A_0 \vec{S}_0 + A_x \vec{X} = \vec{F}.$$

Геометрические уравнения  $A^T \vec{z} = \vec{\Delta}$  и физические  $\vec{\Delta} = D \vec{S} + \vec{\Delta}'$  после приведения их к виду  $A^T \vec{z} - D \vec{S} = \vec{\Delta}'$  с учетом блочной записи матрицы  $A$  можно символически представить так:

$$\begin{bmatrix} A_0^T \\ A_x^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_0 & \\ & D_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta'_0 \\ \Delta'_x \end{bmatrix}$$

Матрично-векторная запись этих операций сводится к двум подсистемам уравнений:

$$A_0^T \vec{z} - D_0 \vec{S}_0 = \vec{\Delta}'_0,$$

$$A_x^T \vec{z} - D_x \vec{X} = \vec{\Delta}'_x.$$

Таким образом, система уравнений смешанного вида может быть записана в виде трех уравнений:

$$A_0 \vec{S}_0 + A_x \vec{X} = \vec{F},$$

$$A_0^T \vec{z} - D_0 \vec{S}_0 = \vec{\Delta}'_0,$$

$$A_x^T \vec{z} - D_x \vec{X} = \vec{\Delta}_x'.$$

Исключим из этой системы векторы  $\vec{S}_0$  и  $\vec{z}$ . Из первого уравнения следует, что:

$$\vec{S}_0 = A_0^{-1}(-A_x \vec{X} + F) = L_x \vec{X} + \vec{S}_F^0, \quad (15.12)$$

где  $L_x = -A_0^{-1} A_x$ ,  $\vec{S}_F^0 = A_0^{-1} \vec{F}$ ;

$A_0^{-1} = L_S$  – матрица влияния усилий в стержнях основной системы, построенная от действия единичных сил, ориентированных по направлениям узловых нагрузок;

$\vec{S}_F^0 = A_0^{-1} \vec{F}$  – вектор усилий в стержнях основной системы от нагрузки  $\vec{F}$ ;

$L_x$  – матрица влияния усилий в стержнях основной системы, построенная от действия единичных сил, ориентированных по направлениям основных неизвестных;

$L_x \vec{X}$  – усилия в стержнях основной системы от  $\vec{X}$ .

Из второго уравнения найдем  $\vec{z}$ :

$$\vec{z} = (A_0^{-1})^T D_0 \vec{S}_0 + (A_0^{-1})^T \vec{\Delta}_0'. \quad (15.13)$$

Подставляя в последнее выражение  $\vec{S}_0$  и затем  $\vec{z}$  в третье уравнение, получим уравнения метода сил в следующем виде:

$$(L_x^T D_0 L_x + D_x) \vec{X} + L_x^T D_0 \vec{S}_F^0 + L_x^T \vec{\Delta}_0' + \vec{\Delta}_x' = 0, \quad (15.14)$$

где  $D_0 L_x \vec{X}$  – деформации стержней основной системы от усилий  $\vec{X}$ ;

$D_0 \vec{S}_F^0$  – деформации стержней основной системы от  $\vec{F}$ .

Определив  $\vec{X}$ , по (15.12) можно найти усилия в стержнях, принадлежащих основной системе, и затем по (15.13) – вектор узловых перемещений  $\vec{z}$ .

Пример. Покажем расчет методом сил фермы, изображенной на рис. 15.14. Площади сечений всех стержней будем считать одинаковыми и равными  $A = 0,25 \text{ м}^2$ . Модуль упругости материала  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

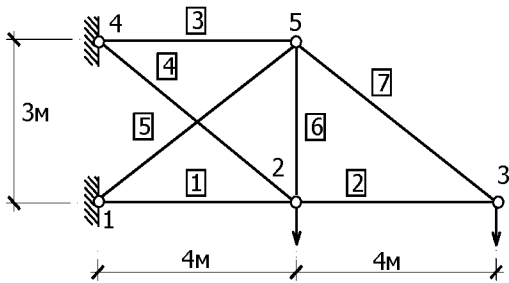


Рис. 15.14

Матрица равновесия этой фермы с учетом принятой нумерации узлов и стержней имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 1 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Степень статической неопределимости фермы равна  $k = n - m = 7 - 6 = 1$ .

Одним из главных условий выбора основной системы метода сил является, как известно, условие ее геометрической неизменяемости.

Определитель матрицы равновесия основной системы не должен быть равен нулю.

Примем в качестве основной неизвестной усилие в 4-м стержне. Тогда матрица равновесия основной системы (рис. 15.15) будет иметь следующий вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 1 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

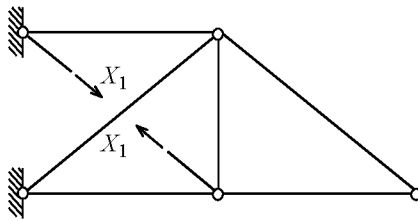


Рис. 15.15

Определитель этой матрицы  $\det A_0 = -0,36$ .

Матрица  $A_x$  представляется четвертым столбцом матрицы равновесия заданной системы:

$$A_x = [0,8 ; -0,6 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]^T.$$

Найдем матрицу, обратную матрице  $A_0$ , и  $L_x$  – матрицу влияния усилий в стержнях основной системы от  $X_1 = 1$ :

$$A_0^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1,333 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1,333 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1,333 & 0 & -2,667 & 1 & -1,333 \\ \hline 0 & 1,667 & 0 & 1,667 & 0 & 1,667 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1,667 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad L_x = -A_0^{-1} A_x = \begin{array}{|c|} \hline -0,8 \\ \hline 0 \\ \hline -0,8 \\ \hline 1 \\ \hline -0,6 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Тогда усилия  $\vec{N}_F^0$  в стержнях основной системы от нагрузки  $\vec{F} = [0; -10,0; 0; -10,0; 0; 0; 0]^T$  будут иметь следующие значения:

$$\vec{N}_F^0 = A_0^{-1} \vec{F} = [-13,333; -13,333; 40; -33,333; 10; 16,667]^T.$$

Матрица внутренней податливости стержней основной системы является диагональной и представляется в такой записи:

$$\begin{aligned} \text{diag } D_0 &= \left[ \frac{l_1}{EA_1}; \frac{l_2}{EA_2}; \frac{l_3}{EA_3}; \frac{l_5}{EA_5}; \frac{l_6}{EA_6}; \frac{l_7}{EA_7} \right] = \\ &= [0,7619; 0,7619; 0,7619; 0,9524; 0,5714; 0,9524] \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Податливость стержня, усилие в котором принято за основную неизвестную  $X_1$ , равна  $D_x = \frac{l_4}{EA_4} = 0,9524 \cdot 10^{-4}$ .

Матрица податливости основной системы по направлениям основных неизвестных в случае одной неизвестной представляется одним элементом:

$$D = L_x^T D_0 L_x + D_x = 30,857 \cdot 10^{-5}.$$

Перемещение по направлению основной неизвестной, вызываемое заданной нагрузкой, то есть свободный член в уравнении метода сил, равно:



$$\Delta = L_x^T D_0 \vec{N}_F^0 = -514,286 \cdot 10^{-5}.$$

Из уравнения (15.14), которое можно записать в виде  $D X_1 + L_x^T D_0 \vec{N}_F^0 = 0$ , находим  $X_1 = 16,667$  кН и далее по выражению (15.12) определяем окончательные усилия во всех стержнях, кроме четвертого, заданной фермы:

$$\begin{aligned} \vec{N}_0 &= L_x X_1 + \vec{N}_F^0 = \\ &= [-26,67; -13,33; 26,67; -16,67; 0; 16,67]^T, \text{ кН,} \end{aligned}$$

а по выражению (15.13) – перемещения ее узлов:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (A_0^{-1})^T D_0 \vec{N}_0 = \\ &= [-0,2032; -0,5355; -0,3048; -1,477; 0,2032; -0,5355]^T \cdot 10^{-2}, \text{ м.} \end{aligned}$$

## 15.12. Статически определимые системы

В статически определимой системе число независимых уравнений равновесия равно числу неизвестных усилий, поэтому матрица равновесия  $A$  является квадратной. В этом случае система уравнений (15.7) распадается на две независимые группы уравнений. Из первой из них следует, что если  $\det A \neq 0$ , то:

$$\vec{S} = A^{-1} \vec{F}.$$

Условие равенства нулю определителя матрицы  $A$  является, следовательно, признаком того, что рассчитываемая система частично геометрически изменяема или мгновенно изменяема.

Из второй группы уравнений находится вектор перемещений  $\vec{z}$ :

$$\vec{z} = (A^{-1})^T (D \vec{S} + \vec{\Delta}').$$

При отсутствии внешней нагрузки получим:

$$\vec{S} = 0 \text{ и } \vec{z} = (A^{-1})^T \vec{\Delta}'.$$

Этими соотношениями подтверждается известное свойство статически определимых систем: изменение температуры, смещение опор или неточность изготовления элементов в статически определимых системах усилий не вызывают, а вызывают лишь перемещения.

### 15.13. Основные уравнения строительной механики для стержня

Рассмотрим раму, нагруженную узловой нагрузкой (рис. 15.16,а), и фрагмент ее дискретной схемы (рис. 15.16,б). Показанные на рисунке направления узловых сил и сил взаимодействия в сечениях соответствуют направлениям осей общей системы координат.

Установим взаимосвязь нагрузки в узлах  $i, j$  и усилий в сечениях, примыкающих к узлам. Эту зависимость проще получить вначале в местной системе координат (для стержня  $i-j$  – системе  $\xi \eta$ ), а затем, используя правила линейных преобразований, – в общей системе  $XU$ .

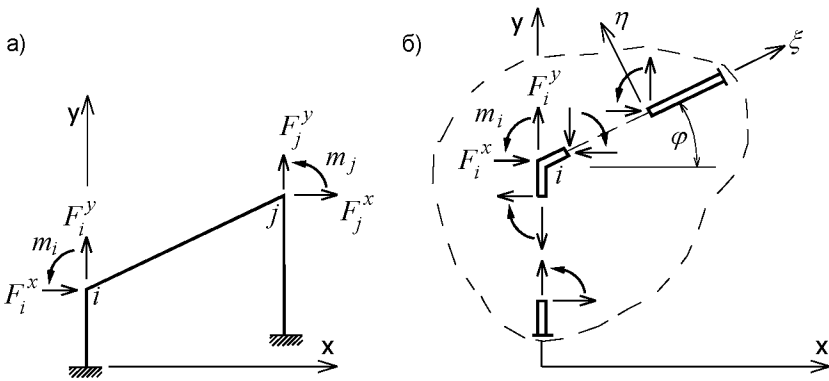


Рис. 15.16

Направления усилий в концевых сечениях стержня и узловых сил, ориентированных по осям местной системы координат, показаны на рис. 15.17,а,б,в.

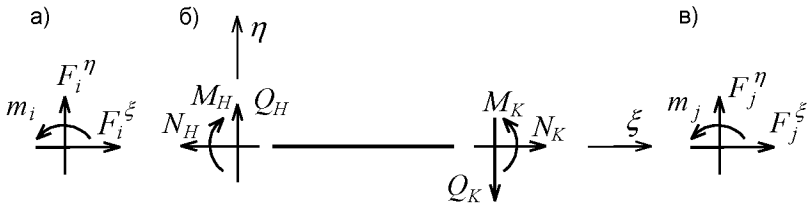


Рис. 15.17

В общем случае, векторы усилий в начале стержня  $\vec{S}_H = [N_H, Q_H, M_H]^T$  и в конце его  $\vec{S}_K = [N_K, Q_K, M_K]^T$  содержат по три компоненты. По отношению к стержню эти силы являются внешними и зависимыми, они связаны тремя уравнениями равновесия:

$$\begin{aligned} \sum \xi = 0, \quad -N_H + N_K = 0, \quad N_H = N_K = N; \\ \sum \eta = 0, \quad Q_H - Q_K = 0, \quad Q_H = Q_K = Q; \\ \sum M_H = 0, \quad M_H - M_K + Ql = 0, \quad Q = \frac{1}{l}(M_K - M_H). \end{aligned}$$

Если напряженное состояние стержня характеризовать вектором  $\vec{S} = [N, M_H, M_K]^T$ , то необходимо установить зависимость между  $\vec{S}_H$ ,  $\vec{S}_K$  и  $\vec{S}$ . В матричной форме записи эта зависимость определится таким образом:

$$\begin{bmatrix} \vec{S}_H \\ \vec{S}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_H \\ Q_H \\ M_H \\ N_K \\ Q_K \\ M_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_H \\ M_K \end{bmatrix}.$$

Связывая эти усилия с положительными направлениями узловой нагрузки (рис. 15.17, а, в), получим зависимость между вектором узловой нагрузки  $\vec{F}^*$  и вектором  $\vec{S}$  в виде:

$$\vec{F}^* = \begin{bmatrix} F_i^\xi \\ F_i^\eta \\ m_i \\ F_j^\xi \\ F_j^\eta \\ m_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_H \\ M_K \end{bmatrix} = a^* \vec{S}. \quad (15.15)$$

Первые три компоненты вектора  $\vec{F}^*$  определяют нагрузку на узел в начале стержня, а последующие три – в конце стержня.

Через  $a^*$  обозначена матрица равновесия стержня в местной системе координат:

$$a^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При переходе к общей системе координат уравнения равновесия стержня (15.15) преобразуются.

Рассмотрим задачу о преобразовании координат вектора узловых сил при переходе от местной системы координат к общей.

Из уравнений проекций линейных сил в  $i$ -м узле на оси общей системы координат (рис. 15.18) следует, что:

$$F_i^x = F_i^\xi \cos \varphi - F_i^\eta \sin \varphi,$$

$$F_i^y = F_i^\xi \sin \varphi + F_i^\eta \cos \varphi.$$

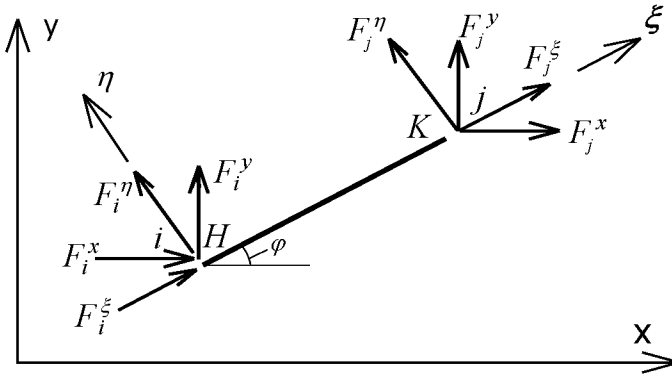


Рис. 15.18

Учитывая, что момент  $m_i$  остается неизменным при повороте системы координат, представим выражение для преобразования сил  $i$ -го узла в виде:

$$\vec{F}_i = \begin{bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \\ m_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_i^{\xi} \\ F_i^{\eta} \\ m_i \end{bmatrix} = C^T \vec{F}_i^*, \quad (15.16)$$

где  $C^T$  – матрица оператора вращения (при повороте вектора на угол  $\varphi$  по ходу часовой стрелки). Через  $C$  принято обозначать матрицу оператора вращения вектора против хода часовой стрелки.

Аналогичные соотношения имеют место и для сил в  $j$ -м узле:

$$\vec{F}_j = C^T \vec{F}_j^*.$$

Тогда для вектора нагрузки в узлах, соединяемых стержнем, преобразование вращения будет выполняться с помощью выражения:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} \vec{F}^* = V^T \vec{F}^*, \quad (15.17)$$

где

$$V^T = \left[ \begin{array}{ccc|cc} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Итак, если умножить равенство (15.15) слева на матрицу  $V^T$ , то получим взаимосвязь вектора узловых сил  $\vec{F}$  и вектора усилий  $\vec{S}$  в общей системе координат в таком виде:

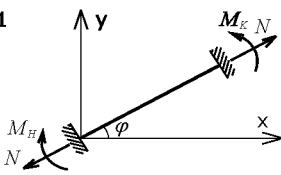
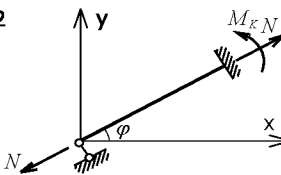
$$\vec{F} = a \vec{S}, \quad (15.18)$$

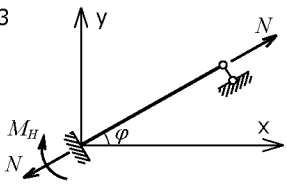
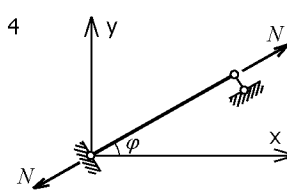
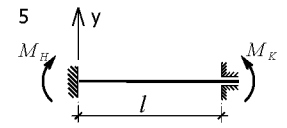
где  $a = V^T a^*$  – матрица равновесия стержня в общей системе координат.

$$a = \left[ \begin{array}{c|c|c} -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{l} & -\frac{\sin \varphi}{l} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{l} & \frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & -1 & 0 \\ - & - & - \\ \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{l} & \frac{\sin \varphi}{l} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{l} & -\frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

В таком виде записывается матрица равновесия для стержня с заземленными концами. Как следует из (15.18), матрицы равновесия для стержней с другими условиями закрепления концов могут быть получены из данной посредством вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым усилиям в стержне. В частности, если левый конец стержня будет иметь шарнирное опирание ( $M_H = 0$ ), а другой конец будет заземлен, то матрица равновесия получается из исходной вычеркиванием второго столбца и третьей строки. Для стержней с различными вариантами опорных закреплений матрицы равновесия в общей системе координат записаны в табл. 15.2.

Таблица 15.2

Вариант	Матрица $\alpha$	Матрица $k$
1	2	3
<p><b>1</b></p>  <p><math>S^T = [N, M_H, M_K]</math>  <math>\Delta^T = [\Delta l, \Delta \varphi_H, \Delta \varphi_K]</math></p>	$\begin{bmatrix} -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{l} & -\frac{\sin \varphi}{l} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{l} & \frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & -1 & 0 \\ - & - & - \\ \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{l} & \frac{\sin \varphi}{l} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{l} & -\frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} \\ 0 & -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$
<p><b>2</b></p>  <p><math>S^T = [N, M_K]</math>  <math>\Delta^T = [\Delta l, \Delta \varphi_K]</math></p>	$\begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{l} \\ -\sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{l} \\ - & - \\ \cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{l} \\ \sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$

1	2	3
<p>3</p>  <p> <math>S^T = [N, M_H]</math>  <math>\Delta^T = [\Delta l, \Delta \varphi_H]</math> </p>	$\begin{bmatrix} -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{l} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{l} \\ 0 & -1 \\ - & - \\ \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{l} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{l} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$
<p>4</p>  <p> <math>S = N \quad \Delta = \Delta l</math> </p>	$\begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ - \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$	$\left[ \frac{EA}{l} \right]$
<p>5</p>  <p> <math>S^T = [M_H, M_K]</math>  <math>\Delta^T = [\Delta \varphi_H, \Delta \varphi_K]</math> </p>	$\begin{bmatrix} -1/l & 1/l \\ -1 & 0 \\ - & - \\ 1/l & -1/l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{2EI}{l} \\ -\frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$

Определим зависимость между деформациями стержня и перемещениями его концов. Запишем вектор перемещений в общей системе координат для защемленного по концам стержня в виде:

$$\vec{z} = \left[ z_H^x, z_H^y, \varphi_H, z_K^x, z_K^y, \varphi_K \right]^T,$$

где, как и ранее, индексы “H” и “K” обозначают начало и конец стержня. Перемещения концов стержня суть перемещения узлов, которые они соединяют.



На рис. 15.19 показаны начальное и деформированное положения стержня в местной системе координат.

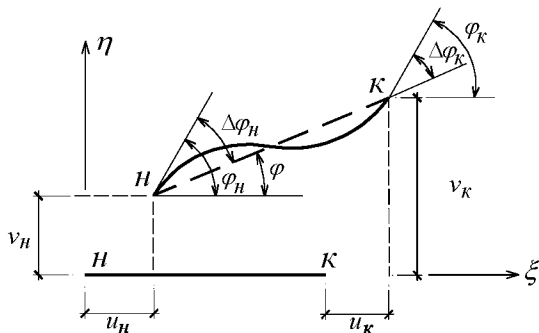


Рис. 15.19

Удлинение стержня и углы поворота его концевых сечений – это компоненты вектора деформаций:

$$\vec{\delta} = [\Delta l, \Delta \varphi_H, \Delta \varphi_K]^T.$$

Как следует из рис. 15.19:

$$\Delta l = u_K - u_H,$$

$$\Delta \varphi_H = -(\varphi_H - \varphi) = -\varphi_H + \frac{v_K - v_H}{l},$$

$$\Delta \varphi_K = \varphi_K - \varphi = \varphi_K - \frac{v_K - v_H}{l}.$$

Направление угла поворота  $\Delta \varphi_H$  не совпадает с положительным направлением момента  $M_H$ , поэтому выражение  $(\varphi_H - \varphi)$  принято отрицательным. Используя матричную формулу записи, получим:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \varphi_n \\ \Delta \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -1 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ \varphi_n \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = a^{*T} \vec{z}^*, \quad (15.19)$$

где  $\vec{z}^* = [u_n \ v_n \ \varphi_n \ u_k \ v_k \ \varphi_k]^T$  – вектор перемещений концов стержня в местной системе координат.

Как и в случае операции с векторами сил (15.17), преобразование координат вектора  $\vec{z}^*$  при повороте осей  $\xi \eta$  на угол  $\varphi$  по часовой стрелке производится с помощью матрицы  $V^T$ . Поэтому можно записать, что:

$$\vec{z} = V^T \vec{z}^*.$$

Следовательно,  $\vec{z}^* = V \vec{z}$ .

Тогда в общей системе координат геометрические уравнения, являющиеся условиями совместности перемещений узлов (концевых сечений стержня) и деформаций стержня, можно записать в виде:

$$\vec{\delta} = a^{*T} V \vec{z} = a^T \vec{z}. \quad (15.20)$$

Обратимся далее к физическим уравнениям, то есть к уравнениям, описывающим взаимосвязь деформаций стержня с усилиями в нем. Ранее (раздел 15.7) было показано, что для линейно деформируемого стержня эта связь представляется в виде  $\vec{\Delta}_i = D_i \vec{S}_i$  (индекс “ $i$ ” соответствует номеру стержня), или в развернутой форме записи для стержня с защемленными концами, не вводя обозначение его номера, в виде:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \varphi_n \\ \Delta \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l}{6EJ} & \frac{l}{6EJ} \\ 0 & \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_n \\ M_k \end{bmatrix} = d \vec{S},$$

где  $d$  – матрица внутренней податливости стержня.

Для стержней с иными условиями закрепления физические зависимости устанавливаются с помощью известных методов определения конечных перемещений. Так, для стержня, шарнирно опертого в начале и защемленного в конце, взаимосвязь  $\vec{\delta}$  и  $\vec{S}$  получается в виде:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \varphi_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_k \end{bmatrix} = d \vec{S},$$

а для стержня с защемлением в начале и шарнирной опорой в конце:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_n \end{bmatrix} = d \vec{S}.$$

Если необходимо физический закон написать в виде  $\vec{S} = S(\vec{\delta})$ , то из представленных выражений следует, что:

$$\vec{S} = d^{-1} \vec{\delta} = k \vec{\delta}, \quad (15.21)$$

где  $k$  – матрица внутренней жесткости (реакций) стержня.

Например, для стержня с защемленными концами:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{l} & -\frac{2EJ}{l} \\ 0 & -\frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}.$$

Записанные уравнения строительной механики для стержня позволяют автоматизировать процесс формирования матрицы равновесия и матрицы внутренней жесткости для плоской стержневой системы.

#### **15.14. Формирование матрицы равновесия и матрицы внутренней жесткости для стержневой системы**

Формат матрицы равновесия стержневой системы определяется числом и типом ее узлов и элементов. Число строк матрицы равно числу уравнений равновесия, то есть числу степеней свободы узлов. Число столбцов равно количеству неизвестных. Таким образом, матрица  $A$  имеет размеры  $(m \cdot n)$ .

В блочной форме структура матрицы  $A$  представляется в таком виде. Для каждого жесткого узла предусматриваются три строки, в которых последовательно записываются коэффициенты при неизвестных усилиях из уравнений  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и  $\sum M = 0$ ; для каждого шарнирного узла – две строки (записываются коэффициенты при неизвестных из уравнений  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ). По другому направлению, вертикальному, матрица представляется расчлененной на укрупненные полосы, число которых равно числу стержней. Ширина полосы (число столбцов в ней) определяется длиной вектора  $\vec{S}$  для каждого стержня.

Пояснения к составлению матрицы равновесия проведем на примере рамы (рис. 15.20).

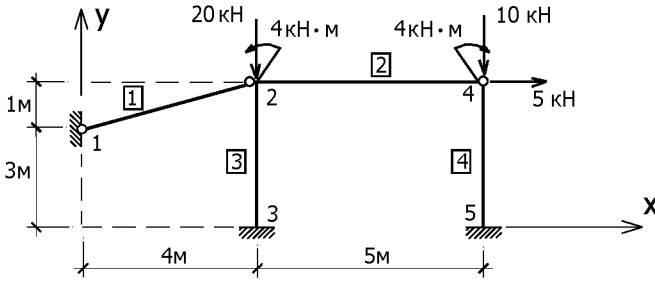


Рис. 15.20

Матрица равновесия  $A$  записана в табл. 15.3. Чтобы легче ориентироваться в структуре матрицы, в верхней части таблицы и слева от нее даны пояснительные записи. Каждому стержню рамы с соответствующим вектором усилий в таблице выделяется набор числовых значений по вертикальному направлению. В этой полосе располагается матрица  $a$  для отдельного стержня. Ранее было показано, что верхняя часть этой матрицы связана с началом стержня, а нижняя – с его концом. Вследствие особенности приложения нагрузки на 2-й стержень (в сечении, примыкающем к узлу, приложен момент  $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ), матрица  $a$  для него имеет размеры  $6 \cdot 3$ . Первые три строки относятся к началу стержня, то есть к узлу 2 (см. в таблице горизонтальное направление), а оставшиеся строки – к узлу 4.

Таблица 15.3

Стержни		1		2		3			4	
$S^T$		$N_1$	$N_2$	$M_{H2}$	$M_{K2}$	$N_3$	$M_{H3}$	$M_{K3}$	$N_4$	$M_{K4}$

Узлы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Узлы										
2	1	0,9701	-1	0	0	0	-0,25	0,25		
	2	0,2425	0	-0,2	0,2	1	0	0		
	3	0	0	-1	0	0	-1	0		
4	4		1	0	0				0	0,25
	5		0	0,2	-0,2				1	0
	6		0	0	1					

$A =$

Если на один из концов стержня наложены опорные связи (стержень примыкает к опорному узлу) и усилия в этих связях не требуется вычислять (не надо определять опорные реакции), то часть матрицы  $a$ , связанная с соответствующими уравнениями равновесия для опорного узла, в матрицу равновесия  $A$  не вписывается (опускается). Так, числовые значения матрицы  $a$  для 3-го стержня (5, 6 и 7 столбцы) относятся только ко 2-му узлу. Аналогичное распределение записей имеет место по 1-му и по 4-му стержням.

Исключение из матрицы  $A$  коэффициентов уравнений равновесия опорных узлов позволяет уменьшить ее размеры, что целесообразно с вычислительной точки зрения.

Для более глубокого уяснения физического смысла задачи, а также с целью контроля записей при неавтоматизированной подготовке исходных данных следует иногда проверить запись отдельных уравнений равновесия для узлов системы. Так, для той же рамы уравнение  $\sum Y = 0$  для 2-го узла (рис. 15.21) запишется в виде:

$$0,2425 \cdot N_1 - 0,2 \cdot M_{H2} + 0,2 \cdot M_{K2} + N_3 = -20 \cdot 10^3,$$

где учтена замена

$$Q_2 = \frac{M_{K2} - M_{H2}}{l_2}.$$

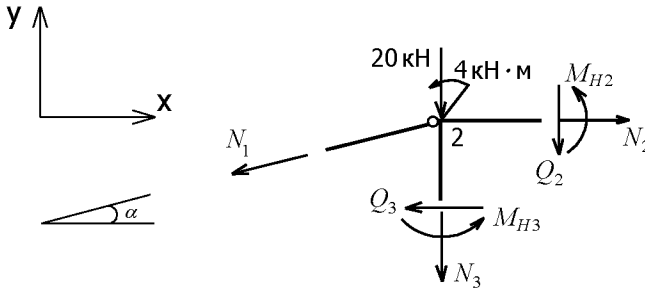


Рис. 15.21

Та же структура матрицы  $A$  имеет место и для других систем (балки, арки, фермы и др.).

Итак, число строк в матрице  $A$  равно числу уравнений равновесия узлов системы, число столбцов – числу неизвестных усилий (компоненты вектора  $\vec{S}$  обозначены в верхней части таблицы, содержащей матрицу равновесия).

Возвращаясь к вопросу о степени свободы системы, отметим, что в нашем примере  $m = 6$ ,  $n = 9$ . Степень статической неопределимости  $k = n - m = 3$ .

Для геометрически неизменяемой стержневой системы ранг матрицы равновесия  $A$  равен числу независимых уравнений равновесия для узлов этой системы, то есть  $r(A) = m$ . При этом, если  $m = n$ , то исследуемая система относится к статически определенным, а определитель матрицы  $\det A \neq 0$ ; если  $m < n$ , то система является статически неопределимой.

При соотношении  $m > n$  ранг матрицы  $r(A) \leq n$  и, следовательно, система относится к геометрически изменяемой.

Как уже отмечалось, число компонент векторов  $\vec{S}$  и  $\vec{\Delta}$  одинаково. В табл. 15.3 векторы  $\vec{S}$  записаны для каждого стержня. Число уравнений равновесия, коэффициенты которых записаны в матрице  $A$ , соответствует числу определяемых компонент вектора перемещений  $\vec{z}$  как для отдельного узла, так и для системы в целом. Номер строки в матрице  $A$  указывает и на номер соответствующей компоненты вектора  $\vec{z}$ . Например, второму уравнению ( $\sum Y = 0$ ) матрицы  $A$  в векторе перемещений соответствует вертикальное перемещение узла 2. Общее число неизвестных перемещений для рассматриваемой задачи в принятой постановке равно шести.

Матрица внутренней жесткости отдельного стержня квадратная. Ее размер определяется числом компонент вектора  $\vec{S}$ . Для всей системы  $K$  имеет квазидиагональную структуру, для рассматриваемой рамы она представлена в табл. 15.4.

Указанная согласованность матриц в основных уравнениях строительной механики позволяет составить алгоритм решения математической модели задачи поперечного расчета стержневой системы.

Таблица 15.4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	14,82								
2		12,22	0	0					
3		0	0,8	-0,4					
4		0	-0,4	0,8					
5	$K =$				15,28	0	0		
6					0	1	-0,5		
7					0	-0,5	1		
8								15,28	0
9								0	0,75

$\cdot 30,24 \cdot 10^6$

Автоматизированный расчет стержневой системы предполагает формирование матриц основных уравнений и решение последних на основе исходных данных о системе, к которым относятся:

- количество узлов, в том числе опорных, и их признаки;
- координаты узлов;
- расположение стержней, соединяющих узлы;
- жесткости стержней;
- сведения о нагрузке, действующей на узлы.

Так как элементами матрицы  $A$  являются синусы и косинусы углов наклона стержней к координатным осям, то вычисление их сводится к определению отношений проекций на эти оси (разность координат конца и начала стержня) к длине стержня.

В зависимости от поставленных задач результатами расчета могут быть значения перемещений узлов, усилий в стержнях и их деформаций, матрица внешней жесткости системы, матрицы влияния усилий и перемещений. Эта информация позволяет выявить особенности работы системы под нагрузкой и может быть использована для построения эпюр усилий и перемещений, линий влияния усилий и перемещений.

Определим для рассмотренной рамы перемещения узлов, усилия в стержнях и построим эпюры усилий.

Если принять  $\vec{F} = [0; -20; 4; 5; -10; -4]^T \cdot 10^3$ , (размерность сосредоточенных сил и моментов – Н, Н·м), то из выражения  $\vec{z} = (A K A^T)^{-1} \vec{F}$  найдем, что:



$$z = \left[ z_2^x, z_2^y, \varphi_2, z_3^x, z_3^y, \varphi_3 \right]^T = \\ = [0,1910; -0,4348; 1,2104; 0,3251; -0,2332; -2,1982]^T \cdot 10^{-4}.$$

Шестая компонента вектора  $\vec{z}$  соответствует углу поворота сечения на конце 2-го стержня.

Вектор усилий определен по соотношению  $\vec{S} = K A^T \vec{z}$ .

$$S = \left[ 3,58; \mid 4,95; -0,12; -4,00; \mid \right. \\ \left. -20,09; -3,88; 2,05; \mid -10,78; 0,18 \right]^T \cdot 10^3.$$

Вертикальные линии разделяют компоненты усилий, относящиеся к конкретным стержням.

Эпюры усилий в раме показаны на рис. 15.22.

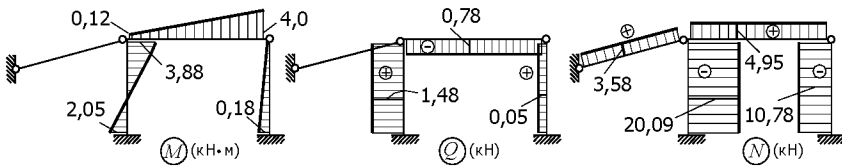


Рис. 15.22

Для определения поперечных сил в стержнях использована зависимость:

$$Q = \frac{M_K - M_H}{l}.$$

В этом примере по формулам (8.17) получим:

$$Q_2 = \frac{-4,0 + 0,12}{5} = -0,776; \quad Q_3 = \frac{2,05 + 3,88}{4} = 1,4825;$$

$$Q_4 = \frac{0,18}{4} = 0,045.$$

### 15.15. Матрицы влияния перемещений и усилий

Из равенства  $R \vec{z} = \vec{F}$  следует, что вектор перемещений вычисляется по выражению  $\vec{z} = L_z \vec{F}$ , в котором  $L_z = R^{-1} = (A K A^T)^{-1}$  – матрица влияния перемещений. Ее размер  $(m \cdot m)$ . С помощью этой матрицы вектор узловых сил преобразуется в вектор узловых перемещений. Элемент  $\beta_{ik}$  этой матрицы определяет перемещение узла системы по  $i$ -му направлению от  $F_k = 1$ . Одновременно матрица влияния перемещений является и матрицей внешней податливости  $L_z = A = [\delta_{ij}]$ .

Вектор усилий  $\vec{S}$  в стержневой системе так же может быть выражен через вектор  $\vec{F}$ . С этой целью запишем его вначале в форме  $\vec{S} = K A^T \vec{z}$ , а затем, используя выражение для  $\vec{z}$ , представим в виде:

$$\vec{S} = K A^T R^{-1} \vec{F} = K A^T (A K A^T)^{-1} \vec{F} = L_S \vec{F},$$

где  $L_S$  – матрица влияния усилий.

Ее размер  $(n \cdot m)$ . Каждый элемент  $\alpha_{ik}$  этой матрицы определяет  $i$ -е усилие ( $i$ -й номер в векторе  $\vec{S}$ ) от  $k$ -й единичной силы ( $F_k = 1$ ).

Элементы первого столбца  $\alpha_{i1}$  матрицы  $L_S$  суть усилия в стержнях от  $F_1 = 1$ . С помощью этих чисел можно построить эпюру усилий в стержнях системы от загрузения ее силой  $F_1 = 1$ . Элементы же первой строки  $\alpha_{1k}$  показывают значения усилия  $S_1$  от последовательного загрузения узлов системы единичными силами. Используя эти числа, можно, следовательно, построить линию влияния  $S_1$ . При этом построении из первой строки необходимо выбирать те числа (элементы), которые соответствуют заданному направлению движения единичной силы.

Матрицы влияния  $L_S$  и  $L_z$  являются очень важными характеристиками рассчитываемой (исследуемой) системы. Изменение в системе какого-либо параметра обязательно повлечет за собой изменение этих матриц.

Физический смысл элементов матриц влияния указывает и на то, что для их составления можно использовать эпюры усилий или линии влияния усилий. Такие способы вычислений обычно используются для простых (с небольшим числом стержней) систем. В других случаях целесообразно применить указанную математическую формализацию этого процесса с использованием матрицы равновесия  $A$  и матрицы жесткости  $K$ .

Между матрицами  $L_S$  и  $L_z$  существует взаимосвязь. Действительно, так как  $L_S = K A^T (A K A^T)^{-1}$  и  $L_z = (A K A^T)^{-1}$ , то  $L_S = K A^T L_z$ .

Матрица внешней жесткости  $R = A K A^T$  и матрица внешней податливости  $A = R^{-1}$  широко используются в динамике и устойчивости сооружений.

Пример. Покажем использование основных уравнений для расчета неразрезной балки. Расчетная схема балки изображена на рис. 15.23,а. Балка имеет постоянное сечение.

$$A = 61,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad I = 0,895 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4, \quad E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Размерность сил – кН, моментов – кН·м, длин – м.

Общее число узлов – 9.

В квадратиках указаны номера элементов балки.

Матрица  $A$  формируется по стержням с использованием 5-го варианта табл. 15.2.

Матрица внутренней жесткости  $K$  является квазидиагональной:

$$\text{diag } K = [K_1 K_1 K_1 K_1 \mid K_2 K_2 K_2 K_2] \cdot 18,795 \cdot 10^3,$$

$$\text{где } K_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 4/1,5 & -2/1,5 \\ -2/1,5 & 4/1,5 \end{bmatrix}.$$

Решение системы  $AKA^T z = F$  дает матрицу перемещений  $z$ . Линейные перемещения измеряются в метрах, углы поворота – в радианах.

Первому загрузению балки соответствует эпюра перемещений, показанная на рис. 15.23,б.

Матрица усилий  $S$  вычислялась по выражению  $S = KA^T z$ .

С ее помощью построены эпюры изгибающих моментов для каждого загрузения (рис. 15.23,в,г,д).

Для построения линий влияния усилий использовалась матрица влияния усилий  $L_s$ , вычисляемая по выражению

$$L_s = KA^T (AKA^T)^{-1}.$$

Элементы 2, 4, 6, 9, 11, 13 столбцов суть усилия в балке от вертикальной сосредоточенной единичной силы, приложенной соответственно в точках 2, 3, 4, 6, 7, 8; в столбцах 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14 содержится информация об усилиях от сосредоточенного единичного момента, приложенного в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

В строках матрицы  $L_s$  содержатся значения ординат линий влияния усилий в соответствующем сечении балки. Так, с помощью элементов 5-й строки построена л.вл.  $M_3$ . Усилие  $M_3$  – это  $M_{H3}$  (момент в начале третьего элемента), или за  $M_3$  можно принять  $M_{K2}$  (момент в конце второго элемента). Значения ординат  $M_{K2}$  имеются в 4-й строке в столбцах 2, 4, 6, 9, 11, 13. Л.вл.  $M_3$  показана на рис. 15.23,е.

Для построения л. вл.  $M_8$  (рис. 15.23,ж) использованы значения ординат из 15-й строки  $L_s$ .

Для согласования графиков, показанных на рис. 15.23,г–ж, по знакам усилий в матрице  $L_s$  знаки изменены на обратные.

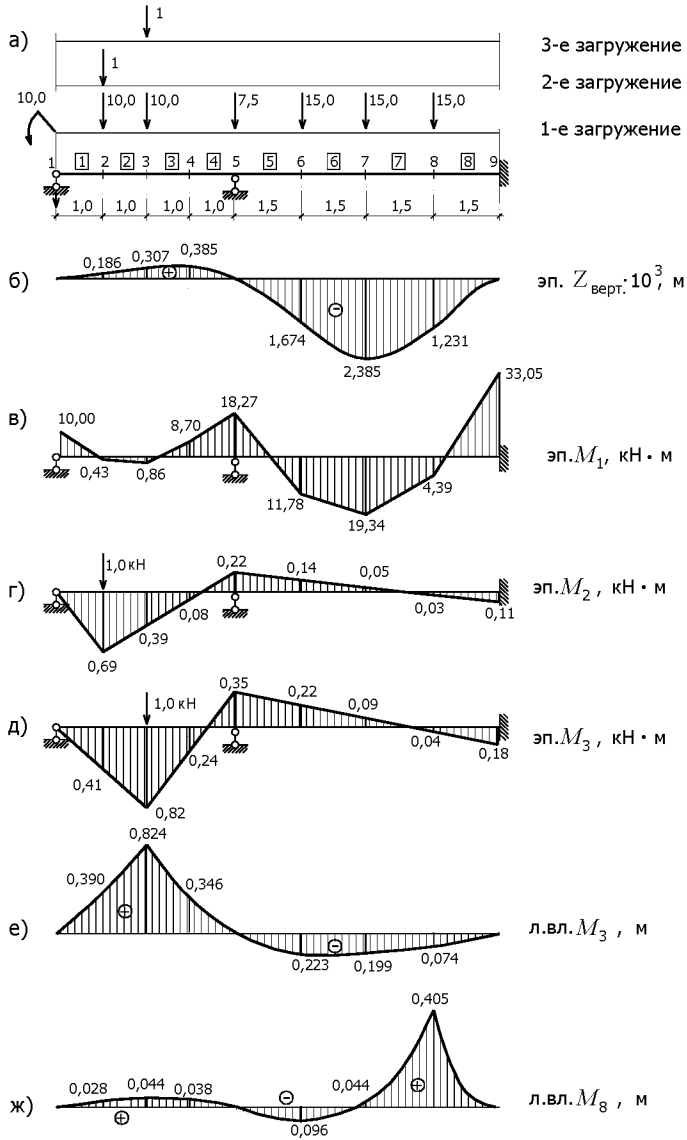


Рис. 15.23

### 15.16. Пространственные фермы

Координаты узлов пространственной фермы будем считать известными. Для стержня  $P_1P_2$  ( $P_1$  – узел в начале,  $P_2$  – узел на конце стержня) как для направленного отрезка  $\overrightarrow{P_1P_2}$  найдем направляющие косинусы  $\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z$  по выражениям:

$$\cos\alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{l}, \quad \cos\alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad \cos\alpha_z = \frac{z_2 - z_1}{l},$$

где

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы направленного отрезка  $\overrightarrow{P_2P_1}$  суть

$$-\cos\alpha_x, -\cos\alpha_y, -\cos\alpha_z.$$

Как и ранее, растягивающую продольную силу в стержне будем считать положительной. В концевых сечениях стержня она имеет противоположные направления. Эти направления соответствуют направлениям отрезков  $\overrightarrow{P_1P_2}$  и  $\overrightarrow{P_2P_1}$ .

Проекции направленного отрезка  $\overrightarrow{P_1P_2}$  на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  равны соответственно:

$$l_x = x_2 - x_1 = l \cos\alpha_x, \quad l_y = y_2 - y_1 = l \cos\alpha_y,$$

$$l_z = z_2 - z_1 = l \cos\alpha_z.$$

Следовательно, проекции продольной силы  $N$ , приложенной в точке  $P_2$ , на те же оси равны:

$$N \cos \alpha_x, \quad N \cos \alpha_y, \quad N \cos \alpha_z,$$

а проекции силы  $N$ , приложенной в точке  $P_1$ , должны быть записаны с противоположным знаком:

$$-N \cos \alpha_x, \quad -N \cos \alpha_y, \quad -N \cos \alpha_z.$$

Нумерация узлов фермы определяет и нумерацию узлов  $P_1$  и  $P_2$ , соединяемых стержнем. При этом за начало стержня, то есть за точку  $P_1$ , принимается узел с меньшим номером.

В матрице равновесия  $A$  с каждым свободным узлом пространственной фермы связаны три строки, в которых записываются коэффициенты при усилиях  $N$  в стержнях, примыкающих к этому узлу. Эти коэффициенты являются множителями (направляющими косинусами) при  $N$  в уравнениях  $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$ .

В практических задачах матрицу  $A$  удобнее формировать не по строкам, а по столбцам. Еще раз напомним, что направляющие косинусы стержня  $P_1 P_2$  в уравнениях, относящихся к узлам  $P_1$  и  $P_2$ , будут иметь противоположные знаки. При формировании матрицы  $A$  по столбцам следует использовать для каждого стержня вектор-шаблон  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \left[ -\cos \alpha_x, -\cos \alpha_y, -\cos \alpha_z, \cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z \right]^T.$$

Первые три элемента вектора относятся к началу стержня (узел  $P_1$ ), оставшиеся три – к концу его (узел  $P_2$ ).

Основные уравнения строительной механики для пространственной фермы имеют ту же форму записи, что и для плоской системы.

*Замечание* – В случае плоских ферм матрицу равновесия также можно формировать через направляющие косинусы с помощью приведенного выше вектора  $\vec{a}$ , исключив в нем компоненты:  $-\cos \alpha_z, \cos \alpha_z$ .

*Пример.* Определить усилия в стержнях пространственной фермы, показанной на рис. 15.24. Жесткости  $EA$  всех стержней принять равными.

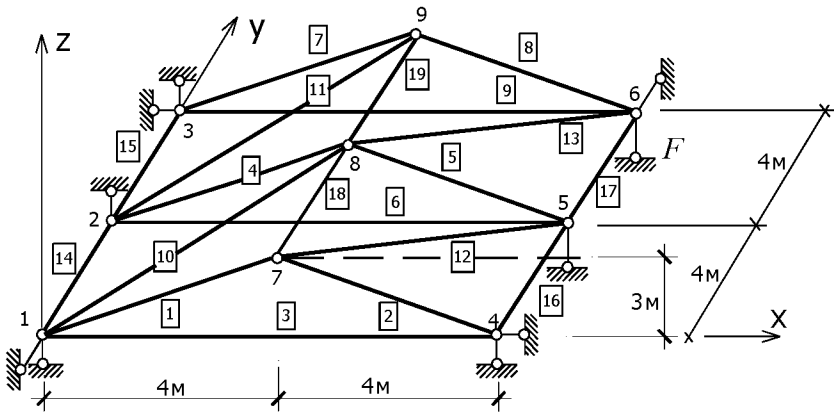


Рис. 15.24

Матрица равновесия фермы приведена в табл. 15.5.

В этом примере задача определения опорных реакций не ставилась. Поэтому в матрице  $A$  отсутствуют строки, соответствующие уравнениям проекций усилий в стержнях, примыкающих к опорным узлам, по направлениям опорных связей.

Матрица жесткости  $K$  фермы является диагональной:

$$K = \text{diag}\{0,2; 0,2; 0,125; 0,2; 0,2; 0,125; 0,2; 0,2; 0,125; 0,15617; 0,15617; 0,15617; 0,15617; 0,25; 0,25; 0,25; 0,25; 0,25; 0,25\} \cdot EA.$$

Примем вектор нагрузки в виде:

$$\vec{F} = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -5,0; 5,0; -50,0; -5,0; 5,0; -100,0; -5,0; 5,0; -50,0]^T \text{ кН}^*.$$

\* Вертикальные линии разделяют компоненты нагрузки, относящиеся к конкретным узлам.



Таблица 15.5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	-0,8	-1								-0,6247									
2			-0,8	-1							-0,6247								
3											-0,6247			1	-1				
4															1				
5																-1			
6				0,8	1							0,6247							
7												0,6247				1	-1		
8							0,8	1					0,6247						
9	0,8	-0,8										-0,6247							
10												-0,6247							-1
11	0,6	0,6											0,4685						
12			0,8	-0,8					0,6247				-0,6247						
13									0,6247				-0,6247					1	-1
14			0,6	0,6					0,4685				0,4685						
15						0,8	-0,8			0,6247									
16										0,6247									1
17						0,6	0,6				0,4685								

Решение системы уравнений  $R \vec{z} = \vec{F}$  дает:

$$z^T = [-382,96; -254,51; 14,27; 14,27; 25,73; 173,99; 25,73; 382,96; -236,14; 114,66; -569,03; -79,32; 120,39; -828,69; 158,01;$$

$$126,12; -621,12] \cdot \frac{1}{EA}, \text{ м}^*.$$

---

\* Вертикальные линии разделяют компоненты перемещений, относящиеся к конкретным узлам.

Усилия в стержнях фермы определяем по выражению  $\vec{N} = K A^T \vec{z}$  :

$$\vec{N} = [-44,79; -30,50; 47,87; -71,41; -58,91; 53,56; -49,25; \\ -38,54; 47,87; -19,27; 5,71; -10,30; -27,27; 3,57; 0; 0; \\ -6,43; 1,43; 1,43]^T, \text{ кН.}$$

### 15.17. Пространственные рамы

Для каждого стержня рамы ориентацию осей местной системы координат (в дальнейшем они обозначаются малыми буквами  $x, y, z$ ) будем считать известной. Ось  $ox$  направлена от узла  $P_1$  к узлу  $P_2$  (от узла с меньшим номером к узлу с большим номером). Оси  $oy$  и  $oz$  правой декартовой системы координат располагаются в плоскости, перпендикулярной  $ox$  и проходящей через точку  $P_1$ . Так как положение сечения стержня рамы принимается заранее определенным, то тем самым устанавливается и положение осей  $oy$  и  $oz$ . Расположение осей по каждому стержню должно быть зафиксировано однозначно.

Пусть относительно осей глобальной системы координат  $OXYZ$  :

- ось  $ox$  имеет направляющие косинусы  $t_{11}, t_{21}, t_{31}$  ;
- ось  $oy$  имеет направляющие косинусы  $t_{12}, t_{22}, t_{32}$  ;
- ось  $oz$  имеет направляющие косинусы  $t_{13}, t_{23}, t_{33}$  .

Тогда принимаемая для стержня локальная система координат характеризуется матрицей направляющих косинусов:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы  $T$  совершаются преобразования декартовых прямоугольных координат при повороте осей.

Определим векторы усилий и деформаций в стержне пространственной рамы в следующем виде:

$$\vec{S} = [N; M_{кр}; M_{y,н}; M_{y,к}; M_{z,н}; M_{z,к}]^T,$$

$$\vec{\Delta} = [\Delta l; \Delta\varphi_{кр}; \Delta\varphi_{y,н}; \Delta\varphi_{y,к}; \Delta\varphi_{z,н}; \Delta\varphi_{z,к}]^T.$$

Усилия в концевых сечениях стержня, ориентированные по осям местной системы координат, выражаются через  $\vec{S}$  с помощью матрицы равновесия  $a^*$ :  $\vec{r}^* = a^* \vec{S}$ . Компоненты вектора

$$\vec{r}^* = [r_{x,н}; r_{y,н}; r_{z,н}; m_{x,н}; m_{y,н}; m_{z,н}; r_{x,к}; r_{y,к}; r_{z,к}; m_{x,к}; m_{y,к}; m_{z,к}]$$

показаны на рис. 15.25. Положительные направления компонент вектора  $\vec{S}$  показаны на рис. 15.26.

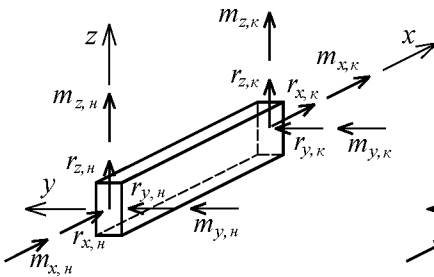


Рис. 15.25

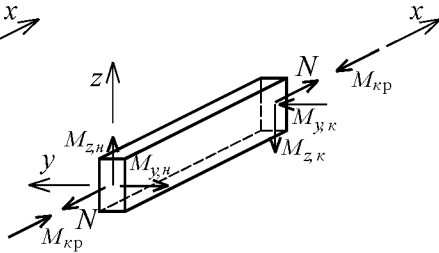


Рис. 15.26

На этих рисунках использовано векторное изображение моментов. Момент, действующий относительно некоторой оси по ходу часовой стрелки (если смотреть с точки, соответствующей концу координатной оси), изображается вектором, направленным в положительном направлении оси. На рис. 15.25 приняты обозначения:

$m_{x,n}, m_{x,k}$  – крутящие моменты в начале и в конце стержня;

$m_{y,n}, m_{y,k}$  – изгибающие моменты в начале и в конце стержня относительно оси  $y$ ;

$m_{z,n}, m_{z,k}$  – изгибающие моменты в начале и в конце стержня относительно оси  $z$ .

Условия равновесия для стержня позволяют получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}r_{x,n} &= -N; & r_{x,k} &= -r_{x,n}; \\r_{y,n} &= \frac{M_{z,k} - M_{z,n}}{l}; & r_{y,k} &= -r_{y,n}; \\r_{z,n} &= \frac{M_{y,k} - M_{y,n}}{l}; & r_{z,k} &= -r_{z,n}; \\m_{x,n} &= M_{kp}; & m_{x,k} &= -m_{x,n}; \\m_{y,n} &= -M_{y,n}; & m_{y,k} &= -m_{y,n}; \\m_{z,n} &= M_{z,n}; & m_{z,k} &= -M_{z,k}.\end{aligned}$$

Положительные направления концевых усилий (рис. 15.26) совпадают с направлениями осей местной системы координат. Поэтому для проектирования этих усилий на оси глобальной системы координат используем матрицу  $T$ :

$$\begin{aligned}R_{X,H} &= t_{11} \cdot r_{x,n} + t_{12} \cdot r_{y,n} + t_{13} \cdot r_{z,n}; \\R_{Y,H} &= t_{21} \cdot r_{x,n} + t_{22} \cdot r_{y,n} + t_{23} \cdot r_{z,n}; \\R_{Z,H} &= t_{31} \cdot r_{x,n} + t_{32} \cdot r_{y,n} + t_{33} \cdot r_{z,n}; \\M_{X,H} &= t_{11} \cdot m_{x,n} + t_{12} \cdot m_{y,n} + t_{13} \cdot m_{z,n}; \\M_{Y,H} &= t_{21} \cdot m_{x,n} + t_{22} \cdot m_{y,n} + t_{23} \cdot m_{z,n}; \\M_{Z,H} &= t_{31} \cdot m_{x,n} + t_{32} \cdot m_{y,n} + t_{33} \cdot m_{z,n}.\end{aligned}$$

В матричной форме записи эти выражения представляются так:

$$\vec{R}_H = T^T \vec{r}_H^*, \quad \vec{M}_H = T^T \vec{m}_H^*,$$

где

$$\vec{R}_H = [R_{x,H}; R_{y,H}; R_{z,H}]^T;$$

$$\vec{M}_H = [M_{x,H}; M_{y,H}; M_{z,H}]^T;$$

$$\vec{r}_H^* = [r_{x,H}; r_{y,H}; r_{z,H}]^T; \quad \vec{m}_H^* = [m_{x,H}; m_{y,H}; m_{z,H}]^T.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для усилий в конце стержня.

$$\vec{R}_K = T^T \vec{r}_K^*, \quad \vec{M}_K = T^T \vec{m}_K^*,$$

где

$$\vec{R}_K = [R_{x,K}; R_{y,K}; R_{z,K}]^T;$$

$$\vec{M}_K = [M_{x,K}; M_{y,K}; M_{z,K}]^T;$$

$$\vec{r}_K^* = [r_{x,K}; r_{y,K}; r_{z,K}]^T; \quad \vec{m}_K^* = [m_{x,K}; m_{y,K}; m_{z,K}]^T.$$

С учетом записанных выражений вектор концевых реакций  $\vec{R}$  в глобальной системе координат определяется так:

$$\vec{R} = a \vec{S},$$

где

$$\vec{R} = [R_{x,H}; R_{y,H}; R_{z,H}; M_{x,H}; M_{y,H}; M_{z,H}; \\ R_{x,K}; R_{y,K}; R_{z,K}; M_{x,K}; M_{y,K}; M_{z,K}]^T;$$

$a$  – матрица равновесия стержня в общей системе координат:

$$a = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -t_{11} & & -\frac{t_{13}}{l} & \frac{t_{13}}{l} & -\frac{t_{12}}{l} & \frac{t_{12}}{l} \\ \hline -t_{21} & & -\frac{t_{23}}{l} & \frac{t_{23}}{l} & -\frac{t_{22}}{l} & \frac{t_{22}}{l} \\ \hline -t_{31} & & -\frac{t_{33}}{l} & \frac{t_{33}}{l} & -\frac{t_{32}}{l} & \frac{t_{32}}{l} \\ \hline & t_{11} & -t_{12} & & t_{13} & \\ \hline & t_{21} & -t_{22} & & t_{23} & \\ \hline & t_{31} & -t_{32} & & t_{33} & \\ \hline t_{11} & & \frac{t_{13}}{l} & -\frac{t_{13}}{l} & \frac{t_{12}}{l} & -\frac{t_{12}}{l} \\ \hline t_{21} & & \frac{t_{23}}{l} & -\frac{t_{23}}{l} & \frac{t_{22}}{l} & -\frac{t_{22}}{l} \\ \hline t_{31} & & \frac{t_{33}}{l} & -\frac{t_{33}}{l} & \frac{t_{32}}{l} & -\frac{t_{32}}{l} \\ \hline & -t_{11} & & t_{12} & & -t_{13} \\ \hline & -t_{21} & & t_{22} & & -t_{23} \\ \hline & -t_{31} & & t_{32} & & -t_{33} \\ \hline \end{array} \\ \cdot \end{array} \quad (15.22)$$

Матрицы равновесия стержней плоских и пространственных ферм, плоских изгибаемых систем, систем перекрестных балок получаются как частные случаи из записанной матрицы  $a$  (15.22) вычеркиванием соответствующих строк и столбцов.

Матрица внутренней жесткости защемленного по концам стержня имеет следующую форму записи:

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & & & & & \\ \hline & \frac{GI_{KP}}{l} & & & & \\ \hline & & \frac{4EJ_y}{l} & -\frac{2EJ_y}{l} & & \\ \hline & & -\frac{2EJ_y}{l} & \frac{4EJ_y}{l} & & \\ \hline & & & & \frac{4EJ_z}{l} & -\frac{2EJ_z}{l} \\ \hline & & & & -\frac{2EJ_z}{l} & \frac{4EJ_z}{l} \\ \hline \end{array} \\ \cdot \end{array}$$

Основные уравнения строительной механики для расчета стержневой системы в форме метода перемещений представляются в виде:

$$R \vec{z} = \vec{F} + A K \vec{\Delta}'.$$

Матрица уравнений равновесия  $A$  рассчитываемой системы составляется поэлементно с помощью матриц равновесия  $a$  (15.22) стержней.

**Пример.** Построить эпюры продольных сил, крутящих и изгибающих моментов в раме, показанной на рис. 15.27, принимая для всех стержней следующее соотношение жесткостей:

$$EA h^2 = GI_{KP} = EJ_y = EJ_z, \quad (h = 1 \text{ м}).$$

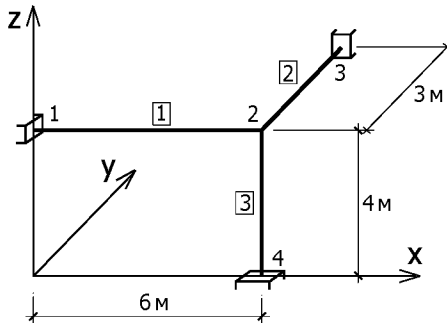


Рис. 15.27

Положения локальных осей координат для каждого стержня рамы, показанные на рис. 15.28, определяют матрицы направляющих косинусов:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

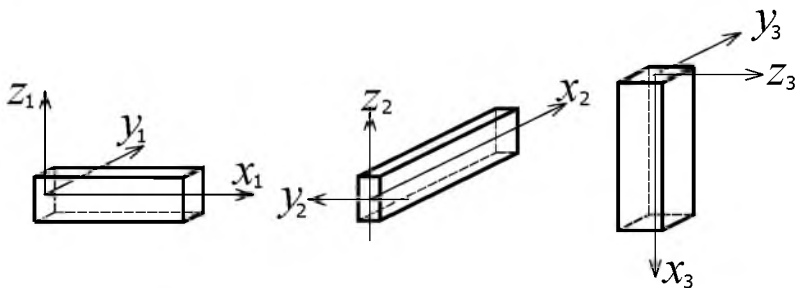


Рис. 15.28

Матрица уравнений равновесия рамы приведена в табл. 15.6.

Таблица 15.6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1										1/3	-1/3			-1/4	1/4		
2					1/6	-1/6	-1										-1/4	1/4
3			1/6	-1/6					-1/3	1/3			1					
4		-1							1								1	
5				1				1							-1			
6						-1					1			-1				

Матрица внутренней жесткости рамы является квазидиагональной:

$$diagK = [K_1, K_2, K_3] \cdot EJ_y,$$

где



$$K_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & & & & & \\ & 1/6 & & & & \\ & & 4/6 & -2/6 & & \\ & & -2/6 & 4/6 & & \\ & & & & 4/6 & -2/6 \\ & & & & -2/6 & 4/6 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & & & & & \\ & 1/3 & & & & \\ & & 4/3 & -2/3 & & \\ & & -2/3 & 4/3 & & \\ & & & & 4/3 & -2/3 \\ & & & & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1/4 & & & & & \\ & 1/4 & & & & \\ & & 1 & -0,5 & & \\ & & -0,5 & 1 & & \\ & & & & 1 & -0,5 \\ & & & & -0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Принимая вектор нагрузки  $\vec{F}_2 = [0; 0; -11; 3; 7,5; 0]^T$  (размерность сил – кН; моментов – кН · м; длин – м; положительные моменты направляются относительно осей общей системы координат по ходу часовой стрелки, если смотреть с точки, соответствующей концу оси), получим:

$$\vec{z} = [-1,87; -2,75; -17,54; -3,89; 2,64; 0,76]^T \frac{1}{EJ_y},$$

$$\vec{S} = [-0,31; 0,65; -3,80; 4,68; -0,21; -0,05; | 0,92; 0,88; 6,51; -9,10; -0,24; 0,74; | -4,38; -0,19; -1,94; 0,62; -2,86; 0,91;]^T.$$

Эпюры усилий показаны на рис. 15.29. На рис. 15.30 показаны (в аксонометрии) изгибающие и крутящие моменты, действующие на вырезанный узел 2. Моменты подразделены на группы в соответствии с их расположением по отношению к координатным плоскостям.

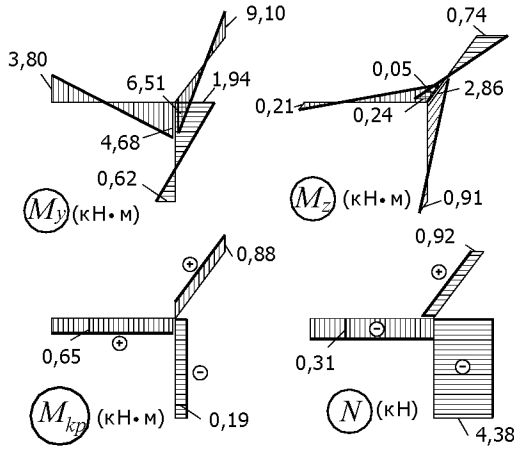


Рис. 15.29

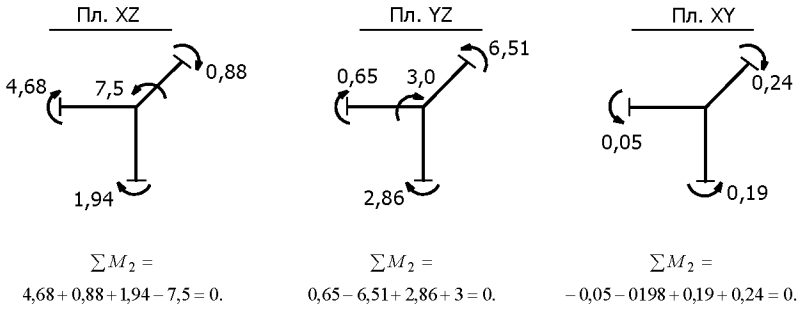


Рис. 15.30

Для этого узла выполняются также и уравнения проекций сил на координатные оси.

Пример. Построить эпюры усилий в раме, показанной на рис. 15.31, приняв для всех стержней  $EA h^2 = 10EJ_y$ ,  $GT = 0,27EJ_y$ ,  $EJ_z = 0,5EJ_y$ .

$$\vec{F}_1 = [12, 0; 0; -98, 0; 40, 0; -52, 0; 0; 0]^T,$$

$$\vec{F}_2 = [0; 0; -98; 0; 40; 0; 64; 0; 0]^T.$$

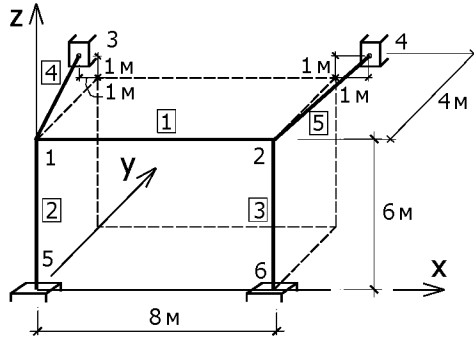


Рис. 15.31

Размерность сил – кН, моментов – кН · м, длин – м.

Матрицы направляющих косинусов осей местной системы координат для стержней рамы представляются в следующей форме:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} -2,35702 & 9,42809 & 2,35702 \\ -9,70143 & -2,42536 & 0 \\ 0,57166 & -2,28665 & 9,71825 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1},$$

$$T_5 = \begin{bmatrix} 2,35702 & 9,42809 & 2,35702 \\ -9,70143 & 2,42536 & 0 \\ -0,57166 & -2,28665 & 9,71825 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}.$$

Матрицы жесткости 4-го и 5-го стержней совпадают:

$$K_4 = K_5 = \begin{bmatrix} 2,357 & & \\ & 0,707 & \\ & & 0,354 \end{bmatrix} \cdot EJ_y.$$

После формирования матрицы внешней жесткости  $R = A K A^T$  решаем систему уравнений  $R \vec{z} = \vec{F}$  и определяем усилия в стержнях рамы по выражению  $\vec{S} = K A^T \vec{z}$ .

Эпюры усилий показаны на рис. 15.32.

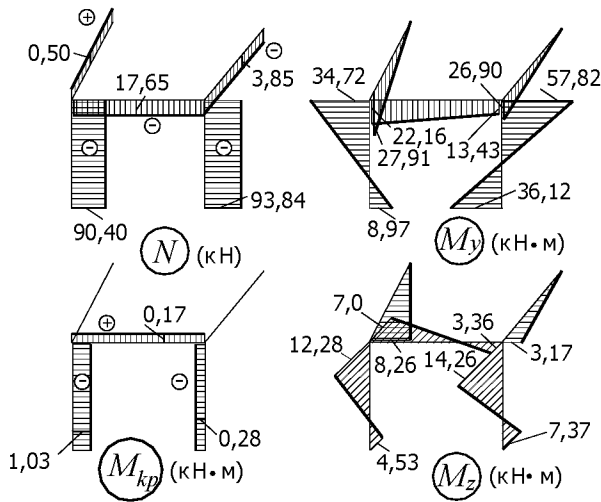


Рис. 15.32

Пример. Для системы перекрестных балок (СПБ), показанной на рис. 15.33, примем изгибные жесткости для всех стержней равными и  $GI_{KP} = 0,27EJ$ .

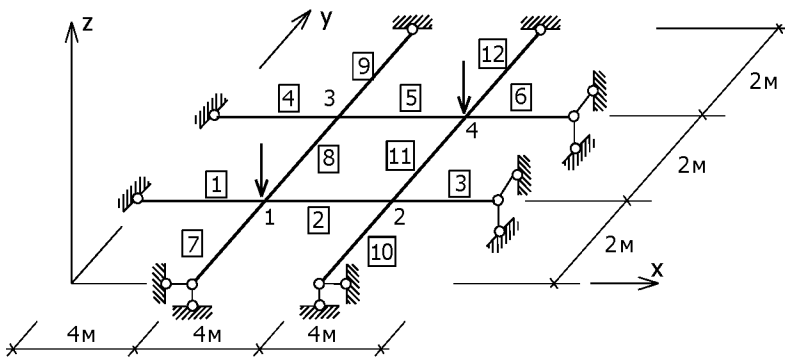


Рис. 15.33

Матрица уравнений равновесия, составленная с помощью матрицы равновесия *a* стержня в общей системе координат, записана в табл. 15.7.



Матрица  $K$  является квазидиагональной:

$$\text{diag}K = \left[ [3], \begin{bmatrix} 0,27 & & \\ & 4 & -2 \\ & -2 & 4 \end{bmatrix}, [3], [3], \begin{bmatrix} 0,27 & & \\ & 4 & -2 \\ & -2 & 4 \end{bmatrix}, [3], \right. \\ \left. [6], \begin{bmatrix} 0,54 & & \\ & 8 & -4 \\ & -4 & 8 \end{bmatrix}, [6], [6], \begin{bmatrix} 0,54 & & \\ & 8 & -4 \\ & -4 & 8 \end{bmatrix}, [6] \right] \cdot \frac{EJ}{4}.$$

Вектор нагрузки принят следующим:

$$\vec{F} = [-100, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -100, 0, 0]^T.$$

Размерность сил – кН.

Решив систему уравнений  $(A K A^T) \vec{z} = \vec{F}$ , получим:

$$\vec{z} = [-315,68; 79,48; -40,12; -276,91; 98,30; 48,77; -276,91; \\ -98,30; -48,77; -315,68; -79,48; 40,12]^T \cdot \frac{1}{EJ}.$$

$$\vec{S} = [29,10; -1,27; 30,27; 14,17; 15,34; 15,34; -1,27; 14,17; \\ 30,27; 29,10; 117,54; 1,17; 118,82; 58,96; 60,23; 60,23; \\ 1,17; 58,96; 118,82; 117,54]^T.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 15.34.

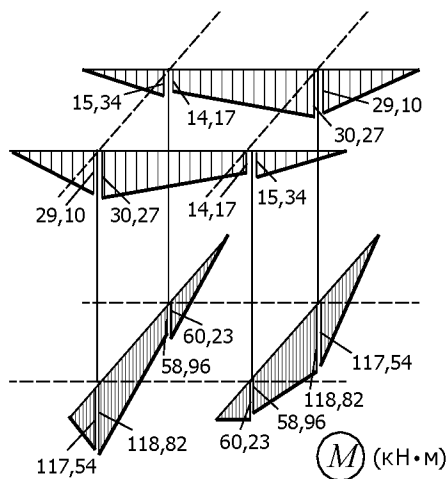


Рис. 15.34

Если в этом примере вектор нагрузки принять в виде:

$$\vec{F} = [-100; -13; 53; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -100; 13; -53]^T,$$

то получим:

$$z^T = [-284,09; 63,23; -2,35; -238,28; 88,28; 36,61; -238,28; -88,28; -33,61; -284,09; 63,23; 2,35] \cdot \frac{1}{EJ}.$$

$$\vec{S} = [51,50; -1,69; 2,72; 15,25; 19,47; 19,47; -1,69; 15,25; 2,72; 51,50; 118,21; 4,22; 106,91; 44,61; 46,30; 46,30; 4,22; 44,61; 106,91; 118,21]^T.$$

Советуем читателю провести анализ распределения перемещений узловых точек и усилий в стержнях для первого и второго загрузений СПБ.



**ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ  
И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.  
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**16.1. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия**

Силовым полем называют пространство, в каждой точке которого на помещенную туда материальную точку действует определенная сила.

Это понятие является весьма общим. Примерами силовых полей являются гравитационные поля планет, магнитное поле какого-нибудь объекта, электростатическое поле и т. п. Особое место среди них занимают потенциальные силовые поля, обладающие двумя важными физическими свойствами: 1) сила этого поля – позиционная, то есть  $F = F(x, y, z)$ ; 2) работа силы поля не зависит от траектории, вдоль которой перемещается приложенная к некоторой точке сила, а зависит только от положений начальной и конечной точек; она может быть вычислена через интегральную сумму соответствующих элементарных работ:

$$A_{(M_1 M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (16.1)$$

Силы, действующие в потенциальном силовом поле, называются потенциальными.

Если выражение, стоящее под знаком интеграла (16.1), является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y, z)$ , то есть:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (16.2)$$

то функцию  $U$  называют силовой функцией.

С учетом последнего условия получаем:

$$A_{(M_1 M_2)}^{(M_2)} = \int_{(M_1)} dU(x, y, z) = U_2 - U_1. \quad (16.3)$$

Работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути движения силы. Из соотношения (16.2) следует, что силовая функция находится из равенства:

$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C.$$

Постоянная  $C$  может иметь любое значение. Как видно из равенства (16.3), работа силы от  $C$  не зависит.

Силы тяжести, также как и силы упругости упругого тела, как при адиабатическом процессе (то есть процессе, происходящем без теплообмена с окружающей средой), так и при изотермических процессах (то есть процессах, происходящих в физической системе при постоянной температуре) потенциальны. Для этих сил существуют силовые функции.

Так, для силы тяжести  $F$ , направленной вдоль оси  $z$  (ось  $z$  направлена по вертикали вверх), имеем  $F_z = -F$  и  $dA = -F dz$ . Принимая  $U = 0$  при  $z = 0$  получим:

$$U = -F z.$$

Сила упругости в центрально растянутом стержне (рис. 16.1) направлена в сторону, противоположную внешней силе  $F$ .

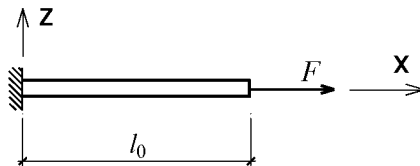


Рис. 16.1

Поэтому  $F_x = -F = -r x$  ( $r$  – коэффициент жесткости упругого стержня). Элементарная работа этой силы равна  $dA = -r x dx$ . Считая  $U = 0$  при  $x = 0$ , находим:

$$U = -\frac{1}{2} r x^2.$$

В потенциальном силовом поле проекции силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам. Действительно, из равенства (16.2) следует, что:

$$F_x = \frac{dU}{dx}, \quad F_y = \frac{dU}{dy}, \quad F_z = \frac{dU}{dz}.$$

Определяя смешанные производные для  $U$ , находим:

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{d^2U}{dxdy}, \quad \frac{dF_y}{dx} = \frac{d^2U}{dxdy} \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}, \quad \frac{dF_y}{dz} = \frac{dF_z}{dy}, \quad \frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz}.$$

Эти соотношения являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности силового поля.

Потенциальной энергией в данной точке  $M$  поля называют величину той работы, которую совершила бы сила поля при перемещении материальной точки из данного положения в то, в котором потенциальная энергия условно принимается равной нулю (точка  $O$ ):

$$П = A_{(MO)}.$$

Так как для функций  $П(x, y, z)$  и  $U(x, y, z)$  нулевые значения совпадают (следует из определений), то из (16.3) при  $U_0 = 0$  получаем:

$$A_{(MO)} = U_0 - U = -U,$$

где  $U$  – значение силовой функции в точке  $M$ .

Таким образом, получаем:

$$P(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

Работу потенциальной силы можно вычислять не по выражению (16.3), а по формуле:

$$A_{(M_1M_2)} = P_1 - P_2,$$

то есть она равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях точки.

Работа и энергия, разумеется, измеряются в одних и тех же единицах. Напомним, в системе СИ основными единицами являются: метр (м) – единица длины, килограмм (кг) – единица массы, секунда (с) – единица времени. Единицей работы и энергии является джоуль (Дж). 1 Дж равен работе, которая совершается силой в 1Н на пути в 1 м.

В технике часто используется система МКГСС. Единицей работы является 1 килограмм–сила–метр (1 кгс·м) – работа, которая совершается силой в 1 кгс на пути в 1 м.

Соотношения между единицами: 1 кгс · м = 9,81 Дж; 1 Дж = 0,102 кгс·м.

## 16.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы

Частным случаем общего определения потенциальной энергии, данного в разделе 16.1, является определение потенциальной энергии упругого деформированного тела, то есть поля сил упругости.

Потенциальная энергия  $U$  деформации упругой системы – это величина той работы, которую совершили бы внутренние силы при переводе ее из деформированного состояния в недеформированное; это энергия сил упругости. Она равна по абсолютной величине, но противоположна по знаку действительной работе внутренних сил, то есть:

$$U = -A_{внутр}.$$

В частности, для линейно-упругого стержня при растяжении-сжатии:

$$U^{(N)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2 dx}{EA},$$

а при чистом изгибе:

$$U^{(M)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ}.$$

В общем случае для плоской стержневой системы:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2 dx}{EA} + \frac{1}{2} \sum \int \frac{\mu Q^2 dx}{GA}.$$

В этих выражениях  $U$  записана через усилия.

Можно представить  $U$  через функции, выражающие перемещения точек (сечений) стержней. Например, используя дифференциальные зависимости:

$$N = EA u' \quad \text{и} \quad M = EJ y'',$$

получим:

$$U^{(N)} = \frac{1}{2} \int_0^l EA u'^2 dx,$$

$$U^{(M)} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2 dx.$$

В некоторых случаях энергию деформации стержня удобно выразить не через функции  $u(x)$  или  $y(x)$ , а через перемещения отдельных сечений.

Для растянутого стержня (рис. 16.2) горизонтальное перемещение конца стержня определяется параметром  $\Delta l$ . Тогда, вычисляя потенциальную энергию через работу внешних сил, получим:

$$U^{(N)} = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} \left( \frac{EA}{l} \Delta l \right) \Delta l = \frac{1}{2} \frac{(\Delta l)^2}{l} EA.$$

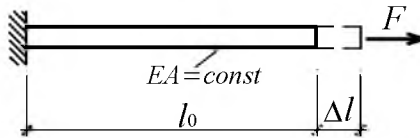


Рис. 16.2

Для изогнутого стержня (рис. 16.3) сила  $F$ , вызывающая перемещение  $\Delta$ , равна  $\frac{3EJ}{l^3} \Delta$ .

Следовательно,

$$U^{(M)} = \frac{1}{2} F \Delta = \frac{1}{2} \left( \frac{3EJ}{l^3} \Delta \right) \Delta = \frac{3}{2} \frac{\Delta^2}{l^3} EJ.$$

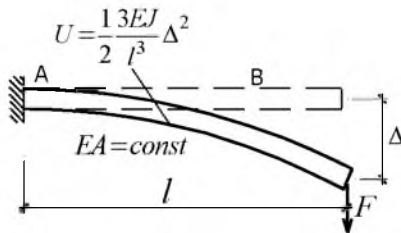


Рис. 16.3

Итак, энергия упругой деформации может быть выражена через усилия, через функции перемещений или через дискретные параметры перемещений.

*Замечание* – В некоторых вопросах механики используется понятие об удельной потенциальной энергии  $U_0$  (иначе, о плотности энергии). Она равна площади, ограниченной кривой  $\sigma - \varepsilon$ , осью  $\varepsilon$  и соответствующей конечному значению относительной деформации вертикалью (рис. 16.11). Потенциальная энергия деформации тела вычисляется через удельную энергию по выражению  $U = \iiint_V U_0 dx dy dz$ . Через  $U_0^{don}$  на этом рисунке обозначена дополнительная потенциальная энергия (дополнительная работа). Для линейно-упругого стержня  $U = U^{don}$ .

**16.3. Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы обобщенных перемещений и обобщенных сил. Производные от выражений потенциальной энергии**

Энергия деформации  $U$ , равная работе внешних сил, определяется равенством:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} (F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 + \dots + F_n \Delta_n) = \\
 &= \frac{1}{2} [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \vec{F}^T \vec{\Delta}.
 \end{aligned}
 \tag{16.4}$$

Так как  $\vec{\Delta} = A \cdot \vec{F}$ , то:

$$U = \frac{1}{2} \vec{F}^T A \vec{F}.
 \tag{16.5}$$

Получена матричная запись квадратичной формы  $n$  переменных  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , где  $A$  – матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если в формуле (16.5) результат операции умножения представить в скалярной форме записи, то получим:

$$U = \frac{1}{2} \left( \delta_{11} F_1^2 + \delta_{12} F_1 F_2 + \delta_{13} F_1 F_3 + \dots + \delta_{1n} F_1 F_n + \right. \\ \left. \delta_{21} F_2 F_1 + \delta_{22} F_2^2 + \dots + \delta_{2n} F_2 F_n + \dots \right. \\ \left. + \delta_{n1} F_n F_1 + \dots + \delta_{nn} F_n^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_i F_j. \quad (16.6)$$

Потенциальная энергия системы всегда положительна. Следовательно, записанная квадратичная форма ни при каких значениях  $F_1, F_2, \dots, F_n$  не может стать отрицательной. Такие квадратичные формы называются положительно определенными.

Выражение (16.4) представим в виде:

$$U = \frac{1}{2} \vec{\Delta}^T \vec{F}. \quad (16.7)$$

Вектор  $\vec{F}$  можно выразить через матрицу внешней жесткости  $\vec{F} = R \vec{\Delta}$ ,  $R = A^{-1}$ .

С учетом этого энергия деформации запишется так:

$$U = \frac{1}{2} \vec{\Delta}^T R \vec{\Delta}. \quad (16.8)$$

Получена матричная запись квадратичной формы через обобщенные перемещения.



В формуле (16.8) матрица внешней жесткости системы

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы.

В скалярной форме записи получим:

$$U = \frac{1}{2} (r_{11} \Delta_1^2 + r_{12} \Delta_1 \Delta_2 + \dots + r_{1n} \Delta_1 \Delta_n + r_{21} \Delta_2 \Delta_1 + r_{22} \Delta_2^2 + \dots + r_{nn} \Delta_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \Delta_i \Delta_j. \quad (16.9)$$

Продифференцируем выражение (16.6) по переменной  $F_1$ . Учитывая свойство взаимности перемещений  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  (симметрия матрицы  $A$ ), получим:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \delta_{11} F_1 + \delta_{12} F_2 + \delta_{13} F_3 + \dots + \delta_{1n} F_n = \Delta_1.$$

В общем случае:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i. \quad (16.10)$$

Это выражение представляет запись теоремы Кастилиано (1875): **производная от потенциальной энергии деформации по силе равна перемещению точки приложения этой силы по ее направлению.**

Продифференцировав выражение (16.9) по переменной  $\Delta_1$  и учитывая равенство  $r_{ik} = r_{ki}$  (симметрия матрицы  $R$ ), получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = r_{11} \Delta_1 + r_{12} \Delta_2 + \dots + r_{1n} \Delta_n = F_1.$$

В общем случае:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i. \quad (16.11)$$

Полученное выражение представляет запись теоремы Лагранжа: **в положении равновесия производная от потенциальной энергии деформации по перемещению равна соответствующей силе.**

#### 16.4. Полная энергия деформируемой системы

С энергетической точки зрения явление деформирования тела – это процесс обмена энергиями двух систем сил (полей сил): внутренних и внешних.

Поэтому для полной энергетической характеристики тела в деформированном состоянии недостаточно рассматривать только энергию деформации  $U$ , т. к. она представляет часть энергии взаимодействующих полей сил.

Будем рассматривать только консервативные внешние силы. Работа их зависит только от начального и конечного состояния и не зависит от пути перехода из одного положения в другое. К ним относятся силы тяжести.

Если принять энергию системы в начальном (недеформированном) состоянии равной нулю, то потенциал сил  $\mathcal{E}$  в деформированном состоянии будет измеряться величиной работы, которую могут совершить эти силы при переводе системы из данного состояния в начальное.

Полная энергия нагруженного тела принимается равной:

$$\mathcal{E} = U + \Pi, \quad (16.12)$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации (упругий потенциал или, иначе, энергия сил упругости, потенциал внутренних сил);

$\Pi$  – энергия внешних сил (потенциал внешних сил).

Внешние силы – это силы тяжести. При относительно малом изменении расстояния между телами в околоземном пространстве гравитационные силы практически не изменяются. Поэтому силы тяжести образуют однородное силовое поле, то есть поле, в котором значение каждой силы постоянно, не зависит от перемещений точек их приложения. Их работа вычисляется как работа неизменных сил при переводе системы из данного положения в начальное.

Для центрально растянутого стержня (рис. 16.4)

$$\Pi = -F \Delta l,$$

а для изогнутого стержня, нагруженного распределенной нагрузкой (рис. 16.5):

$$\Pi = -\int_0^l q(x) y(x) dx.$$

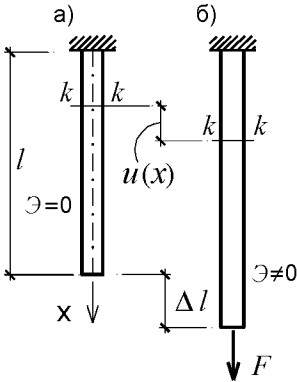


Рис. 16.4

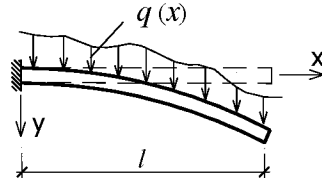


Рис. 16.5

Таким образом, полная энергия системы может быть выражена или через функции перемещений или через дискретные параметры.

Для последнего примера:

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJy''^2 dx - \int_0^l q(x) y dx .$$

Как видно, величина  $\mathcal{E}$  зависит от функции  $y(x)$ , то есть является функционалом (функция от функции)  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y)$ .

Для дискретной линейно-упругой системы потенциал внутренних сил равен (см. формулу (16.9)):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \Delta_i \Delta_j .$$

Заменяя обозначение обобщенного перемещения  $\Delta$  на  $Z$ , получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j .$$

Потенциал внешних сил равен:

$$\Pi = - \sum_{i=1}^n F_i Z_i = \sum_{i=1}^n R_{iF} Z_i, \text{ так как } R_{iF} = -F_i,$$

где  $R_{iF}$  – реакции в дополнительных связях основной системы метода перемещений.

Тогда выражение для полной энергии системы представляется в виде:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^n R_{iF} Z_i . \quad (16.13)$$

## 16.5. Принцип вариации перемещений

Этот принцип выражает условие равновесия деформируемой системы, записанное через ее перемещения, с помощью введенного понятия полной энергии  $\mathcal{E}$ .

Для растянутого стержня (рис. 16.4)  $u(x)$  является функцией, определяющей продольные перемещения сечений;  $u(x)$  – это истинные перемещения, при которых устанавливается равновесие между внешними и внутренними силами.

В деформированном состоянии полная энергия стержня равна работе внутренних и внешних сил на перемещениях  $(-u)$ :

$$\mathcal{E}(u) = U + \Pi = -(A_{\text{внутр}} + W_{\text{внешн}}).$$

Сообщим точкам системы дополнительные бесконечно малые перемещения  $\delta u = \delta u(x)$ ;  $\delta u$  – это произвольная функция с бесконечно малыми ординатами. Ее называют вариацией функции  $u(x)$ .

В состоянии  $u + \delta u$  энергия будет равна:

$$\mathcal{E}(u + \delta u) = -(A_{\text{внутр}} + \delta A_{\text{внутр}} + W_{\text{внешн}} + \delta W_{\text{внешн}}).$$

Вычитая из последнего равенства выражение  $\mathcal{E}(u)$ , получим бесконечно малое изменение энергии  $\delta \mathcal{E}$  (первая вариация энергии), вызванное вариацией функции  $\delta u$ :

$$\delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(u + \delta u) - \mathcal{E}(u) = -(\delta A_{\text{внутр}} + \delta W_{\text{внешн}}).$$

Для системы, находящейся в равновесии при перемещениях  $u(x)$ , правая часть в последнем равенстве равна нулю, так как в соответствии с принципом возможных перемещений (см. раздел 7.4) работа всех сил системы на возможных перемещениях  $\delta u$  должна быть равна нулю:

$$\delta A = \delta A_{\text{внутр}} + \delta W_{\text{внеш}} = 0,$$

значит,

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (16.14)$$

Это есть формальная запись **принципа вариации перемещений** (принципа Лагранжа): **из всех перемещений, допускаемых связями системы, истинные перемещения  $u(x)$  обладают тем свойством, что полная энергия системы при этих перемещениях имеет стационарное значение.** Такое свойство энергии будет наблюдаться тогда, когда она имеет экстремальное значение для истинных перемещений по сравнению со всеми ближайшими.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 16.6.

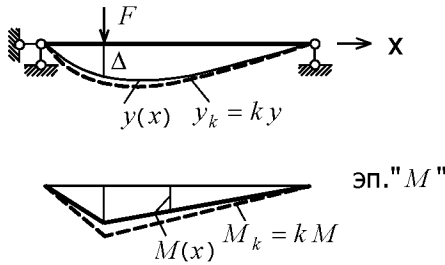


Рис. 16.6

Пусть нам известна точная функция прогибов  $y = y(x)$  оси балки и соответствующая ей эпюра изгибающих моментов. Тогда полная потенциальная энергия изгиба балки запишется в виде:

$$\mathcal{E} = U(M) + \Pi = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 dx}{EJ} - F \Delta = \frac{1}{2} F \Delta - F \Delta$$

или

$$\mathcal{E} = U(y) + \Pi = \frac{1}{2} \sum \int EJ y'^2 dx - F \Delta = \frac{1}{2} F \Delta - F \Delta.$$

Первые слагаемые в этих выражениях преобразовываются на основании численного равенства потенциальной энергии упругой деформации и действительной работы внешних сил.

Исследуем изменение полной энергии системы в зависимости от изменения (вариации) изогнутой оси балки. Увеличим, например, ординаты прогибов оси балки в  $k$  раз. Получим:

$$\Theta = \frac{k^2}{2} \sum \int EJ y''^2 dx - kF \Delta = \frac{k^2}{2} F\Delta - kF\Delta = F\Delta \left( \frac{k^2}{2} - k \right).$$

Энергия представлена функцией второй степени от  $k$ . Графическая иллюстрация зависимости  $\frac{\Theta}{F\Delta}(k)$  показана на рис. 16.7.

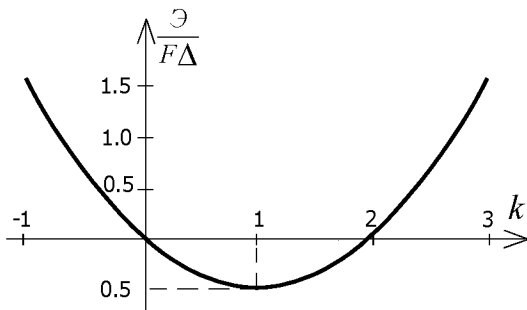


Рис. 16.7

При  $k=1$ , то есть в действительном состоянии равновесия, имеет место  $\min \Theta(y)$ .

В этом примере можно было бы варьировать не уравнение изогнутой оси балки, а соответствующую ему функцию изгибающих моментов, то есть напряженное состояние.

Результат вычислений, естественно, получился бы тем же.

Приведем второй пример. В дискретной линейно деформируемой системе при однопараметрическом нагружении все обобщенные

перемещения взаимосвязаны линейно. Поэтому, используя параметр обобщенного перемещения  $Z$ , полную энергию запишем в виде:

$$\Theta = \frac{1}{2} Z^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j + Z \sum_{i=1}^n R_{iF} \bar{Z}_i,$$

где  $\bar{Z}_i, \bar{Z}_j$  – компоненты базисного вектора перемещений системы, соответствующие единичному параметру обобщенной нагрузки  $F$ .

Так как для системы имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j = - \sum_{i=1}^n R_{iF} \bar{Z}_i,$$

то выражение для энергии можно представить в такой форме записи:

$$\frac{\Theta}{\Lambda} = \frac{Z^2}{2} - Z,$$

где  $\Lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j$ .

Функция  $\frac{\Theta}{\Lambda}(Z)$  имеет минимум в точке  $(1,0; -0,5)$ .

Увеличим перемещения  $Z$  в  $k$  раз. Тогда, учитывая, что для конечного значения нагрузки параметры  $F$  и  $Z$  фиксированы, и выражая  $U$  через действительную работу внешних сил, получим:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{k^2}{2} Z^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{Z}_i \bar{Z}_j + k Z \sum_{i=1}^n R_{iF} \bar{Z}_i = \\ &= k^2 \frac{1}{2} F Z - k F Z = F Z \left( \frac{k^2}{2} - k \right). \end{aligned}$$



Зависимость  $\frac{\mathcal{E}}{FZ}(k)$  имеет тот же вид, что и для балки. Отсюда

следует вывод о том, что из всех возможных деформированных состояний системы истинное имеет место при  $k = 1$ . Полная энергия системы в этом состоянии минимальна.

Исследование поведения функционалов  $\mathcal{E}$  в стационарных точках с помощью второй вариации  $\delta^2\mathcal{E}$  дает основания к суждению о качестве равновесия системы. П.Г.Л. Дирихле (немецкий математик, 1805–1859) доказал, что:

– если  $\delta\mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2\mathcal{E} > 0$ , то  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\min}$  (устойчивое равновесие);

– если  $\delta\mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2\mathcal{E} < 0$ , то  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max}$  (неустойчивое равновесие);

– если  $\delta\mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2\mathcal{E} = 0$ , то  $\mathcal{E} = const$  (безразличное равновесие).

Обстоятельное изучение состояний равновесия механических систем будет проведено в разделе “Устойчивость сооружений”.

В задачах статики сооружений изучаются методы расчета устойчивых систем. Поэтому условие стационарности  $\delta\mathcal{E} = 0$  для них отождествляется с условием минимума полной энергии.

## 16.6. Способы решения вариационных задач

Функции  $y(x)$ , реализующие экстремум функционала  $\mathcal{E}(y)$ , могут быть найдены двумя способами:

1. Посредством решения дифференциальных уравнений, получаемых из условия  $\delta\mathcal{E} = 0$  (16.14).

2. С помощью так называемых прямых методов вариационного исчисления.

К задаче о поиске  $y(x)$  посредством решения дифференциального уравнения обращаются в тех случаях, когда для исследуемого стержня (объекта) энергию можно записать в виде функции, зависящей от перемещений, их первых, вторых и более высокого порядка производных. Необходимое условие минимума определенного интеграла:

$$\mathfrak{A} = \int_a^b \Phi(y, y', y'', \dots, y^{(k)}) dx,$$

то есть условие стационарности  $\delta \mathfrak{A} = \int_a^b \delta \Phi dx = 0$  сводится при произвольном выборе функции  $\delta y$  к дифференциальному уравнению Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}} \right) = 0.$$

В качестве примера покажем решение задачи об изгибе консольной балки на упругом винклеровском основании (рис. 16.8).

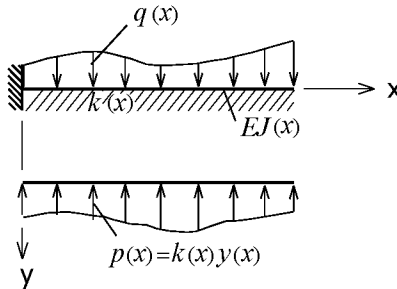


Рис. 16.8

Определим полную энергию взаимодействующих сил:

$$\mathfrak{A} = \int_0^l \left( \frac{EJ}{2} y''^2 + \frac{k}{2} y^2 - q y \right) dx = \int_0^l \Phi(y, y'') dx.$$

В этом случае:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = k y - q, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y''} = EJ y''.$$

Дифференциальное уравнение, соответствующее условию  $\delta \mathcal{E} = 0$ , будет иметь вид:

$$(EJ y'')'' + k y = q.$$

При  $k = 0$  получим  $(EJ y'')'' = q$  – обычное дифференциальное уравнение поперечного изгиба.

Общее решение уравнения будет содержать четыре произвольные постоянные. Для получения частного решения необходимо задать четыре дополнительные условия.

Прямые методы вариационного исчисления позволяют свести задачу нахождения минимума функционала к задаче поиска минимума функции многих переменных посредством решения системы линейных алгебраических уравнений. К их числу относятся методы Рэлея–Ритца, Бубнова–Галеркина, метод каллокации и др. Покажем суть прямых методов на примере метода Рэлея–Ритца.

Из бесконечной системы функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x), \dots$ , удовлетворяющих граничным условиям задачи, выберем первые  $r$  функций  $\varphi_i(x)$  и образуем из них посредством линейной комбинации новую функцию  $f_r$  следующего вида:

$$f_r(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_r \varphi_r(x) = \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i(x),$$

где  $a_i$  – произвольные коэффициенты. Функции  $\varphi_i(x)$  называют координатными или базисными.

Функционал  $\mathcal{E}(\Phi(x))$  после замены  $\Phi(x)$  на  $f_r(x)$  превращается в функцию  $\mathcal{E}(a_1, a_2, \dots, a_r)$  от  $r$  независимых переменных. Необходимым условием экстремума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных первого порядка, то есть:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (16.15)$$

Решив систему уравнений (16.15), найдем значения параметров  $a_i$ , и, следовательно, получим приближенное решение условия стационарности  $\delta \mathcal{E} = 0$ .

### 16.7. Расчет упругих систем на основе принципа вариации перемещений

Перемещение любой точки (сечения) стержня (рис. 16.9) с учетом общепринятых допущений однозначно выражается через узловые (обобщенные) перемещения. Так, горизонтальное перемещение  $u$  сечения  $C$ , как следует из рис. 16.10, определяется по формуле:

$$u = Z_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + Z_4 \frac{x}{l} = Z_1 f_1(x) + Z_4 f_4(x), \quad (16.16)$$

где  $f_1(x)$ ,  $f_4(x)$  – базисные (координатные) функции.

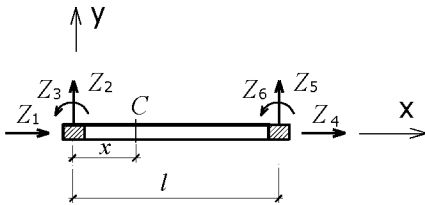


Рис. 16.9

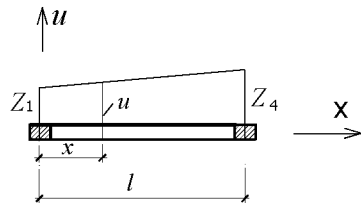


Рис. 16.10

Для определения перемещений, вызываемых только узловыми смещениями  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_5$  и  $Z_6$ , используем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0.$$

Общее решение его имеет вид:

$$v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Найдем, например, уравнение изогнутой оси для загрузки стержня в виде  $Z_2 = 1$ . Граничные условия для этого случая:

$$x=0 \quad v=1; \quad x=l \quad v'=0;$$

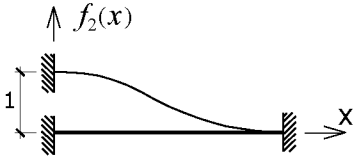
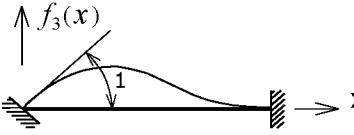
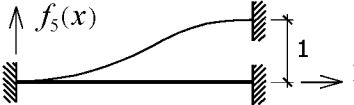
$$x=l \quad v=0; \quad x=l \quad v'=0.$$

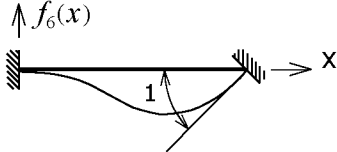
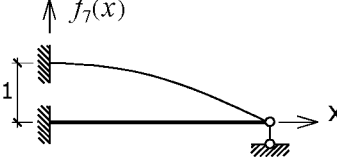
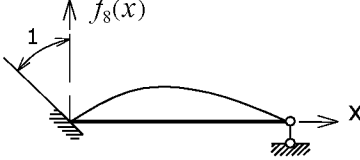
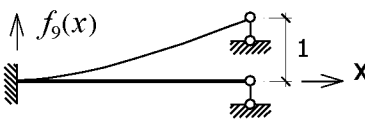
Решив систему уравнений четвертого порядка, получим значения произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Уравнение изогнутой оси запишется так:

$$v = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}.$$

Для других единичных узловых смещений защемленного по концам стержня кривые прогибов записаны в табл. 16.1.

Таблица 16.1

№ п/п	Схема стержня. Вид смещения	Уравнение изогнутой оси
1	2	3
1		$f_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$
2		$f_3(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
3		$f_5(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$

1	2	3
4		$f_6(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
5		$f_7(x) = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}$
6		$f_8(x) = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}$
7		$f_9(x) = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}$

Пользуясь принципом независимости действия сил, перемещения сечения  $C$  (рис. 16.9) по вертикали представим в виде:

$$\begin{aligned}
 v &= Z_2 \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) + Z_3 \left( x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) + \\
 &+ Z_5 \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) + Z_6 \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) = \quad (16.17) \\
 &= Z_2 f_2(x) + Z_3 f_3(x) + Z_5 f_5(x) + Z_6 f_6(x).
 \end{aligned}$$

Выражение для определения угла поворота сечения получим дифференцированием  $v = v(x)$  по  $x$ .

Для стержня, защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом, кривые прогибов при единичных узловых смещениях и соответствующие им функции перемещений показаны в табл. 16.1.

В общем случае, для дискретной системы выражение для определения перемещения некоторой точки можно представить в виде:

$$Z = Z_1 f_1(s) + Z_2 f_2(s) + \dots + Z_n f_n(s), \quad (16.18)$$

здесь  $f_i(s)$  – базисные функции, соответствующие обобщенным перемещениям  $Z_i$ .

Число таких уравнений соответствует числу деформируемых элементов системы и числу видов (линейных, угловых) перемещений.

Для стержневых систем эти уравнения будут точными, для континуальных – приближенными.

В связи с изложенным, полную энергию системы можно представить в виде функции  $n$  обобщенных перемещений (координат) и нагрузки:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, F).$$

Тогда условие стационарности:

$$\delta \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} \delta Z_1 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} \delta Z_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_n} \delta Z_n = 0$$

при независимых вариациях  $\delta Z_i$  и неизменной нагрузке  $F$  позволит получить  $n$  уравнений для определения  $Z_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} &= \frac{\partial U}{\partial Z_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z_1} = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_n} &= \frac{\partial U}{\partial Z_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z_n} = 0. \end{aligned} \tag{16.19}$$

Для линейно-упругой системы полная энергия вычисляется по формуле (16.13), поэтому уравнения (16.19) в развернутой форме записи принимают вид канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nm}Z_n + R_{nF} &= 0. \end{aligned}$$

Для нелинейно деформируемых систем уравнения (16.19) будут нелинейными относительно  $Z_i$ .

Вследствие особенностей уравнений (16.18) для континуальных систем, из (16.19) можно найти только приближенные значения  $Z_i$ . В этом случае уравнения (16.19) называют уравнениями метода Ритца, который, как отмечалось ранее, относится к прямым методам вариационного исчисления.

### 16.8. Принцип вариации напряжений или внутренних сил

Для любой статически неопределимой системы существует множество функций распределения усилий в ее элементах, удовлетворяющих условиям равновесия, то есть каждая из них является статически допустимой. Среди этого множества находятся и истинные функции.

Пусть в стержне, элементы которого испытывают только растяжение–сжатие, истинные функции нормальных усилий  $N(x)$  и соответствующих им нормальных напряжений  $\sigma(x)$  получили приращение  $\delta N(x)$  и  $\delta \sigma(x)$ , а вариация нагрузки  $\delta F(x) = 0$ . Считаем, что на вариациях  $\delta \sigma$  перемещения непрерывны и выполняются условия совместности деформаций, то есть деформация системы согласована с



наложенными на нее связями. Предположим, что полученные новые функции  $N + \delta N$  и  $\sigma + \delta\sigma$  являются статически допустимыми.

В соответствии с принципом возможных перемещений для системы, находящейся в равновесии, работа всех сил на возможных перемещениях равна нулю. Возможная работа самоуравновешенной системы внутренних сил  $\delta N$  может быть записана в виде:

$$\delta A = -\iiint_V \varepsilon \delta\sigma dV = 0,$$

где  $\varepsilon \delta\sigma = \delta U_0^{\text{don}}$  – приращение удельной (на единицу объема материала) дополнительной работы внутренних сил (рис. 16.11).

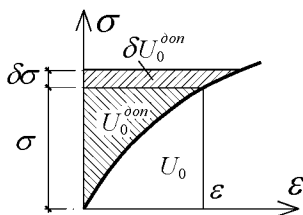


Рис. 16.11

Несложно показать, что приведенный ход рассуждений не изменится и для иного вида деформации элемента.

При наличии принудительных смещений  $v_i$  сечений (не нарушающих условий непрерывности перемещений и совместности деформаций), в которых действуют по их направлениям силовые факторы  $S_i$ , дополнительная возможная работа определится по выражению:

$$\hat{\Pi} = \sum_i S_i \delta v_i.$$

Учитывая потенциал и этих сил, окончательно условие равенства нулю работы самоуравновешенных сил (оно же условие совместности деформаций) получим в следующей форме:

$$\delta(U^{\text{don}} + \hat{P}) = 0, \quad (16.20)$$

где

$$U^{\text{don}} = \iiint_V U_0^{\text{don}} dV.$$

Это равенство представляет собой формальную запись **принципа вариации напряженного состояния**. Формулировка принципа: **из всех статически возможных напряжений и усилий в системе истинными являются те, которые удовлетворяют условию стационарности функционала  $U^{\text{don}} + \hat{P}$** . Выражение для этого функционала должно быть записано через внутренние силы. Этот принцип называют вариационным принципом Кастилиано (1847–1884).

Для линейно деформируемой системы  $U^{\text{don}} = U$ , поэтому при  $\hat{P} = 0$  получим:

$$\delta U = 0. \quad (16.21)$$

Это равенство называют **условием наименьшей работы**. Оно представляет собой **формальную запись принципа минимума потенциальной энергии деформации упругой системы**.

### 16.9. Применение принципа вариации внутренних сил к расчету упругих систем

Запишем выражение потенциальной энергии деформации линейно-упругой статически неопределимой системы в виде квадратичной формы  $n + 1$  обобщенных сил  $X_1, X_2, \dots, X_n, F$ , где  $X_i$  – неизвестные усилия в лишних связях основной системы, а  $F$  – заданная нагрузка. Полагая обобщенные силы независимыми, получим:



Матрица коэффициентов  $\delta_{ij}$  при неизвестных  $X_i$  – это матрица внешней податливости  $A$  основной системы. Элементы матрицы могут вычисляться через вторые производные от потенциальной энергии:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}.$$

Следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \dots & \delta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_2} \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial X_n \partial X_2} \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}. \quad (16.23)$$

Для физически нелинейной системы равенства необходимо записывать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} \overset{don}{=} 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} \overset{don}{=} 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} \overset{don}{=} 0.$$

Получаемые уравнения будут нелинейными относительно  $X_i$ .

### 16.10. Сущность метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) является эффективным численным методом решения прикладных задач и широко используется для расчета разнообразных сооружений. Этот метод хорошо адаптирован к реализации на ЭВМ. По единой методике рассчитываются стержневые, пластинчатые и комбинированные системы. Сущность его сводится к следующему. Исследуемая система мысленно расчленяется на множество конечных элементов (непересекающихся областей), то есть производится переход от заданной расчетной схемы к дискретной.

Форма конечного элемента (КЭ) предопределяется особенностями рассчитываемого объекта (системы, конструкции). В стержневых системах за КЭ принимают стержень, как правило, постоянной жесткости на растяжение–сжатие и изгиб, или группу взаимосвязанных стержней. Для плоских и тонкостенных континуальных систем наиболее часто используются треугольные или прямоугольные (в общем случае, четырехугольные) КЭ, при решении трехмерных задач – объемные КЭ в виде тетраэдра или параллелепипеда. Выбор формы и размеров КЭ оказывает существенное влияние на результаты расчета, которые, естественно, должны позволять правильно оценивать напряженно–деформированное состояние исходной системы. Представление исследуемой системы как достаточно большого набора КЭ значительно увеличивает размерность задачи, ведет к повышению точности расчета, но связано со значительным объемом вычислений. Читатели, интересующиеся вопросами оценки погрешности дискретизации, могут найти соответствующие рекомендации в научной литературе.

Точки, в которых соединяются КЭ, называют узлами. Различают узлы жесткие и шарнирные. В жестком узле предполагается наличие связей, обеспечивающих неразрывность линейных и угловых перемещений КЭ, примыкающих к этому узлу. Связи шарнирного узла позволяют сохранить неразрывность линейных перемещений. Узловые перемещения и соответствующие им узловые силы принимаются за обобщенные.

Идея метода состоит в том, чтобы описать напряженно–деформированное состояние КЭ через обобщенные перемещения  $Z$  узлов и установить их связь с действующей на систему нагрузкой. Для реализации этой идеи необходимо получить матрицу жесткости КЭ.

Так как функция перемещений исходной системы неизвестна, то ее необходимо задавать. Если в методе Ритца предполагалось, что базисные функции определяются одним выражением на всей области системы, то в МКЭ реализуется альтернативный подход. Он заключается в том, что на каждом КЭ неизвестные функции перемещений заменяются аппроксимирующими их таким образом, чтобы перемещения всех точек элемента были выражены через узловые. Для одномерных элементов, с учетом замечания о постоянстве жесткостей, функция перемещений является точной (см. раздел 16.7), для двумерных и трехмерных КЭ эти функции записываются приближенно, наиболее часто – в виде полиномов. Подбор их представляет собой достаточно сложную задачу. От удачного решения

ее существенно зависит точность окончательных результатов. С помощью аппроксимирующих функций на основе вариационных принципов строительной механики решается одна из основных задач МКЭ – определение матриц жесткостей конечных элементов.

Так как каждый стержень в составе исследуемой системы имеет свою ориентацию, то вначале строят матрицы жесткостей в местной системе координат, а затем, при переходе от местной системы к общей, преобразуют их. Матрицу жесткости всей системы получают соответствующим объединением матриц жесткостей отдельных элементов.

Разрешающие уравнения МКЭ записываются в виде:

$$R \vec{Z} + \vec{R}_F = 0, \quad (16.24)$$

где  $\vec{R}_F$  – вектор “грузовых” реакций, равный вектору узловых нагрузок, взятому с обратным знаком.

Полная нагрузка на узел определяется как сумма нагрузок от примыкающих к узлу элементов. Так как внеузловая нагрузка заменяется эквивалентной узловой по направлениям  $\vec{Z}$ , то вектор реакций  $\vec{R}_F = [R_{1F}, R_{2F}, \dots, R_{nF}]^T = -\vec{F}$ , где  $\vec{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$  – вектор узловых нагрузок.

После решения системы уравнений (16.24) становятся известными перемещения  $Z$  узлов в общей системе координат. Для вычисления усилий в конечном элементе удобно вначале найти вектор перемещений  $\vec{Z}'$  в местной системе координат, а затем с помощью матрицы жесткости  $R'$  определить концевые реакции. Формулы для соответствующих преобразований приведены в разделах 16.11 и 16.12.

Такая форма расчета соответствует варианту МКЭ “в перемещениях”. Она является наиболее распространенной.

Возможен и другой подход к решению задачи по МКЭ. Напряженно-деформированное состояние КЭ необходимо описать конечным набором обобщенных узловых сил, а затем установить их связь с нагрузкой. Такая форма расчета соответствует МКЭ “в усилиях”.

### 16.11. Матрица жесткости стержня в местной системе координат

Существует несколько способов получения матриц жесткостей отдельных стержней. Одним из наиболее простых является способ, основанный на известных положениях метода перемещений.

Конец стержня, примыкающий к жесткому узлу, имеет три степени свободы: линейные перемещения по горизонтальному и вертикальному направлениям и угол поворота. Соответствующими этим смещениям силовыми факторами будут концевые реактивные силы  $R'_1, R'_2, R'_4, R'_5$  и моменты  $R'_3, R'_6$ . (Перемещения, реакции, матрица жесткости и ее элементы в местной системе координат обозначаются буквами со штрихами). Матрица жесткости (матрица единичных реакций) преобразует вектор перемещений  $\vec{Z}' = [Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4, Z'_5, Z'_6]^T$  в вектор концевых реакций, то есть имеет место соотношение:

$$\begin{bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & \cdots & r'_{16} \\ r'_{21} & r'_{22} & \cdots & r'_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r'_{61} & r'_{62} & \cdots & r'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ \vdots \\ Z'_6 \end{bmatrix} = R' \vec{Z}' .$$

Положительные направления реакций  $R'_i$  соответствуют положительным направлениям  $Z'_i$ .

Элементы матрицы  $R'$  суть реакции в связях, вызываемые единичными смещениями  $Z'_i = 1$  (рис. 16.12).

В первом столбце записаны значения реакций от  $Z'_1 = 1$ , во втором — от  $Z'_2 = 1$  и т. д. Следовательно, для вычисления элементов матрицы  $R'$  можно использовать данные из таблицы, применяемой в методе перемещений для определения реакций в опорных закреплениях стержня постоянного сечения.

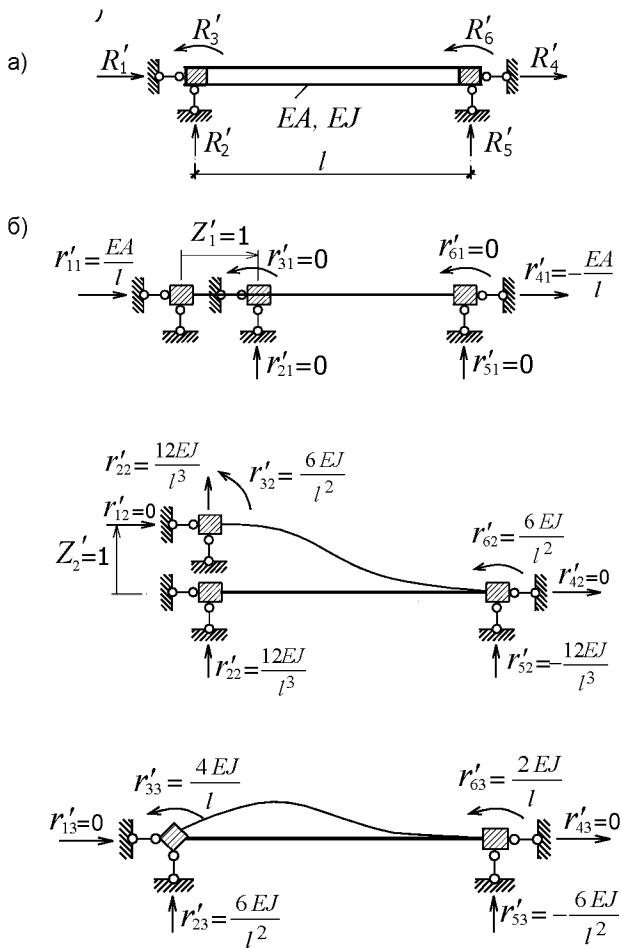


Рис. 16.12

Матрица  $R'$  имеет вид:



$$R' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (16.25)$$

Для стержней с другими условиями закрепления элементы матрицы  $R'$  вычисляются аналогично.

Рассмотрим способы, основанные на использовании аппроксимирующих функций перемещений. Необходимый порядок расчета по одному из них, например, для защемленного по концам стержня, представляется следующим.

1. В линейно деформируемом стержне продольные и поперечные перемещения сечений стержней не взаимосвязаны. Поэтому функции, описывающие характер изменения перемещений по длине стержня, для них будут различными. Перемещения сечений стержня вдоль его оси в соответствии с дифференциальным уравнением  $N = EAu'$  будем аппроксимировать линейной функцией:

$$u(x) = a_1 + a_4 x. \quad (16.26)$$

Изогнутая ось стержня при отсутствии по его длине распределенной нагрузки описывается кривой третьего порядка, что является следствием дифференциального уравнения  $v^{(IV)} = 0$ . Следовательно, аппроксимирующий полином третьей степени позволяет точно задать функцию перемещений стержня.

Пусть:

$$v(x) = a_2 + a_3x + a_5x^2 + a_6x^3. \quad (16.27)$$

В выражениях (16.26) и (16.27)  $a_i$  – неизвестные параметры; число их равно числу степеней свободы.

Функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называют функциями формы.

Угол поворота сечения стержня определится значением первой производной:

$$\frac{dv}{dx} = a_3 + 2a_5x + 3a_6x^2. \quad (16.28)$$

2. Используя зависимости (16.26), (16.27) и (16.28), представим вектор перемещений  $\vec{\delta} = \left[ u, v, \frac{dv}{dx} \right]^T$  в следующем виде:

$$\vec{\delta} = L \vec{a}, \quad (16.29)$$

где  $L$  – матрица коэффициентов:

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & x & & \\ \hline & 1 & x & & x^2 & x^3 \\ \hline & & 1 & & 2x & 3x^2 \\ \hline \end{array}; \quad (16.30)$$

$\vec{a}$  – вектор неизвестных параметров:

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T.$$

3. Для концевых точек ( $x = 0$ ,  $x = l$ ) стержня с помощью выражений (16.29) и (16.30) получим:

$$\begin{bmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ Z'_3 \\ Z'_4 \\ Z'_5 \\ Z'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ 1 & & & l & & \\ & 1 & l & & l^2 & l^3 \\ & & 1 & & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}.$$

или

$$\vec{Z}' = H \vec{a}, \quad (16.31)$$

где  $H$  – матрица связи.

4. Из (16.31) следует, что:

$$\vec{a} = H^{-1} \vec{Z}', \quad (16.32)$$

при этом

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ -1/l & & & 1/l & & \\ & -3/l^2 & -2/l & & 3/l^2 & -1/l \\ & 2/l^3 & 1/l^2 & & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}.$$

5. Вектор перемещений  $\vec{\delta}$  с помощью зависимостей (16.29) и (16.32) представляется в виде:

$$\vec{\delta} = L H^{-1} \vec{Z}'. \quad (16.33)$$

Выполнив перемножение матриц, получим:

$$\begin{aligned}
u &= \left(1 - \frac{x}{l}\right) Z'_1 + \frac{x}{l} Z'_4, \\
v &= \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) Z'_2 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) Z'_3 + \\
&\quad + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) Z'_5 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) Z'_6, \\
\frac{dv}{dx} &= \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right) Z'_2 + \left(1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right) Z'_3 + \\
&\quad + \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) Z'_5 + \left(-\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}\right) Z'_6.
\end{aligned}$$

Выражения для  $u$  и  $v$  совпадают с записанными ранее в разделе 16.7.

Таким образом, с помощью (16.26) и аппроксимирующего полинома (16.27) получены точные функции, позволяющие вычислить горизонтальное перемещение, прогиб и угол поворота любого сечения стержня.

6. Узловым перемещениям  $Z'_1, Z'_2, Z'_3$  и  $Z'_4, Z'_5, Z'_6$  стержня  $AB$  соответствуют реакции  $R'_1, R'_2, R'_3$  и  $R'_4, R'_5, R'_6$ , позволяющие найти усилия  $N, Q$  и  $M$  в концевых сечениях. Для определения их используем дифференциальные зависимости:

$$\frac{N}{EA} = \frac{du}{dx}, \quad \frac{Q}{EJ} = \frac{d^3v}{dx^3}, \quad \frac{M}{EJ} = \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Дифференцируя в выражении (16.29) первую и третью строки по одному разу, а вторую – трижды, найдем компоненты вектора

$$\vec{k} = \left[ \frac{du}{dx}, \frac{d^3v}{dx^3}, \frac{d^2v}{dx^2} \right]^T, \text{ с помощью которого определяются уси-}$$

лия  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в промежуточных сечениях стержня:

$$\vec{k} = B H^{-1} \vec{Z}, \quad (16.34)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & & 6 \\ & & & & 2 & 6x \end{bmatrix}.$$

Для определения усилий в концевых сечениях стержня образуем матрицу  $B_{AB}$ , первые три строки которой соответствуют матрице  $B$  при  $x = 0$ , а остальные – при  $x = l$ .

$$B_{AB} = \begin{bmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & & 6 \\ & & & & 2 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & 6 \\ & & & & 2 & 6l \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор усилий  $\vec{S} = [N_H, Q_H, M_H, N_K, Q_K, M_K]^T$  можно вычислить с помощью выражения:

$$\vec{S}_{AB} = D B_{AB} H^{-1} \vec{Z}', \quad (16.35)$$

где  $D$  – диагональная матрица жесткостей:

$$D = \text{diag}[EA, EJ, EJ, EA, EJ, EJ].$$

7. Направления положительных усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в концевых сечениях стержней (вектор  $\vec{S}_{AB}$ ) и положительных реакций  $R'_1$ ,  $R'_2$ ,  $R_3$ ,  $R_2$ ,  $R'_5$ ,  $R'_6$  (их направления совпадают с направлениями

компонентов вектора  $\vec{S}$ ) не совпадают. Взаимосвязь между ними можно установить с помощью матрицы соответствия знаков усилий по выражению:

$$\vec{R}' = I \vec{S}_{AB}, \quad (16.36)$$

где  $I = \text{diag}[-1, 1, -1, 1, -1, 1]$ .

Подставляя в (16.36) выражение (16.35), получим:

$$\vec{R}' = I D B_{AB} H^{-1} \vec{Z}'. \quad (16.37)$$

Из (16.37) следует, что матрица реакций определяется по выражению:

$$R' = I D B_{AB} H^{-1}. \quad (16.38)$$

В рассматриваемом случае матрица реакций (она же является и матрицей жесткости) имеет вид, показанный ранее в формуле (16.25).

Второй способ получения матрицы жесткости стержня, основанный на использовании принципа Лагранжа, состоит в следующем.

При известном уравнении изогнутой оси (см. раздел 16.7) стержня матрицу жесткости его можно получить из условия стационарности полной энергии. Покажем это решение.

Запишем выражение полной энергии для защемленного по концам стержня, нагруженного распределенной нагрузкой:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^l \left[ \frac{EJ v''^2}{2} + \frac{EA u'^2}{2} - q(x) v \right] dx = \\ &= \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 (Z'_2 f_2 + Z'_3 f_3 + Z'_5 f_5 + Z'_6 f_6)}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{EA}{2} \left( \frac{d(Z'_1 f_1 + Z'_4 f_4)}{dx} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - q(x) (Z'_2 f_2 + Z'_3 f_3 + Z'_5 f_5 + Z'_6 f_6) \right] dx, \end{aligned} \quad (16.39)$$

где  $f_1, f_4$  – базисные функции для определения продольных перемещений сечений стержня;  
 $f_2, f_3, f_5, f_6$  – функции, определяющие прогибы стержня (табл. 16.1).

После необходимых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \Xi(Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4, Z'_5, Z'_6) = \\ & = \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} \left( Z_2'^2 \frac{12}{l^3} + Z_3'^2 \frac{4}{l} + Z_5'^2 \frac{12}{l^3} + Z_6'^2 \frac{4}{l} + 2Z_2'Z_3' \frac{6}{l^2} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2Z_2'Z_5' \frac{12}{l^3} + 2Z_2'Z_6' \frac{6}{l^2} - 2Z_3'Z_5' \frac{6}{l^2} + 2Z_3'Z_6' \frac{2}{l} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2Z_5'Z_6' \frac{6}{l^2} \right) + \frac{EA}{2l^2} (Z_1'^2 - 2Z_1'Z_4' + Z_4'^2) - \right. \\ & \quad \left. - q(x) (Z_2'f_2 + Z_3'f_3 + Z_5'f_5 + Z_6'f_6) \right] dx. \end{aligned} \quad (16.40)$$

В этом выражении полная энергия представлена функцией шести независимых переменных.

Интегралы вида

$$\int_0^l q(x) f_i dx$$

дают значения опорных реакций защемленной по концам балки при нагружении ее распределенной нагрузкой  $q(x)$ . Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим одну и ту же балку (рис. 16.13) в двух состояниях: в состоянии *a* балка нагружена распределенной нагрузкой  $q(x)$ , в состоянии *б* левый конец балки смещен на  $Z_2' = 1$ . Напомним, что положительные направления реакций соответствуют положительным направлениям перемещений.

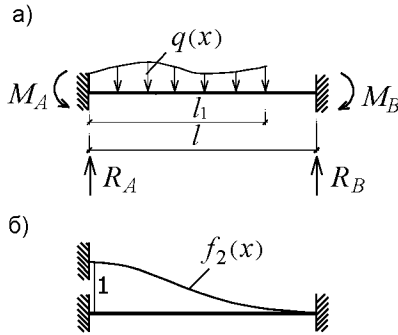


Рис. 16.13

Возможная работа сил состояния  $a$  на перемещениях состояния  $b$  равна:

$$W_{a\bar{b}} = R_A \cdot 1 - \int_0^{l_1} q(x) \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) dx.$$

Работа сил состояния  $b$  на перемещениях состояния  $a$  равна нулю:

$$W_{\bar{b}a} = 0.$$

На основании теоремы о взаимности работ (7.4):

$$W_{a\bar{b}} = W_{\bar{b}a}.$$

Следовательно,

$$R_A = \int_0^{l_1} q(x) \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) dx.$$

При вычислении  $M_A$  за вспомогательное состояние примем показанное в табл. 16.1 (см. раздел 2). Определив возможную работу сил одного состояния на перемещениях другого (в прямом и обратном направлениях), на основании теоремы о взаимности работ получим:



$$M_A = \int_0^{l_1} q(x) \left( x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) dx.$$

Аналогичными вычислениями находим:

$$R_B = \int_0^{l_1} q(x) \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) dx,$$

$$M_B = - \int_0^{l_1} q(x) \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) dx.$$

Заметим, что при действии на стержень нагрузки иного вида (сосредоточенных сил, моментов или др.) опорные реакции также могут вычисляться с помощью теоремы о взаимности работ.

Необходимыми условиями минимума функции (16.40) шести переменных являются:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z'_i} = 0, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Применяя их к выражению (16.40), получим систему уравнений, связывающих концевые перемещения и реакции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EA}{l} Z'_1 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{EA}{l} Z'_4 \quad 0 \quad 0 \quad = 0; \\ 0 \quad \frac{12EJ}{l^3} Z'_2 \quad \frac{6EJ}{l^2} Z'_3 \quad 0 \quad -\frac{12EJ}{l^3} Z'_5 \quad \frac{6EJ}{l^2} Z'_6 \quad = R_A; \\ 0 \quad \frac{6EJ}{l^2} Z'_2 \quad \frac{4EJ}{l} Z'_3 \quad 0 \quad -\frac{6EJ}{l^2} Z'_5 \quad \frac{2EJ}{l} Z'_6 \quad = M_A; \\ -\frac{EA}{l} Z'_1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{EA}{l} Z'_4 \quad 0 \quad 0 \quad = 0; \\ 0 \quad -\frac{12EJ}{l^3} Z'_2 \quad -\frac{6EJ}{l^2} Z'_3 \quad 0 \quad \frac{12EJ}{l^3} Z'_5 \quad -\frac{6EJ}{l^2} Z'_6 \quad = R_B; \\ 0 \quad \frac{6EJ}{l^2} Z'_2 \quad \frac{2EJ}{l} Z'_3 \quad 0 \quad -\frac{6EJ}{l^2} Z'_5 \quad \frac{4EJ}{l} Z'_6 \quad = -M_B. \end{array} \right.$$

В матричной форме записи система имеет вид:

$$R' \vec{Z}' = \vec{F}',$$

где  $R'$  – матрица жесткости стержня (16.25);

$\vec{Z}' = [Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4, Z'_5, Z'_6]^T$  – вектор узловых перемещений,

$\vec{F}' = [0, R_A, M_A, 0, R_B, -M_B]^T$  – вектор узловых сил.

Еще один способ решения этой же задачи основывается на общих уравнениях строительной механики. Учитывая исходные предпосылки, запишем матрицу равновесия стержня в виде:

$$a = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{l} & -\frac{\sin \varphi}{l} \\ \hline -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{l} & \frac{\cos \varphi}{l} \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{l} & \frac{\sin \varphi}{l} \\ \hline \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{l} & -\frac{\cos \varphi}{l} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Тогда при  $\varphi = 0$  получим:

$$R' = a k a^T = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{-2EI}{l} \\ \hline 0 & \frac{-2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \\ \hline \end{array} \times \end{array}$$

$$\times \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{l} & -1 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}.$$

Размеры матрицы  $R'$  зависят от условий закрепления концов стержня. Для стержня с одним защемленным концом, а вторым – шарнирно опертым матрица жесткости будет иметь размеры  $5 \times 5$ , для стержня с шарнирным опиранием на левом и правом концах матрица  $R'$  имеет размеры  $4 \times 4$ .

Матрицу жесткости стержня, соединяющего узлы  $i$  и  $j$ , можно представить в блочной форме записи:

$$R' = \begin{bmatrix} R'_{ii} & R'_{ij} \\ R'_{ji} & R'_{jj} \end{bmatrix}.$$

Размеры блоков зависят от числа связей, наложенных на стержень в каждом узле. Для стержня, шарнирно закрепленного в узле  $i$  и жестко защемленного в узле  $j$ , размеры матрицы и ее блоков будут следующими:

$$R'_{(5 \times 5)} = \begin{bmatrix} R'_{ii(2 \times 2)} & R'_{ij(2 \times 3)} \\ R'_{ji(3 \times 2)} & R'_{jj(3 \times 3)} \end{bmatrix}.$$

Если оба конца стержня являются шарнирно закрепленными, то:

$$R'_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} R'_{ii(2 \times 2)} & R'_{ij(2 \times 2)} \\ R'_{ji(2 \times 2)} & R'_{jj(2 \times 2)} \end{bmatrix}.$$

## 16.12. Матрица жесткости стержня в общей системе координат

Проще всего она получается с помощью общих уравнений строительной механики по выражению:

$$R = a k a^T,$$

где  $a$  – матрица равновесия стержня в общей системе координат.

В других случаях, когда необходимо организовать переход от матрицы жесткости в местной системе координат к матрице жесткости в общей системе координат, необходимо воспользоваться правилами преобразований матрицы линейного оператора при переходе от старого базиса к новому.

Линейные перемещения в местной и общей системах координат (рис. 16.14) связаны соотношениями:

$$Z'_1 = Z_1 \cos \varphi + Z_2 \sin \varphi,$$

$$Z'_2 = -Z_1 \sin \varphi + Z_2 \cos \varphi.$$

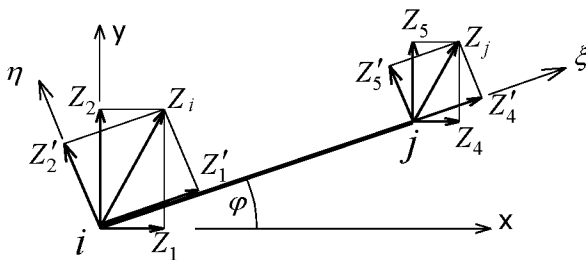


Рис. 16.14

Углы поворота торцевых сечений стержня при замене системы координат не меняются. Поэтому матрица оператора вращения имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как направления перемещений на обоих концах стержня совпадают, то с помощью этой же матрицы совершаются преобразования и перемещений  $Z'_4$ ,  $Z'_5$  и  $Z'_6$  в  $Z_4$ ,  $Z_5$  и  $Z_6$ . Следовательно,

$$\vec{Z}' = \begin{bmatrix} C & \\ & C \end{bmatrix} \vec{Z} = V \vec{Z}. \quad (16.41)$$

Так как  $V^{-1} = V^T$ , то  $\vec{Z} = V^T \vec{Z}'$ .

Преобразование матрицы жесткости (матрицы линейного оператора) при переходе к базису  $\vec{Z}$  выполняется по выражению:

$$R = V^T R' V.$$

Для дальнейших рассуждений матрицу  $R$  также представим в блочной форме:

$$R = \begin{bmatrix} R_{ii} & R_{ij} \\ R_{ji} & R_{jj} \end{bmatrix}.$$

### 16.13. Формирование матрицы жесткости всей системы

Конечно-элементная модель стержневой системы, как уже было отмечено ранее, представляется в виде совокупности стержней, соединенных в узлах. Смещение узла системы вызывает такие же смещения концов стержней (конечных элементов), примыкающих к этому узлу. Возникающие вследствие этого усилия в стержнях основной системы метода перемещений определяются с помощью матрицы жесткости стержня. Реакции в связях, наложенных на узел системы, можно найти как сумму концевых реакций в связях стержней, примыкающих к узлу. Например, реактивное усилие в связи по направлению оси  $X$  будет равно сумме реактивных усилий в связях стержней по тому же направлению. Аналогично определяются и реакции по другим направлениям.

В общем случае вектор суммарных реакций  $\vec{R}_i$  для  $i$ -го узла системы можно определить через вектор концевых реакций  $\vec{r}_i^{(e)}$  в элементах, примыкающих к этому узлу, по выражению:

$$\begin{aligned} \vec{R}_i = & \sum_{e \in i} \vec{r}_i^{(e)} = \sum_{e \in i} \vec{r}_{i1}^{(e)} Z_1 + \sum_{e \in i} \vec{r}_{i2}^{(e)} Z_2 + \dots + \\ & + \sum_{e \in i} \vec{r}_{ii}^{(e)} Z_i + \sum_{e \in i} \vec{r}_{ij}^{(e)} Z_j + \dots + \sum_{e \in i} \vec{r}_{in}^{(e)} Z_n, \end{aligned} \quad (16.42)$$

где  $\vec{r}_{i1}^{(e)}$ ,  $\vec{r}_{i2}^{(e)}$ ,  $\dots$ ,  $\vec{r}_{in}^{(e)}$  – векторы реакций на конце элемента  $e$ , примыкающего к узлу  $i$ , вызываемые перемещениями  $Z_1=1$ ,  $Z_2=1, \dots, Z_n=1$ . Символ  $e \in i$  означает суммирование по всем элементам, примыкающим к узлу  $i$ .

Для жесткого узла вектор  $\vec{R}_i$  имеет три компоненты: первая компонента вектора указывает на значение реактивного усилия по направлению оси  $X$ , вторая – по направлению оси  $Y$ , третья дает значение реактивного момента.

В случае, если все стержни соединяются в узлах жестко, векторы  $\vec{r}_{i1}, \vec{r}_{i2}, \dots, \vec{r}_{in}$  также содержат три компоненты. Если какой-то стержень примыкает к узлу шарнирно, то для осуществления операции сложения векторов в  $i$ -м узле третью компоненту вектора концевых реакций следует принять равной нулю.

Записав выражение (16.42) для каждого узла конструкции, представим систему уравнений, связывающую узловые реакции и перемещения, в виде:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{e \in 1} r_{11}^{(e)} & \sum_{e \in 1} r_{12}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in 1} r_{1j}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in 1} r_{1n}^{(e)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{e \in i} r_{i1}^{(e)} & \sum_{e \in i} r_{i2}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in i} r_{ij}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in i} r_{in}^{(e)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{e \in m} r_{m1}^{(e)} & \sum_{e \in m} r_{m2}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in m} r_{mj}^{(e)} & \dots & \sum_{e \in m} r_{mn}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix}$$

или сокращенно:

$$\vec{R}_z = R \vec{Z},$$

где  $R$  – матрица жесткости всей системы.

Из представленной формы записи матрицы  $R$  следует, что ее элементы вычисляются через элементы матриц жесткостей отдельных конечных элементов. Если узлы  $i$  и  $j$  не соединяются между собой элементами, то  $r_{ij} = 0$ ; если они соединяются несколькими элементами, то соответствующий элемент матрицы жесткости вычисляется как  $\sum_{e \in i,j} r_{ij}^{(e)}$ .

В блочной форме записи матрица  $R$  представляется в виде:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ R_{i1} & R_{i2} & \cdots & R_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nm} \end{bmatrix},$$

где  $R_{ij}$  – блок реакций в связях  $i$ -го узла, вызываемых единичными смещениями связей  $j$ -го узла.

В сформированной по указанному принципу матрице жесткости  $R$  всей системы не будут учтены опорные закрепления. По направлению неподатливых закреплений перемещения равны нулю. Поэтому, если заранее известно, что  $Z_{\check{j}} = 0$ , то из полученной матрицы  $R$  следует вычеркнуть  $j$ -ю строку и  $j$ -й столбец. Размер матрицы при этом уменьшается. В случае автоматизированных вычислений потребуются также выполнить новую нумерацию неизвестных. Если размеры матрицы  $R$  не менять, то необходимо указанные строку и столбец принять нулевыми, а элемент матрицы  $r_{jj}$  принять равным единице или другому числу, кроме нуля (чтобы  $\det R \neq 0$ ).

Покажем графическую схему формирования матрицы жесткости системы из матриц жесткостей ее элементов. В раме (рис. 15.20) имеются 4 стержня (элемента), число узлов – 5, в том числе опорных – 3. В узле 2 второй и третий стержни соединяются жестко, а первый стержень примыкает к нему шарнирно.

Общее число степеней свободы 2-го и 4-го узлов равно 5, следовательно, матрица жесткости рамы имеет размеры  $5 \times 5$ . Иллюстрация к формированию матрицы жесткости показана на рис. 16.15.

Блок  $R_{22}^{(1)}$  матрицы жесткости первого элемента имеет размеры  $2 \times 2$  (узел 2 этого стержня является шарнирным). Чтобы операция сложения матриц в блоке  $R_{22}$  оказалась возможной, блок  $R_{22}^{(1)}$  необходимо расширить до размеров  $3 \times 3$  посредством введения третьей (нулевой) строки и третьего (нулевого) столбца.



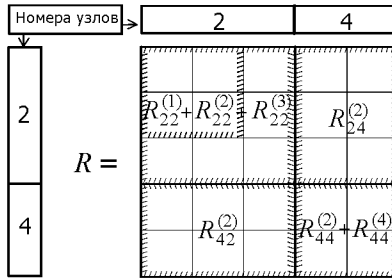


Рис. 16.15

Для рамы, показанной на рис. 16.16, матрица жесткости в блочной форме записи имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}.$$

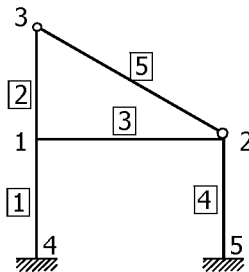


Рис. 16.16

Вклад каждого из пяти элементов (номера записаны в квадратиках) в соответствующие блоки матрицы жесткости всей рамы схематично показан на рис. 16.17,а–д. Матрица жесткости всей рамы показана на рис. 16.17,е.

Номера степеней свободы для каждого узла рамы соответствуют номерам компонент вектора перемещений для этого узла (1 – сме-

шение вдоль оси  $X$ , 2 – смещение вдоль оси  $Y$ , 3 – поворот относительно оси  $Z$ ).

На рис. 16.17 символ  $e^{(i)}$  – номер соответствующего стержневого элемента.

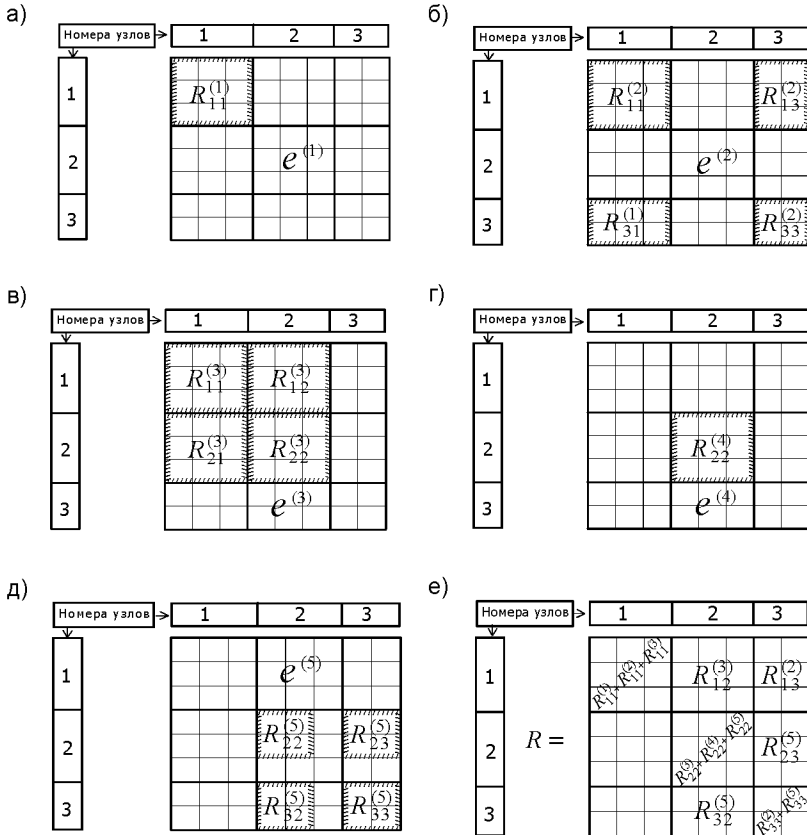


Рис. 16.17

## 16.14. Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента для расчета тонких плит

Перемещения конечного элемента должны соответствовать деформированной схеме исследуемой системы в месте его расположения. В общем случае точно описать состояние континуальной системы через конечный набор узловых перемещений с помощью уравнений типа (16.18), как правило, невозможно. Поэтому МКЭ относят к приближенным. Тем не менее, он позволяет получать результаты расчетов очень высокой точности. В настоящее время МКЭ является основным методом решения самых разнообразных задач статики, динамики и устойчивости стержневых и континуальных систем.

Методика получения матриц жесткостей КЭ для расчета пластин, оболочек и других континуальных систем во многом схожа с методикой получения матрицы жесткости стержня (см. раздел 16.11). Поясним это замечание на примере построения матрицы жесткости КЭ для расчета пластин.

### Краткие сведения из теории расчета пластин

Пластиной называют тело, толщина  $h$  которого мала по сравнению с размерами сторон основания  $a$  и  $b$  (рис. 16.18,а).

Плоскость, делящая толщину пластины пополам, называется срединной. Линии пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью образуют контур пластины. По форме в плане различают пластины прямоугольные, треугольные, круглые и др.

При расчете пластин начало координатных осей располагают в одной из точек срединной плоскости. От действия поперечной нагрузки пластина прогибается, срединная плоскость превращается в срединную поверхность. Перемещения точек пластины в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначают соответственно через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . В общем случае, эти перемещения являются функциями координат:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

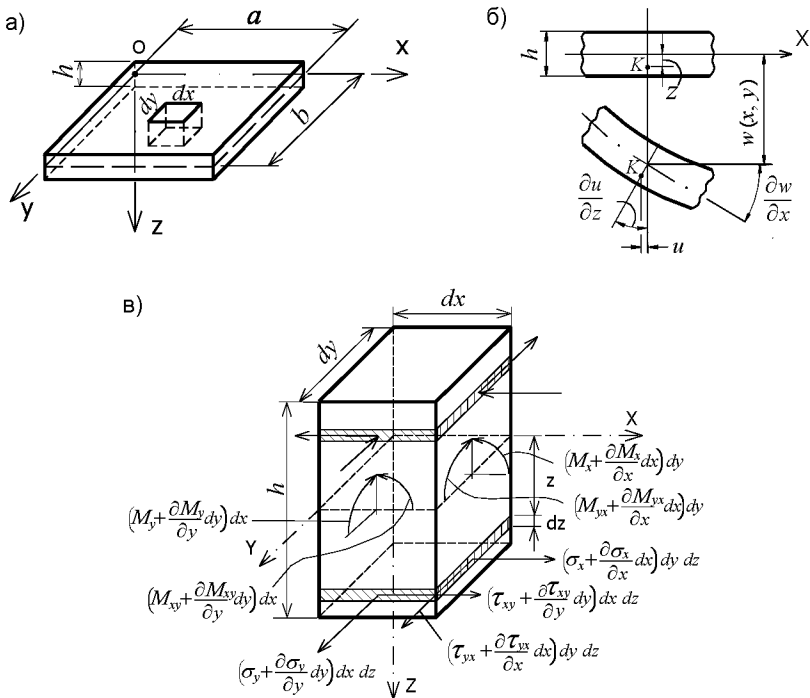


Рис. 16.18

В зависимости от характера напряженного состояния пластин они подразделяются на плиты (отношение  $h$  к большему из размеров  $a$  или  $b$  больше 0,20), жесткие пластины – такие, при изгибе которых пренебрегают напряжениями сдвига и растяжения в срединной поверхности (соответствующее отношение находится в интервале от 0,01 до 0,20), очень тонкие пластины (отношение меньше 0,01).

В рассматриваемом далее примере используется конечный элемент жесткой пластины.

Теория расчета тонких пластин построена с использованием следующих гипотез.

1. Гипотеза прямых нормалей, согласно которой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости до деформации пластины остается нормальным к срединной плоскости и после де-

формации, а его длина не изменяется. В соответствии с этой гипотезой углы сдвига  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ , а также линейная деформация  $\varepsilon_z$  принимаются равными нулю:

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \quad \gamma_{yz} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0; \quad \varepsilon_z = 0.$$

2. Гипотеза о недеформируемости срединного слоя, в соответствии с которой линейные  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и угловые  $\gamma_{xy}$  деформации срединного слоя равны нулю:

$$\varepsilon_x^0 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{z=0} = 0; \quad \varepsilon_y^0 = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{z=0} = 0;$$

$$\gamma_{xy}^0 = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{z=0} = 0.$$

3. Гипотеза об отсутствии нормальных напряжений на площадках, параллельных срединному слою, то есть напряжение  $\sigma_z = 0$ .

В соответствии с двумя первыми гипотезами перемещения  $u$  и  $v$  произвольной точки  $K$  (рис. 16.18,б) по направлениям осей  $x$  и  $y$  оказываются равными:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Вследствие этого линейные и угловые деформации вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Так как  $\sigma_z = 0$ , то обобщенный закон Гука, связывающий напряжения и деформации, записывается в виде:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy},$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Нормальные и касательные напряжения, вызванные изгибом пластинки, линейно изменяются по толщине пластины и вычисляются через кривизны  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  и кручение  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  срединной поверхности по формулам:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Изгибающие  $M_x$  и  $M_y$  и крутящие  $M_{xy}$  моменты, приходящиеся на единицу длины сечения пластины, вычисляются через соответствующие напряжения. На рис. 16.18,в показано распределение усилий по граням элементарной призмы  $dx \times dy \times h$ . Чтобы не загромождать рисунок, на гранях  $x = 0$  и  $y = 0$  напряжения, изгибающие и крутящие моменты не показаны. На этих гранях приращения напряжений равны нулю.

## Пример формирования матрицы жесткости прямоугольного элемента пластины

1. Каждый узел КЭ пластины имеет три степени свободы:  $w$  – вертикальное перемещение (прогиб),  $\frac{\partial w}{\partial y}$  – угол поворота относительно оси  $x$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  – угол поворота относительно оси  $y$ . По направлениям этих перемещений накладываем дополнительные связи и получаем, таким образом, основную систему метода перемещений (рис. 16.19).

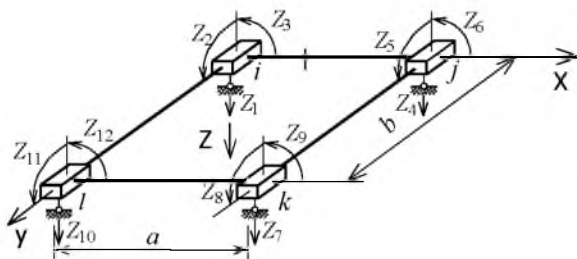


Рис. 16.19

Необходимо сформировать в локальной системе координат матрицу, которая бы позволяла преобразовывать вектор узловых перемещений  $\vec{Z}$  в вектор узловых реакций  $\vec{R}_Z$ .

Зададим функцию прогибов  $w(x, y)$  элемента в виде полинома с 12 произвольными постоянными. Он должен тождественно удовлетворять однородному (нагрузка действует в узлах) дифференциальному уравнению изогнутой поверхности пластины:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0.$$

Пусть:

$$w(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 x y + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} x y^3, \quad (16.43)$$

где  $a_i$  – неизвестные независимые параметры, которые в дальнейшем необходимо выразить через  $\vec{Z}$ .

2. Угловые перемещения  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  определяются однозначно выражением  $w(x, y)$ . Тогда для любой точки элемента вектор перемещений  $\vec{u}$  может быть определен по зависимости:

$$\vec{u} = L \vec{a}, \quad (16.44)$$

где  $\vec{u} = \left[ w, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} \right]^T$ ;

$L$  – матрица коэффициентов:

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ \hline & & 1 & & x & 2y & & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ \hline & -1 & & -2x & -y & & -3x^2 & -2xy & -y^2 & & -3x^2y & -y^3 \\ \hline \end{array}. \quad (16.45)$$

3. Вектор перемещений  $\vec{u}$  позволяет находить перемещения всех точек элемента, в том числе и узловых, имеющих координаты  $(x=0, y=0)$ ,  $(x=a, y=0)$ ,  $(x=a, y=b)$ ,  $(x=0, y=b)$ . Поэтому с помощью выражения (16.44) можно установить зависимость между векторами  $\vec{Z}$  и  $\vec{a}$ :

$$\vec{Z} = H \vec{a}, \quad (16.46)$$

где  $H$  – матрица  $(12 \times 12)$  связи:



$H =$	1											
			1									
		-1										
	1	$a$		$a^2$			$a^3$					
			1		$a$			$a^2$			$a^3$	
		-1		$-2a$			$-3a^2$					
	1	$a$	$b$	$a^2$	$ab$	$b^2$	$a^3$	$a^2b$	$ab^2$	$b^3$	$a^3b$	$ab^3$
			1		$a$	$2b$		$a^2$	$2ab$	$3b^2$	$a^3$	$3ab^2$
		-1		$-2a$	$-b$		$-3a^2$	$-2ab$	$-b^2$		$-3a^2b$	$-b^3$
	1		$b$			$b^2$				$b^3$		
			1			$2b$				$3b^2$		
		-1			$-b$				$-b^2$			$-b^3$

4. Из (16.46) следует, что:

$$\vec{a} = H^{-1} \vec{Z}. \quad (16.47)$$

5. Вектор перемещений  $\vec{u}$  с помощью выражений (16.44) и (16.47) представляется в виде:

$$\vec{u} = L H^{-1} \vec{Z}. \quad (16.48)$$

6. После определения вектора перемещений можно найти вектор обобщенных относительных деформаций  $\vec{k}$ , компонентами которого будут кривизны и кручение срединной поверхности пластины:

$$\vec{k} = \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T. \quad (16.49)$$

Выполнив соответствующее дифференцирование, получим:

$$\vec{k} = B \vec{a} = B H^{-1} \vec{Z}, \quad (16.50)$$

где

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 2 & & & 6x & 2y & & & 6xy & \\ \hline & & & & & 2 & & & 2x & 6y & & 6xy \\ \hline & & & & 2 & & & 4x & 4y & & 6x^2 & 6y^2 \\ \hline \end{array}$$

7. Погонные (на единицу длины сечения пластины) изгибающие и крутящие моменты для изотропных пластин вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (16.51)$$

$$M_{xy} = -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где через  $D$  обозначена величина погонной изгибной жесткости пластины, так называемая цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Изгибающие моменты, соответствующие положительным кривизнам, считаются положительными.

В матричной форме запись связи вектора обобщенных внутренних сил  $\vec{M}$  с вектором относительных деформаций  $\vec{k}$  принимает вид:

$$\vec{M} = C \vec{k}, \quad (16.52)$$

где  $C$  – матрица физических констант:

$$C = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Если в зависимость (16.52) подставим  $\vec{k}$  из (16.50), то получим выражение для вектора обобщенных внутренних сил  $\vec{M}$  через обобщенные перемещения  $\vec{Z}$ :

$$\vec{M} = C B H^{-1} \vec{Z}. \quad (16.53)$$

8. Вариация плотности потенциальной энергии деформации элемента

$$\delta \bar{A} = (\delta \vec{k})^T \vec{M} \quad (16.54)$$

с учетом выражений (16.50) и (16.53) запишется так:

$$\delta \bar{A} = (\delta \vec{Z})^T (H^{-1})^T B^T C B H^{-1} \vec{Z}.$$

Для всего объема конечного элемента вариация потенциальной энергии деформации будет иметь вид:

$$\delta A = \int_V \delta \bar{A} dv = \int_V (\delta \vec{Z})^T (H^{-1})^T B^T C B H^{-1} \vec{Z} dv \quad (16.55)$$

или, поскольку  $H$  и  $\vec{Z}$  не зависят от координат  $x$  и  $y$ ,

$$\delta A = (\delta \vec{Z})^T (H^{-1})^T \left[ \int_{\mathbf{v}} B^T C B dv \right] H^{-1} \vec{Z}. \quad (16.56)$$

9. Возможная работа узловых сил  $F$  на изменениях (вариациях) узловых перемещений  $\delta \vec{Z}$  равна:

$$\delta W = (\delta \vec{Z})^T \vec{F}. \quad (16.57)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений  $\delta A = \delta W$ , поэтому равенства (16.55) и (16.56) позволяют связать вектор узловых сил  $\vec{F}$  и вектор  $\vec{Z}$ :

$$\vec{F} = (H^{-1})^T \left[ \int_{\mathbf{v}} B^T C B dv \right] H^{-1} \vec{Z}. \quad (16.58)$$

10. Матрица жесткости (матрица реакций) конечного элемента  $R_{\mathfrak{D}}$  позволяет выразить вектор сил  $\vec{F}$  через вектор  $\vec{Z}$ :

$$\vec{F} = R_{\mathfrak{D}} \vec{Z}. \quad (16.59)$$

Сравнивая выражения (16.58) и (16.59), найдем матрицу жесткости конечного элемента:

$$R_{\mathfrak{D}} = (H^{-1})^T \left[ \int_{\mathbf{v}} B^T C B dv \right] H^{-1}.$$

Матрица  $R_{\mathfrak{D}}$  (нижний треугольник) для прямоугольного элемента пластины представлена в табл. 16.2.

Таблица 16.2

	1	2	3	4
	$w_i$	$\theta_{x_i}$	$\theta_{y_i}$	$w_j$
1	$12(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$	<i>С И М</i>	<i>М Е Т</i>	<i>Р И Ч Н О</i>
2	$[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6b$	$40a^2 + 8(1 - \mu)b^2$		
3	$-[10\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6a$	$-30\mu ab$	$40b^2 + 8(1 - \mu)a^2$	
4	$60(\beta^2 - 2\gamma^2) + 24\mu - 84$	$[5\beta^2 - (1 + 4\mu)]6b$	$[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6a$	$12(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$
5	$[5\beta^2 - (1 + 4\mu)]6b$	$20a^2 - 8(1 - \mu)b^2$	0	$[10\beta^2 + (1 + 4\mu)]6b$
6	$-[10\gamma^2 + (1 - \mu)]6a$	0	$20b^2 - 2(1 - \mu)a^2$	$[10\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6a$
7	$-60(\gamma^2 + \beta^2) - 24\mu + 84$	$[-5\beta^2 + (1 - \mu)]6b$	$[5\gamma^2 - (1 - \mu)]6a$	$60(\gamma^2 - 2\beta^2) + 24\mu - 84$
8	$[5\beta^2 - (1 - \mu)]6b$	$10a^2 + 2(1 - \mu)b^2$	0	$[10\beta^2 + (1 - \mu)]6b$
9	$[-5\gamma^2 + (1 - \mu)]6a$	0	$10b^2 + 2(1 - \mu)a^2$	$[5\gamma^2 - (1 + 4\mu)]6a$
10	$60(\gamma^2 - 2\beta^2) + 24\mu - 84$	$-[10\beta^2 + (1 - \mu)]6b$	$[-5\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6a$	$-60(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$
11	$[10\beta^2 + (1 - \mu)]6b$	$20a^2 - 2(1 - \mu)b^2$	0	$[5\beta^2 - (1 - \mu)]6b$
12	$[-5\gamma^2 + (1 + 4\mu)]6a$	0	$20b^2 - 8(1 - \mu)a^2$	$[5\gamma^2 - (1 - \mu)]6a$

$R =$

Продолжение табл. 16.2

	5	6	7	8
	$\theta_{x_j}$	$\theta_{y_j}$	$w_k$	$\theta_{x_k}$
1				
2				
3	<i>C И M</i>	<i>M E T</i>	<i>P И Ч</i>	<i>Н О</i>
4				
5	$40a^2 + 8(1-\mu)b^2$			
6	$30\mu ab$	$40b^2 + 8(1-\mu)a^2$		
7	$-[10\beta^2 + (1-\mu)]6b$	$[5\gamma^2 - (1+4\mu)]6a$	$12(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$	
8	$20a^2 - 2(1-\mu)b^2$	0	$-[10\beta^2 + (1+4\mu)]6b$	$40a^2 + 8(1-\mu)b^2$
9	0	$20b^2 - 8(1-\mu)a^2$	$[10\gamma^2 + (1+4\mu)]6a$	$-30\mu ab$
10	$[-5\beta^2 + (1-\mu)]6b$	$[-5\gamma^2 + (1-\mu)]6a$	$60(\beta^2 - 2\gamma^2) + 24\mu - 84$	$[-5\beta^2 + (1+4\mu)]6b$
11	$10a^2 + 2(1-\mu)b^2$	0	$[-5\beta^2 + (1+4\mu)]6b$	$20a^2 - 8(1-\mu)b^2$
12	0	$10b^2 + 2(1-\mu)a^2$	$[10\gamma^2 + (1-\mu)]6a$	0

Окончание табл. 16.2

	9	10	11	12
	$\theta_{y_k}$	$w_l$	$\theta_{x_l}$	$\theta_{y_l}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7	<i>C И М</i>	<i>М Е Т</i>	<i>Р И Ч</i>	<i>Н О</i>
8				
9	$40b^2 + 8(1-\mu)a^2$			
10	$-[10\gamma^2 + (1-\mu)]6a$	$120(\beta^2 + \gamma^2) - 24\mu + 84$		
11	0	$[-10\beta^2 - (1+4\mu)]6b$	$40a^2 + 8(1-\mu)b^2$	
12	$20b^2 - 2(1-\mu)a^2$	$-[10\gamma^2 + (1+4\mu)]6a$	$30\mu ab$	$40b^2 + 8(1-\mu)a^2$

Для всех элементов матрицы общий множитель  $\frac{D}{30ab}$ , где  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $\beta = \frac{a}{b}$ ;  $\gamma = \frac{b}{a}$ .

## 16.15. Общие замечания о методе конечных элементов

В настоящей главе изложены лишь основы МКЭ. Дополнительные сведения, детализировки кусочно-элементных аппроксимаций высшего порядка и другие, в том числе прикладные аспекты метода, можно найти в многочисленной учебно-методической и научной литературе.

В современных проектно-вычислительных комплексах (ПВК), предназначенных для численного исследования на ЭВМ напряженно-деформированного состояния и устойчивости стержневых и континуальных систем, как правило, реализован МКЭ. С помощью ПВК выполняется исследование широкого круга систем: плоских и пространственных стержневых систем, произвольных пластинчатых и оболочечных систем, рамно-связевых конструкций высотных зданий, плит на грунтовом основании, многослойных конструкций, мембран, массивных тел. Расчет ведется на статические и динамические нагрузки.

В состав ПВК включено большое количество типов КЭ: стержни; четырехугольные и треугольные элементы плиты; оболочечные КЭ (изотропный и ортотропный материал); элементы для расчета многослойных пологих пластин и оболочек, учитывающие межслоевые сдвиги и кривизну; четырехугольные и треугольные элементы плиты на упругом основании; элементы в виде тетраэдра, параллелепипеда, восьмигранника общего вида; специальные элементы, моделирующие связи конечной жесткости и др. Развитая библиотека конечных элементов, эффективные методы и алгоритмы решения систем уравнений высокого порядка и современные быстродействующие ЭВМ позволяют решать задачи с большим количеством неизвестных.



## ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

### 17.1. Общие понятия

Рассмотренные в предыдущих главах методы расчета статически определимых и статически неопределимых систем позволяют определять внутренние силы и перемещения только тогда, когда материал их элементов подчиняется закону Гука. Такой подход не позволяет определить полную несущую способность сооружения, так как разрушение сооружений обычно происходит за пределами упругости, при появлении в элементах сооружений пластических деформаций. Определить предельную несущую способность сооружения с учетом пластических деформаций позволяет метод предельного равновесия. В его основе лежит рассмотрение равновесия сооружения в момент, предшествующий его разрушению, когда сооружение сохраняет еще свою целостность, и для него можно еще составить уравнения равновесия. Нагрузки, соответствующие такому состоянию, называют предельными.

Расчеты за пределами упругости, связанные с определением предельных нагрузок, основываются на использовании упрощенных диаграмм деформирования, устанавливающих зависимость между напряжениями  $\sigma$  и продольными деформациями материала  $\varepsilon$ . Так, для достаточно пластичных материалов, например, строительных сталей, действительная диаграмма  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 17.1,а) заменяется идеализированной диаграммой упругопластического материала (рис. 17.1,б), впервые предложенной Прандтлем. В соответствии с этой диаграммой закон Гука соблюдается до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести  $\sigma_y$ , после чего они остаются постоянными, а площадка текучести принимается бесконечной. Так как в реальных строительных материалах упругие деформации значительно меньше пластических, то в практических расчетах диаграмма идеального упругопластического материала (рис. 17.1,б) заменяется диаграммой жесткопластического материала (рис. 17.1,в).

Именно такая диаграмма используется в методе предельного равновесия.

При исследовании несущей способности конструкций и сооружений с использованием метода предельного равновесия следует различать предельное состояние сечения какого-либо элемента и предельное состояние сооружения в целом.

Под предельным состоянием сечения будем понимать такое его состояние, при котором напряжения во всех его точках достигают предельных значений (предела текучести).

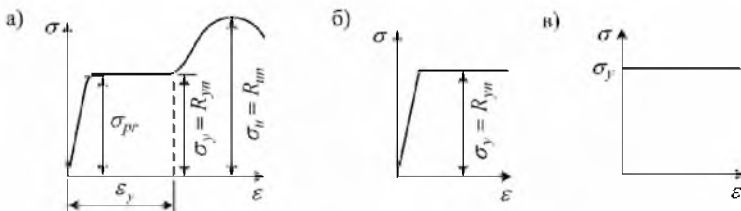


Рис. 17.1

Под предельным состоянием сооружения будем понимать такое его состояние, при котором сооружение не может воспринимать дальнейший рост нагрузки, так как его элементы, в сечениях которых достигнуто предельное состояние, не могут сопротивляться дальнейшему увеличению нагрузки, и сооружение становится как бы геометрически изменяемым, т. е. превращается в механизм.

## 17.2. Предельное состояние сжато-растянутого элемента по нормальному сечению

В элементах, работающих только на растяжение-сжатие (как, например, стержни ферм), нормальные напряжения  $\sigma$  в сечении распределяются равномерно (рис. 17.2,а,б,в). С ростом нагрузки они могут достигать предельных значений  $\sigma_y$  одновременно во всех точках сечения (рис. 17.2,г). Поэтому предельное усилие, воспринимаемое сечением, определяется по формуле:

$$N_{пред} = \sigma_y A.$$

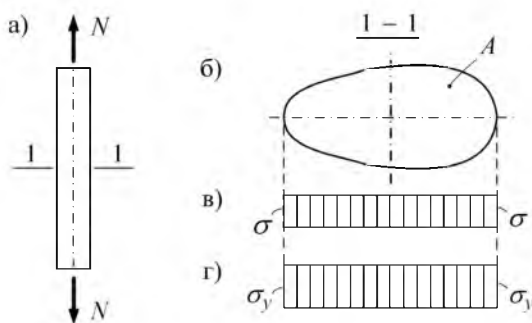


Рис. 17.2

### 17.3. Предельное состояние изгибаемого элемента по нормальному сечению

Напряжения в сечении (рис. 17.3,а), работающем на изгиб в упругой стадии (рис. 17.3,б), определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M z}{J}.$$

С ростом нагрузки напряжения в крайних волокнах в определенный момент достигнут предела текучести (рис. 17.3,в). В общем случае пределы текучести материала при растяжении  $\sigma_y$  и сжатии  $\sigma_y^*$  могут быть разными. Дальнейшее увеличение нагрузки будет приводить к распространению пластических деформаций вглубь сечения (рис. 17.3,г,д). В предельном состоянии для некоторого идеализированного материала эпюра нормальных напряжений может принять вид, показанный на рис. 17.3,е. Все резервы сечения исчерпаны, и дальнейшего роста нагрузки оно воспринимать уже не может.

Положение нейтральной оси в предельном состоянии не всегда совпадает с положением центральной оси у сечения.

Для определения положения нейтральной оси, считая  $\sigma_y = \sigma_y^*$ , составим сумму проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum X = 0; \quad R_p - R_{сжс} = 0; \quad \sigma_y A_p - \sigma_y A_{сжс} = 0,$$

откуда следует, что

$$A_p = A_{сжс}. \quad (17.1)$$

Таким образом, положение нейтральной оси в предельном состоянии при  $\sigma_y = \sigma_y^*$  определяется из условия равенства площадей сжатой и растянутой зон сечения.

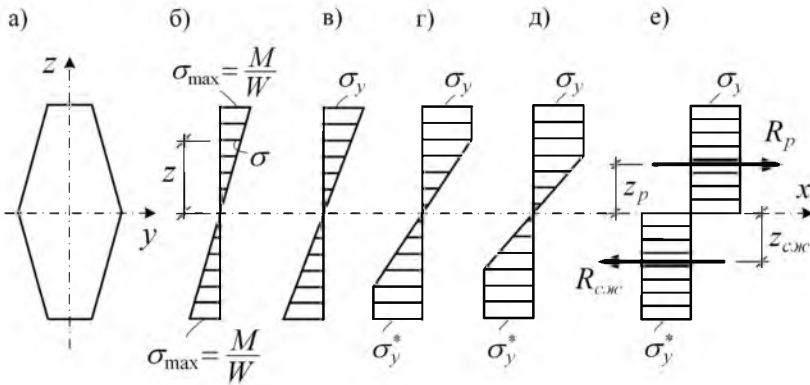


Рис. 17.3

Предельный изгибающий момент, возникающий в сечении при  $\sigma_y = \sigma_y^*$ , найдем как сумму моментов внутренних сил относительно нейтральной оси (рис. 17.3,е):

$$\begin{aligned} M_{пред} &= R_p z_p + R_{сжс} z_{сжс} = \\ &= \sigma_y A_p z_p + \sigma_y A_{сжс} z_{сжс} = \sigma_y (A_p z_p + A_{сжс} z_{сжс}). \end{aligned}$$

В скобках записана сумма статических моментов сжатой и растянутой зон сечения

$$A_p z_p + A_{сжс} z_{сжс} = S_p + S_{сжс},$$

которую называют пластическим моментом сопротивления сечения и вводят обозначение:

$$W_{nl} = S_p + S_{сжс}. \quad (17.2)$$

Значение предельного момента в сечении, с учетом (17.2), вычисляется по формуле:

$$M_{пред} = \sigma_y W_{nl}. \quad (17.3)$$

Для симметричных относительно оси  $y$  сечений статические моменты сжатой и растянутой зон сечения одинаковы ( $S_p = S_{сжс} = S_0$ ), и пластический момент сопротивления будет определяться выражением:

$$W_{nl} = 2S_0.$$

Для прямоугольного сечения (рис. 17.4) пластический момент сопротивления равен:

$$W_{nl} = 2S_0 = 2 \left( \frac{bh}{2} \right) \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}.$$

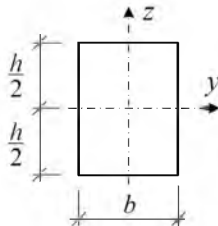


Рис. 17.4

Упругий момент сопротивления для прямоугольного сечения, как известно, равен  $bh^2/6$ . Следовательно, несущая способность элемента, имеющего прямоугольное сечение, при его работе в пластической стадии в 1,5 раза выше, чем при его работе в пределах упругости. Обозначив отношение пластического момента сопротивления  $W_{пл}$  к упругому  $W$  через  $\gamma$ , получим:

$$W_{пл} = \gamma W. \quad (17.4)$$

Коэффициент  $\gamma$  для всех форм сечений больше единицы. Приведем его значение для ряда распространенных форм сечений: для прямоугольного сечения –  $\gamma = 1,5$ ; для сплошного круглого сечения –  $\gamma = 1,7$ ; для тонкостенного кольца –  $\gamma = 1,27$ ; для прокатных двутавров –  $\gamma = 1,5 \dots 1,177$ .

Полученная для предельного момента формула (17.4) справедлива для чистого изгиба ( $Q = N = 0$ ). В случае поперечного изгиба, при действии в сечении изгибающего момента и поперечной силы эта формула несколько изменится и ее можно записать в виде:

$$M_{пред} = \nu \sigma_y W_{пл},$$

где  $\nu$  – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения элемента.

Следует отметить, что при расчете балок и рам поперечные силы не оказывают большого влияния на несущую способность сечения и поэтому ими можно пренебречь, приняв  $\nu = 1$ .

При разных значениях пределов текучести  $\sigma_y$  и  $\sigma_y^*$  материала элемента предельный момент в сечении элемента будет определяться выражением:

$$M_{пред} = \sigma_y A_p z_p + \sigma_y^* A_{сж} z_{сж} = \sigma_y \left( S_p + \frac{\sigma_y^*}{\sigma_y} S_{сж} \right) = \sigma_y W_{пл}^*, \quad (17.5)$$

$$\text{где } W_{пл}^* = S_p + \frac{\sigma_y^*}{\sigma_y} S_{сжс}.$$

Положение нейтральной оси в этом случае можно найти из уравнения:

$$\sigma_y A_p = \sigma_y^* A_{сжс}.$$

Следует заметить, что для несимметричных сечений при неодинаковых пределах текучести материала на растяжение и сжатие предельные моменты, вычисляемые по формуле (17.5), будут разными в зависимости от направления изгибающего момента. Для симметричных сечений эти предельные моменты одинаковы.

Сечение в предельном состоянии, когда во всех его точках напряжения равны пределу текучести (рис. 17.3,е), называют пластическим шарниром. Пластический шарнир, в отличие от обычного, является односторонним и исчезает (закрывается) при снятии нагрузки или при перемене ее направления на обратное. Существенным и важным отличием пластического шарнира от обычного является то, что в пластическом шарнире действует изгибающий момент, равный предельному  $M_{пред}$  (17.3). На расчетной схеме сооружения предельный изгибающий момент  $M_{пред}$  изображается в виде двух сосредоточенных моментов, приложенных к элементам, примыкающим к шарниру. Пластический шарнир, в отличие от действительного шарнира, обозначается полностью затушеванным кружком с двумя черточками со стороны растянутых волокон, которые показывают направление раскрытия шарнира (рис. 17.5).

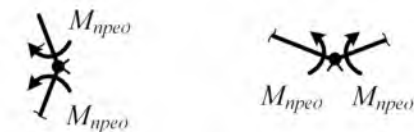


Рис. 17.5

Таким образом, предельный изгибающий момент, который может быть воспринят сечением, работающим на изгиб, определяется выражениями (17.3), (17.5), и условие прочности элемента по нормальному сечению принимает вид  $M \leq M_{пред}$ .

#### 17.4. Предельное состояние систем и методы расчета

Статически определимые системы имеют минимально необходимое число связей для сохранения их неизменяемости. При выключении из работы хотя бы одной связи, эти системы становятся геометрически изменяемыми. А это значит, что для перехода таких систем в предельное состояние достаточно, чтобы хотя бы в одном сечении элемента возникло предельное состояние (текучесть при растяжении-сжатии элемента либо пластический шарнир при его изгибе).

Статически неопределимые системы имеют лишние связи. Для превращения их в механизм необходимо допустить, в общем случае, образование в них  $L+1$  пластических шарниров.

В некоторых частных случаях системы могут переходить в предельное состояние при появлении в них меньшего, чем  $L+1$ , числа пластических шарниров. В этом случае имеет место частичное разрушение системы (рис. 17.6).

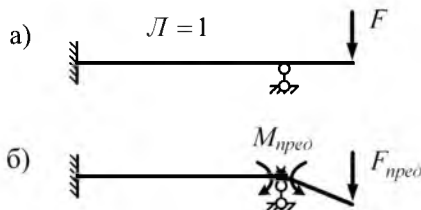


Рис. 17.6

При выключении из работы большего числа связей (рис. 17.7) говорят об избыточном разрушении системы.



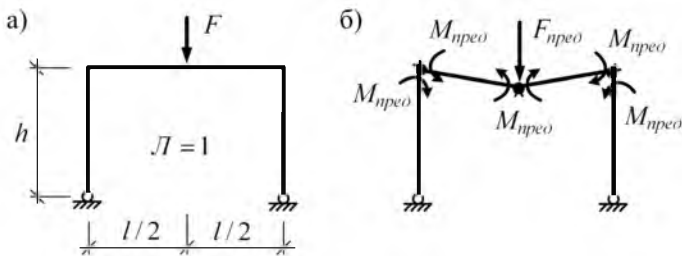


Рис. 17.7

Для выявления предельного состояния системы надо определить, где (в каких сечениях, элементах) образуются пластические шарниры (текущая при растяжении-сжатии), которые превратят систему в механизм. Эта задача для статически неопределимых систем не является простой. Приходится учитывать наличие большого числа лишних связей и большого числа сечений, в которых возможно появление пластических шарниров.

Действующие на сооружение нагрузки могут быть взаимозависимыми и характеризоваться изменением одного параметра. Такую нагрузку называют однопараметрической или простой. В случае независимых (многопараметрических) нагрузок решение задачи существенно усложняется.

Определение предельной нагрузки может производиться статическим или кинематическим методами, которые основываются соответственно на статической и кинематической теоремах. При этом предполагается, что материал сооружения является идеальным жесткопластическим.

Для исследуемой статически неопределимой системы при заданной нагрузке существует множество вариантов расположения пластических шарниров, что влечет как множество вариантов распределения усилий в элементах системы, так и множество возможных механизмов ее разрушения.

В соответствии со статической теоремой истинным распределением усилий является то, которому соответствует наибольшая предельная нагрузка. Следуя статической теореме, для системы нужно рассмотреть все возможные схемы распределения усилий, и из ус-

ловий равновесия и прочности элементов по нормальному сечению найти предельную нагрузку для каждой схемы. Наибольшая из нагрузок принимается за предельную для данной системы. При этом должна быть уверенность, что рассмотрены все возможные варианты распределения усилий. Так как на практике не всегда все возможные варианты распределения усилий могут быть установлены, то на основе статической теоремы можно получить только нижнюю оценку для предельной нагрузки.

В соответствии с кинематической теоремой истинным механизмом разрушения является тот, которому соответствует наименьшая предельная нагрузка. В общем случае, когда нельзя быть уверенным, что рассмотрены все возможные механизмы разрушения, кинематическая теорема дает верхнюю оценку предельной нагрузки.

Кинематический метод расчета сооружений базируется на принципе возможных перемещений. Составляя уравнение возможных работ внешних и внутренних сил для механизма разрушения как для системы с одной степенью свободы, определяют предельную нагрузку при однопараметрическом нагружении. К внутренним силам в жесткопластической системе относятся предельные моменты  $M_{пред}$  в пластических шарнирах изгибаемых систем и предельные силы  $N_{пред}$  в элементах, работающих на растяжение-сжатие.

Уравнение возможных работ внешних и внутренних сил для механизмов разрушения записывается в виде:

$$\sum F_{i пред} \Delta_i - \sum M_{j пред} \theta_j - \sum N_{s пред} \Delta_{Ns} = 0. \quad (17.6)$$

Из выражения (17.6) находится предельная нагрузка  $F_{пред}$  для рассматриваемого механизма разрушения.

Действительной форме разрушения, которая должна реализовываться в системе, будет соответствовать тот механизм, для которого  $F_{пред}$  минимальна. За расчетную предельную нагрузку принимается наименьшая из всех  $F_{пред}$ , полученных для всех возможных механизмов разрушения.

## 17.5. Расчет стержневых систем по несущей способности

Статически определимые системы, как уже указывалось, имеют минимально необходимое число связей для сохранения неизменяемости. Для перехода их в предельное состояние достаточно, чтобы хотя бы в одном сечении возникло предельное состояние (появился пластический шарнир). Таким сечением будет то, в котором напряжения наибольшие, и в процессе возрастания нагрузки в нем возникнет предельное состояние.

Для перехода статически неопределимой системы в предельное состояние в ней необходимо появление, в общем случае,  $L+1$  пластических шарниров.

Так как рассматривается однопараметрическая нагрузка, то в процессе ее возрастания можно отследить последовательность появления в исследуемой системе пластических шарниров. Анализируя каждый раз после появления очередного пластического шарнира систему на геометрическую изменчивость, можно установить, в конечном итоге, механизм разрушения и соответствующую ему предельную нагрузку.

Рассмотренные ранее методы расчета по несущей способности могут быть применены к любым стержневым системам. Наиболее часто они используются при расчете балочных систем, в частности, неразрезных балок.

При простом (однопараметрическом) нагружении неразрезной балки ее предельное состояние определяется предельным состоянием пролета, работающего в самых невыгодных условиях. Предельное состояние промежуточного пролета характеризуется появлением, как правило, трех пластических шарниров (рис. 17.8,г), а в крайних пролетах, в случае шарнирного опирания, – двух.

Рассмотрим неразрезную балку, представленную на рис. 17.8,а. Принимаем, что балка имеет постоянную жесткость, значения предельных моментов известны и равны  $M_{пред}$ .

Эпюра изгибающих моментов в балке от действия заданных нагрузок при работе материала в упругой стадии показана на рис. 17.8,б. В случае однопараметрической нагрузки предельное состояние, в первую очередь, возникнет в том пролете, который

наиболее нагружен. Наименьшее значение параметра нагрузки  $F$  будет соответствовать этому пролету.

Определим для рассматриваемой балки предельное значение параметра нагрузки из условия образования механизма разрушения в каждом из пролетов. Для этого приравняем наибольшее значение балочного изгибающего момента (рис. 17.8,б) в каждом из пролетов (под силами либо в средних сечениях, если действует равномерно распределенная нагрузка) соответствующим значениям предельных моментов  $M_{пред}$  (рис. 17.8,в). В результате получим:

а) для первого пролета:

$$\frac{2,73 Fl}{8} = 2M_{пред}, \quad \text{откуда} \quad F_{пред}^{(1)} = 5,861 \frac{M_{пред}}{l};$$

б) для второго пролета:

$$\frac{3Fl}{8} = 2M_{пред}, \quad \text{откуда} \quad F_{пред}^{(2)} = 5,333 \frac{M_{пред}}{l};$$

в) для третьего пролета:

$$\frac{Fl}{4} = 1,5M_{пред}, \quad \text{откуда} \quad F_{пред}^{(3)} = 6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Наименьшее значение имеет параметр нагрузки для второго пролета. Это значение будет предельным для всей рассматриваемой неразрезной балки при однопараметрическом нагружении:

$$F_{пред} = F_{пред}^{(2)} = 5,333 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Предельное состояние рассматриваемой балки будет характеризоваться образованием механизма разрушения во втором пролете (рис. 17.8,г).

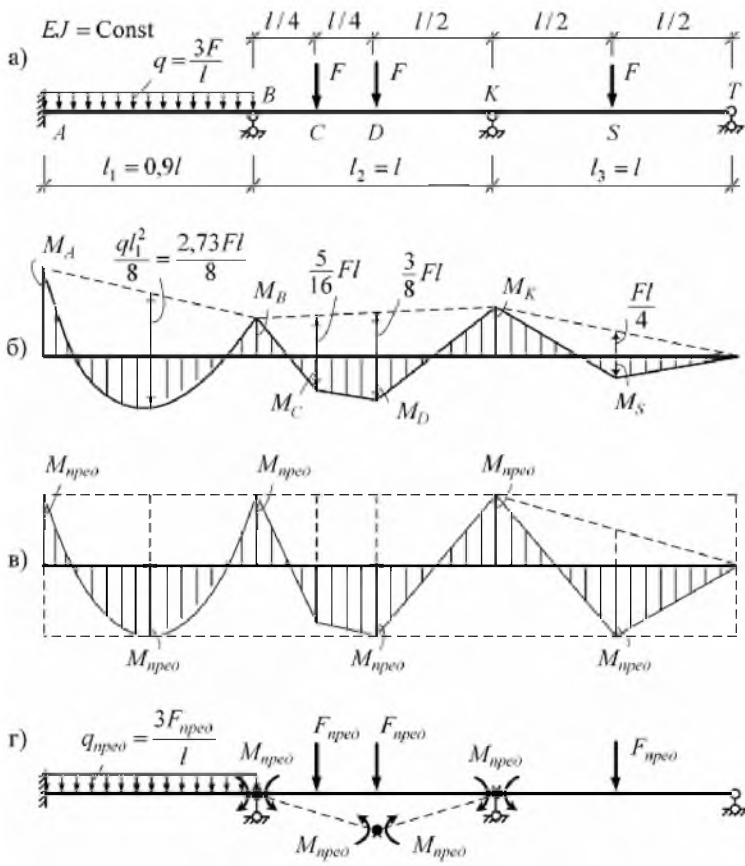


Рис. 17.8

При независимом нагружении, когда нагрузки в пролетах не взаимосвязаны, число возможных простых независимых механизмов разрушения равно числу загруженных пролетов неразрезной балки. Для рассматриваемого примера предельная нагрузка для первого пролета равна:

$$q_{нред} = \frac{3F_{нред}^{(1)}}{l}$$

для второго:

$$F_{пред} = F_{пред}^{(2)},$$

для третьего:

$$F_{пред} = F_{пред}^{(3)}.$$

Для определения предельной нагрузки в пролете, который достиг предельного состояния, используется, чаще всего, кинематический метод. Предельная нагрузка определяется из уравнения возможных работ внешних и внутренних сил.

Вместо составления уравнения возможных работ можно применить способ выравнивания изгибающих моментов, суть которого состоит в совмещении балочной эпюры изгибающих моментов с эпюрой несущих способностей сечений каждого пролета балки (рис. 17. 8,в).

Особенно просто этим способом определяется предельная нагрузка для неразрезной балки постоянного сечения с одинаковой несущей способностью всех пролетов.

Для балок, у которых сечение меняется на опорах, эпюра несущих способностей слева и справа от опор будет иметь разные значения предельных моментов. В этом случае при вписывании балочных эпюр в эпюру несущих способностей сечений в расчет нужно принимать меньшие предельные моменты на опорах, подвешивая балочную эпюру к линии предельных опорных моментов.

Рассмотрим балку, представленную на рис. 17.9,а, жесткость которой различна в разных пролетах. Предельные моменты для сечений в пролетах примем следующими:

$$M_{пред}^{(1)} = 1,2M_{пред}; \quad M_{пред}^{(2)} = M_{пред}; \quad M_{пред}^{(3)} = 0,6M_{пред}.$$

Эпюра несущих способностей сечений представлена штриховыми горизонтальными линиями на рис. 17.9,в.

На рис. 17.9,б показаны балочные эпюры изгибающих моментов в пролетах балки от действующих в этих пролетах внешних

нагрузок. Примем, что нагрузки пропорциональны одному общему параметру  $F$ .

При образовании балочных механизмов в пролетах следует учитывать, что на опорах, на которых меняются несущие способности сечений, а изгибающие моменты, исходя из условия равновесия узлов, слева и справа одинаковы, пластические шарниры будут возникать в сечениях, принадлежащих пролету с меньшей несущей способностью. Для опоры  $B$ , например, пластический шарнир возникнет в сечении справа от опоры, и будет воспринимать предельный момент  $M_{пред}^{(2)}$ . На опоре  $C$  пластический шарнир возникнет также в сечении справа от опоры и будет воспринимать предельный момент  $M_{пред}^{(3)}$ . Балочные эпюры будем подвешивать к линиям предельных опорных моментов:  $ab$  – в первом пролете,  $bc$  – во втором и  $cd$  – в третьем пролете (рис. 17.9,в). В результате балочные эпюры изгибающих моментов впишутся в эпюру несущих способностей рассматриваемой балки так, как показано на рис. 17.9,в.

Рассмотрим образование балочных механизмов в каждом из пролетов отдельно. В первом пролете такой механизм образуется при появлении двух пластических шарниров в сечениях  $K$  (под левой силой  $F$ ) и  $B$  (справа от опоры  $B$ ). Соотношение между ординатами балочной эпюры изгибающих моментов и ординатами эпюры несущих способностей определяется равенством:

$$\frac{Fl}{3} = 1,2M_{пред} + \frac{M_{пред}}{3},$$

из которого найдем

$$F_{пред}^{(1)} = 4,6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Второй пролет превратится в механизм (рис. 17.9,г) при образовании пластических шарниров в сечениях  $B$  (справа от опоры),  $T$  (под силой  $2F$ ) и  $C$  (справа от опоры). Из соотношения ординат балочной эпюры и ординат эпюры несущих способностей пролета следует:

$$\frac{Fl}{2} = M_{\text{перед}} + \frac{M_{\text{перед}} + 0,6M_{\text{перед}}}{2},$$

откуда находим

$$F_{\text{перед}}^{(2)} = 3,6 \frac{M_{\text{перед}}}{l}.$$

В третьем пролете балочный механизм возникнет при появлении пластических шарниров в сечениях  $C$  (справа от опоры),  $D$  (в сечении, примыкающем к защемлению) и в середине пролета. Из равенства

$$\frac{9Fl}{32} = 0,6M_{\text{перед}} + 0,6M_{\text{перед}}$$

следует:

$$F_{\text{перед}}^{(3)} = 4,267 \frac{M_{\text{перед}}}{l}.$$

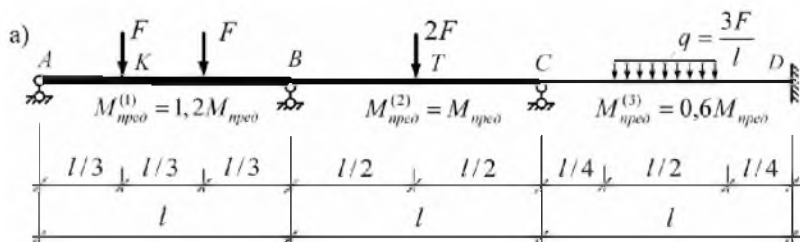
Предельное значение параметра нагрузки  $F$  находится из условия:

$$F_{\text{перед}} = \min \left( F_{\text{перед}}^{(1)}, F_{\text{перед}}^{(2)}, F_{\text{перед}}^{(3)} \right) = 3,6 \frac{M_{\text{перед}}}{l}.$$

Предельному состоянию соответствует образование механизма разрушения во втором пролете балки (рис. 17.9,г).

Рассмотрим пример расчета однопролетной балки с кусочно-постоянной жесткостью на участках  $AC$  и  $CD$  (рис. 17.10). Для перехода балки в предельное состояние необходимо образование двух пластических шарниров. Один из них возникнет в сечении, примыкающем к защемлению, а второй может появиться либо в сечении под силой  $F$ , либо в сечении  $C$ , то есть там, где изменяется жесткость балки. Примем, что предельные моменты сечений балки на участке  $AC$  равны  $M_{\text{перед}}$ , а на участке  $CD$  –  $0,6M_{\text{перед}}$ . Эпюра несущих способностей сечений балки показана на рис. 17.10,в. Балочная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 17.10,б.





б) балочные эпюры изгибающих моментов

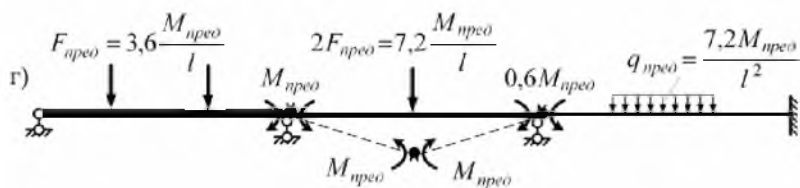
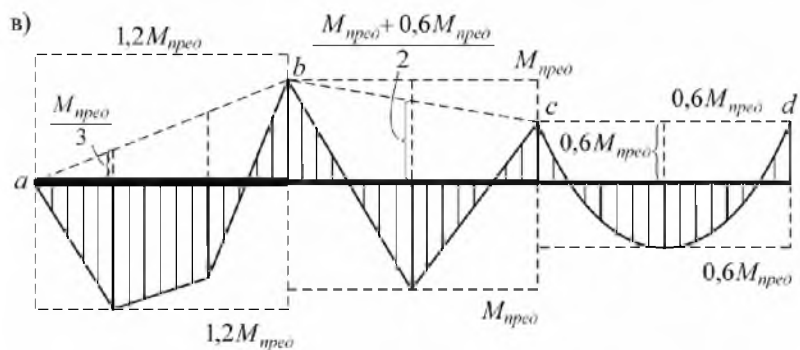
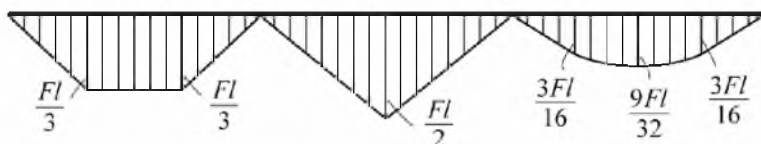


Рис. 17.9

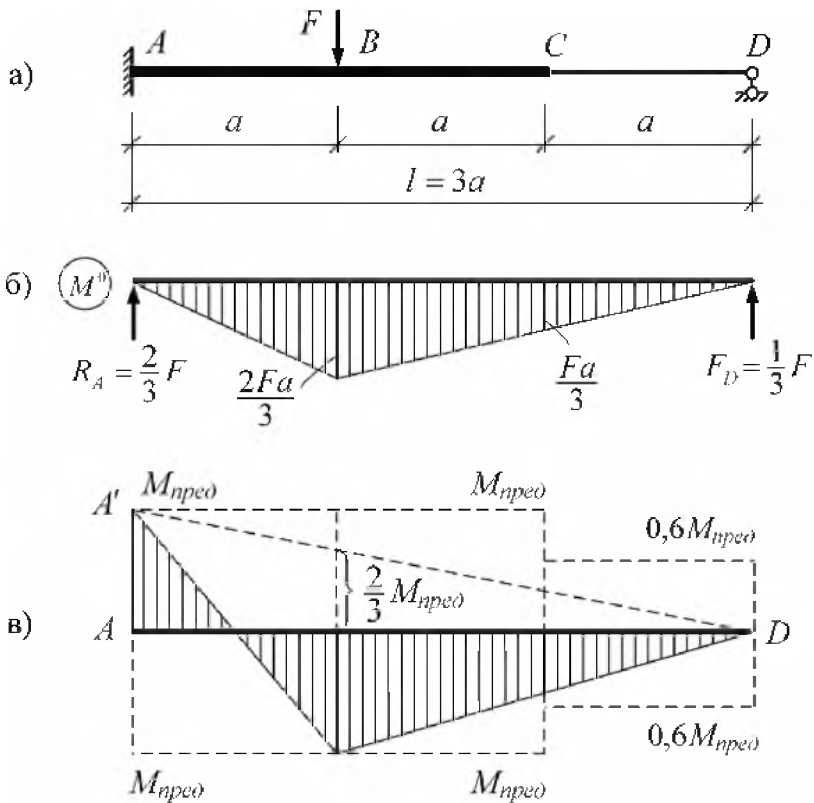


Рис. 17.10

Для определения положения второго пластического шарнира наложим на эпюру несущих способностей сечений (горизонтальные пунктирные линии на рис. 17.10,в) балочную эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки так, чтобы она, будучи подвешенной к линии опорных моментов  $A'D$ , касалась внизу линий предельных моментов (эпюры несущих способностей) в одном из сечений –  $B$  либо  $C$ . Из рис. 17.10,в следует, что касание произойдет под силой  $F$  и, значит, второй пластический шарнир возникнет в сечении  $B$ . Приравняв значение балочного мо-

мента под силой  $F$  равным сумме соответствующих ординат на эпюре несущей способности, получим уравнение:

$$\frac{2Fa}{3} = M_{пред} + \frac{2}{3}M_{пред},$$

из которого найдем предельную нагрузку для рассматриваемой балки:

$$F_{пред} = 2,5 \frac{M_{пред}}{a}.$$

В рассмотренных примерах решались задачи по определению предельных нагрузок на неразрезные балки, несущая способность которых полагалась известной (были заданы предельные моменты, которые могли воспринять сечения).

На практике иногда требуется решить обратную задачу: по заданной (предельной) нагрузке в каждом пролете необходимо найти предельные изгибающие моменты, а по ним подобрать размеры сечений балки. Порядок действий при этом следующий:

а) в каждом пролете строится балочная эпюра изгибающих моментов;

б) в каждом пролете на балочных эпюрах проводятся осевые линии таким образом, чтобы максимальные ординаты балочных эпюр делились пополам (в случае равенства предельных моментов при растяжении верхних волокон и нижних волокон балки) или в другом соотношении, если предельные моменты при растяжении верхних волокон и нижних волокон балки разные; при этом на каждой промежуточной опоре оказываются два разных предельных момента, соответствующие двум смежным пролетам;

в) устанавливается окончательное положение осевой линии балки: положение осевой линии в пролете с наименьшими моментами принимается за окончательное, в дальнейшем производится выравнивание осевой линии последовательным переходом от пролета к пролету в порядке возрастания значений предварительно выровненных моментов; на каждой промежуточной

опоре за окончательное значение предельного опорного момента принимается меньшее из двух;

г) по найденным значениям предельных изгибающих моментов вычисляются пластические моменты сопротивления  $W_{пл}$  и подбираются размеры поперечных сечений.

## ГЛАВА 18

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

#### 18.1. Динамические нагрузки и их классификация

*Динамическими* называют такие нагрузки или другие внешние воздействия на сооружение, которые изменяются во времени достаточно быстро, сообщая массам сооружения заметные ускорения, так что возникающие при этом силы инерции существенно влияют на напряженно-деформированное состояние сооружения. Если инерционные силы, вызываемые нагрузками, изменяющимися во времени, малы по сравнению с самими нагрузками, то такие нагрузки можно приближенно отнести к статическим нагрузкам.

Динамические нагрузки могут изменяться во времени и в пространстве самым произвольным образом. В основном можно выделить следующие характерные виды динамических нагрузок.

**Импульсивная нагрузка** характерна быстрым развитием и быстрым исчезновением, почти мгновенным действием. Импульсивные нагрузки вызывают резкое изменение скорости масс сооружения. Такие нагрузки вызываются ударной волной, порожденной различными взрывами, внезапными порывами ветра и т. п.

**Ударная нагрузка** вызывается падением различных тел на сооружение, работой копров, кузнечных молотов и т. д. Характеризуется резким изменением скорости соударяющихся масс. Если упавшее тело остается на сооружении, то изменяется общая масса сооружения, а вес упавшего тела рассматривается как дополнительная, внезапно приложенная нагрузка.

**Внезапно приложенная нагрузка** является частным случаем ударной (падение тела с нулевой высоты). Появляется на сооружении внезапно и остается постоянной с течением времени.

**Неподвижная периодическая нагрузка** характерна тем, что многократно повторяется через определенные промежутки времени (периоды), оставаясь приложенной к сооружению в одном определенном месте. Аналитически произвольную периодическую нагрузку можно описать зависимостью:

$$F(t) = F(t + T),$$

где  $F$  – произвольная периодическая функция;

$t$  – время как независимая переменная;

$T$  – период изменения нагрузки во времени, то есть время одного полного цикла изменения периодической нагрузки. Малая по значению периодическая нагрузка может иногда создать большой динамический эффект.

Периодическую нагрузку можно разложить в ряд Фурье по синусам (или косинусам), а результирующую реакцию линейно деформируемого сооружения на периодическое воздействие представить как сумму реакций от постоянной составляющей и от каждой гармонической составляющей в отдельности. Таким образом, для определения реакции сооружения на любую периодическую нагрузку достаточно уметь определять его реакцию на действие внезапно приложенной постоянной во времени нагрузки и на действие нагрузки, изменяющейся по закону синуса (или косинуса).

**Вибрационная нагрузка.** Нагрузку, изменяющуюся по закону синуса (или косинуса), называют вибрационной, или гармонической. Гармоническая, вибрационная нагрузка является частным случаем периодической нагрузки. Не нарушая общности, вибрационную нагрузку можно представить в виде:

$$F(t) = F \sin(\theta t + \varphi), \quad (18.1)$$

где  $F$  – амплитуда вибрационной нагрузки;

$\theta$  – круговая, или циклическая частота изменения нагрузки во времени, выражающая количество циклов (периодов) ее изменения за время  $2\pi$  секунд;

сумма в скобках под знаком синуса называется фазой изменения вибрационной нагрузки;

$\varphi$  – начальная фаза изменения нагрузки (при  $t = 0$ ).

Группу вибрационных сил, действующую на сооружение, принято характеризовать вектором:

$$\vec{F}(t) = \vec{F} \sin \theta t . \quad (18.2)$$

Амплитуды  $\vec{F}$  группы вибрационных сил могут быть заданы произвольно. Но предполагается, что во времени все вибрационные силы изменяются с одной и той же частотой  $\theta$ , то есть синфазно, причем начальная фаза группы вибрационных сил полагается нулевой.

Целью динамики сооружений является определение экстремальных усилий и перемещений, а не установление точного характера движения отдельных масс сооружения. Поэтому представление вибрационной нагрузки в виде (18.2) является наиболее неблагоприятным для сооружения.

Природа возникновения вибрационных нагрузок может быть самой разнообразной. Чаще всего вибрационные нагрузки порождаются неуравновешенными вращающимися частями машин и механизмов, установленных на сооружении. Вибрационные нагрузки вызывают гармонические колебания сооружений. Колебания высокой частоты принято называть вибрациями.

**Подвижная нагрузка** характеризуется изменением своего положения на сооружении. Может быть постоянной, периодической, ударной, импульсивной. Как правило, подвижная нагрузка создается разнообразными транспортными средствами: поездами, автомобилями, мостовыми кранами, организованными колоннами людей или неорганизованной толпой и т. п.

**Сейсмическая нагрузка** представляет собой беспорядочные движения почвы, толчки, удары при землетрясениях, подземных взрывах, просадках почвы на подрабатываемых территориях.

Динамический расчет сооружений на сейсмические воздействия от землетрясений или взрывов, а также на динамическое воздействие ветра, на действие подвижной нагрузки, которая меняет с течением времени свое положение, не меняя направления действия и абсолютного значения, в конечном итоге сводится к расчету на действие некоторой системы эквивалентных вибрационных, гармонических сил. Именно поэтому в динамике сооружений изучению влияния на сооружение вибрационных нагрузок уделяется первостепенное значение.

## 18.2. Силы инерции и степень свободы деформируемой системы

При динамическом нагружении деформации сооружения зависят не только от уровня внешних воздействий, но и от уровня возникающих сил инерции, с которыми ускоряющиеся массы воздействуют на каркас сооружения. По определению, сила инерции прямо пропорциональна произведению массы на ускорение и направлена против направления ускорения.

В выбираемой динамической расчетной схеме сооружения проблема расположения масс является первостепенной. От этого зависит закон распределения инерционных сил. В современной динамике сооружений принято рассматривать два основных вида расчетных схем:

– расчетные схемы с дискретным расположением сосредоточенных, точечных масс, движение которых характеризуется конечным числом параметров (степеней свободы) и описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями;

– расчетные схемы с распределенными массами, движение которых характеризуется функциями времени и пространственных координат (бесконечное число степеней свободы) и описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Для анализа колебаний деформируемых систем численными методами на основе современных компьютерных технологий наиболее приспособлены расчетные схемы с сосредоточенными массами, то есть системы с конечным числом степеней свободы. В таких расчетных схемах все элементы (стержни) сооружения считаются невесомыми, а их массу и массу полезной нагрузки заменяют сосредоточенными массами, расположенными дискретно, в узловых точках. В этом случае выражение для сил инерции получается наиболее простым. Для одной сосредоточенной ускоряющейся массы  $m$  выражение для вычисления силы инерции  $J$  имеет вид:

$$J = -mw = -m \frac{d^2 Z}{dt^2}, \quad (18.3)$$

где  $w = \ddot{Z}$  – ускорение массы;  
 $Z$  – перемещение массы.

Для нескольких ускоряющихся масс сооружения применяют векторно-матричные обозначения:

$$\vec{J} = -\mathbf{M} \frac{d^2 \vec{Z}}{dt^2} = -\mathbf{M} \ddot{\vec{Z}}, \quad (18.4)$$

где  $\vec{J}$  – вектор обобщенных сил инерции (сосредоточенных сил по направлению линейных перемещений масс и сосредоточенных моментов по направлению угловых перемещений масс);  $\mathbf{M}$  – квадратная, как правило, диагональная матрица сосредоточенных масс и моментов инерции сосредоточенных масс;  $\ddot{\vec{Z}}$  – вектор ускорений масс (вектор вторых производных по времени от перемещений масс, линейных и угловых).

Размерность (порядок) вектора сил инерции, матрицы масс и вектора ускорений в выражении (18.4) зависит от степени свободы деформируемой системы. В классической динамике сооружений степень свободы колеблющейся деформируемой системы принято рассматривать как количество независимых геометрических параметров, определяющих возможные перемещения только движущихся масс. Поэтому следует различать динамическую степень свободы и общую степень свободы дискретной деформируемой системы. Общая степень свободы дискретной деформируемой системы рассматривается как количество независимых геометрических параметров, определяющих возможные перемещения всех ее узлов. Такое понятие степени свободы эквивалентно понятию кинематической неопределимости при расчете деформируемых систем методом перемещений. Динамическая же степень свободы колеблющейся деформируемой системы относится только к движущимся массам. Различие состоит в том, что в направлении динамических степеней свободы развиваются силы инерции, все остальные направления остаются "безынерционными".

Исторически понятие динамической степени свободы было введено с целью снижения порядка получаемых систем итоговых уравнений, подлежащих решению при анализе колебаний. Если речь идет о динамической степени свободы, то решению подлежит система дифференциальных уравнений движения (система дифференциальных уравнений второго порядка в обыкновенных производных)



относительно перемещений только движущихся масс. Количество уравнений в системе равно динамической степени свободы колебательной системы. Если же речь идет об общей степени свободы дискретной колебательной системы, то решению будет подлежать система совместных алгебраических и дифференциальных уравнений относительно перемещений всех узловых точек. Порядок такой системы будет гораздо выше.

Тем не менее, с целью простоты алгоритмизации решаемых задач, можно, при необходимости, предположить, что динамическая степень свободы дискретной деформируемой системы совпадает с её общей степенью свободы. Отсутствие же в некоторых узлах сосредоточенных масс или сознательное пренебрежение теми или иными инерционными силами можно учесть заданием нулевых значений соответствующих компонент матрицы масс. В этой связи, уместно напомнить, что при использовании современных компьютеров и современного программного обеспечения не имеет принципиального значения, какие уравнения обрабатываются: чисто дифференциальные или смешанные, алгебраические и дифференциальные; пятого или пятисотого порядка; с нулевыми или ненулевыми компонентами матриц. Естественно, размеры матриц должны соответствовать возможностям программного обеспечения.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Двухшарнирная порталъная рама несет сосредоточенную массу в середине пролета (рис. 18.1,а). Собственной массой стержней рамы по сравнению с сосредоточенной массой пренебрегаем. Инерцией вращения сосредоточенной массы как точечной также пренебрегаем. За счет изгибных деформаций стержней рамы сосредоточенная масса может перемещаться по вертикали и горизонтали. Следовательно, система имеет две динамические степени свободы. Вектор сил инерции, вектор ускорений и матрица масс будут второго порядка:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix} = -M\ddot{Z}. \quad (18.5)$$

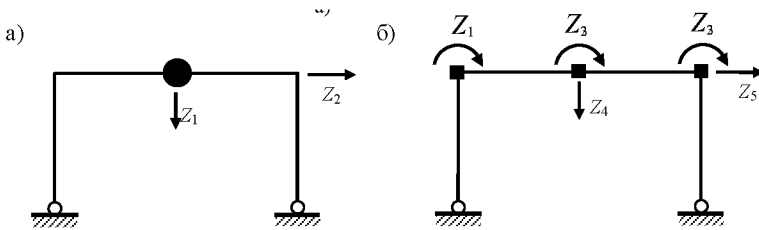


Рис. 18.1

При компьютерном расчете данной системы, допустим, на основе общих уравнений строительной механики должна быть рассмотрена ее дискретная расчетная схема (рис. 18.1,б), состоящая из четырех стержней и трех подвижных жестких узлов. Общая степень свободы данной дискретной системы при пренебрежении продольными деформациями стержней равна пяти: три угла поворота трех жестких узлов и два линейных смещения. Вводимые в динамический расчет (см. ниже) вектор инерционных сил, матрица масс и вектор ускорений системы будут уже пятого порядка:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & m & \\ & & & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Z}_1 \\ \ddot{Z}_2 \\ \ddot{Z}_3 \\ \ddot{Z}_4 \\ \ddot{Z}_5 \end{bmatrix}.$$

Силы инерции вращения по первым трем угловым направлениям входят в общий вектор сил инерции чисто формально. При дальнейшем динамическом расчете они автоматически будут получаться равными нулю. Соответствующие угловые ускорения будут умножаться на нулевые значения соответствующих обобщенных масс (моментов инерции соответствующих масс, из которых две отсутствуют, а инерцией вращения третьей, присутствующей массы мы пренебрегаем). Именно поэтому первые три компоненты матрицы масс пятого порядка приняты равными нулю.

Если в состав расчетной схемы сооружения входят элементы (стержни) с распределенными массами, то точные дифференциальные

уравнения движения такой системы могут быть записаны только в частных производных. Однако, чтобы применить для динамического расчета компьютерные технологии, расчетная динамическая модель такого сооружения должна по-прежнему рассматриваться дискретной. Распределенные силы инерции должны быть заменены эквивалентными узловыми силами инерции. При этом в зависимости от принятой модели учета распределенных масс квадратная матрица масс в выражении (18.4) может оказаться не диагональной, а заполненной.

Действительно, если стержень с равномерно распределенной массой интенсивностью  $m$  (рис. 18.2,а) совершает преимущественно поступательное движение с ускорением  $w_n = w_k = w$ , то на него действует равномерно распределенная сила инерции:

$$J(x) = -mw. \tag{18.6}$$

Эквивалентной дискретной расчетной моделью будет тот же стержень, но уже невесомый, с двумя равными точечными узловыми массами (рис. 18.2,б):

$$M_n = M_k = ml/2 \tag{18.7}$$

и сосредоточенными силами инерции:

$$J_n = J_k = -\frac{mlw}{2}. \tag{18.8}$$

Матричная формула (18.4) для этого стержня примет вид:

$$\begin{bmatrix} J_n \\ J_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{ml}{2} & \\ & \frac{ml}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ w_k \end{bmatrix}, \tag{18.9}$$

то есть матрица масс будет диагональной.

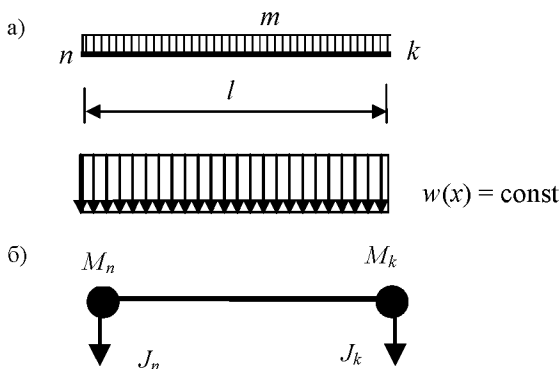


Рис. 18.2

Теперь предположим, что рассматриваемый стержень с равномерно распределенной массой, оставаясь прямолинейным (изгибная жесткость  $EJ \rightarrow \infty$ ), будет двигаться так, что, допустим, вертикальная составляющая ускорений его точек будет изменяться по линейному закону  $w(x)$  (рис. 18.3,а). В данном случае на стержень будет действовать вертикальная составляющая сил инерции, также распределенных по линейному закону:

$$J(x) = -mw(x). \quad (18.10)$$

Эквивалентной дискретной моделью будет тот же стержень с двумя вертикальными узловыми силами инерции (рис. 18.3,б):

$$J_n = -\frac{ml}{6}(2w_n + w_k);$$

$$J_k = -\frac{ml}{6}(w_n + 2w_k),$$
(18.11)

заменяющими распределенные силы инерции.

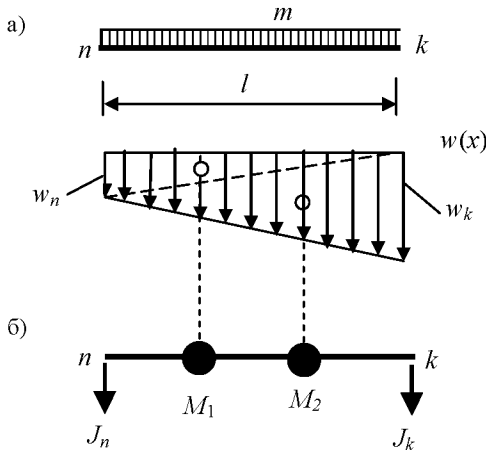


Рис. 18.3

Матричная зависимость (18.4) в этом случае примет вид:

$$\begin{bmatrix} J_n \\ J_k \end{bmatrix} = -\frac{ml}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ w_k \end{bmatrix}, \quad (18.12)$$

то есть матрица масс стала заполненной. Расчетная модель такого стержня будет дискретной, но уже нельзя сказать, что это модель с сосредоточенными узловыми массами. Это будет дискретная модель с некоторыми эквивалентными сосредоточенными массами  $M_1$  и  $M_2$ , расположенными между узлами (рис. 18.3).

В общем случае определение сосредоточенных узловых сил инерции, эквивалентных распределенным силам инерции (или сосредоточенным внеузловым силам инерции) должно производиться точно так же, как и определение эквивалентных узловых нагрузок от произвольных местных нагрузок, приложенных к стержням между узлами. Однако действительный закон распределения инерционных сил по длине стержня заранее не известен, так как не известны динамические перемещения деформируемого стержня, которые следует определять с учетом его изгибных деформаций, и, следовательно, не известны ускорения масс, расположенных на стержне. Характер динамических деформаций стержня становится более

сложным, и речь должна идти о приближенном определении обобщенных сил инерции и обобщенных масс на основе общих методов механики и тех или иных дополнительных предположений о характере движения и форме деформирования элементов, несущих распределенные массы.

### 18.3. Силы сопротивления движению

Помимо динамических нагрузок и сил инерции на характер колебаний деформируемых систем существенное влияние оказывают силы сопротивления движению. Природа сил сопротивления сложна и до сих пор еще не выявлена полностью. В динамике сооружений наиболее широко применяется гипотеза о пропорциональности сил сопротивления движению скоростям движущихся масс. В динамике дискретных систем полагается, что силы сопротивления движению  $\Phi(t)$  являются внешними узловыми, что они пропорциональны и противоположны скоростям перемещений узлов, то есть могут быть аналитически представлены следующей векторно-матричной формулой:

$$\Phi(t) = -\mathbf{H} \frac{d\vec{Z}}{dt} = -\mathbf{H}\dot{\vec{Z}}, \quad (18.13)$$

где  $\mathbf{H}$  – квадратная матрица коэффициентов сопротивления, определяемых опытным путем.

Чаще всего с целью упрощения, как аналитических преобразований, так и вычислений, матрицу сопротивления  $\mathbf{H}$  полагают диагональной или равной линейной комбинации матрицы масс  $\mathbf{M}$  и матрицы внешней жесткости  $\mathbf{R}$  деформируемой колебательной системы:

$$\mathbf{H} = k_1\mathbf{M} + k_2\mathbf{R}, \quad (18.14)$$

где коэффициенты пропорциональности  $k_1$  и  $k_2$  определяются на основании опытных данных.

При этом предполагается, что первое слагаемое в (18.14) учитывает внешнее сопротивление колебаниям, а второе слагаемое – внутреннее неупругое сопротивление материала сооружения деформациям.

Таким образом, можно сказать, что в некоторый произвольный момент времени в процессе динамического деформирования на узлы движущейся (колеблющейся) дискретной системы действуют суммарные внешние динамические силы  $\vec{F}_D$  в составе заданных динамических нагрузок  $\vec{F}(t)$ , вызванных ими сил инерции  $\vec{J}(t)$  и неизбежных сил сопротивления движению  $\vec{\Phi}(t)$ :

$$\vec{F}_D = \vec{F}(t) + \vec{J}(t) + \vec{\Phi}(t) = \vec{F}(t) - M\vec{Z} - H\vec{Z}. \quad (18.15)$$

#### 18.4. Виды колебаний

Все динамические нагрузки вызывают колебания сооружений. Если динамическую систему каким-либо образом, например, отклонением или толчком, вывести из состояния равновесия, а затем предоставить самой себе, то система будет совершать *свободные* колебания. Свободные колебания упругой системы происходят при отсутствии непрерывно действующих динамических нагрузок. Они поддерживаются энергией, сообщенной системе в момент начала колебаний. Энергия колеблющейся системы состоит из потенциальной энергии деформаций системы и кинетической энергии движущихся масс. В процессе свободных колебаний происходит непрерывный обмен: потенциальная энергия переходит в кинетическую, а затем кинетическая энергия переходит в потенциальную. Если предположить, что потерь энергии не происходит, то есть не учитывается внешнее и внутреннее сопротивление движению системы, то ее свободные колебания будут длиться бесконечно долго. Такие идеализированные колебания называют *свободными незатухающими*.

Неизбежные внешние и внутренние сопротивления движению непрерывно поглощают часть энергии колеблющейся системы. Чем больше силы сопротивления, тем быстрее гасятся колебания. Таким образом, в реальных условиях свободные колебания упругой системы являются *затухающими*, то есть их длительность ограничена во времени.

Если на систему непрерывно действует динамическая нагрузка, то она непрерывно будет сообщать системе энергию, преодолеть силы сопротивления и поддерживать колебательное движение. Колебания сооружений при непрерывно действующих динамических нагрузках называют *вынужденными*.

Колебания могут быть периодическими и хаотическими. Следует понимать, что сумма двух периодических движений с несоизмеримыми частотами уже не является периодическим движением.

Колебания можно классифицировать и по виду вызываемых ими деформаций. Колебания называют изгибными или поперечными, если они вызывают преимущественно деформации изгиба стержней и перемещения, перпендикулярные оси стержня. Колебания могут быть продольными, крутильными или крутильно-изгибными, если они вызывают соответственно продольные, крутильные или крутильно-изгибные деформации.

Колебания могут быть линейными и нелинейными. Линейные колебания имеют место в линейно деформируемых системах и описываются линейными дифференциальными уравнениями. Методы решения линейных дифференциальных уравнений движения разработаны достаточно полно. Перемещения линейной колебательной системы должны быть малы по сравнению с габаритами сооружения.

При больших перемещениях в колебательной системе нарушается линейная зависимость между нагрузками и деформациями, система становится геометрически нелинейной. Колебания геометрически нелинейной системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Такие колебания называют нелинейными. Нелинейными будут колебания и в системах, материал которых не следует закону прямой пропорциональности, закону Гука (физическая нелинейность). Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений движения более трудоемки. Для исследования нелинейных колебаний применяют специальные аналитические (асимптотические) и численные методы.

Колебания называют параметрическими, если они вызываются периодическим изменением параметров сооружения, например, длины стержней или их жесткости. Параметрические колебания описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, чаще всего нелинейными. Их решения обладают специфическими свойствами и требуют также применения специальных методов.

В данном курсе будут рассмотрены только линейные колебания, то есть малые колебания линейно деформируемых систем.



## 18.5. Задачи и методы динамики сооружений

Задачи динамики сооружений, как правило, являются поверочными, не связанными с прямой задачей инженерного расчета – подбором сечений элементов сооружений.

*Первую, основную задачу динамики сооружений* можно сформулировать следующим образом.

По заданным геометрическим и жесткостным параметрам сооружения требуется определить частоты (периоды) и формы свободных (собственных) колебаний этого сооружения. Порой первая задача динамики сводится к определению только наименьшей собственной частоты, или к определению собственных частот в заданном частотном диапазоне, или к проверке системы на резонанс.

*Вторая задача динамики сооружений*, называемая динамическим расчетом сооружений, формулируется так.

По заданным геометрическим и жесткостным параметрам сооружения и динамическим нагрузкам требуется определить динамические усилия и динамические перемещения колеблющейся (движущейся) системы. При этом, как правило, инженера интересует не точный закон изменения во времени, допустим, перемещений узлов или изгибающих моментов в элементах сооружения, а их экстремальные значения.

С точки зрения жесткости и прочности сооружения, это будут амплитуды перемещений, амплитуды усилий, амплитуды напряжений и т. д., вызванные, допустим, вибрационной нагрузкой. Таким образом, под динамическим перемещением некоторого узла следует понимать амплитуду этого перемещения. Ее берут либо со знаком плюс, либо со знаком минус. Если колебания системы хаотические, то в результате динамического расчета ищут экстремальные значения перемещений и усилий.

С точки зрения воздействия колебаний на людей, искомыми могут быть амплитуды перемещений, амплитуды скоростей и амплитуды ускорений, так называемые виброперемещения, виброускорения и виброускорения.

Решение задач динамики сооружений базируется на известных методах общей механики и вычислительной математики. Для составления дифференциальных уравнений движения применяют два основных метода механики: кинетостатический метод и энергетический метод.

*Кинетостатический метод* заключается в том, что движущееся сооружение в любой момент времени рассматривается как безмас-

совое, находящееся в равновесии (в покое) под действием мгновенных динамических сил, а именно: заданных динамических нагрузок, сил сопротивления движению и сил инерции, заменяющих действие отброшенных ускоряющихся масс. Мгновенные динамические перемещения и динамические усилия рассматриваются как статические, вызванные мгновенными значениями динамических сил. Далее применяются методы статики сооружений: составляются уравнения равновесия, деформаций, или используются общие методы механики, например, принцип возможных перемещений. Для многоэлементных систем применяют дискретную расчетную схему и составляют общие уравнения строительной механики: статические (с учетом сил инерции и сил сопротивления), геометрические, физические. Или применяют метод конечных элементов.

*Энергетический метод* основан на применении принципа стационарности полной энергии системы и вытекающих из этого принципа уравнениях Лагранжа второго рода. В такой постановке энергетический метод применяется для точного описания движения динамических систем.

Энергетический метод может быть применен и для приближенного описания свободных незатухающих колебаний сложных систем. В этом случае используется закон сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергии в процессе свободных незатухающих колебаний остается постоянной:

$$T + U = const ,$$

где  $T$  – кинетическая энергия;  
 $U$  – потенциальная энергия.

Для решения дифференциальных уравнений движения в динамике сооружений применяют аналитические и численные методы.

Решение линейных дифференциальных уравнений движения с постоянными коэффициентами сводят к решению систем линейных алгебраических уравнений, однородных (свободные колебания, полная или частичная проблема собственных значений) или неоднородных (действие вибрационной нагрузки). Решение линейных дифференциальных уравнений движения с переменными коэффициентами, нелинейных дифференциальных уравнений движения и дифференциальных уравнений движения при непериодических нагрузках ведут на компьютерах, как правило, численными методами. Либо численными

методами общего характера, предназначенными для решения задач Коши (задач с начальными условиями) для систем произвольных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Либо специальными численными методами, предназначенными для решения уравнений движения, то есть систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, без преобразования последних в системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение систем с неравномерно распределенными массами, ведут, как правило, численными и численно-аналитическими методами на основе вариационных методов (метод Релея–Ритца, метод Власова–Канторовича, метод Бубнова–Галеркина) и конечно-разностных методов (метод сеток, вариационно-разностный и т. п.).

Мощным методом решения динамических задач для систем с распределенными массами является метод замены распределенных масс сосредоточенными массами, основанный на идеях метода конечных элементов.

## ГЛАВА 19

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

#### 19.1. Дифференциальное уравнение движения

Рассмотрим движение простейшей системы с одной степенью свободы: поперечные колебания невесомой балки, несущей в середине пролета сосредоточенную массу  $m$  и нагруженную в этой же точке динамической нагрузкой в виде вертикальной силы  $F(t)$ , изменяющейся с течением времени (рис. 19.1). Силы сопротивления движению пока рассматривать не будем.

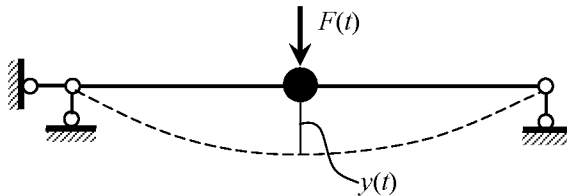


Рис. 19.1

Пусть в процессе движения под действием динамической нагрузки балка с массой в некоторый момент времени  $t$  сместится по вертикали на величину  $y(t)$ . В соответствии с кинестатическим методом можно положить, что это перемещение вызвано в безмассовой балке действием динамической нагрузки  $F(t)$  и силы инерции  $J = -m\ddot{y}$ , соответствующих рассматриваемому моменту времени  $t$  (рис. 19.2). Чтобы найти в балке неизвестное перемещение  $y(t)$ , можно применить формулу Мора:

$$y(t) = \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M_F}{EI} dx, \quad (19.1)$$

где  $M_1$  – изгибающие моменты в балке от вертикальной единичной силы, в направлении которой определяется перемещение;

$M_F$  – изгибающие моменты в балке от совместного действия динамической силы  $F(t)$  и силы инерции  $J$ .

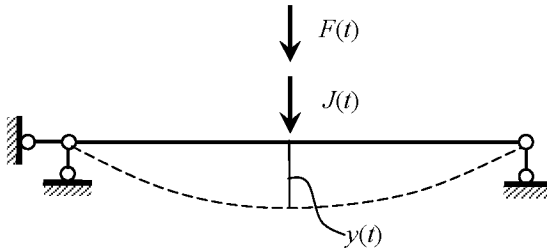


Рис. 19.2

Сила инерции неизвестна, выражается через неизвестное ускорение. Воспользуемся для определения неизвестных изгибающих моментов  $M_F$  принципом независимости действия сил и известными единичными изгибающими моментами  $M_1$ :

$$M_F = M_1(F(t) + J(t)). \quad (19.2)$$

Подставив выражение для  $M_F$  (19.2) в формулу (19.1), получим:

$$y(t) = \delta_{11}(F(t) + J(t)), \quad (19.3)$$

где

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EJ} dx = (M_1 \cdot M_1)$$

есть податливость системы в направлении искомого перемещения движущейся массы, то есть перемещение, в данном случае балки в середине пролета в вертикальном направлении, вызванное единичной безразмерной силой, приложенной в том же направлении.

Выразив в (19.3) силу инерции через произведение массы на ускорение и опустив индексы при единичном перемещении, получим дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы под действием динамической нагрузки:

$$y = \delta(F(t) - m\ddot{y}),$$

или

$$\delta m \ddot{y} + y = \delta F(t). \quad (19.4)$$

Разделив (19.4) на  $\delta$ , можно получить дифференциальное уравнение движения в несколько ином виде:

$$m\ddot{y} + ry = F(t), \quad (19.5)$$

где использовано обозначение

$$r = \frac{1}{\delta}. \quad (19.6)$$

Величину  $r$ , обратную податливости  $\delta$ , называют жесткостью системы в направлении перемещения движущейся массы. Иногда уравнение вида (19.4) называют уравнением движения в обратной форме, а уравнение вида (19.5) – уравнением движения в прямой форме.

## 19.2. Свободные колебания

Чтобы заставить систему совершать свободные колебания, ее можно отклонить от положения равновесия на некоторое начальное перемещение  $y_0$  и толкнуть, придав некоторую начальную скорость  $v_0$ . Перемещение  $y_0$  и скорость  $v_0$  называются начальными возмущениями. При отсутствии постоянно действующих динамических нагрузок дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы (19.5) становится однородным:

$$m\ddot{y} + ry = 0. \quad (19.7)$$

Разделив (19.7) на  $m$ , получим:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (19.8)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \frac{1}{\sqrt{\delta m}}. \quad (19.9)$$

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (19.8) может быть представлено в виде суммы двух периодических функций:

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (19.10)$$

Произвольные постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  зависят от начальных возмущений (начальных условий) и равны:

$$A = \frac{v_0}{\omega}; \quad B = y_0. \quad (19.11)$$

Решению (19.10) дифференциального уравнения свободных колебаний (19.8) можно придать более простой вид:

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \eta), \quad (19.12)$$

где в качестве новых произвольных постоянных интегрирования выступают амплитуда свободных колебаний  $Y$  и начальная фаза  $\eta$ , которые также можно выразить через начальные возмущения:

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}; \quad \eta = \text{arctg}\left(\frac{y_0\omega}{v_0}\right). \quad (19.13)$$

Таким образом, при произвольных ненулевых начальных возмущениях движение массы будет происходить по синусоидальному закону с постоянной амплитудой  $Y$  и сдвигом по фазе  $\eta$ .

Рассмотрим частные варианты начальных возмущений.

*Вариант 1.* Задано начальное отклонение массы, начальная скорость равна нулю:

$$y(0) = y_0; \quad v(0) = \dot{y}(0) = 0. \quad (19.14)$$

Подставив начальные возмущения (19.14) в формулу (19.11), а затем в (19.10), получим:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t. \quad (19.15)$$

График движения массы во времени в соответствии с уравнением (19.15) показан на рис. 19.3.

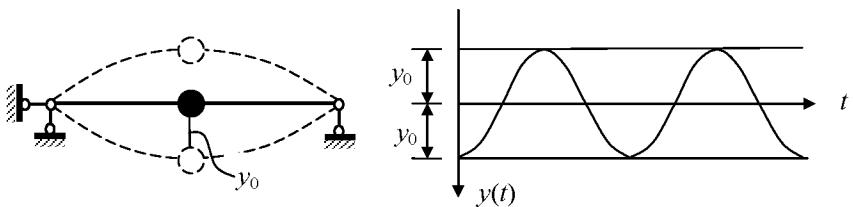


Рис. 19.3

Таким образом, если отклонить массу на расстояние  $y_0$  от положения равновесия, а затем отпустить без начальной скорости, то

она будет двигаться во времени по закону косинуса с постоянной амплитудой, равной начальному отклонению.

*Вариант 2.* Задана начальная скорость массы, а начальное отклонение равно нулю:

$$v(0) = \dot{y}(0) = v_0; \quad y(0) = 0. \quad (19.16)$$

Подставив (19.16) в (19.13), получим:

$$Y = \frac{v_0}{\omega}; \quad \eta = 0.$$

Следовательно, в соответствии с (19.12) уравнение движения примет вид:

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (19.17)$$

Таким образом, если сообщить массе только начальную скорость  $v_0$ , то она будет двигаться по синусоиде с постоянной амплитудой  $Y = v_0 / \omega$  (рис. 19.4).

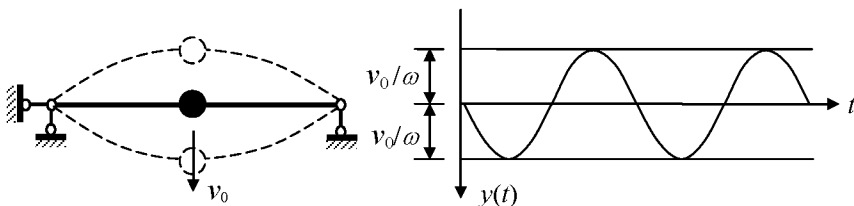


Рис. 19.4

Входящая в формулы (19.10)–(19.13) величина  $\omega$  выражает собой круговую, или циклическую частоту, то есть число полных циклов (периодов) колебаний за время  $2\pi$  секунд. Круговую частоту свободных колебаний системы с одной степенью свободы легко вычислить по формулам (19.9), зная массу и жесткость (или подат-



ливость) динамической системы. Период (время одного цикла) свободных колебаний выражают через круговую частоту по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (19.18)$$

Величина, обратная периоду

$$f = \frac{1}{T}, \quad (19.19)$$

выражает число полных циклов колебаний в секунду, измеряется в Герцах и называется физической частотой. Физическая частота связана с круговой частотой зависимостью:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (19.20)$$

Рассмотрим пример определения частот и периодов свободных колебаний систем с одной степенью свободы.

Пример 19.1. Для системы, изображенной на рис. 19.5,а, требуется определить круговую частоту  $\omega$ , период  $T$  и частоту в Герцах  $f$ .

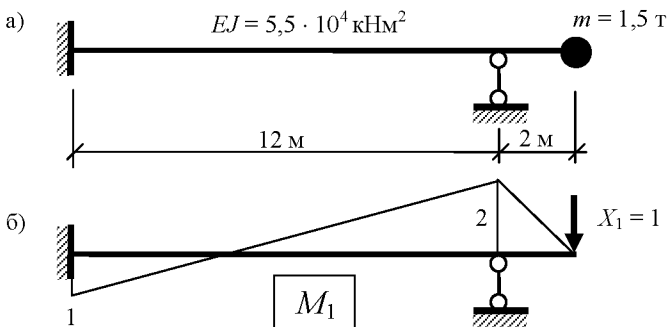


Рис. 19.5

Система может совершать поперечные, изгибные колебания. Сосредоточенная масса будет перемещаться по вертикали. Методом сил или методом перемещений построим эпюру изгибающих моментов от вспомогательной вертикальной единичной силы  $X_1 = 1$ , приложенной в направлении возможного перемещения массы (рис. 19.5,б). Затем вычислим податливость системы в этом направлении, то есть перемещение по направлению вертикальной вспомогательной силы, вызванное самой вспомогательной единичной силой:

$$\delta_{11} = (M_1 \cdot M_1) = \frac{1}{EJ} \times \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{12}{6} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 2) \right] = \frac{44}{3EJ}.$$

По формуле (19.9) найдем круговую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{44m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5,5 \cdot 10^4}{44 \cdot 1,5}} = 50 \text{ сек}^{-1}$$

Период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,1416}{50} = 0,1257 \text{ сек}.$$

Физическая частота:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1257} = 7,96 \text{ Гц}.$$

**Пример 19.2.** Определить частоту свободных колебаний однопролетной одноэтажной рамы (рис. 19.6,а), предполагая, что ригель рамы абсолютно жесткий, стойки невесомые, а масса ригеля и полезной нагрузки равномерно распределена по длине пролета.

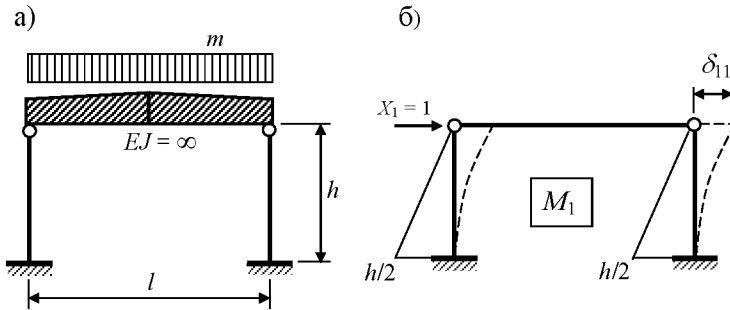


Рис. 19.6

При невесомых стойках и абсолютно жестком ригеле раму можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, способную совершать горизонтальные колебания за счет изгибных деформаций стоек. Вычислим полную массу ригеля:

$$M = ml.$$

Определим податливость  $\delta$  рамы по горизонтали в уровне покрытия (рис. 19.6,б):

$$\delta = \delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot h \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^3}{6EJ},$$

и найдем круговую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{6EJ}{mlh^3}}.$$

На рис. 19.7 показано определение жесткости рассматриваемой рамы в направлении колебаний. В данном случае жесткость рамы по горизонтали равна реакции  $r$ , которая возникает в дополнительном горизонтальном опорном стержне при его линейном смещении на единицу.

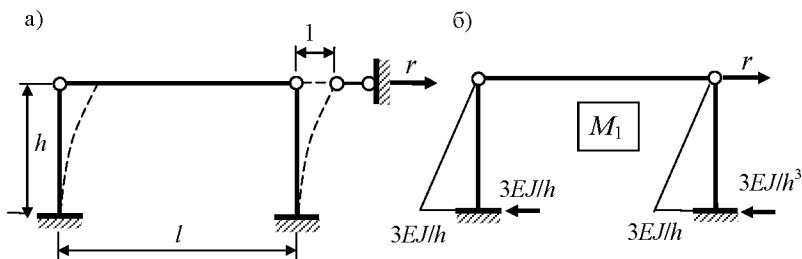


Рис. 19.7

Итак, имеем:

$$r = 3 \frac{EJ}{h^3} + 3 \frac{EJ}{h^3} = \frac{6EJ}{h^3}.$$

Как видим, жесткость  $r$  обратна податливости  $\delta$ .

### 19.3. Общий случай действия возмущающей нагрузки

При действии на систему с одной степенью свободы произвольной динамической нагрузки  $F(t)$  общее решение неоднородного дифференциального уравнения движения вида (19.5) может быть представлено в виде суммы двух решений:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad (19.21)$$

где  $y_1(t)$  – общее решение (19.10) или (19.12) соответствующего однородного уравнения (19.7) свободных колебаний;

$y_2(t)$  – частное решение собственно неоднородного уравнения (19.5) вынужденных колебаний. Это частное решение примет вид:

$$y_2(t) = \omega \delta \int_0^t F(u) \sin \omega(t-u) du. \quad (19.22)$$

где  $u$  – вспомогательная переменная интегрирования.

Определенный интеграл (квадратуру) в выражении (19.22) при произвольном законе изменения динамической нагрузки  $F(u) = F(t)$  для каждого конкретного значения переменной  $t$  можно вычислить чаще всего численно, применяя квадратурные формулы (прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса и т. п.). Процесс этот является достаточно громоздким. Поэтому вместо решения в квадратурах (19.22) для динамической нагрузки общего вида можно применить и численные методы решения непосредственно дифференциального уравнения движения (19.5), известные из вычислительной математики. Для некоторых частных видов динамической нагрузки (внезапно приложенной, вибрационной и др.) существуют аналитические решения.

#### 19.4. Действие внезапно приложенной нагрузки

Пусть к массе системы с одной степенью свободы внезапно приложена сила  $F(t) = F$  и остается на ней достаточно долго. Найдем частное решение (19.22) дифференциального уравнения движения (19.5) для этого случая:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= F\omega\delta \int_0^t \sin \omega(t-u) du = \\
 &= F\delta(1 - \cos \omega t) = y_{st}(1 - \cos \omega t),
 \end{aligned}
 \tag{19.23}$$

где  $y_{st} = F\delta$  есть перемещение по направлению движения массы от статически приложенной силы  $F$ .

Как следует из (19.23), система совершает простые гармонические колебания с частотой свободных колебаний  $\omega$  и амплитудой  $y_{st}$ .

Можно сказать, что колебания совершаются относительно деформированного состояния, вызванного статически приложенной силой  $F$ . Размах колебаний равен  $2y_{st}$ . Максимальные отклонения системы относительно недеформированного состояния при нулевых начальных условиях ( $y_1(t) = 0$ ) имеют место в моменты

времени, когда  $\cos \omega t = -1$ , и равны размаху колебаний, то есть  $y_{\max} = 2y_{st}$ .

Таким образом, действие внезапно приложенной нагрузки в два раза более опасно, чем действие равной по значению статически приложенной нагрузки.

### 19.5. Действие гармонической нагрузки

Рассмотрим действие на систему с одной степенью свободы гармонической нагрузки, изменяющейся по закону синуса:

$$F(t) = F \sin \theta t, \quad (19.24)$$

где  $F$  – амплитудное значение нагрузки;  
 $\theta$  – круговая частота ее изменения.

Частное решение (19.22) дифференциального уравнения вынужденных колебаний (19.5) с правой частью (19.24) примет вид:

$$y_2(t) = y_{st} \mu \sin \theta t, \quad (19.25)$$

где введены обозначения:

$$y_{st} = \delta F, \quad \mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (19.26)$$

Общее решение (19.22) дифференциального уравнения вынужденных колебаний с учетом (19.10) и (19.25) можно записать так:

$$y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + y_{st} \mu \sin \theta t. \quad (19.27)$$

С учетом ненулевых начальных условий:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0$$

найдем постоянные интегрирования:

$$A = \frac{v_0}{\omega} - y_{st}\mu \frac{\theta}{\omega}, \quad B = y_0,$$

и вместо (19.27) получим:

$$y(t) = \left( \frac{v_0}{\omega} - y_{st}\mu \frac{\theta}{\omega} \right) \sin \omega t + y_0 \cos \omega t + y_{st}\mu \sin \theta t.$$

Если предположить, что гармоническая нагрузка (19.24) начинает действовать на покоящуюся систему при нулевых начальных возмущениях

$$v_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

то вынужденные колебания будут состоять из суммы двух гармонических движений:

$$y(t) = y_2(t) = y_{st}\mu \left( \sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (19.28)$$

Суммируются чисто вынужденные колебания, происходящие с частотой вынуждающей нагрузки  $\theta$ , и сопровождающие свободные, совершающиеся с частотой  $\omega$ , но с амплитудой, зависящей от частоты и амплитуды вынуждающей нагрузки. Результирующее движение носит характер биений и в общем случае при произвольной частоте вынуждающей гармонической нагрузки, не соизмеримой с частотой свободных колебаний, является даже непериодическим.

Чтобы все-таки заставить колебательную систему совершать чисто периодические движения с частотой вынуждающей силы  $\theta$ , можно соответствующим образом подобрать начальные возмущения. Так, при начальных условиях

$$v_0 = y_{st}\mu\theta, \quad y_0 = 0,$$

как следует из (19.27), свободные синусоидальные колебания и сопровождающие свободные колебания взаимно погашаются, и остаются чисто вынужденные гармонические колебания:

$$y(t) = y_{st} \mu \sin \theta t, \text{ или } y(t) = y_{din} \sin \theta t, \quad (19.29)$$

где

$$y_{din} = \mu y_{st}.$$

В зависимости (19.26)–(19.29) входят следующие физические величины и понятия:  $y_{din}$  – амплитуда динамических перемещений;  $y_{st}$  – перемещение (прогиб) колебательной системы в направлении движения массы от статически приложенной силы, равной по значению амплитуде динамической нагрузки;  $\mu$  – динамический коэффициент, показывающий во сколько раз максимальные динамические перемещения (а также усилия и другие параметры), вызванные вибрационной нагрузкой, отличаются от статических перемещений (усилий или других параметров соответственно), вызванных в той же упругой системе статической силой, равной по значению амплитуде вибрационной нагрузки.

В приведенном выше решении не учитывались силы сопротивления движению. В реальных системах с течением времени свободные колебания неизбежно затухают и сохраняются чисто вынужденные гармонические колебания, так называемые установившиеся или стационарные колебания. Поэтому в практических расчетах обычно используют формулу (19.29) вместо более громоздкой (19.28). Как правило, это идет в запас прочности и жесткости при колебаниях в дорезонансной зоне, когда частота вынуждающей нагрузки удовлетворяет соотношению:

$$\theta < (0,70 \div 0,80)\omega.$$

Так как целью динамического расчета является определение амплитуд динамических перемещений и амплитуд динамических усилий, то для этого достаточно выполнить статический расчет упругой системы на действие статической силы, равной по значению амплитуде вибрационной силы, и вычислить динамический коэффициент  $\mu$  по формуле (19.26). Затем амплитуда любой динамической величины (при условии, что точка приложения вибрационной силы и точка



сосредоточения массы совпадают) вычисляется через соответствующую статическую величину по формуле:

$$T_{din} = \mu T_{st}, \quad (19.30)$$

где под символом  $T$  понимается любой параметр, характеризующий напряженно-деформированное состояние упругой системы: перемещение, усилие, деформация, напряжение и т. д.

### 19.6. Резонанс и его развитие во времени

При совпадении частоты вынуждающей нагрузки с частотой свободных колебаний ( $\theta = \omega$ ) в колебательной системе имеет место явление, называемое резонансом. В этом случае, как следует из формулы (19.26), динамический коэффициент принимает бесконечно большое значение ( $\mu = \infty$ ). Однако амплитуды динамических перемещений не мгновенно становятся бесконечно большими. При резонансе точное выражение (19.28) для вычисления динамического перемещения становится неопределенным:

$$y(t) = y_{st} \infty 0 = y_{st} \frac{0}{0}.$$

Раскрыв в (19.28) неопределенность по правилу Лопиталья, получим:

$$y(t) = \frac{y_{st}}{2} (\sin \theta t - \theta t \cos \theta t). \quad (19.31)$$

График разности гармонических функций, стоящей в скобках в зависимости (19.31), показан на рис. 19.8. Следовательно, при резонансе в идеализированной системе без учета сил сопротивления амплитуда колебаний нарастает во времени по линейному закону. Причем за два – три размаха она превышает соответствующее статическое перемещение приблизительно в 10 раз. Как будет показано ниже, силы сопротивления движению ограничивают нарастание амплитуд динамических перемещений. Даже при резонансе в ли-

нейной системе с сопротивлением амплитуды колебаний остаются конечными. Кроме того, при повышенном уровне деформаций в колебательной системе начинают проявляться нелинейные эффекты, что тоже ведет к снижению резонансных перемещений. Тем не менее, в реальных сооружениях резонансные колебания не допустимы.

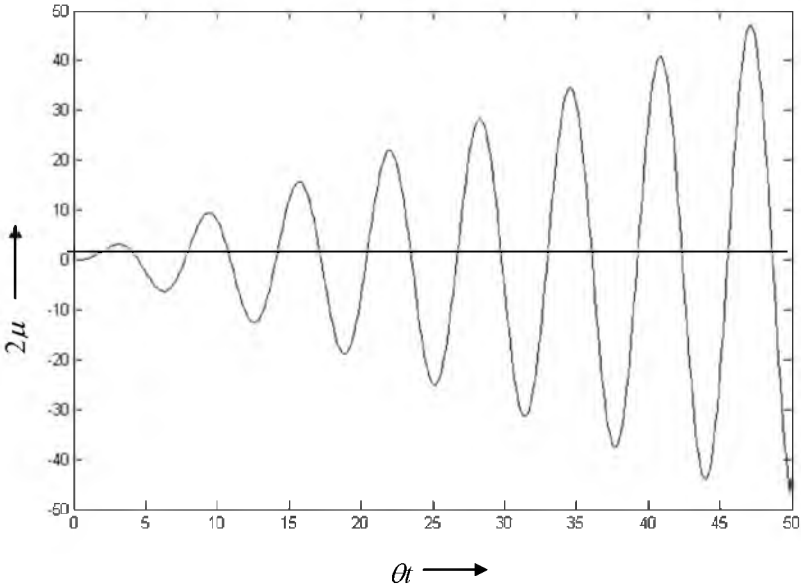


Рис. 19.8

### 19.7. Свободные колебания с учетом сил сопротивления

В реальных сооружениях всегда имеют место процессы, приводящие к рассеиванию, поглощению энергии колебаний. С течением времени свободные колебания механической системы обязательно затухают. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления совершаются с меньшими амплитудами, чем при отсутствии сил сопротивления.

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления движению, пропорциональной скорости движущейся массы, но противоположной ей по направлению:

$$\varphi(t) = -h\dot{y}(t), \quad (19.32)$$

где  $h$  – коэффициент пропорциональности.

Соответствующее дифференциальное уравнение затухающих свободных колебаний можно записать так:

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ry = 0. \quad (19.33)$$

Приведем это уравнение к виду, принятому в теории дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (19.34)$$

где введены обозначения:

$$2n = \frac{h}{m}, \quad \omega^2 = \frac{r}{m} = \frac{1}{\delta m}.$$

Последнее равенство выражает собой квадрат частоты свободных незатухающих колебаний, то есть свободных колебаний без учета сил сопротивления. Параметр  $n$  в задачах динамики сооружений всегда является положительным, так как по физическому смыслу характеризует силы сопротивления, способствующие затуханию колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения (19.34) при достаточно малых значениях параметра  $n$  имеет вид:

$$y(t) = ye^{-nt} \sin(\omega_1 t + \eta), \quad (19.35)$$

где постоянные интегрирования  $y$  и  $\eta$  с учетом ненулевых начальных возмущений  $y(0) = y_0$  и  $\dot{y}(0) = v_0$  равны:

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + ny_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \eta = \arctg\left(\frac{\omega_1 y_0}{v_0 + ny_0}\right).$$

В полученных выражениях через  $\omega_1$  обозначена круговая частота затухающих свободных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (19.36)$$

Для реальных сооружений  $n \ll \omega$ , и поэтому практически частоты незатухающих  $\omega$  и затухающих  $\omega_1$  свободных колебаний можно считать совпадающими. График затухающих свободных колебаний в соответствии с уравнением (19.35) показан на рис. 19.9.

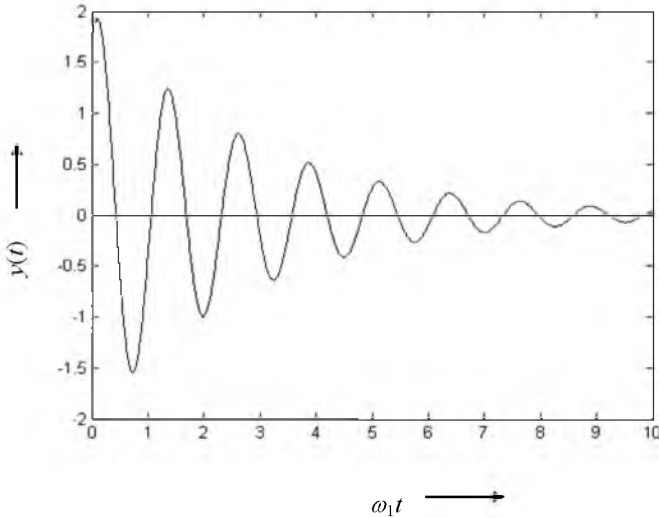


Рис. 19.9

Рассмотрим отношение амплитуд затухающих свободных колебаний для двух моментов времени, отличающихся на период  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ :

$$\frac{y(t)}{y(t + T_1)} = \frac{ye^{-nt}}{ye^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}.$$

Натуральный логарифм от последнего выражения

$$\ln e^{nT_1} = nT_1 = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \delta \quad (19.37)$$

носит название логарифмического декремента колебаний и характеризует быстроту затухания свободных колебаний.

Как следует из (19.37), логарифмический декремент колебаний зависит от демпфирующих и упругих свойств колебательной системы, от периода и, следовательно, от частоты свободных колебаний. Таким образом, принятая гипотеза учета сил сопротивления (силы сопротивления пропорциональны скоростям движущихся масс, гипотеза вязкого трения) приводит к эффекту частотно-зависимого затухания.

Хотя картина затухания, даваемая гипотезой вязкого трения, является вполне приемлемой, а математические выкладки – достаточно простыми, многочисленные эксперименты показывают, что в строительных сооружениях затухание, в первую очередь, обусловлено внутренним трением (иначе неупругим сопротивлением), причем логарифмический декремент не зависит от частоты колебаний, то есть является частотно-независимым.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы (рис. 19.10). Предположим, что масса системы удалена, а по направлению ее движения поставлена связь. Если связь заставить принудительно перемещаться по гармоническому закону с частотой  $\theta$  и амплитудой  $A$ , то со стороны связи на балку будет действовать сила  $F$ , также изменяющаяся по тому же гармоническому закону. Зависимость между силой  $F$  и перемещением  $\Delta$  при циклическом изменении последнего в пределах  $\pm A$  в реальной системе будет неоднозначной. Полному циклу изменения перемещения соответствует замкнутая гистерезисная петля. Для гармонических колебаний она может быть принята в виде вытянутого эллипса. Суммарная сила  $F$  может быть представлена как сумма восстанавливающей, упругой силы  $R$  и силы неупругого сопротивления  $\Phi$ :

$$F = R + \Phi .$$

Во времени эти силы изменяются циклически с периодом  $T$ , но со сдвигом по фазе в четверть периода. Их амплитудные значения

$\pm R_A$  и  $\pm \Phi_0$  (рис. 19.10) достигаются в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на  $T/4$ .

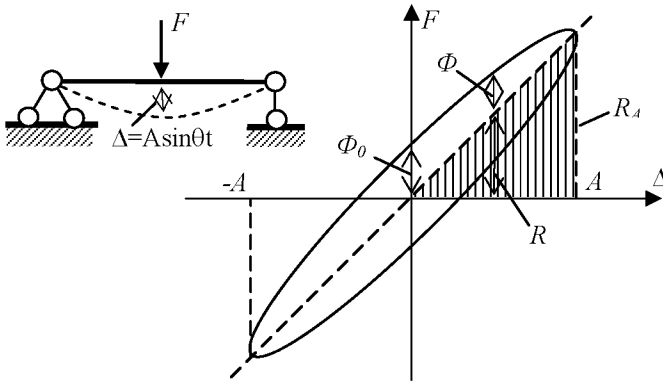


Рис. 19.10

Работа силы  $R$  за полный цикл колебаний равна нулю. Работа силы  $\Phi$  равна площади эллипса, образующего петли гистерезиса:

$$\Delta W = \pi A \Phi_0.$$

Такое количество работы необратимо затрачивается за полный цикл колебаний на преодоление сил сопротивления. Эта работа равна энергии  $\Delta U$ , поглощаемой реальной конструкцией за счет неупругих свойств материала (микропластические деформации, микротрещины, тепловые эффекты и т. п.).

Мерой, характеризующей способность материала сооружения сопротивляться колебаниям, принято считать отношение поглощенной энергии  $\Delta U = \Delta W$  к амплитудному значению потенциальной энергии деформации  $U_A$ , численно равной площади заштрихованного треугольника (рис. 19.10). Это отношение называют коэффициентом поглощения энергии колебаний (коэффициентом диссипации)  $\psi$ . Следовательно,

$$\psi = \Delta U / U_A = \pi A \Phi_0 / (R_A A / 2) = 2\pi \Phi_0 / R_A = 2\pi \gamma,$$

где  $\gamma = \Phi_0 / R_A$  является отношением амплитуд неупругой и упругой сил (рис. 19.10) и называется, в свою очередь, коэффициентом неупругого сопротивления, или коэффициентом внутреннего трения.

Многочисленные эксперименты, выполненные разными исследователями, показали, что коэффициент поглощения энергии колебаний  $\psi$  и коэффициент неупругого сопротивления колебаниям  $\gamma$  практически не зависят от частоты колебаний, но зависят от уровня напряжений и, следовательно, от уровня амплитуд  $A$ , а также зависят от вида конструкции. Причем для каждого конкретного вида конструкции (стальной мост, стальная дымовая труба, железобетонная балка, железобетонная рама, железобетонный свод и т. д.) опытные данные имеют сильный разброс.

Для основных строительных материалов в диапазоне малых напряжений (по сравнению с расчетным сопротивлением) коэффициент неупругого сопротивления  $\gamma$  осредняют и полагают, что с ростом напряжений он растет по линейному закону до определенного уровня  $\gamma_0$ . В диапазоне средних напряжений он не зависит от уровня напряжений и может быть принят постоянным (рис. 19.11,а). При этом следует отметить, что в машиностроительных сталях этот коэффициент нелинейно зависит от уровня напряжений во всем диапазоне изменения напряжений (рис. 19.11,б), но не зависит от частот колебаний.

В строительных сооружениях коэффициент внутреннего трения (неупругого сопротивления)  $\gamma$  обычно мал по сравнению с единицей. В табл. 19.1 приведены значения коэффициента неупругого сопротивления  $\gamma_0$ , допустимые для динамических расчетов строительных конструкций в области малых и средних значений напряжений.

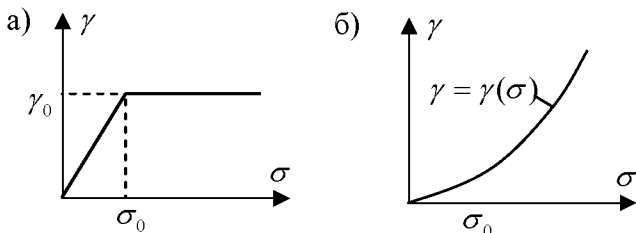


Рис. 19.11

Таблица 19.1

Материал	$\gamma_0$
Бетон и железобетон	0,100
Кирпичная кладка	0,080
Дерево	0,050
Прокатная сталь	0,025
<p><i>Примечание</i> – Приведенные в таблице 19.1 значения коэффициента внутреннего трения <math>\gamma_0</math> установлены для уровня амплитудных значений напряжений <math>\sigma \geq \sigma_0 \approx 0,02R</math>, где <math>R</math> – расчетное сопротивление материала.</p> <p>Для значений напряжений <math>\sigma &lt; \sigma_0</math> коэффициент <math>\gamma</math> вычисляется по формуле:</p> $\gamma = \gamma_0 \frac{\sigma}{\sigma_0}.$	

При практическом учете сил неупругого сопротивления прибегают к дополнительным предположениям и гипотезам, корректирующим гипотезу вязкого трения. Рассмотрим одну из таких гипотез, получившую название гипотезы частотно-независимого упруго-вязкого сопротивления.



Согласно гипотезе частотно-независимого упруго-вязкого сопротивления, во-первых, предполагают, что силы внутреннего сопротивления пропорциональны жесткости системы:

$$h = \chi r ,$$

где  $\chi$  называют коэффициентом вязкости материала.

Тогда все предыдущие выкладки, выполненные по теории вязкого трения, остаются справедливыми при условии, что введена замена:

$$2n = \frac{h}{m} = \frac{\chi r}{m} = \chi \omega^2 . \quad (19.38)$$

Во-вторых, на основании опытных данных полагают, что коэффициент вязкости материала  $\chi$  зависит от частоты гармонических колебаний, и подбирают эту зависимость такой, чтобы выполнялись условия частотно-независимого затухания. Так, для свободных затухающих колебаний условно принимают:

$$\chi = \frac{\gamma}{\omega}, \quad 2n = \chi \omega^2 = \gamma \omega . \quad (19.39)$$

На основании (19.39) логарифмический декремент колебаний (19.37) становится частотно-независимой, постоянной величиной:

$$\delta = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{\pi \gamma \omega}{\omega_1} \approx \pi \gamma . \quad (19.40)$$

Приближенное равенство в последней формуле обусловлено тем, что в строительных сооружениях частоты свободных затухающих и незатухающих колебаний различаются незначительно ( $\omega_1 \approx \omega$ ).

Зависимость (19.40) широко используется на практике.

## 19.8. Вынужденные колебания с учетом сил сопротивления

Рассмотрим влияние сил внешнего, вязкого сопротивления и сил внутреннего, упруго-вязкого сопротивления на вынужденные колебания, вызванные действием вибрационной синусоидальной нагрузки  $F(t) = F \sin \theta t$ .

В соответствии с теорией вязкого трения дифференциальное уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (19.41)$$

Его общий интеграл, как обычно, представим в виде суммы двух функций:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

где  $y_1(t)$  представляет собой уравнение (19.358) свободных затухающих колебаний, а  $y_2(t)$  есть искомое частное решение уравнения (19.41). Это частное решение можно представить в виде:

$$y_2(t) = \mu_1 y_{st} \sin(\theta t + \eta_1), \quad (19.42)$$

где обозначено:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2n\theta}{\omega^2}\right)^2}}, \quad (19.43)$$

$$y_{st} = \delta F = \frac{F}{r},$$

$$\eta_1 = -\operatorname{arctg} \frac{2n\theta}{\omega^2 - \theta^2}, \quad (19.44)$$

$\delta$  – податливость системы в направлении колебаний (не путать с логарифмическим декрементом колебаний);  
 $r$  – жесткость системы в направлении колебаний.

По истечении некоторого времени с момента начала действия вибрационной нагрузки свободные колебания практически затухают. Переходной процесс (суммарные свободные и вынужденные, неустановившиеся колебания) сменяется чисто вынужденными, установившимися колебаниями, происходящими с частотой вынуждающей нагрузки и описываемыми уравнением (19.42).

Чтобы учесть частотно-независимое внутреннее трение при установившихся вынужденных гармонических колебаниях в соответствии с теорией упруго-вязкого сопротивления необходимо в полученные формулы (19.43) и (19.44) ввести замену (19.39). В результате получим:

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}, \quad (19.45)$$

$$\eta_1 = -\operatorname{arctg} \frac{\gamma \frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (19.46)$$

При резонансе ( $\theta = \omega$ ) соответственно имеем:

$$\mu_{рез} = \frac{1}{\gamma}, \quad \eta_{рез} = -\frac{\pi}{2}.$$

Вследствие того, что  $\gamma \ll 1$ , при резонансе значение динамического коэффициента и, следовательно, амплитуды динамических перемещений и динамических усилий резко возрастают, хотя и остаются конечными. При этом динамические перемещения сдвинуты по фазе на  $\pi/2$  (запаздывают) относительно вибрационной нагрузки. Динамические перемещения достигают максимума в те моменты времени, когда возмущающая сила равна нулю, и наоборот.

Графики изменения динамического коэффициента  $\mu_1$  в зависимости от отношения  $\theta/\omega$  для нескольких значений коэффициента неупругого сопротивления  $\gamma$  показаны на рис. 19.12. Чем меньше коэффициент неупругого сопротивления, тем круче график динамического коэффициента.

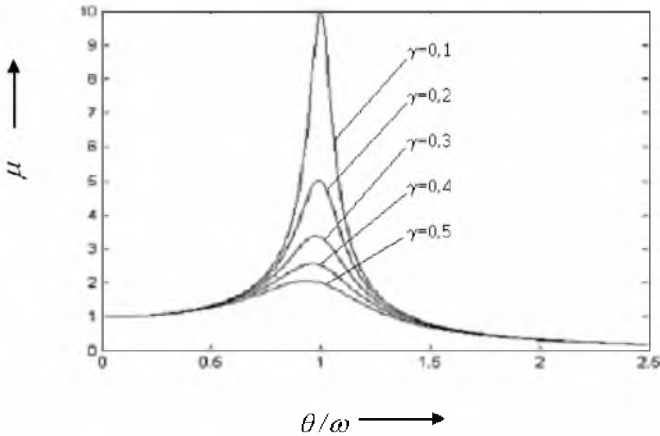


Рис. 19.12

Как следует из графиков (рис. 19.12), учет сил сопротивления существенно влияет на процесс колебаний лишь в окрестности резонанса. Вне резонансной зоны влияние сил сопротивления незначительно. Ширину резонансной зоны обычно принимают в пределах 0,15–0,20 в обе стороны от резонансной частоты.

Модель частотно-независимого упруго-вязкого сопротивления дает удовлетворительные результаты и при произвольной динамической нагрузке. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления в соответствии с этой гипотезой примет вид:

$$y + \gamma \omega y + \omega^2 y = \frac{1}{m} F(t), \quad (19.47)$$

где  $\gamma$  – коэффициент внутреннего сопротивления;

$\omega$  – частота свободных незатухающих колебаний.

## 19.9. Кинематическое возбуждение колебаний

К кинематическим воздействиям относятся принудительные смещения опорных закреплений сооружений. Смещения опор сооружений могут быть вызваны, в первую очередь, сейсмическими воздействиями (землетрясениями), а также взрывами в грунте, работой машин и механизмов в соседних зданиях и другими воздействиями, передающимися через основание на фундаменты сооружения. Ограничимся для простоты рассмотрением систем с одной степенью свободы без учета сил сопротивления.

Пусть для стойки с одной массой (рис. 19.13,а) основание совершает движение по заданному закону  $\Delta(t)$ . Полное перемещение массы  $Y(t)$  в некоторый момент времени  $t$  будет суммой переносного перемещения  $\Delta(t)$  и относительного перемещения  $y(t)$  (рис. 19.13,б):

$$Y(t) = \Delta(t) + y(t). \quad (19.48)$$

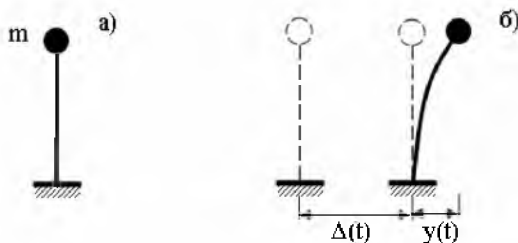


Рис. 19.13

Переносное перемещение точки сосредоточения массы определяется в безмассовой расчетной схеме как перемещение в направлении движения массы, вызванное заданным смещением опор. В статически определяемой консольной стойке оно совпадает с заданным горизонтальным перемещением опоры и происходит без деформации системы. В статически определяемой системе более сложной структуры переносное перемещение связано с перекосом безмассовой расчетной схемы за счет смещения опоры. На рис. 19.14 показано переносное перемещение массы по вертикали  $\Delta(t)$  в статически определяемой

раме, вызванное горизонтальным смещением правой опоры  $\Delta_0(t)$ . В статически неопределимых системах переносные перемещения масс зависят в общем случае от деформаций системы. На рис. 19.15 показано вертикальное переносное перемещение  $\Delta(t)$  массы, расположенной в пролете статически неопределимой балки, связанное с ее изгибом за счет вертикальной осадки ее левой опоры  $\Delta_0(t)$ . Дополнительные относительные перемещения масс  $y(t)$  во всех случаях связаны с дополнительными деформациями конструкций, вызванными действием суммарных сил инерции.

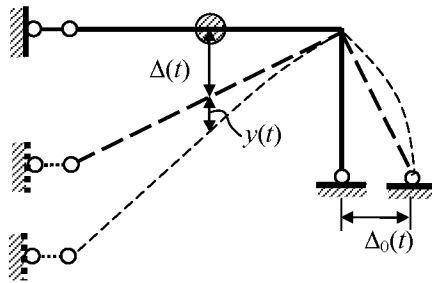


Рис. 19.14

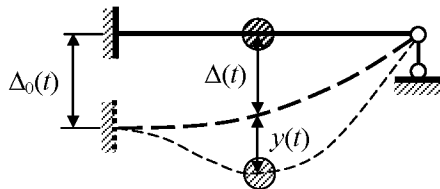


Рис. 19.15

В соответствии с принципом Даламбера суммарная сила инерции равна:

$$J = -m\ddot{Y} = -m(\ddot{\Delta} + \ddot{y}).$$

Дополнительное относительное перемещение выразим через податливость системы и силу инерции:

$$y = \delta J = -\delta m(\ddot{\Delta} + \ddot{y}).$$

В результате получим дифференциальное уравнение кинематически возбуждаемого движения:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{\Delta}, \quad (19.49)$$

где использовано обозначение:

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta m}.$$

Дифференциальному уравнению (19.49) можно придать стандартный вид (в прямой форме):

$$m\ddot{y} + ry = J(t), \quad (19.50)$$

где введено обозначение:

$$J(t) = -m\ddot{\Delta}. \quad (19.51)$$

Возмущающая, динамическая сила  $J(t)$  (19.51) имеет простой смысл. Это сила инерции массы  $m$ , соответствующая ускорению переносного, возмущающего перемещения. Сравнивая (19.50) с (19.5), можно сделать вывод, что для определения дополнительных, относительных перемещений в результате кинематически возбуждаемых колебаний систему необходимо рассчитать на действие внешних возмущающих сил, равных частичным силам инерции (19.51), вызванным только переносными ускорениями. Этот вывод справедлив для системы с любой степенью свободы.

## КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### 20.1. Дифференциальные уравнения движения в общем виде

Для вывода дифференциальных уравнений движения дискретной деформируемой системы с несколькими степенями свободы (рис. 20.1), как и ранее, применим принцип Даламбера. В процессе колебаний под действием динамических сил деформируемая система (как и любой ее фрагмент) в произвольный момент времени может быть представлена как бы находящейся в состоянии мгновенного равновесия. Напомним, что в состав внешних динамических сил входят динамические нагрузки, силы инерции и силы сопротивления движению.

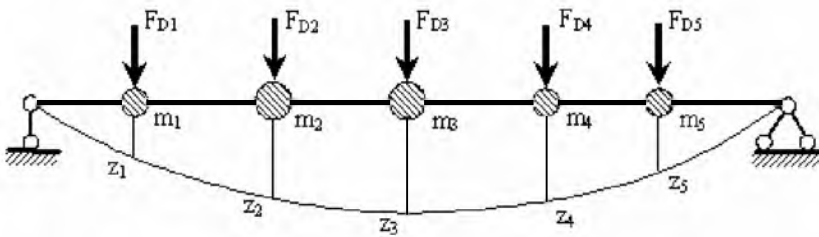


Рис. 20.1

В векторной форме динамические силы могут быть выражены формулой (18.15). Неизвестными в таком мгновенном состоянии равновесия будут внутренние силы, перемещения и реакции опор. Силы инерции движущихся масс также будут неизвестными, так как зависят от неизвестных ускорений масс. Как известно из статики сооружений, взаимосвязь между внешними активными силами и вызванными ими перемещениями можно установить либо с помощью матрицы внешней жесткости, либо с помощью матрицы внешней податливости.



Так, вектор динамических сил  $\vec{F}_D$  можно представить как произведение матрицы внешней жесткости  $R$  на вектор вызванных ими динамических перемещений  $\vec{Z}$ :

$$\vec{F}_D = R\vec{Z}. \quad (20.1)$$

Подставив в формулу (20.1) выражение вектора динамических сил  $\vec{F}_D$  (18.15) в составе динамических нагрузок  $\vec{F}(t)$ , сил инерции  $\vec{J}(t) = -M\ddot{\vec{Z}}$  и сил сопротивления  $\vec{\Phi}(t) = -H\dot{\vec{Z}}$ , получим в векторно-матричной форме дифференциальные уравнения движения системы с несколькими степенями свободы. Точнее говоря, с произвольным конечным числом степеней свободы:

$$M\ddot{\vec{Z}} + H\dot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = \vec{F}(t). \quad (20.2)$$

Напомним, что в уравнении (20.2) элементы матрицы внешней жесткости  $R$  выражают собой единичные реакции в воображаемых дополнительных связях, поставленных в направлении каждой динамической степени свободы. Так, элемент  $r_{ik}$  есть реакция в связи номер  $i$  от смещения связи номер  $k$  на единицу. С другой стороны, матрица жесткости  $R$  может рассматриваться и как матрица внешней жесткости по направлению всех возможных перемещений узлов дискретной деформируемой системы. В таком случае матрица масс  $M$  и матрица коэффициентов демпфирования  $H$  могут содержать нулевые элементы. Матрица внешней жесткости, входящая во все виды уравнений движения, во всех случаях должна быть невырожденной, иначе это будет свидетельствовать о геометрической изменчивости рассматриваемой деформируемой системы.

В случае отсутствия динамических нагрузок, когда

$$\vec{F}(t) = 0,$$

система дифференциальных уравнений движения (20.2) принимает вид:

$$M\ddot{\vec{Z}} + H\dot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = 0 \quad (20.3)$$

и описывает свободные затухающие колебания дискретной деформируемой системы.

Если в (20.3) пренебречь силами сопротивления, то получим дифференциальные уравнения движения, описывающие идеализированные, незатухающие свободные колебания дискретной деформируемой системы:

$$M\ddot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = 0. \quad (20.4)$$

При добавлении в систему уравнений (20.4) динамических нагрузок получим также идеализированные дифференциальные уравнения вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления:

$$M\ddot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = \vec{F}(t). \quad (20.5)$$

Если деформируемая система является относительно простой, так что составление матрицы внешней податливости приводит к меньшим вычислительным затратам, чем составление матрицы внешней жесткости, то уравнения движения можно преобразовать к виду, непосредственно содержащему матрицу внешней податливости. Так, умножая систему уравнений свободных колебаний (20.4) слева на матрицу  $R^{-1} = D$ , преобразуем ее к виду:

$$DM\ddot{\vec{Z}} + \vec{Z} = 0, \quad (20.6)$$

где  $D$  – матрица внешней податливости, которая может быть вычислена независимо от матрицы внешней жесткости  $R$ .

Элементы матрицы внешней податливости  $D = [\delta_{ik}]$  представляют собой единичные перемещения в деформируемой системе. Элемент  $\delta_{ik}$  есть перемещение по направлению единичной силы номер  $i$  (то есть по направлению степени свободы номер  $i$ ), вызванное единичной силой номер  $k$ , приложенной соответственно по направлению степени свободы номер  $k$ .

Аналогичным образом для описания вынужденных колебаний без учета сил сопротивления вместо системы (20.5) можно получить эквивалентную ей систему:

$$DM\ddot{\vec{Z}} + \dot{\vec{Z}} = D\vec{F}(t). \quad (20.7)$$

Общие уравнения движения с учетом сил сопротивления (20.2), выраженные через матрицу внешней податливости, примут вид:

$$DM\ddot{\vec{Z}} + DH\dot{\vec{Z}} + \dot{\vec{Z}} = D\vec{F}(t). \quad (20.8)$$

Уравнения движения (20.2)–(20.5), выраженные через матрицу внешней жесткости, носят название уравнений движения в прямой форме. Уравнения движения вида (20.6)–(20.8), выраженные через матрицу внешней податливости, носят название уравнений движения в обратной форме.

К полученным системам дифференциальных уравнений движения с целью установления особенностей конкретного движения необходимо добавить начальные условия:

$$\text{при } t = t_0, \quad \vec{Z} = \vec{a}, \quad \dot{\vec{Z}} = \vec{b}, \quad (20.9)$$

где  $\vec{a}$  – вектор констант, соответствующих начальным отклонениям;  
 $\vec{b}$  – вектор констант, соответствующих начальным скоростям узлов деформируемой системы.

Таким образом, для дифференциальных уравнений движения будет сформулирована задача Коши, задача с начальными условиями. Решение задач Коши для некоторых видов уравнений движения можно найти в аналитической форме в справочниках по дифференциальным уравнениям. Для более сложных случаев решение уравнений движения можно получить только численными методами. Самые общие численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются в курсах по методам вычислений. Некоторые специальные численные методы, приспособленные для решения задач динамики сооружений, приводятся ниже в главе 22.

## 20.2. Свободные незатухающие колебания

Решения дифференциальных уравнений незатухающих свободных колебаний (20.4) или (20.6) играют в линейной динамике сооружений особую роль, так как на их основе строятся решения и других задач динамики сооружений. Общее решение дифференциальных уравнений свободных незатухающих колебаний обычно ищут как сумму частных решений. Частные решения описывают одночастотные колебания деформируемой системы, когда все узлы колеблются по одному и тому же гармоническому закону с некоторой общей частотой и общей фазой, но с разными амплитудами:

$$\vec{Z}(t) = \vec{X} \sin(\omega t + \eta), \quad (20.10)$$

где  $\vec{X}$  – вектор амплитудных значений динамических перемещений (вектор амплитуд);  
 $\omega$  – круговая частота одночастотного колебания;  
 $\eta$  – начальная фаза.

Такие одночастотные свободные колебания называют собственными, нормальными, или главными.

Найдем вторые производные по времени от перемещений (20.10):

$$\vec{\ddot{Z}}(t) = -\omega^2 \vec{X} \sin(\omega t + \eta). \quad (20.11)$$

Подставив (20.10) и (20.11) в матричное уравнение движения в прямой форме (20.4) и разделив на  $\sin(\omega t + \eta)$ , получим систему однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд  $\vec{X}$ :

$$(\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M})\vec{X} = 0. \quad (20.12)$$

Характеристическое уравнение системы однородных алгебраических уравнений (20.12) и одновременно характеристическое (вектовое, или частотное) уравнение системы дифференциальных уравнений движения (20.4) примет вид:

$$\text{Det}(\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (20.13)$$

Только при выполнении условия (20.13) система однородных уравнений (20.12) может иметь ненулевые решения  $\vec{X} \neq 0$ .

Аналогично, подставив (20.10) и (20.11) в матричное уравнение свободных колебаний в обратной форме (20.6) и разделив на  $\omega^2 \sin(\omega t + \eta)$ , получим также систему однородных алгебраических уравнений относительно тех же амплитуд  $\vec{X}$ :

$$(\mathbf{DM} - \lambda \mathbf{E})\vec{X} = 0, \quad (20.14)$$

с характеристическим (частотным) уравнением вида:

$$\text{Det}(\mathbf{DM} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (20.15)$$

где

$$\lambda = 1/\omega^2.$$

Следовательно, и система однородных алгебраических уравнений (20.14) будет иметь ненулевое решение  $\vec{X} \neq 0$  при удовлетворении частотного уравнения (20.15), эквивалентного уравнению (20.13).

Таким образом, задача о свободных незатухающих колебаниях дискретной деформируемой системы с конечным числом степеней свободы, описываемых дифференциальными уравнениями движения в прямой форме (20.4), свелась к полной обобщенной проблеме собственных значений (20.12) для двух симметричных матриц. Одна из двух матриц, матрица внешней жесткости  $\mathbf{R}$ , заведомо положительно определена. Вторая матрица, матрица масс  $\mathbf{M}$  в самом общем случае может быть и неотрицательно определенной, если ряд узловых масс отсутствует, и соответствующие узловые перемещения рассматриваются как безынерционные. Если в расчете учтены только динамические степени свободы, или массы присутствуют по направлениям всех возможных перемещений, то и матрица масс также будет симметричной и положительно определенной.

В роли собственного значения такой обобщенной проблемы собственных значений выступает квадрат круговой частоты  $\omega^2$ . В линейной алгебре доказывается, что для симметричных и положительно определенных матриц все собственные значения обобщенной проблемы действительны и положительны. Следовательно, действительны и положительны все собственные частоты. Однако, если в системе есть безынерционные степени свободы, то часть собственных частот, количество которых равно количеству безынерционных степеней свободы, будет иметь значения, стремящиеся к бесконечности. Если же в расчете учтены только динамические степени свободы, то все собственные частоты положительны и конечны.

Факт наличия бесконечно больших частот не означает вычислительной катастрофы. Численный метод можно построить так, что он будет вычислять бесконечно большие собственные значения через обратные величины, стремящиеся в процессе последовательных приближений к нулю. Как будет показано ниже, для практических целей в динамике сооружений потребуются вычислять относительно небольшое количество меньших собственных значений (собственных частот) и соответствующих собственных векторов (собственных форм). Поэтому наличие или отсутствие бесконечно больших собственных частот никак не отражается на результатах динамического расчета.

Если исходить из дифференциальных уравнений движения в обратной форме (20.6), то задача о свободных незатухающих колебаниях дискретной системы сводится к полной проблеме собственных значений (20.14) для некоторой квадратной матрицы общего вида:

$$A = DM .$$

Матрица  $A$ , равная произведению двух симметричных матриц, в общем случае не является симметричной. Так как матрица внешней податливости  $D$  заведомо невырожденная, а матрица масс  $M$  может быть неотрицательной, то количество возможных нулевых собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$  и соответственно количество возможных бесконечно больших собственных частот  $\omega$  равно дефекту матрицы масс, то есть числу нулевых строк (столбцов) в матрице масс, или числу безынерционных степеней свободы.

Переходя от алгебраической проблемы собственных значений к механической проблеме свободных колебаний дискретной деформируемой системы, можно сделать следующие выводы.

Деформируемая система с  $n$  степенями свободы может совершать свободные одночастотные колебания по  $n$  разным собственным формам, характеризуемым каждая своей собственной частотой  $\omega$  и своим соответствующим собственным вектором  $\vec{X}$ . Собственный вектор амплитудных значений перемещений  $\vec{X}$  как раз и характеризует форму деформаций колеблющегося сооружения при его максимальном отклонении от положения равновесия.

Собственные векторы  $\vec{X}$  определяются с точностью до произвольного ненулевого множителя и могут быть нормированы любым подходящим образом. Колебания по каждой собственной форме являются гармоническими, отвечающими закону (20.10), то есть синфазными. Все узлы колеблющегося сооружения одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают экстремальных амплитудных отклонений.

Чтобы заставить сооружение совершать колебания строго по одной из собственных форм, достаточно придать ему начальные отклонения, пропорциональные этой форме, при нулевых начальных скоростях или при начальных скоростях, пропорциональных той же собственной форме колебаний.

Собственные формы колебаний, соответствующие разным по номеру собственным частотам, взаимно ортогональны как относительно матрицы масс, так и относительно матрицы внешней жесткости. То есть имеют место следующие равенства:

$$\vec{X}_{(i)}^T \mathbf{M} \vec{X}_{(k)} = 0 \quad (i \neq k), \quad (20.16)$$

$$\vec{X}_{(i)}^T \mathbf{R} \vec{X}_{(k)} = 0 \quad (i \neq k), \quad (20.17)$$

где  $i, k$  – номера собственных форм колебаний.

Это свойство непосредственно вытекает из системы однородных алгебраических уравнений (20.12). Если в эту систему подставить собственную частоту  $\omega_k$  и соответствующую собственную форму  $\vec{X}_k$ ,

а затем умножить систему слева на транспонированный вектор другой собственной формы  $\vec{X}_i^T$  при  $\omega_k \neq \omega_i$ , то получим равенство двух скаляров:

$$\vec{X}_i^T \mathbf{R} \vec{X}_k = \omega_k^2 \vec{X}_i^T \mathbf{M} \vec{X}_k.$$

Если подстановку и умножение провести в обратной последовательности, то получим аналогичное скалярное равенство:

$$\vec{X}_k^T \mathbf{R} \vec{X}_i = \omega_i^2 \vec{X}_k^T \mathbf{M} \vec{X}_i.$$

Вычитая полученные равенства одно из другого и учитывая, что в силу симметричности матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{R}$ :

$$\vec{X}_k^T \mathbf{R} \vec{X}_i = \vec{X}_i^T \mathbf{R} \vec{X}_k; \quad \vec{X}_k^T \mathbf{M} \vec{X}_i = \vec{X}_i^T \mathbf{M} \vec{X}_k,$$

а собственные частоты различны, и разность их квадратов не равна нулю:

$$\omega_i^2 - \omega_k^2 \neq 0,$$

и можно получить равенства (20.16) и (20.17)

Следует отметить, что даже если две собственные частоты совпадают по значению, то соответствующие им собственные формы все равно можно подчинить условиям взаимной ортогональности. Примером может служить пространственный стержень кольцевого поперечного сечения, собственные формы колебаний которого в двух взаимно перпендикулярных плоскостях ортогональны, хотя соответствующие собственные частоты совпадают.

Если в формулы (20.16) и (20.17) подставить один и тот же собственный вектор ( $i = k$ ), то вместо нулевого результата получим формулы для вычисления обобщенных масс и соответствующих обобщенных жесткостей, отвечающих собственной форме  $\vec{X}_k$ :

$$\vec{X}_{(k)}^T \mathbf{M} \vec{X}_{(k)} = \check{m}_{kk}, \quad (20.18)$$

$$\vec{X}_{(k)}^T \mathbf{R} \vec{X}_{(k)} = \check{r}_{kk}. \quad (20.19)$$



В общем случае, представив векторы собственных форм в виде одной матрицы – матрицы собственных форм

$$X = [\vec{X}_{(1)} \ \vec{X}_{(2)} \ \vec{X}_{(3)} \ \dots \ \vec{X}_{(n)}],$$

а квадраты собственных частот в виде диагональной матрицы

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \dots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix},$$

можно систему однородных уравнений (20.12) представить в обобщенном виде:

$$RX = MX\Omega^2. \quad (20.20)$$

Кроме того, с учетом зависимостей (20.16)–(20.19) можно получить формулы для вычисления диагональных матриц обобщенных масс и обобщенных жесткостей:

$$\check{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \dots & \\ & & m_{nn} \end{bmatrix} = X^T MX; \quad (20.21)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & & \\ & \dots & \\ & & r_{nn} \end{bmatrix} = X^T RX. \quad (20.22)$$

Умножив систему однородных уравнений (20.20) слева на транспонированную матрицу собственных векторов  $X^T$ , получим соотношения между собственными частотами, обобщенными жесткостями и обобщенными массами:

$$X^T RX = X^T MX\Omega^2, \text{ или } \check{R} = \check{M}\Omega^2, \quad (20.23)$$

что эквивалентно  $n$  скалярным зависимостям:

$$\tilde{r}_{ii} = \tilde{m}_{ii}\omega_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (20.24)$$

При произвольных начальных условиях свободные колебания дискретной деформируемой системы являются конечной суммой ее собственных колебаний. Неизвестный вектор  $\vec{Z}(t)$  из системы дифференциальных уравнений свободных колебаний (20.4) или (20.6) при начальных условиях (20.9) может быть представлен как сумма частных решений (20.10), взятых с некоторыми коэффициентами  $u$ :

$$\vec{Z}(t) = \sum_{i=1}^n [\vec{X}_i \sin(\omega_i t + \eta_i)] u_i. \quad (20.25)$$

Подставив в (20.25) начальное время  $t_0 = 0$  и начальные отклонения из (20.9), получим:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n [\vec{X}_i \sin(\eta_i)] u_i = \sum_{i=1}^n \vec{X}_i y_i = \mathbf{X}\vec{Y}, \quad (20.26)$$

где  $\vec{Y}$  – вектор новых переменных, компоненты которого равны:

$$y_i = u_i \sin(\eta_i). \quad (20.27)$$

Чтобы найти вектор  $\vec{Y}$ , не обязательно решать систему совместных уравнений (20.26). Достаточно умножить ее слева на  $\mathbf{X}^T \mathbf{R}$  и получить систему уравнений с диагональной матрицей коэффициентов (матрицей обобщенных жесткостей)  $\tilde{\mathbf{R}}$ , то есть полностью разделенную:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X} \vec{Y} = \mathbf{X}^T \mathbf{R} \vec{a}, \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{R}} \vec{Y} = \mathbf{X}^T \mathbf{R} \vec{a}. \quad (20.28)$$

С учетом зависимости (20.21) матричное уравнение (20.26) или (20.28) можно выразить и через матрицы масс:

$$\tilde{M}\vec{Y} = X^T M \vec{a}, \quad (20.29)$$

что существенно уменьшает объем вычислений, когда матрица масс  $M$  диагональная.

Продифференцировав по времени выражение (20.25) и подставив в него начальное время  $t_0 = 0$  и начальные скорости из начальных условий (20.9), получим еще одну систему уравнений:

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^n [\vec{X}_i \omega_i \cos(\eta_i)] u_i = \sum_{i=1}^n \vec{X}_i v_i = X\vec{V}, \quad (20.30)$$

где  $\vec{V}$  – вектор новых переменных, компоненты которого равны:

$$v_i = u_i \omega_i \cos(\eta_i). \quad (20.31)$$

Вектор неизвестных  $\vec{V}$  найдем из системы совместных уравнений (20.30) так же, как и (20.26), преобразованных к виду с диагональной матрицей коэффициентов:

$$\tilde{R}\vec{V} = X^T R \vec{b} \quad \text{или} \quad \tilde{M}\vec{V} = X^T M \vec{b}. \quad (20.32)$$

После вычисления векторов  $\vec{Y}$  и  $\vec{V}$  параметры  $u_i$  и  $\eta_i$ , входящие в формулу (20.25), определяются покомпонентно из соотношений (20.27) и (20.31):

$$u_i = \sqrt{y_i^2 + (v_i / \omega_i)^2}; \quad \operatorname{tg}(\eta_i) = \frac{y_i \omega_i}{v_i}. \quad (20.33)$$

Таким образом, задача анализа свободных колебаний системы с конечной степенью свободы, или первая задача динамики сооружений, сведена к алгебраической задаче – полной обобщенной проблеме собственных значений для двух матриц. В настоящее время разработаны эффективные, надежные алгоритмы и компьютерные программы для решения полной (и обобщенной) проблемы собственных значений. Однако следует помнить следующее. Для реше-

ния полной обобщенной проблемы собственных значений необходимо разместить в памяти компьютера матрицу жесткости (податливости), матрицу масс и предусмотреть место для полной матрицы собственных векторов, а также и для ряда рабочих массивов. Поэтому даже современные компьютеры успешно решают полную проблему собственных значений для систем с относительно небольшим числом степеней свободы, порядка нескольких сотен или максимум нескольких тысяч.

Примеры динамического расчета реальных сооружений показывают, что в суммах вида (20.25) слагаемые, отвечающие высшим собственным частотам, получают значения, пренебрежимо малые по сравнению с вычисляемой суммой. Практически для получения искомого результата можно ограничиться вычислением суммы нескольких первых слагаемых, соответствующих низшим собственным частотам. Поэтому отпадает необходимость в решении полной проблемы собственных значений. Для реального сооружения достаточно решить частичную проблему собственных значений, т. е. найти несколько низших собственных частот и соответствующих собственных форм (собственных векторов). Или же найти собственные частоты и собственные формы, отвечающие заданному диапазону частот. Для этого применяют специальные численные методы. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

**Пример 20.1.** Определить собственные частоты и собственные формы свободных колебаний неразрезной двухпролетной консольной балки постоянного сечения, несущей сосредоточенные массы (рис. 20.2). Собственной распределенной массой балки по сравнению с сосредоточенными массами пренебречь.

При совершении поперечных, изгибных колебаний балка, несущая четыре сосредоточенные массы, имеет четыре степени свободы, направления которых обозначены стрелками  $F_1$ – $F_4$  (рис. 20.2). Чтобы сократить вычисления, используем симметрию системы. Для этого введем четыре групповые степени свободы (рис. 20.3): две прямосимметричные (ПС) по направлениям  $F_1$  и  $F_2$  и две кососимметричные (КС) по направлениям  $F_3$  и  $F_4$ .

При прямосимметричных деформациях сечение балки над центральной опорой не поворачивается, а при кососимметричных деформациях в этом сечении изгибающий момент равен нулю. Следовательно, для изучения прямосимметричных колебаний балки дос-

таточно рассмотреть ее половину, введя в центральном сечении заземляющую опору (рис. 20.4). Кососимметричные колебания будем изучать с помощью полубалки, полученной из исходной балки введением шарнира в центральном сечении (рис. 20.5).

Частотные (вековые) уравнения для полубалок составим в обратной форме (20.15).

Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных в направлении степеней свободы полубалок (рис. 20.4, 20.5), и вычислим по формуле Мора путем «перемножения» эпюр компоненты матриц податливости полубалок.

Для прясимметричных колебаний имеем:

$$D_{ПС} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{a^3}{12EJ} \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}.$$

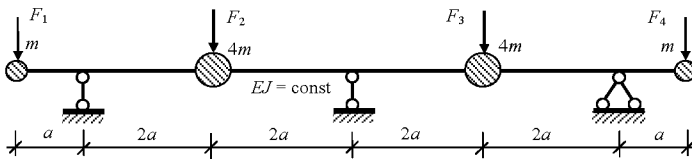


Рис. 20.2

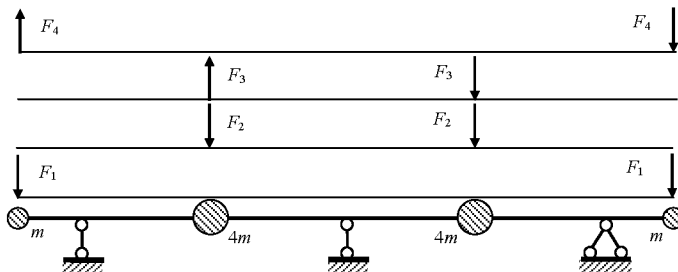


Рис. 20.3

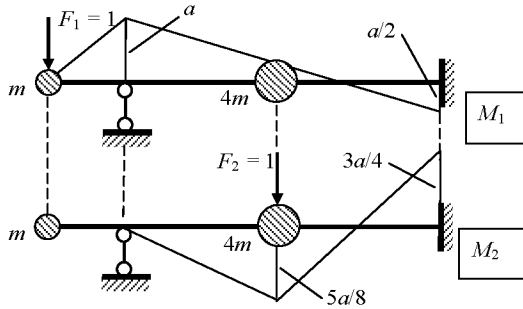


Рис. 20.4

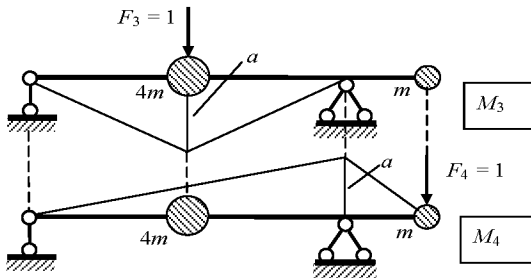


Рис. 20.5

Соответственно для кососимметричных колебаний получим:

$$D_{KC} = \begin{bmatrix} \delta_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix} = \frac{a^3}{3EJ} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Матрицы масс полубалок примут вид:

$$M_{ПС} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad M_{KC} = m \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Частотное уравнение (20.15) для первой полубалки, соответствующей прямосимметричным колебаниям, можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} 16 - \varphi & -24 \\ -6 & 28 - \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\varphi = \frac{12EI}{ma^3} \lambda = \frac{12EI}{\omega^2 ma^3}.$$

Раскрыв полученный определитель и решив квадратное уравнение относительно параметра  $\varphi$ , найдем, что:

$$\varphi_{1,2} = 22 \pm \sqrt{180}; \text{ или } \varphi_1 = 35,4; \quad \varphi_2 = 8,58.$$

Откуда находим выражения для круговых частот прямосимметричных собственных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12EJ}{\varphi_1 ma^3}} = 0,582 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{12EJ}{\varphi_2 ma^3}} = 1,182 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}.$$

Соотношения между амплитудами перемещений масс при прямосимметричных колебаниях (формы прямосимметричных колебаний) найдем из системы однородных уравнений (20.14), которая в данном случае примет вид:

$$\begin{bmatrix} 16 - \varphi & -24 \\ -6 & 28 - \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Полученная система однородных уравнений для найденных значений  $\varphi$  является вырожденной и эквивалентна одному уравнению:

$$(16 - \varphi)X_1 - 24X_2 = 0,$$

откуда получим:

$$X_2 = \frac{(16 - \varphi)X_1}{24}.$$

Итак, первая собственная форма прямосимметричных свободных колебаний при  $\varphi = \varphi_1$  определяется соотношением:

$$X_2 = -0,809X_1.$$

Вторая собственная форма прямосимметричных свободных колебаний при  $\varphi = \varphi_2$  определяется соотношением:

$$X_2 = 0,309X_1.$$

Соответствующие собственные векторы прямосимметричных колебаний для полубалки примут вид:

$$\vec{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,809 \end{bmatrix}; \quad \vec{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,309 \end{bmatrix}.$$

Для балки в целом будем иметь:

$$\vec{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,809 \\ -0,809 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,309 \\ 0,309 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Частотное (вековое) уравнение (20.15) для второй полубалки, соответствующей кососимметричным колебаниям, примет вид:

$$\begin{vmatrix} 16 - \varphi & -3 \\ -12 & 5 - \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем:

$$\varphi_{3,4} = 10,5 \pm \sqrt{66,3}, \text{ или } \varphi_3 = 18,64, \quad \varphi_4 = 2,61.$$

При кососимметричных колебаниях принято, что:



$$\varphi = \frac{3EJ}{ma^3} \lambda = \frac{3EJ}{\omega^2 ma^3}.$$

Следовательно, круговые частоты кососимметричных свободных (собственных) колебаний равны:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3EJ}{\varphi_3 ma^3}} = 0,401 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}; \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{3EJ}{\varphi_4 ma^3}} = 1,127 \sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}.$$

Соответствующие собственные формы кососимметричных свободных колебаний найдем из соотношения:

$$(16 - \varphi)X_3 - 3X_4 = 0,$$

откуда при  $\varphi = \varphi_3$  имеем

$$X_4 = -0,880X_3,$$

а при  $\varphi = \varphi_4$

$$X_4 = 4,55X_3.$$

Для балки в целом собственные формы кососимметричных колебаний описываются следующими собственными векторами:

$$\vec{X}_{(3)} = \begin{bmatrix} 0,880 \\ -1 \\ 1 \\ -0,880 \end{bmatrix}; \quad \vec{X}_{(4)} = \begin{bmatrix} -4,55 \\ -1 \\ 1 \\ 4,55 \end{bmatrix}$$

В динамике сооружений принято найденные собственные частоты располагать в порядке возрастания (строго говоря, в порядке неубывания, так как среди найденных частот могут быть одинаковые). Рассмотренная симметричная двухпролетная балка с консолями, имеющая четыре степени свободы, характеризуется спектром из четырех круговых собственных частот и четырех соответствующих

форм собственных колебаний (табл. 20.1), две из которых являются прямосимметричными, а две – кососимметричными (рис. 20.6).

Таблица 20.1

Форма	Характер колебаний	Круговая частота
1	Кососимметричные колебания (КСК)	$0,401\sqrt{EJ/(ma^3)}$
2	Прямосимметричные колебания (ПСК)	$0,582\sqrt{EJ/(ma^3)}$
3	Кососимметричные колебания (КСК)	$1,127\sqrt{EJ/(ma^3)}$
4	Прямосимметричные колебания (ПСК)	$1,182\sqrt{EJ/(ma^3)}$ .

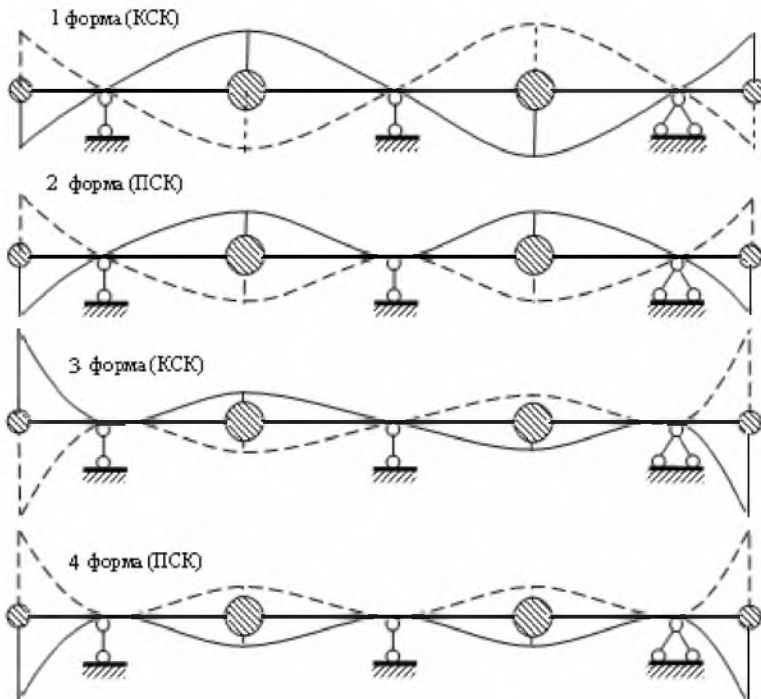


Рис. 20.6

### 20.3. Действие вибрационной нагрузки при отсутствии сил сопротивления

Предположим, что на дискретную деформируемую систему с конечной степенью свободы действует группа синфазных вибрационных сил, изменяющихся во времени по гармоническому закону (18.2). Силами сопротивления движению в запас прочности и жесткости будем пренебрегать. Идеализированное движение системы, подверженной действию внешних только вибрационных сил, будем описывать неоднородными дифференциальными уравнениями движения (20.5), составленными в прямой форме. После подстановки в их правую часть вектора внешних вибрационных сил (18.2) уравнения движения примут вид:

$$M\ddot{Z} + R\dot{Z} = \vec{F} \sin(\theta t). \quad (20.34)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений можно представить как сумму общего решения соответствующих однородных уравнений вида (20.4) и частного решения неоднородных уравнений, в данном случае (20.34). Общее решение однородных уравнений движения, содержащее постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, описывает свободные колебания деформируемой системы. В реальных условиях из-за неизбежного присутствия сил сопротивления движению свободные колебания с течением времени затухают, и деформируемая система продолжает совершать чисто вынужденные колебания с частотой вынуждающей нагрузки в так называемом установившемся режиме.

При колебаниях в установившемся режиме перемещения всех узлов деформируемой системы, усилия во всех ее элементах с течением времени изменяются по гармоническому закону с той же частотой, что и вибрационная нагрузка. Только амплитуды, то есть экстремальные отклонения от нулевых значений, каждого перемещения и каждого усилия будут различными. Целью динамики сооружений и является определение экстремальных усилий и экстремальных перемещений в элементах сооружения при колебаниях.

Определение экстремальных усилий и экстремальных перемещений при действии динамических нагрузок составляет предмет

второй основной задачи динамики сооружений, известной под названием *динамический расчет сооружений*.

Итак, будем искать частное решение системы дифференциальных уравнений движения при вибрационном возбуждении в виде одночастотных вынужденных колебаний, когда неизвестные динамические перемещения  $\vec{Z}(t)$  изменяются по гармоническому закону с частотой вибрационной нагрузки  $\theta$ , но с неизвестными амплитудами  $\vec{Z}$ :

$$\vec{Z}(t) = \vec{Z} \sin(\theta t). \quad (20.35)$$

Дифференцируя (20.35) дважды по времени, получим выражение для вычисления ускорений:

$$\ddot{\vec{Z}}(t) = -\theta^2 \vec{Z} \sin(\theta t). \quad (20.36)$$

Подставив динамические перемещения (20.35) и ускорения (20.36) в дифференциальные уравнения движения (20.34), получим после сокращения на  $\sin(\theta t)$  систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд динамических перемещений:

$$(\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \vec{Z} = \vec{F}. \quad (20.37)$$

Матрицу коэффициентов системы алгебраических уравнений (20.37) обозначают как

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M} \quad (20.38)$$

и называют матрицей динамической жесткости (точнее, внешней динамической жесткости) деформируемой системы. Система алгебраических уравнений относительно амплитуд динамических перемещений, выраженная через матрицу динамической жесткости, примет вид:

$$\mathbf{R}_D \vec{Z} = \vec{F}. \quad (20.39)$$

Таким образом, вторая задача динамики сооружений при действии вибрационной динамической нагрузки сведена к решению системы алгебраических уравнений метода перемещений (20.39), выраженных через матрицу динамической жесткости деформируемой системы (20.38). Правую часть этой системы составляет вектор амплитуд внешних вибрационных сил  $\vec{F}$ , неизвестным является вектор амплитуд динамических перемещений  $\vec{Z}$ . Амплитуды динамических усилий определяются через амплитуды динамических перемещений по общим правилам теории сооружений.

Таким образом, и динамический, и статический расчет произвольной деформируемой системы методом перемещений практически осуществляются по одному и тому же алгоритму. Только на этапе составления матрицы динамической жесткости по матричной формуле (20.38) осуществляется учет инерции масс сооружения и частоты динамической нагрузки (второе слагаемое в правой части выражения (20.38)).

При выводе матричных зависимостей (20.34)–(20.39) на порядок и на значения компонент матрицы масс  $M$  и вектора нагрузок  $\vec{F}$  не накладывалось никаких ограничений. Степень свободы колеблющейся системы может быть принята равной общему количеству возможных перемещений узлов деформируемой системы. В этом случае часть масс может быть принята нулевой, и деформируемая система будет иметь "безынерционные" степени свободы. Вибрационные нагрузки могут действовать только на часть узлов и могут быть приложены даже по направлению "безынерционных" степеней свободы. В результате решения динамической задачи будут получены динамические перемещения всех узлов деформируемой системы, в том числе и по "безынерционным" направлениям.

Составляя матрицу динамической жесткости по формуле (20.38), необходимо иметь в виду, что если частота вибрационной нагрузки будет приближаться к любой из частот собственных колебаний, то динамическая матрица жесткости будет стремиться к вырожденной. Амплитуды вибрационных перемещений будут стремиться к бесконечности, а компьютерное решение системы уравнений (20.39) прервется аварийно из-за переполнения. Поэтому частота внешних вибрационных сил должна находиться вне резонансных зон, число которых равно степени динамической свободы деформируемой системы. Кроме того, даже если частота вибрационной нагрузки отда-

лена от собственных частот, но выше нескольких из них, то матрица динамической жесткости, оставаясь симметричной, становится знаконеопределенной, и для решения динамических уравнений метода перемещений (20.39) необходимо применять численные методы, специально предназначенные для уравнений со знаконеопределенными матрицами коэффициентов.

Если при выводе дифференциальных уравнений движения предполагается рассматривать только динамические степени свободы, то матрица внешней жесткости  $\mathbf{R}$  должна быть составлена только по направлениям динамических степеней свободы. Внешние вибрационные силы также должны быть приложены (или частично не приложены) только в направлении динамических степеней свободы, то есть в узлах, несущих сосредоточенные массы. При этом все выкладки, проведенные в данном разделе выше, остаются справедливыми. Порядок матриц и векторов понизится до динамической степени свободы. Матрица масс в этом случае также будет невырожденной, ее можно будет обратить, что дает дополнительные преимущества, если она к тому же будет диагональной.

При составлении уравнений движения только с учетом динамических степеней свободы можно в качестве основных динамических неизвестных принять не перемещения, а амплитуды инерционных сил, которые при вибрационной нагрузке также будут изменяться по гармоническому закону. Подставив в общее выражение вектора инерционных сил (18.5) вибрационное ускорение (20.36), получим формулу для вычисления вектора вибрационных сил инерции:

$$\vec{J}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\vec{Z}} = \theta^2 \mathbf{M}\vec{Z} \sin(\theta t) = \vec{J} \sin(\theta t), \quad (20.40)$$

откуда вектор амплитуд вибрационных сил инерции  $\vec{J}$  можно выразить через вектор амплитуд вибрационных перемещений  $\vec{Z}$ :

$$\vec{J} = \theta^2 \mathbf{M}\vec{Z}. \quad (20.41)$$

Учитывая, что матрица масс (в случае учета только динамических степеней свободы) заведомо невырожденная, выразим ампли-

туды вибрационных перемещений через амплитуды вибрационных сил инерции:

$$\vec{Z} = \frac{1}{\theta^2} \mathbf{M}^{-1} \vec{J}. \quad (20.42)$$

Подставив (20.42) в уравнения (20.37), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд инерционных сил, но с несимметричной в общем случае матрицей коэффициентов:

$$\left( \frac{1}{\theta^2} \mathbf{R} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{E} \right) \vec{J} = \vec{F}, \quad (20.43)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Систему (20.43) можно привести к симметричной форме, если при ее выводе воспользоваться не матрицей внешней жесткости  $\mathbf{R}$ , а матрицей внешней податливости  $\mathbf{D}$ , или обратить матрицу внешней жесткости. Умножив систему уравнений (20.43) слева на матрицу внешней податливости и учтя, что она обратна к матрице внешней жесткости, можно получить систему алгебраических уравнений в канонической форме относительно амплитуд инерционных сил с симметричной матрицей коэффициентов:

$$\left( \mathbf{D} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{M}^{-1} \right) \vec{J} + \mathbf{D} \vec{F} = 0 \quad (20.44)$$

или более кратко:

$$\mathbf{D}_D \vec{J} + \vec{\Delta}_F = 0, \quad (20.45)$$

где

$$\mathbf{D}_D = \mathbf{D} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{M}^{-1}, \quad \vec{\Delta}_F = \mathbf{D} \vec{F}.$$

Симметричную квадратную матрицу  $D_D$  называют матрицей динамической податливости (внешней динамической податливости). Вектор  $\vec{\Delta}_F$  представляет собой вектор статических перемещений по направлениям динамических степеней свободы, вызванных статическими силами, равными по значениям амplitудам динамических нагрузок.

Решение уравнений (20.43)–(20.45) относительно вектора амплитуд инерционных сил  $\vec{J}$  или же непосредственное вычисление этого вектора по формуле (20.41) после решения системы (20.39) позволяет дальнейший расчет сооружения по определению динамических внутренних сил и динамических перемещений вести методами статики сооружений. При этом сооружение считается подверженным действию условных статических внешних сил в составе амплитуд вибрационных нагрузок  $\vec{F}$  и амплитуд вибрационных сил инерции  $\vec{J}$ . Напомним, что силы внешнего и внутреннего сопротивления движению в данном разделе не рассматривались.

Пример 20.2. Найти амплитуды сил инерции, вызываемые вертикальной вибрационной силой, приложенной к узлу в середине пролета П-образной рамы (рис. 20.7). Амплитуда вибрационной силы равна  $F = 12$  кН, частота ее изменения во времени  $f = 5$  Гц.

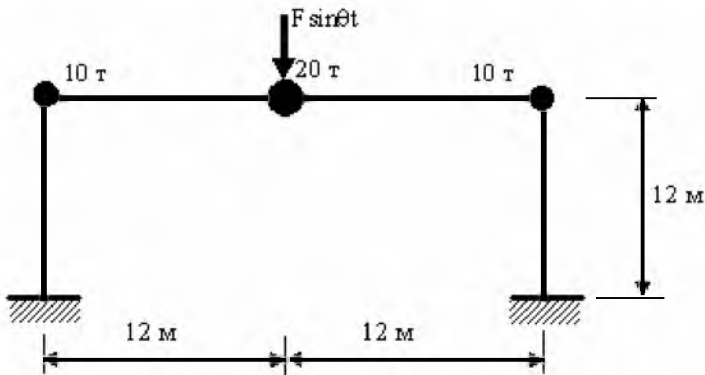


Рис. 20.7



Рассмотрим данную раму как динамическую систему с двумя степенями свободы. Первая степень свободы соответствует вертикальным перемещениям массы, расположенной в середине пролета (эффективная масса  $m_1 = 20$  т). Вторая степень свободы отвечает совместным горизонтальным перемещениям трех масс, расположенных на ригеле (эффективная масса  $m_2 = 40$  т). Составим матрицу податливости данной рамы по этим двум направлениям.

Загрузим раму поочередно двумя силами  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 1$ . Составим ее конечно-элементную расчетную схему (рис. 20.8), задав жесткости стержней рамы на изгиб и на растяжение-сжатие соответственно равными:

$$EJ_1 = 2,34 \cdot 10^6 \text{ кНм}^2; \quad EA_1 = 7,8 \cdot 10^7 \text{ кН для стоек};$$

$$EJ_2 = 5,55 \cdot 10^6 \text{ кНм}^2; \quad EA_2 = 10,4 \cdot 10^7 \text{ кН для ригеля}.$$

Воспользовавшись любым проектно-вычислительным комплексом, найдем вызванные этими единичными силами векторы перемещений всех узлов, из которых выберем только компоненты, относящиеся к вертикальному и горизонтальному перемещениям узла № 3.

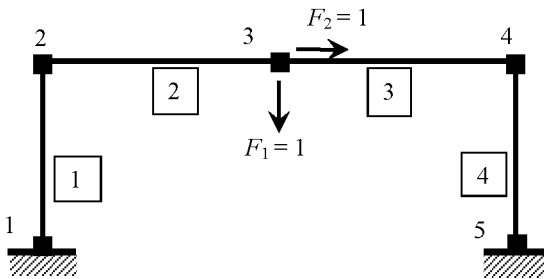


Рис. 20.8

В результате получим матрицу внешней податливости второго порядка по заданным двум направлениям:

$$D = \begin{bmatrix} 2,76 \cdot 10^{-5} & 9,80 \cdot 10^{-22} \\ 8,22 \cdot 10^{-22} & 4,22 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Как видим, побочные элементы матрицы внешней податливости практически равны нулю, что и следовало ожидать, так как рама симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через середину пролета. В дальнейших вычислениях мы и будем их считать нулевыми.

Формируем векторы амплитуд вибрационных нагрузок и свободные члены, входящие в специальные канонические уравнения (20.45):

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_F = D\vec{F} = \begin{bmatrix} 3,31 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Формируем матрицу масс

$$M = \begin{bmatrix} 20 & \\ & 40 \end{bmatrix}$$

и вычисляем круговую частоту вынужденных колебаний:

$$\theta = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4 \text{ рад/с.}$$

Затем формируем матрицу динамической податливости  $D_D$  (20.45):

$$D_D = D - \frac{1}{\theta^2} M^{-1} = \begin{bmatrix} -2,31 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,690 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Так как система специальных канонических уравнений с двумя неизвестными распалась на два уравнения, каждое с одним неизвестным, непосредственно вычисляем вектор амплитуд инерционных сил:

$$\vec{J} = - \begin{bmatrix} 3,31 \cdot 10^{-4} / (-2,31 \cdot 10^{-5}) \\ 0 / 1,690 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,32 \text{ кН} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Итак, суммарное амплитудное динамическое воздействие вибрационной нагрузки на раму превысило ее амплитуду более чем в два раза:

$$\vec{F} + \vec{J} = \begin{bmatrix} 26,3 \text{ кН} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 20.4. Действие вибрационной нагрузки при учете сил сопротивления

Как следует из материалов предыдущего раздела, пренебрежение силами сопротивления при исследовании вынужденных колебаний представляет собой сильную идеализацию. Динамические перемещения и усилия оказываются завышенными, особенно вблизи резонанса. Естественно, резонансные режимы колебаний и близкие к ним в зданиях и сооружениях недопустимы. Однако в реальных условиях эксплуатации здания и сооружения иногда подвергаются действию вибрационных нагрузок от механизмов, которые, набирая обороты, прежде чем выйти в установившийся режим работы, проходят несколько резонансных зон, вызывая в сооружении кратковременные колебания с повышенными амплитудами. Похожие явления наблюдаются и после выключения механизмов, при сбросе ими оборотов. Практика подтверждает, что даже при резонансе реальные перемещения сооружений остаются конечными. И первостепенное значение здесь имеют силы внутреннего неупругого сопротивления, а также силы внешнего трения и специальные демпфирующие устройства. Изучение природы сил сопротивления, как и изучение переходных процессов при нагрузках переменной частоты не входит в учебную программу. Однако задача учета влияния сил сопротивления на характер установившихся динамических процессов является, несомненно, важной.

Рассмотрим установившийся режим вынужденных колебаний, вызванных вибрационной нагрузкой, при наличии сил сопротивления, пропорциональных скоростям движущегося сооружения. В то время как внешние демпфирующие устройства могут быть присоединены только в определенных местах (узлах) сооружения, силы внутреннего трения сопротивляются любым деформациям сооружения. Поэтому можно полагать, что в дискретной расчетной схеме расчетные силы сопротивления должны быть приложены в направлении каждого возможного перемещения, независимо от наличия масс и учета сил инерции. Такой постановке задачи отвечают общие дифференциальные уравнения движения в прямой форме (20.2), которые при вибрационных нагрузках примут вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{R}\mathbf{Z} = \mathbf{F} \sin(\theta t), \quad (20.46)$$

где матрица демпфирования (матрица коэффициентов сил сопротивления)  $\mathbf{H}$  и матрица внешней жесткости  $\mathbf{R}$ , исходя из физического смысла, должны быть не только невырожденными, но и положительно определенными.

Матрица масс может быть и неотрицательно определенной, то есть частью масс и соответствующими силами инерции можно пренебречь.

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений второго порядка (20.46), отвечающее чисто вынужденным колебаниям, будем искать в виде суммы двух гармонических движений:

$$\vec{Z}(t) = \vec{X} \sin(\theta t) + \vec{Y} \cos(\theta t), \quad (20.47)$$

где  $\vec{X}$  и  $\vec{Y}$  – неизвестные амплитудные векторы, независящие от времени.

Дифференцируя (20.47) дважды по времени  $t$ , получим выражения для определения скоростей и ускорений:

$$\vec{Z}(t) = \theta (\vec{X} \cos(\theta t) - \vec{Y} \sin(\theta t)), \quad (20.48)$$

$$\vec{\ddot{Z}}(t) = -\theta^2 (\vec{X} \sin(\theta t) + \vec{Y} \cos(\theta t)).$$

Подставив выражения (20.47) и (20.48) в матричное дифференциальное уравнение (20.46) и сгруппировав в левой части слагаемые при тригонометрических функциях  $\sin(\theta t)$  и  $\cos(\theta t)$ , приравняем между собой коэффициенты при этих функциях в левой и правой частях уравнения. В результате получим систему совместных матричных уравнений порядка  $2n$  относительно неизвестных векторов  $\vec{X}$  и  $\vec{Y}$ :

$$\theta \mathbf{H} \vec{X} + (\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \vec{Y} = 0, \quad (20.49)$$

$$(\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \vec{X} - \theta \mathbf{H} \vec{Y} = \vec{F}.$$

При выполнении отмеченных выше условий, которым должны удовлетворять матрица жесткости, матрица демпфирования и матрица масс, полученная система алгебраических уравнений (20.49) является невырожденной, симметричной, но знаконеопределенной. Методы решения подобной системы линейных алгебраических

уравнений рассматриваются в курсах по методам вычислений. Даже при совпадении частоты вибрационной нагрузки с любой из собственных частот, то есть даже при резонансе, решение системы уравнений (20.49) остается конечным.

Применив к системе (20.49) метод блочного исключения, можно заменить ее двумя системами уравнений, порядок которых вдвое ниже. Исключим неизвестный вектор  $\vec{X}$  из второго уравнения системы (20.49), выразив его с помощью первого уравнения через второй неизвестный вектор  $\vec{Y}$ . В результате неизвестный вектор  $\vec{Y}$  найдем из решения системы уравнений порядка  $n$ :

$$\left[ \theta \mathbf{H} + \frac{1}{\theta} (\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \right] \vec{Y} = -\vec{F}. \quad (20.50)$$

Вектор  $\vec{X}$  также можно найти из решения системы уравнений порядка  $n$ , но после определения вектора  $\vec{Y}$ :

$$\theta \mathbf{H} \vec{X} = -(\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}) \vec{Y}. \quad (20.51)$$

Формирование матрицы коэффициентов системы уравнений (20.50) и решение системы уравнений (20.51) рационально осуществлять на основе разложения матрицы  $\theta \mathbf{H}$  на треугольные множители.

Динамические перемещения деформируемой системы, вызванные действием вибрационной нагрузки с учетом сил сопротивления по теории вязкого трения и полученные из решения дифференциальных уравнений движения (20.46) в виде суммы двух гармонических функций (20.47), уже не являются синфазными. Динамические перемещения по каждому возможному направлению остаются гармоническими, но в общем случае совершаются со своей амплитудой и своей фазой. Исходя из матричной формулы (20.47), можно по известным зависимостям тригонометрии покомпонентно представить каждое динамическое перемещение  $z_i(t)$  в виде одной синусоидальной функции:

$$z_i(t) = a_i \sin(\theta t + \mu_i), \quad (20.52)$$

где амплитуда  $a_i$  и сдвиг по фазе  $\mu_i$  выражаются через компоненты векторов  $\vec{X}$  и  $\vec{Y}$  по формулам:

$$a_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \quad \operatorname{tg}(\mu_i) = y_i / x_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Динамические перемещения по разным направлениям достигают своих экстремальных значений в разные моменты времени. Оценить уровень так называемых виброперемещений, виброскоростей и виброускорений, то есть найти амплитудные значения перемещений  $a_i$ , скоростей  $\theta a_i$  и ускорений  $\theta^2 a_i$  при действии вибрационной нагрузки с учетом вязкого трения на основе формулы (20.52), как видим, труда не представляет.

Более трудоемкой является задача определения экстремальных усилий в элементах деформируемой системы при совместном действии вибрационной нагрузки и сил сопротивления. В соответствии, допустим, с методом перемещений и с учетом (20.47) формально можно установить закон изменения внутренних сил во времени:

$$\vec{S}(t) = \vec{G}[\vec{X} \sin(\theta t) + \vec{Y} \cos(\theta t)], \quad (20.53)$$

где  $\vec{G}$  – матрица перехода от узловых перемещений дискретной деформируемой системы к усилиям в ее элементах.

Из (20.53) следует, что каждое динамическое усилие является суммой  $2n$  гармонических функций, достигающих своих экстремальных значений в разные моменты времени. Перепишем векторно-матричную зависимость (20.53) в векторном виде:

$$\vec{S}(t) = \vec{A} \sin(\theta t) + \vec{B} \cos(\theta t), \quad (20.54)$$

где введены вспомогательные векторы:

$$\vec{A} = \vec{G}\vec{X}, \quad \vec{B} = \vec{G}\vec{Y}.$$

Теперь рассмотрим зависимость (20.54) покомпонентно:

$$s_i(t) = a_i \sin(\theta t) + b_i \cos(\theta t), \quad (20.55)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

В выражении (20.55)  $s_i(t)$ ,  $a_i$  и  $b_i$  представляют собой компоненты соответственно векторов  $\vec{S}(t)$ ,  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .

Снова представим сумму двух гармонических функций (20.55) в виде одной синусоидальной функции:

$$s_i(t) = v_i \sin(\theta t + \eta_i), \quad (20.56)$$

где

$$v_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad \operatorname{tg}(\eta_i) = b_i / a_i.$$

Таким образом, формула (20.56) дает возможность найти амплитуду  $v_i$  любого динамического усилия через компоненты векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .

### 20.5. Решение уравнений движения в общем случае методом разложения по собственным формам

Метод разложения движения деформируемой системы, подверженной действию произвольных динамических сил, по собственным формам свободных незатухающих колебаний является мощным методом динамики сооружений. Этот метод позволяет заметить решение системы  $n$  совместных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение деформируемой системы с  $n$  степенями свободы, решением  $n$  независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение как бы  $n$  независимых колеблющихся систем с одной степенью свободы каждая. Применение метода разложения по собственным формам свободных колебаний к решению задачи о вынужденных колебаниях деформируемой системы, предполагает наличие готового решения первой задачи динамики сооружений. То есть собственные частоты и соответствующие собственные формы

свободных незатухающих колебаний исследуемой деформируемой системы должны быть определены, полностью или частично.

Итак, рассмотрим общие дифференциальные уравнения движения (20.2) некоторой линейно деформируемой системы с учетом вязких сил сопротивления при произвольном силовом динамическом воздействии  $\vec{F}(t)$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{Z}} + \mathbf{H}\dot{\vec{Z}} + \mathbf{R}\vec{Z} = \vec{F}(t). \quad (20.57)$$

Предположим, что решена соответствующая проблема собственных колебаний (20.12):

$$(\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M})\vec{X} = 0. \quad (20.58)$$

Получена матрица собственных частот  $\Omega$ , а также матрица собственных форм  $\mathbf{X}$ , и могут быть построены (вычислены) матрица обобщенных масс  $\mathbf{M}$  (20.21) и матрица обобщенных жесткостей  $\mathbf{R}$  (20.22).

Введем в матричное уравнение (20.57) подстановку:

$$\vec{Z}(t) = \mathbf{X}\vec{V}(t), \quad (20.59)$$

то есть, выразим вектор неизвестных динамических перемещений через вектор новых неизвестных функций от времени  $\vec{V}(t)$ . Другими словами, разложим динамические перемещения по собственным формам свободных незатухающих колебаний, представленных матрицей  $\mathbf{X}$ . Умножим также матричное уравнение (20.59) слева на транспонированную матрицу собственных форм  $\mathbf{X}^T$ , и преобразуем его к виду:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \ddot{\vec{V}} + \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X} \dot{\vec{V}} + \mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X} \vec{V} = \mathbf{X}^T \vec{F}(t). \quad (20.60)$$



Правая часть полученного матричного уравнения (20.60) представляет собой легко вычисляемый вектор так называемых обобщенных сил:

$$\mathbf{X}^T \vec{F}(t) = \vec{\Psi}(t). \quad (20.61)$$

Коэффициенты при  $\vec{V}$  и  $\vec{V}$  в соответствии с обозначениями (20.21) и (20.22) являются соответственно диагональными матрицами обобщенных масс  $\check{M}$  и обобщенных жесткостей  $\check{R}$ . Коэффициент при  $\vec{V}$ , который обозначим через

$$\check{H} = \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{X}, \quad (20.62)$$

является матрицей обобщенных коэффициентов вязкого сопротивления. Эта матрица может также оказаться диагональной. Это возможно при условии, что исходная матрица коэффициентов сопротивления  $\mathbf{H}$  будет подчинена условию (18.14), то есть будет являться линейной комбинацией исходной матрицы масс и матрицы внешней жесткости. В результате получим:

$$\check{H} = \mathbf{X}^T (k_1 \mathbf{M} + k_2 \mathbf{R}) \mathbf{X} = k_1 \check{M} + k_2 \check{R}, \quad (20.63)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – некоторые специально (как правило, экспериментально) подобранные коэффициенты.

При соблюдении условий (18.14) и (20.63) матричное уравнение движения (20.60) принимает вид:

$$\check{M} \vec{\ddot{V}} + \check{H} \vec{\dot{V}} + \check{R} \vec{V} = \vec{\Psi}(t) \quad (20.64)$$

и полностью разделяется, то есть становится эквивалентным  $n$  независимым дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\check{m}_i \ddot{v}_i + \check{h}_i \dot{v}_i + \check{r}_i v_i = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (20.65)$$

Каждое из уравнений (20.65) описывает движение некоторой колебательной системы с одной степенью свободы, подверженной действию некоторой обобщенной динамической нагрузки (20.61), с учетом обобщенных сил сопротивления движению по теории вязкого трения (20.63). Начальные условия  $v_i(t_0)$  и  $\dot{v}_i(t_0)$  могут быть найдены из решения систем алгебраических уравнений общего вида, полученных из (20.9) путем замены (20.59):

$$X\vec{V}(t_0) = \vec{a}, \quad X\dot{\vec{V}}(t_0) = \vec{b}, \quad (20.66)$$

или из уравнений с диагональными матрицами коэффициентов:

$$\tilde{M}\vec{V}(t_0) = X^T M\vec{a}, \quad \tilde{M}\dot{\vec{V}}(t_0) = X^T M\vec{b}. \quad (20.67)$$

В случае, если условия (18.14) и (20.63) не выполняются, и матрица  $\tilde{H}$ , вычисляемая по формуле (20.62), получается не диагональной, а заполненной, то производят ее “волевою” диагонализацию, отбрасывая недиагональные элементы. Выполняют это с одной единственной целью: получить разделенную систему дифференциальных уравнений движения вида (20.65). Тем более что на практике для динамического расчета систем с одной степенью свободы искусственно вводятся дополнительные допущения в соответствии с так называемой теорией частотно независимого трения (см. раздел 19.6), которая ближе отвечает опытными данным.

Для значительного количества динамических воздействий на систему с одной степенью свободы в справочной литературе можно найти аналитические решения. Однако некоторые из них оказываются достаточно громоздкими. Поэтому в практических расчетах при отсутствии аналитических решений, а также в качестве альтернативы громоздким готовым аналитическим решениям применяют численные методы непосредственного решения дифференциальных уравнений движения. Основное достоинство численных методов состоит в возможности исследования движения деформируемых систем при любых заданных динамических нагрузках с учетом любых заданных сил сопротивления движению и любых начальных

условий. При этом деформируемая система может описываться как линейными, так и нелинейными уравнениями.

Общие численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка рассматриваются в курсах по методам вычислений. Дифференциальные уравнения движения как уравнения второго порядка и системы таких уравнений требуют их преобразования к так называемому нормальному виду. Ниже будет рассмотрен численный метод степенных рядов, специально предназначенный для прямого интегрирования линейных дифференциальных уравнений движения без их преобразования к нормальному виду.

## ГЛАВА 21

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

#### 21.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с распределенной массой

Рассмотрим поперечные колебания однородного идеально упругого прямолинейного стержня переменного поперечного сечения, имеющего изгибную жесткость  $EI(x)$  и несущего некоторую распределенную по его длине массу  $m(x)$ . Пусть стержень закреплен по концам на балочных опорах и нагружен некоторой распределенной безмассовой поперечной нагрузкой  $q(x, t)$  (рис. 21.1).

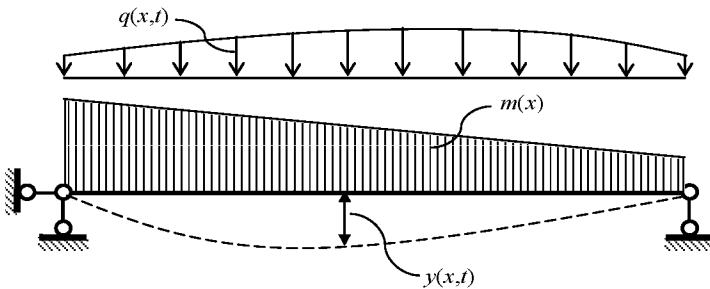


Рис. 21.1

В процессе колебаний с учетом сил инерции на балку будет действовать погонная поперечная нагрузка интенсивностью:

$$p(x, t) = q(x, t) - m(x)\ddot{y}(x, t), \quad (21.1)$$

где

$$\ddot{y}(x, y) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}.$$

Дважды дифференцируя по  $x$  известное дифференциальное уравнение поперечного изгиба балки

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -M(x, t),$$

найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = - \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = p(x, t),$$

а с учетом выражения (21.1) получим искомое дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний рассматриваемой балки:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (21.2)$$

Полученное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка имеет переменные коэффициенты и в общем виде не имеет аналитических решений. Решать его можно только численными или приближенными методами. Для получения конкретного решения потребуется задать шесть дополнительных условий: четыре граничных, определяющих условия закрепления балки на опорах, и два начальных, определяющих начальные отклонения и начальные скорости изогнутой оси балки.

Для балки постоянного сечения  $EJ(x) = EJ$  с равномерно распределенной массой  $m(x) = m$  дифференциальное уравнение упрощается, принимает вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (21.3)$$

и может быть решено в аналитической форме.

## 21.2. Свободные колебания. Балочные функции

Рассмотрим свободные поперечные колебания однородного двухопорного стержня постоянного сечения с равномерно распределенной по длине массой. Дифференциальное уравнение движения (21.3) при  $q(x, t) = 0$  принимает вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (21.4)$$

Как и в случае линейно деформируемых систем с конечной степенью свободы, будем искать гармонические одночастотные колебания рассматриваемого стержня с некоторой собственной частотой  $\omega$ , когда его изогнутая ось (собственная форма колебаний) описывается некоторой пока еще неизвестной функцией  $X(x)$ . Следовательно, можем предположить, что искомое решение уравнения (21.4) имеет вид:

$$y(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \eta), \quad (21.5)$$

где  $X(x)$  – собственная форма;

$\omega$  – собственная круговая частота;

$\eta$  – начальная фаза собственных колебаний однородного стержня с равномерно распределенной массой.

Подставив (21.5) в (21.4) и сократив на  $\sin(\omega t + \eta)$ , получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно неизвестной формы собственных колебаний  $X(x)$  с не-

известным параметром, в роли которого выступает квадрат собственной частоты  $\omega^2$ :

$$EJX^{IV} - m\omega^2 X = 0. \quad (21.6)$$

Разделив на  $EI$  и введя обозначение

$$n^4 = \frac{m\omega^2}{EJ}. \quad (21.7)$$

приведем дифференциальное уравнение (21.6) к виду:

$$X^{IV} - n^4 X = 0. \quad (21.8)$$

К дифференциальному уравнению (21.6) или (21.8) необходимо присовокупить граничные условия. Так, в случае свободно опертой балки пролетом  $l$  будем иметь:

$$\begin{aligned} X(0) = 0, \quad EJX''(0) = -M(0) = 0, \\ X(l) = 0, \quad EJX''(l) = -M(l) = 0. \end{aligned} \quad (21.9)$$

Общее решение однородного уравнения (21.8) имеет вид:

$$X(x) = C_1 ch(nx) + C_2 sh(nx) + C_3 \cos(nx) + C_4 \sin(nx). \quad (21.10)$$

Из граничных условий (21.9) на левой опоре балки найдем, что  $C_1 = C_3 = 0$ . Граничные условия на правой опоре балки дают:

$$\begin{aligned} C_2 sh(\lambda) + C_4 \sin(\lambda) = 0, \\ C_2 sh(\lambda) - C_4 \sin(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (21.11)$$

где  $\lambda = nl$ ,  $l$  – длина пролета балки.

Чтобы система однородных уравнений (21.11) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это условие дает так называемое характеристическое уравнение:

$$sh(\lambda) \sin(\lambda) = 0.$$

Так как при  $\lambda \neq 0$ ,  $sh(\lambda) \neq 0$ , то необходимо, чтобы  $\sin(\lambda) = 0$ , откуда следует с учетом (21.7) бесконечный ряд собственных чисел  $\lambda$  и собственных частот  $\omega$ :

$$\lambda_k = k\pi, \quad \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (21.12)$$

При  $\sin(\lambda) = 0$  из (21.11) следует, что  $C_2 = 0$ , а  $C_4 = C = const$ . Следовательно, выражение для искомой собственной формы колебаний (21.10) получает вид:

$$X(x) = C \sin(nx) = C \sin\left(\frac{\lambda}{l} x\right) = C \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \quad (21.13)$$

$$(k=1,2,3,\dots).$$

Как следует из (21.13), собственными формами свободных колебаний шарнирно опертой балки являются синусоиды с числом полуволн, равным номеру собственной частоты. В формуле (21.13) константа  $C$  остается неопределенной, произвольной, но ненулевой.

Выдающийся кораблестроитель академик А.Н. Крылов для удобства описания форм свободных колебаний балок при других условиях опирания ввел специальные функции, являющиеся линейной комбинацией слагаемых правой части (21.10). Эти функции получили название функций Крылова. Они имеют вид:

$$K_1(nx) = \frac{1}{2}(ch nx + \cos nx); \quad K_2(nx) = \frac{1}{2}(sh nx + \sin nx); \quad (21.14)$$

$$K_3(nx) = \frac{1}{2}(ch nx - \cos nx); \quad K_4(nx) = \frac{1}{2}(sh nx - \sin nx).$$

При дифференцировании по  $x$  функции Крылова (21.14) выражаются друг через друга (табл. 21.1).

Таблица 21.1

Функция	Первая производная	Вторая производная	Третья производная	Четвертая производная
$K_1(nx)$	$nK_4(nx)$	$n^2 K_3(nx)$	$n^3 K_2(nx)$	$n^4 K_1(nx)$
$K_2(nx)$	$nK_1(nx)$	$n^2 K_4(nx)$	$n^3 K_3(nx)$	$n^4 K_2(nx)$
$K_3(nx)$	$nK_2(nx)$	$n^2 K_1(nx)$	$n^3 K_4(nx)$	$n^4 K_3(nx)$
$K_4(nx)$	$nK_3(nx)$	$n^2 K_2(nx)$	$n^3 K_1(nx)$	$n^4 K_4(nx)$

Функции Крылова оказались очень удобными для выражения форм колебаний балок с различными опорами. Общее решение уравнения (21.8), выраженное через функции Крылова, формально принимает вид:

$$X(x) = C_1 K_1(nx) + C_2 K_2(nx) + C_3 K_3(nx) + C_4 K_4(nx). \quad (21.15)$$

Значения четырех постоянных интегрирования  $C_1$ – $C_4$  должны быть подобраны так, чтобы выполнялись граничные условия, то есть условия опирания балки по концам – по два на каждом конце. Для типовых случаев (балка на конце свободна, шарнирно оперта или жестко зашкреплена) граничные условия выражаются равенствами нулю двух из следующих четырех величин:

$$X(x), X'(x), X''(x), X'''(x).$$

Одним из преимуществ функций Крылова является то, что с их помощью можно сразу написать общее решение (21.15), удовлетворяющее однородным граничным условиям на конце балки (при  $x = 0$ ) и содержащее только два слагаемых и, следовательно, только две постоянные интегрирования, которые определяются из условий на другом конце балки (при  $x = l$ ). Это вытекает из анализа значений функций Крылова и их производных до третьего порядка включительно при  $x = 0$  (табл. 21.2).



Таблица 21.2

Обозначение функций	Значение функций и их производных при $x = 0$			
	Функция	Первая производная	Вторая производная	Третья производная
$K_1(nx)$	1	0	0	0
$K_2(nx)$	0	$n$	0	0
$K_3(nx)$	0	0	$n^2$	0
$K_4(nx)$	0	0	0	$n^3$

Для конкретных граничных условий выражение (21.15) дает бесконечный спектр собственных форм свободных колебаний балки постоянного сечения. Эти конкретные формы колебаний  $X_k(x) = X_k$  получили название фундаментальных, или балочных функций.

Первое свойство балочных функций вытекает из зависимости (21.8) и заключается в том, что их четвертая производная отличается от самой функции постоянным множителем.

Второе свойство вытекает из уравнения (21.6), если в него подставить одну из балочных функций  $X_k$  и переписать его так:

$$EJX_k^{IV} = m\omega_k^2 X_k. \quad (21.16)$$

Откуда следует вывод, что балочная функция  $X_k$  представляет собой линию прогибов балки на конкретных опорах, вызванную погонной нагрузкой вида:

$$g_k(x) = m\omega_k^2 X_k. \quad (21.17)$$

На основании теоремы о взаимности возможных работ можно записать:

$$\int_0^l g_k(x) X_i(x) dx = \int_0^l g_i(x) X_k(x) dx,$$

или с учетом (21.17):

$$m(\omega_k^2 - \omega_i^2) \int_0^l X_k(x) X_i(x) dx = 0.$$

Так как в общем случае  $\omega_k \neq \omega_i$  и  $m \neq 0$ , из последнего равенства следует еще одно важное свойство балочных функций. Для стержня постоянного сечения с равномерно распределенной массой балочные функции являются взаимно ортогональными. Это означает, что:

$$\int_0^l X_k(x) X_i(x) dx = 0 \quad (i \neq k). \quad (21.18)$$

Часто балочные функции нормируют, добиваясь выполнения условия:

$$\int_0^l X_i^2 dx = 1.$$

Отмеченные свойства балочных функций существенно упрощают решение многих задач динамики сооружений, например, при исследовании вынужденных колебаний от нагрузки общего вида. В методе конечных элементов балочные функции используются как базисные функции (функции формы). В справочной литературе имеются числовые таблицы балочных функций и их производных.

### 21.3. Вынужденные колебания при вибрационной нагрузке

Рассмотрим действие на балку с равномерно распределенной массой некоторой произвольным образом распределенной нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону с некоторой частотой  $\theta$ :

$$q(x, t) = q(x) \sin(\theta t). \quad (21.19)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний примет вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q(x) \sin(\theta t). \quad (21.20)$$

Предположим, что решена соответствующая проблема свободных колебаний и найден спектр собственных частот  $\omega_k$  и соответствующих собственных форм, т. е. балочных функций  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Представим искомую функцию динамических перемещений как линейную комбинацию балочных функций:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t) X_i(x), \quad (21.21)$$

где множители  $T_i$ , называемые главными координатами, есть функции только времени.

Подставив (21.21) в (21.20), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_i E I X_i^{IV} + m \ddot{T}_i X_i) = q(x) \sin(\theta t). \quad (21.22)$$

С учетом зависимости (21.16) уравнение (21.22) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i) m X_i = q(x) \sin(\theta t).$$

Умножим обе части последнего равенства на некоторую балочную функцию  $X_k$ , соответствующую собственной частоте  $\omega_k$ , и проинтегрируем по длине балки. Тогда в силу условия ортогональности балочных функций (21.18) все слагаемые в левой части, кроме  $k$ -го, обратятся в нуль. В результате получим:

$$(\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k) m \int_0^l X_k^2 dx = \sin(\theta t) \int_0^l X_k q(x) dx,$$

откуда следует

$$\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k = \frac{F_k}{M_k} \sin(\theta t), \quad (21.23)$$

где

$$F_k = \int_0^l X_k q(x) dx; \quad M_k = m \int_0^l X_k^2 dx. \quad (21.24)$$

Полученное уравнение (21.23) справедливо для каждой собственной частоты  $\omega_k$  и соответствующей собственной формы  $X_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Таким образом, задача решения исходного дифференциального уравнения в частных производных (21.20) для системы с бесконечной степенью свободы сведена к задаче решения бесконечного множества обыкновенных дифференциальных уравнений (21.23) как бы для некоторых систем с одной степенью свободы. После получения из решения уравнений (21.23) главных координат, то есть функций  $T_k(t)$ , по формуле (21.21) вычисляют искомые динамические перемещения. Обычно на практике ограничиваются конечным числом слагаемых, соответствующих некоторому количеству низших собственных частот и соответствующих собственных форм. Бесконечный ряд (21.21) обрывают, допустим, на члене номер  $(k+1)$ , вклад которого в предыдущую сумму становится незначительным, то есть когда начинает выполняться условие:

$$y_{k+1}(x, t) = T_{k+1}(t) X_{k+1}(x) \ll \sum_{i=1}^k T_i(t) X_i(x). \quad (21.25)$$

**Пример 21.1.** Найти динамические прогибы в однопролетной шарнирно опертой балке пролетом  $l$  (рис. 21.2). Балка несет равномерно распределенную по пролету массу интенсивностью  $m$  и за-

гружена на левом полупролете равномерно распределенной вибрационной нагрузкой интенсивностью:

$$q(x, t) = q \sin \theta t.$$

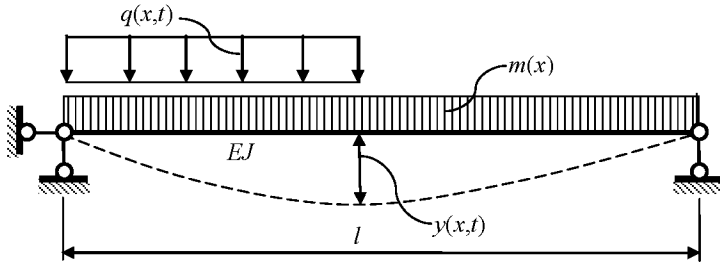


Рис. 21.2

Частота вибрационной нагрузки принимает значение  $\theta = 0,8\omega_1$ , где  $\omega_1$  – первая собственная частота свободных колебаний балки.

Собственные частоты  $\omega_k$  свободных колебаний балки определим по формуле (21.12), а соответствующие собственные формы  $X_k$  – по формуле (21.13), приняв  $C = 1$ . Это будет означать, что собственные формы нормализованы до единичной максимальной ординаты.

Амплитудные значения динамических перемещений будем искать в соответствии с разложением (21.21), ограничившись конечным числом слагаемых  $n$ , по формуле:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n T_k X_k(x) = \sum_{k=1}^n T_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (21.26)$$

где  $T_k$  – амплитудное значение главной координаты, то есть амплитудное значение гармонического решения обобщенного дифференциального уравнения (21.23).

Определим по формулам (21.24) обобщенные силы и обобщенные массы:

$$F_k = q \int_0^{l/2} X_k dx = q \int_0^{l/2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{ql}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2}\right);$$

$$M_k = m \int_0^{l/2} X_k^2 dx = m \int_0^{l/2} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{ml}{2}.$$

Определим жесткость обобщенной системы с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением (21.23), аналогичным уравнению (19.5):

$$r_k = M_k \omega_k^2 = \frac{k^4 \pi^4 EI}{2l^3}.$$

Найдем выражение для обобщенного динамического коэффициента:

$$\mu_k = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_k^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2 \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{1 - \frac{0,64}{k^4}}.$$

Определим амплитудное значение нормальной координаты:

$$T_k = T_{din} = T_{st} \mu = \frac{F_k}{r_k} \mu_k = \Delta_{st}^0 T_k^*,$$

где

$$\Delta_{st}^0 = \frac{5ql^4}{768EI}; \quad T_k^* = \frac{1536(1 - \cos \frac{k\pi}{2})}{5k^5 \pi^5} \mu_k.$$

По своему смыслу величина  $\Delta_{st}^0$  есть прогиб балки в середине пролета от статической нагрузки интенсивностью  $q$ , равномерно распределенной на половине пролета.

Введем новую безразмерную переменную

$$y^*(x) = y(x) / \Delta_{st}^0,$$

представляющую собой искомое относительное амплитудное динамическое перемещение.

Из формулы (21.26) следует, что:

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^n T_k^* \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (21.27)$$

В табл. 21.3 приведены значения обобщенных сил  $F_k$ , обобщенных динамических коэффициентов  $\mu_k$  и главных относительных координат  $T_k^*$  для первых шести собственных форм колебаний.

Таблица 21.3

$k$	$F_k$	$\mu_k$	$T_k^*$
1	$ql / \pi$	2,7778	2,7885
2	$ql / \pi$	1,0417	0,0654
3	$ql / (3\pi)$	1,0080	0,0042
4	0	1,0025	0,0000
5	$ql / (5\pi)$	1,0010	0,0003
6	$ql / (3\pi)$	1,0005	0,0002

Заданная динамическая нагрузка не вызывает обобщенных сил для форм колебаний с числом полуолн синусоиды, кратным четырем.

В табл. 21.4 приведены ординаты линии амплитудных динамических прогибов рассматриваемой балки, вычисленные в четвертях и середине пролета. Номер строки таблицы соответствует количеству удержанных членов в формуле (21.27). Практически для полу-

чения динамических относительных перемещений достаточно первых трех собственных форм. Полученная линия динамических прогибов показана штриховой линией на рис. 21.2.

Форма линии прогибов близка к симметричной. Это обусловлено значительными инерционными силами, вызванными колебаниями, происходящими с частотой, близкой к первой собственной частоте, соответствующей собственной форме колебаний в виде полуволны синусоиды.

Таблица 21.4

Количество слагаемых	Динамическое относительное перемещение $y^*(x)$		
	$x = l/4$	$x = l/2$	$x = 3l/4$
1	1,9717	2,7885	1,9717
2	2,0371	2,7885	1,9064
3	2,0400	2,7843	1,9093
4	2,0400	2,7843	1,9093
5	2,0398	2,7846	1,9091
6	2,0396	2,7846	1,9094

## ГЛАВА 22

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ

#### 22.1. Приближенные методы определения частот собственных колебаний

Для многих задач динамического расчета сооружений бывает достаточным определение только основной, наименьшей частоты собственных колебаний, или, по крайней мере, нескольких первых собственных частот. Точное же определение всех собственных частот для систем с большим числом степеней свободы представляет собой сложную вычислительную проблему, порой плохо обусловленную. Поэтому важным является умение приближенно оценить основную частоту собственных колебаний сооружения, применяя достаточно простые вычислительные приемы. Рассмотрим некоторые из них,



наиболее часто применяемые в вычислительной практике, как с целью проверки результатов сложных расчетов, так и с целью получения предварительных сведений о динамической системе.

Предположим, что для некоторой системы с конечным числом степеней свободы построена матрица внешней жесткости  $R$ . Это можно сделать с помощью любого программного комплекса, предназначенного для статических расчетов сооружений. Систему однородных алгебраических уравнений свободных колебаний (20.12) можно переписать так:

$$R\vec{X} = \omega^2 M\vec{X}. \quad (22.1)$$

Умножим равенство (22.1) слева на транспонированный неизвестный вектор  $\vec{X}^T$  и разрешим относительно  $\omega^2$ . В результате получим формулу, выражающую квадрат одной из собственных частот через соответствующую форму собственных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T R \vec{X}}{\vec{X}^T M \vec{X}}. \quad (22.2)$$

Если в формулу (22.2) подставить точный вектор одной из собственных форм колебаний, то получим точное значение соответствующей собственной частоты. Если собственная форма будет задана приближенно, то получим приближенное значение собственной частоты. При этом приближенное значение частоты всегда будет выше ее истинного значения. Действительно, если задаваемая форма деформаций (в данном случае, форма колебаний), отличается от истинной формы деформаций, то это означает, что на систему как бы наложены дополнительные связи, стесняющие ее деформации. Введение дополнительных связей повышает общую жесткость системы и, следовательно, повышает значения ее собственных частот. Можно задаться несколькими близкими векторами, приближенно представляющими с разной степенью точности искомую форму собственных колебаний, и по формуле (22.2) найти несколько приближенных значений искомой частоты. Наименьшее из полученных приближенных значений будет наиболее близким к точному значению искомой собственной частоты.

Выражение в числителе правой части формулы (22.2) представляет собой удвоенное выражение потенциальной энергии деформации упругой системы. Потенциальную энергию деформации можно выразить через работу внешних сил (сил инерции при свободных колебаниях) или воспользоваться известной зависимостью из метода перемещений:

$$R\vec{X} = \vec{F}, \quad (22.3)$$

где  $\vec{F}$  – вектор, в данном случае, приближенно задаваемых, предполагаемых сил инерции;

$\vec{X}$  – вектор вызванных ими перемещений, соответствующих предполагаемой форме собственных колебаний.

В результате получим формулу для приближенного вычисления частот свободных колебаний, не требующую построения матрицы внешней жесткости деформируемой системы:

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T \vec{F}}{\vec{X}^T \mathbf{M} \vec{X}}. \quad (22.4)$$

В формуле (22.4) нельзя одновременно произвольно задавать и вектор инерционных нагрузок  $\vec{F}$ , и форму колебаний, вектор перемещений  $\vec{X}$ . Между ними должна существовать взаимосвязь (22.3). На практике, как правило, сначала приближенно задают вектор предполагаемых инерционных сил  $\vec{F}$ , который должен быть пропорционален массам и предполагаемым ускорениям. Затем с помощью статического расчета находят соответствующий вектор перемещений  $\vec{X}$  (можно применить любой программный комплекс) и, наконец, применяют формулу (22.4).

Формулы (22.2) и (22.4), полученные на основании матричных амплитудно-частотных уравнений, описывающих свободные незатухающие колебания систем с конечной степенью свободы, могли быть получены и с помощью закона сохранения энергии. Применим соответствующий энергетический метод, основанный на законе сохранения энергии, для приближенного вычисления основных частот деформируемых систем, несущих распределенные массы. При свободных незатухающих колебаниях в любой момент времени сумма по-

тенциальной энергии деформации упругой системы и кинетической энергии движущихся масс системы остается постоянной величиной:

$$U + T = C = const .$$

В тот момент, когда скорость колеблющейся системы имеет нулевое значение, ее перемещения достигают амплитудных значений. И наоборот, когда колеблющаяся система проходит положение равновесия и перемещения равны нулю, скорость движущихся масс максимальна. Так как потенциальная энергия деформации пропорциональна квадрату перемещений, а кинетическая энергия – квадрату скоростей, то при прохождении положения равновесия:

$$U = 0, \quad T = T_{\max} = C ,$$

а при амплитудном отклонении от положения равновесия:

$$U = U_{\max} = C, \quad T = 0 .$$

Следовательно,

$$T_{\max} = U_{\max} . \tag{22.5}$$

Рассмотрим балку с погонной массой  $m(x)$ , совершающую свободные гармонические поперечные колебания с собственной частотой  $\omega$  по собственной форме  $y(x)$ :

$$y(x, t) = y(x) \sin(\omega t + \eta) .$$

Скорость движущихся масс будет определяться выражением

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega y(x) \cos(\omega t + \eta) .$$

Амплитудное значение кинетической энергии при  $\cos(\omega t + \eta) = 1$  будет равно:

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l m(x) y^2(x) dx .$$

Потенциальная энергия деформации получит максимальное, амплитудное значение при  $\sin(\omega t + \eta) = 1$ . Исходя из определения потенциальной энергии деформации и используя дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EJ(x)y''(x) = M(x),$$

будем иметь:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{EJ(x)} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [y''(x)]^2 dx.$$

Следовательно, на основании (22.5) имеем:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ(x) [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (22.6)$$

Потенциальную энергию деформации можно выразить через действительную работу внешних сил:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{EI(x)} = \frac{1}{2} \int_0^l q(x) y(x) dx,$$

где  $q(x)$  – предполагаемая, приближенно задаваемая инерционная нагрузка;

$y(x)$  – вызванная этой нагрузкой линия прогибов стержня.

Тогда формула (22.6) примет вид:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l q(x) y(x) dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (22.7)$$

Формулы (22.6) и (22.7) позволяют вычислять частоты свободных колебаний в стержнях переменного поперечного сечения с неравномерно распределенной массой. Формулы являются точными, если форма колебаний (линия прогибов) стержня, закон распределения масс, инерционная нагрузка и условия опирания стержня (граничные условия) соответствуют друг другу. В противном случае эти формулы являются приближенными.

Очень часто для оценки основной собственной частоты инерционную нагрузку считают равной весу масс  $q(x) = gm(x)$ , прикладывают ее в направлении движения масс, а форму колебаний принимают в виде статической линии прогибов, вызванной такой нагрузкой. Вычисление определенных интегралов в полученных формулах также можно выполнить приближенно любым численным методом (прямоугольников, трапеций, Симпсона и др.).

## 22.2. Замена распределенных масс сосредоточенными

Система с бесконечно большим числом степеней свободы заменяется системой с одной или несколькими степенями свободы. Для этого распределенные по длине стержней массы заменяются эквивалентными сосредоточенными массами. Чем больше сосредоточенных масс заменяет распределенную массу, тем ближе будут вычисленные приближенные значения динамических параметров к их точным, действительным значениям.

Замена распределенных масс сосредоточенными может быть выполнена двумя способами. Предварительно элементы системы, несущие распределенные массы, разбиваются на требуемое число участков.

Первый способ замены масс заключается в том, что масса каждого участка сосредотачивается в его центре масс. В результате вместо распределенной массы получаем несколько сосредоточенных масс, количество которых равно количеству участков.

Второй способ состоит в том, что суммарная масса участка распределяется по узловым точкам на его границе. Так, для участка стержневого элемента масса распределяется по закону рычага в две сосредоточенные массы, располагаемые на его концах.

Рассмотрим однопролетную балку пролетом  $L$ , несущую равномерно распределенную массу интенсивностью  $m$  (рис. 22.1,а). Разбив про-

лет балки на четыре участка равной длины, и сосредоточив массы участков в центрах участков, получим систему с четырьмя степенями свободы (рис. 22.1,б). Применяв второй способ и сосредоточив массы на границах участков, получим систему с пятью сосредоточенными массами, но только с тремя степенями свободы (рис. 22.1,в).

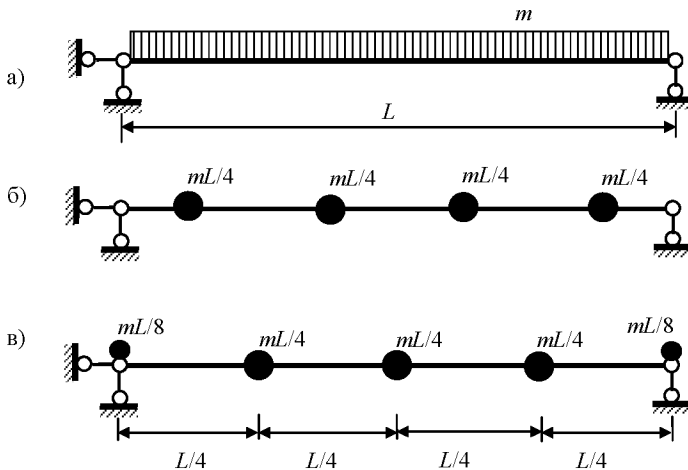


Рис. 22.1

Аналогичным образом можно систему с большим количеством сосредоточенных масс заменить системой с гораздо меньшим количеством сосредоточенных масс. То же можно сделать и с системой, несущей одновременно распределенные и сосредоточенные массы.

### 22.3. Специальные численные методы решения частичной проблемы собственных колебаний

Рассматриваемый в курсах по методам вычислений степенной метод вычисления наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора квадратной матрицы общего вида позволяет для задачи вида (20.14) найти наибольшее собственное значение  $\lambda_{\max}$  и тем самым вычислить наименьшую собственную частоту  $\omega_{\min} = \sqrt{1/\lambda_{\max}}$  и соответствующую собственную форму колебаний.

Обратный степенной метод со сдвигом, также рассматриваемый в курсах по методам вычислений, позволяет для заданной матрицы найти собственное значение, ближайшее к заданному числу, и соответствующий собственный вектор. Этот метод позволяет выделить требуемое количество низших собственных значений и найти их вместе с соответствующими собственными векторами. Небольшая модификация этого метода допускает его применение для решения обобщенной проблемы собственных значений вида (20.12) для двух симметричных матриц. Рассмотрим эту модификацию.

Перепишем систему (20.12) в виде:

$$R\vec{X} = \omega^2 M\vec{X}. \quad (22.8)$$

Зададим число  $\omega_0$ , и будем искать собственную частоту  $\omega$ , ближайшую к этому заданному числу, и соответствующую собственную форму (соответствующий собственный вектор  $\vec{X}$ ) свободных колебаний. Вычтем из обеих частей равенства (22.8) произведение  $\omega_0^2 M\vec{X}$ :

$$(R - \omega_0^2 M)\vec{X} = (\omega^2 - \omega_0^2)M\vec{X}.$$

Обозначив

$$(R - \omega_0^2 M) = K; \quad (\omega^2 - \omega_0^2) = \psi, \quad (22.9)$$

получим новую обобщенную проблему на собственные значения для двух симметричных матриц:

$$K\vec{X} = \psi M\vec{X}. \quad (22.10)$$

Далее, в соответствии с технологией обратного степенного метода, можно организовать следующий итерационный процесс (с учетом симметричности матрицы внешней жесткости).

1. Разложить симметричную матрицу  $K$  на три множителя:

$$K = L^T DL.$$

Провести анализ элементов диагональной матрицы  $D$ . Количество ее отрицательных элементов равно количеству собственных частот, меньших заданного числа  $\omega_0$ .

Не проводя последующих итераций, а только изменяя задаваемое число  $\omega_0$ , формируя новую матрицу  $K$ , разлагая ее на множители и анализируя количество отрицательных элементов на главной диагонали сомножителя  $D$ , можно отделить требуемое количество собственных частот на требуемом участке спектра. В этом и состоит метод дихотомии спектра собственных частот.

2. Задать начальное приближение для искомого собственного значения  $\psi_{(k)}$  и начальное приближение для соответствующего собственного вектора  $\vec{X}_{(k)}$ .

3. Вычислить вспомогательный вектор:

$$\vec{Y}_{(k)} = M\vec{X}_{(k)}.$$

4. Найти в новом приближении собственный вектор  $\vec{X}_{(k+1)}$  из решения системы линейных алгебраических уравнений с факторизованной матрицей коэффициентов:

$$L^T DL\vec{X}_{(k+1)} = \vec{Y}_{(k)}.$$

5. Вычислить в новом приближении искомое собственное значение, используя скалярные произведения:

$$\psi_{(k+1)} = \frac{\vec{X}_{(k)}^T \vec{X}_{(k)}}{\vec{X}_{(k)}^T \vec{X}_{(k+1)}}.$$

6. Нормировать найденный вектор  $\vec{X}_{(k+1)}$ .

Если нормирование векторов производится к единичной длине, то в предыдущей формуле числитель заведомо равен единице.

7. При выполнении условий завершения процесса итераций вывести результаты:



$$\psi_{(k+1)} \text{ и } \vec{X}_{(k+1)},$$

иначе принять:

$$\psi_{(k)} = \psi_{(k+1)} \text{ и } \vec{X}_{(k)} = \vec{X}_{(k+1)},$$

и повторить вычисления с пункта 3.

По завершении итераций искомая собственная частота вычисляется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \psi}. \quad (22.11)$$

Найденный собственный вектор  $\vec{X}$  определяет соответствующую собственную форму свободных колебаний.

Матрица масс может быть как положительно определенной, так и неотрицательно определенной. Матрица жесткости после сдвига (матрица  $K$ ) может быть знаконеопределенной, но не должна получиться вырожденной. Если матрица  $K$  оказалась вырожденной, то заданное число  $\omega_0$  равно одной из собственных частот.

Приведенный алгоритм вычисления собственного значения, ближайшего к заданному числу (параметру сдвига), и соответствующего собственного вектора легко реализуется на компьютере на основе любого языка программирования и известного программного обеспечения. Он позволяет вычислять собственные частоты и собственные формы свободных колебаний, описываемых уравнениями вида (20.12) или (22.8). Отметим, что разложение матрицы  $K$  на множители может быть также выполнено любым численным методом, даже без учета ее симметричности.

В современных проектно-вычислительных комплексах методика обратного степенного метода применяется для одновременных итераций нескольких (в принципе, произвольного количества  $k$ ) собственных частот и соответствующих собственных форм. Учитываемое в практических расчетах количество собственных форм обычно меньше динамической степени свободы деформируемой системы и значительно меньше ее общей степени свободы ( $k \ll n$ ). По срав-

нению с другими методами частичного решения первой задачи динамики сооружений метод одновременных итераций обладает лучшей обусловленностью. Он позволяет получать искомые частоты и формы колебаний с заданной точностью. Рассмотрим метод одновременных итераций более подробно.

Предположим, что для системы (22.8) порядка  $n$  требуется найти  $k$  младших собственных частот, образующих диагональную матрицу

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \dots & \\ & & \omega_k \end{bmatrix}$$

порядка  $k$ , и  $k$  соответствующих собственных форм, образующих прямоугольную матрицу размерности  $(n \cdot k)$ :

$$X = [\vec{X}_1 \quad \dots \quad \vec{X}_k].$$

Подставим их все в систему (22.8) и выразим ее в таком виде:

$$RX = MX\Omega^2. \quad (22.12)$$

Если бы значения  $k$  искомым частот и соответствующих собственных векторов были бы известны, то система (22.12) была бы удовлетворена тождественно. Если же задать их значения приближенно и подставить только в правую часть (22.12), то получим систему уравнений, которая позволит уточнить искомые собственные формы (собственные векторы). Итак, обозначив матрицу уточняемых собственных векторов через  $Y$ , имеем для ее определения систему:

$$RY_{(i)} = P_{(i-1)}, \quad P_{(i-1)} = MX_{(i-1)}\Omega_{(i-1)}^2, \quad (22.13)$$

где  $i$  – номер итерационного приближения.

Система (22.13) эквивалентна системе (22.12) и представляет собой  $k$  систем линейных алгебраических уравнений с одной и той же симметричной матрицей коэффициентов порядка  $n$  (матрицей

внешней жесткости) и  $k$  правыми частями, зависящими от приближенных значений квадратов искомых собственных частот  $\Omega_{(i-1)}^2$  и собственных форм  $X_{(i-1)}$ . Ее решением будет матрица  $Y_{(i)}$  уточненных собственных форм, или собственных векторов.

Затем можно было бы найти уточненные значения искомых собственных частот, применив для этого отношение Релея, которое можно получить из системы (22.8), подставив в него уточняемые собственные векторы  $\vec{Y}_j$ , составляющие матрицу  $Y_{(i)}$ :

$$(\omega_j^2)_{(i)} = \frac{(\vec{Y}_j^T)_{(i)} \mathbf{R}(\vec{Y}_j)_{(i)}}{(\vec{Y}_j^T)_{(i)} \mathbf{M}(\vec{Y}_j)_{(i)}} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (22.14)$$

где  $j$  – номер вычисляемой собственной частоты и соответствующей формы колебаний;

$i$  – номер итерационного приближения.

Однако чтобы в процессе итераций каждый вектор сходил к определенной форме (а не все векторы сходились к одной форме с низшей частотой), весь набор искомых собственных векторов необходимо привести к взаимно ортогональному виду. Это можно выполнить различными методами. Но чаще всего поступают следующим образом.

С помощью итерируемых собственных векторов, образующих прямоугольную матрицу  $Y_{(i)}$ , производят замену переменных в системе (22.8):

$$\vec{X} = \mathbf{Y}\vec{Z}, \quad (22.15)$$

где  $\vec{Z}$  – вектор новых переменных порядка  $k$ .

Затем, умножив (22.8) слева на  $Y^T$ , переходят к редуцированной обобщенной проблеме собственных значений:

$$Y^T \mathbf{R} \mathbf{Y} \vec{Z} = \omega^2 Y^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \vec{Z}, \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{R}} \vec{Z} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}} \vec{Z}, \quad (22.16)$$

где матрицы  $\tilde{\mathbf{R}}$  и  $\tilde{\mathbf{M}}$  уже имеют порядок  $k$ .

Если бы векторы, составляющие прямоугольную матрицу  $Y$ , были бы точными собственными векторами, то они удовлетворяли бы редуцированной системе (22.16). Причем матрицы  $\tilde{R}$  и  $\tilde{M}$  были бы диагональными, а так они получаются заполненными, симметричными, и только в процессе итераций будут приближаться к диагональным.

Так как порядок редуцированной обобщенной проблемы собственных значений (22.16) намного меньше исходного числа степеней свободы ( $k \ll n$ ), для ее решения применяют стандартные методы решения полной проблемы собственных значений, например, метод вращений, или метод Якоби. Решив полную проблему собственных значений (22.16), получают матрицу уточненных частот  $\Omega_{(i)}$  и матрицу ортогональных и нормированных векторов  $Z_{(i)}$  порядка  $k$ , от которых необходимо вернуться к первоначальным переменным порядка  $n$ . Сделать это можно по формулам вида (22.15):

$$X_{(i)} = Y_{(i)}Z_{(i)}. \quad (22.17)$$

Итак, окончательно алгоритм метода одновременных итераций (его еще называют методом итераций в подпространстве, так как в процессе итераций совершается попеременный переход от задач большой размерности  $n$  к задачам существенно меньшей размерности  $k$ ) состоит из следующих этапов.

1. Задать набор пробных векторов  $X_{(i-1)}$  и пробных чисел  $\Omega_{(i-1)}$ .
2. Составить систему уравнений (22.13) порядка  $n$  и найти ее  $k$  решений, то есть вычислить прямоугольную матрицу  $Y_{(i)}$ .
3. Перейти к редуцированной проблеме собственных значений (22.16) порядка  $k$ , то есть составить матрицы  $\tilde{R}$  и  $\tilde{M}$ , решить для них полную проблему собственных значений и вычислить в новом приближении искомые собственные частоты  $\Omega_{(i)}$  и набор вспомогательных ортогональных векторов  $Z_{(i)}$ .

4. По формуле (22.17) вычислить в новом приближении иско-  
мые собственные формы  $X_{(i)}$ , нормировать их.

В ходе итераций матрицы  $\tilde{R}_{(i)}$  и  $\tilde{M}_{(i)}$  стремятся к диагональным,  
а матрица  $Z_{(i)}$  стремится к единичной. В качестве начального прибли-  
жения можно принять  $\Omega_{(0)} = E$  (единичной матрице), а  $X_{(0)}$  соста-  
вить из векторов перемещений, полученных загрузением исходной  
деформируемой системы  $k$  подходящими независимыми нагрузками.  
Опыт вычислений показывает, что если требуется получить с  
достаточной точностью  $k$  собственных векторов, то итерировать  
необходимо несколько большее количество векторов  $k_1$ . Наилуч-  
ший выбор определяется меньшей из двух величин:

$$k_1 = \min(2k, k + 8).$$

Пример 22.1. Найти собственные частоты и собственные форм-  
ы свободных колебаний однопролетной одноэтажной рамы, несущей  
три сосредоточенные массы (рис. 22.2).

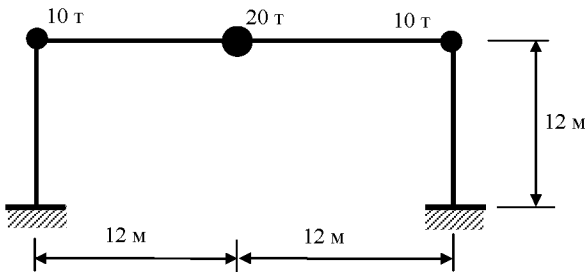


Рис. 22.2

Жесткости стержней рамы на изгиб и на растяжение-сжатие со-  
ответственно равны:

$$EJ_1 = 2,34 \cdot 10^5 \text{ кНм}^2, \quad EA_1 = 7,8 \cdot 10^6 \text{ кН для стоек},$$

$$EJ_2 = 5,55 \cdot 10^5 \text{ кНм}^2, \quad EA_2 = 10,4 \cdot 10^6 \text{ кН для ригеля}.$$

Решение ведем в матричной форме методом перемещений с учетом продольных деформаций. Дискретная расчетная модель рамы (рис. 22.3) в этом случае имеет девять возможных упругих перемещений и двенадцать неизвестных независимых усилий. Точечные массы могут перемещаться линейно по вертикали и горизонтали, инерцией их вращения пренебрегаем. Следовательно, суммарная динамическая степень свободы системы равна шести. Собственные частоты и собственные формы свободных колебаний найдем из решения системы однородных алгебраических уравнений (22.8) девятого порядка, где матрица масс будет иметь нулевые элементы по направлению угловых степеней свободы.

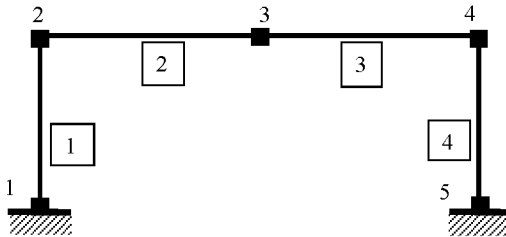


Рис. 22.3

Вырезав последовательно узлы 2, 3 и 4, составим девять уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
 -Q_1 + N_2 &= 0; & -N_1 - Q_2 &= 0; & M_{k1} - M_{n2} &= 0; \\
 -N_2 + N_3 &= 0; & Q_2 - Q_3 &= 0; & M_{k2} - M_{n4} &= 0; \\
 -N_3 - Q_4 &= 0; & Q_3 - N_4 &= 0; & M_{k3} - M_{n4} &= 0.
 \end{aligned}$$

Исключив из уравнений равновесия поперечные силы

$$Q_i = \frac{M_{ki} - M_{ni}}{l_i} \quad (i=1, \dots, 4),$$

получим матрицу размером  $9 \times 12$  коэффициентов системы уравнений равновесия:

$$A = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицы внутренней жесткости:

– для вертикальных стержней № 1 и № 4:

$$G_1 = G_4 = \begin{bmatrix} 650000 & 0 & 0 \\ 0 & 78000 & -39000 \\ 0 & -39000 & 78000 \end{bmatrix};$$

– для горизонтальных стержней № 2 и № 3:

$$G_2 = G_3 = \begin{bmatrix} 867000 & 0 & 0 \\ 0 & 185000 & -92500 \\ 0 & -92500 & 185000 \end{bmatrix}.$$

Построим суммарную матрицу внутренней жесткости:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & G_3 & \\ & & & G_4 \end{bmatrix}$$

и, применив формулу

$$R = A^T G A,$$

получим матрицу внешней жесткости девятого порядка:

$$R = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 868 & 0 & -9,75 & -867 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 654 & -23,1 & 0 & -3,85 & -23,1 & 0 & 0 & 0 \\ -9,75 & -23,1 & 263 & 0 & 23,1 & 92,4 & 0 & 0 & 0 \\ -867 & 0 & 0 & 1733 & 0 & 0 & -867 & 0 & 0 \\ 0 & -3,85 & 23,1 & 0 & 7,70 & 0 & 0 & -3,85 & -23,1 \\ 0 & -23,1 & 92,4 & 0 & 0 & 370 & 0 & 23,1 & 92,4 \\ 0 & 0 & 0 & -867 & 0 & 0 & 868 & 0 & -9,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,85 & 23,1 & 0 & 654 & 23,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23,1 & 92,4 & -9,75 & 23,1 & 263 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая матрица масс девятого порядка примет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 10 & & & & & & & & \\ & 10 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 20 & & & & & \\ & & & & 20 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 10 & & \\ & & & & & & & 10 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Применим к решению обобщенной проблемы собственных значений для полученных матриц обратный степенной метод со сдвигом:

$$(R - \omega_0^2 M) \vec{X} = (\omega^2 - \omega_0^2) M \vec{X}.$$

Предварительно необходимо составить соответствующую компьютерную программу, реализующую следующие матричные операции: сложение-вычитание матриц, умножение матрицы на вектор



и скаляр, разложение матрицы на треугольные множители и решение системы линейных алгебраических уравнений.

Найдем сначала наименьшую собственную частоту. Для этого зададим параметр сдвига  $\omega_0^2 = 0$ . Выполнив соответствующие вычисления, найдем, что наименьшая собственная частота  $\omega_1 = 7,697$  рад/с.

Далее зададим параметр сдвига достаточно большим, например,  $\omega_0^2 = 2 \cdot 10^6$ . Выполнив разложение сдвинутой матрицы на треугольные множители, обнаружим, что на главной диагонали сомножителя находится шесть отрицательных элементов. Следовательно, при данном сдвиге метод обратной итерации найдет шестую собственную частоту как ближайшую к параметру сдвига. Напомним, что старшие три собственные значения данной обобщенной проблемы девятого порядка формально являются бесконечно большими, так как в матрице масс имеются три нулевых элемента. Выполнив итерации, получим, что  $\omega_6 = 416,4$  рад/с.

Постепенным выбором параметра сдвига из интервала  $[7,697^2; 416,4^2]$  найдем остальные четыре собственные частоты и соответствующие собственные формы. Результаты выполненных вычислений представлены в табл. 22.1.

Таблица 22.1

Собственная частота (рад/с)						
№	1	2	3	4	5	6
Значение	7,697	13,47	255,0	255,3	294,6	416,4
№ перемещ.	Соответствующие собственные формы (нормированы к единичной длине)					
1	0,5767	0,0010	0,0001	0,00280	-0,7066	-0,5770
2	0,0005	-0,0028	-0,7044	0,7044	0,0028	0,0004
3	0,0260	0,0870	-0,0376	0,0622	-0,0259	-0,0260
4	0,5772	0	0,0005	0	0	0,5766
5	0	-0,9924	0	-0,0020	-0,0007	0
6	-0,0129	0	-0,0693	0	0	0,0130
7	0,5767	-0,0010	0,0001	-0,0028	0,7066	-0,5770
8	-0,0005	-0,0028	0,7044	0,7043	0,0028	0,0004
9	0,0260	-0,0870	-0,0376	-0,0622	0,0259	-0,0260

Все вычисления программно выполнялись с двойной точностью (не менее 15 значащих цифр). Приведенные выше значения элементов матрицы  $R$  и внесенные в табл. 22.1 результаты вычислений представлены с точностью в три – четыре значащие цифры. Это обусловлено только шириной страницы данного издания. В практических расчетах все промежуточные данные следует сохранять минимум с шестью значащими цифрами. Это связано с плохой обусловленностью задач динамики сооружений. При небрежном обращении с промежуточными данными окончательные результаты могут различаться в несколько раз. Именно поэтому конечные результаты, полученные с помощью разных программных продуктов по разным численным алгоритмам, как правило, совпадают лишь с точностью до трех – четырех значащих цифр.

Плохая обусловленность численных решений свойственна всем задачам теории сооружений при совместном учете продольных и изгибных деформаций и при расчете систем, элементы которых сильно отличаются размерами своих поперечных сечений. Исправить такую ситуацию может только компьютерный расчет с двойной точностью и разумное, осторожное округление промежуточных результатов. Во всех случаях необходим контроль конечных результатов. По крайней мере, повторный расчет с незначительно измененными (возмущенными) исходными данными.

#### **22.4. Применение метода степенных рядов для прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения**

Снова рассмотрим общие дифференциальные уравнения движения некоторой деформируемой системы при вязких силах сопротивления и произвольных динамических нагрузках:

$$M\ddot{\vec{Z}} + H\dot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = \vec{F}(t), \quad (22.18)$$

с начальными условиями:

$$\vec{Z}(t_0) = \vec{Z}_0, \quad \dot{\vec{Z}}(t_0) = \vec{Z}_1. \quad (22.19)$$

Будем искать решение системы (22.18) в некоторой точке  $t = t_1$ , удаленной от начальной точки  $t = t_0$  на величину шага  $h = t_1 - t_0$ , в виде ряда Тейлора по степеням шага  $h$  до четвертого порядка включительно:

$$\vec{Z}(t_1) = \vec{Z}(t_0) + \vec{\ddot{Z}}(t_0)h + \frac{1}{2}\vec{\ddot{Z}}(t_0)h^2 + \frac{1}{3!}\vec{\ddot{Z}}(t_0)h^3 + \frac{1}{4!}\vec{Z}^{IV}(t_0)h^4,$$

или в упрощенных обозначениях:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_0 + \vec{Z}_1h + \frac{1}{2}\vec{Z}_2h^2 + \frac{1}{6}\vec{Z}_3h^3 + \frac{1}{24}\vec{Z}_4h^4, \quad (22.20)$$

где символ  $\vec{Z}$  без индекса обозначает искомый вектор перемещений в точке  $t_1$ ;

символы  $\vec{Z}_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) с нижними индексами  $k$  обозначают вектор перемещений и векторы их соответствующих производных, вычисленные в точке  $t_0$ .

Дифференцируя ряд (22.20) по времени (по переменной  $h$ ), получим выражения для вычисления векторов скоростей и ускорений в точке  $t_1$ :

$$\vec{\dot{Z}} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2h + \frac{1}{2}\vec{Z}_3h^2 + \frac{1}{6}\vec{Z}_4h^3; \quad (22.21)$$

$$\vec{\ddot{Z}} = \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3h + \frac{1}{2}\vec{Z}_4h^2. \quad (22.22)$$

Значения компонент вектора начальных перемещений  $\vec{Z}_0$  и вектора начальных скоростей  $\vec{Z}_1$  заданы как исходные данные (22.19). Значения компонент вектора начальных ускорений  $\vec{Z}_2$  найдем из исходных уравнений (22.18), представив их как систему алгебраич-

ческих уравнений относительно вектора  $\vec{Z}_2$  с матрицей коэффициентов  $M$ :

$$M\vec{Z}_2 = \vec{F}(t_0) - H\vec{Z}_1 - R\vec{Z}_0. \quad (22.23)$$

Для вычисления значений компонент векторов третьих и четвертых производных перемещений по времени продифференцируем дважды исходные уравнения (22.18). В результате сможем получить еще две рекуррентные системы линейных алгебраических уравнений:

$$M\vec{Z}_3 = \vec{F}'(t_0) - H\vec{Z}_2 - R\vec{Z}_1; \quad (22.24)$$

$$M\vec{Z}_4 = \vec{F}''(t_0) - H\vec{Z}_3 - R\vec{Z}_2. \quad (22.25)$$

Итак, имеем следующий одношаговый численный метод четвертого порядка точности для прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения (уравнений второго порядка) без их преобразования к нормальному виду, то есть к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных.

В начале шага интегрирования дополнительно к векторам начальных перемещений  $\vec{Z}_0$  и начальных скоростей  $\vec{Z}_1$  необходимо вычислить еще три вектора:  $\vec{Z}_2$ ,  $\vec{Z}_3$  и  $\vec{Z}_4$ , решив последовательно три системы рекуррентных алгебраических уравнений (22.23)–(22.25). Затем по формулам (22.20) и (22.21) вычислить искомые значения перемещений и скоростей в конце шага интегрирования. Затем процесс повторяется: точка  $t_1$  рассматривается как начальная и ищется решение в точке  $t_2 = t_1 + h$ .

Перед началом очередного шага сопоставляются значения ускорений, вычисленные путем решения системы уравнений (22.23) и вычисленные по формуле (22.22). По результатам сопоставления производится корректировка длины шага интегрирования.

Рассмотренный метод имеет четвертый порядок точности, так как в разложении (22.20) отброшены члены пятого порядка и выше

относительно длины шага  $h$ . По этой причине метод приобрел демпфирующие свойства. Численные эксперименты показывают, что с увеличением шага или длины отрезка интегрирования (количества шагов) решение затухает. В расчетном отношении динамическая система как бы стремится к состоянию равновесия или к режиму установившихся колебаний даже при отсутствии сил сопротивления.

Если в разложении (22.20) сохранить члены не выше второго порядка относительно шага  $h$ , то получим известный метод постоянного ускорения (третья производная перемещений по времени равна нулю), а если сохранить члены не выше третьего порядка относительно шага  $h$ , то будем иметь другой известный метод – метод линейного ускорения. В некоторых современных проектно-вычислительных комплексах численные методы динамического расчета данного типа составляют альтернативу даже общепринятым методам решения задач статики сооружений: задачи расчета сооружений на статические воздействия решаются как динамические, методом установления. Статическая нагрузка рассматривается как динамическая, внезапно приложенная при нулевых начальных условиях. По мере затухания колебаний при учете сил сопротивления деформируемая система приближается к состоянию равновесия, отвечающему приложенной нагрузке.

## ГЛАВА 23

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

#### 23.1. Понятие о равновесии в деформированном состоянии. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия

В линейной строительной механике при расчетах на статические и динамические нагрузки широко применяется принцип независимости действия сил, или принцип суперпозиции. Каждое очередное воздействие (нагрузка, изменение температуры, осадка опоры и т. п.) прикладывается к недеформированной расчетной схеме сооружения при молчаливом предположении, что в элементах этого сооружения нет никаких внутренних сил, вызванных предыдущими воздейст-

виями, а деформации и перемещения от прикладываемого воздействия не изменяют геометрии расчетной схемы. При таком подходе уравнения равновесия составляются для исходной, недеформированной расчетной схемы. Результат действия нескольких нагрузок, приложенных одновременно или последовательно, без разницы, равен сумме результатов, вызванных действием каждой нагрузки, приложенной в отдельности, независимо от других. Это дает возможность суммировать усилия и перемещения от отдельных воздействий в самых разных сочетаниях, чтобы получить результат, наиболее неблагоприятный с точки зрения прочности или жесткости сооружения. Более того, перемещения, вызванные каждым воздействием в отдельности, или всеми воздействиями вместе, полагаются пренебрежимо малыми по сравнению с общими габаритами сооружения, и влияние искажения геометрии сооружения за счет деформаций на распределение внутренних сил в элементах сооружения не учитывается. Все эти предпосылки позволяют обойтись при расчете сооружений линейными зависимостями и линейными уравнениями, алгебраическими или дифференциальными. На линейных зависимостях и линейных уравнениях и построена классическая, линейная строительная механика. Расчет сооружений методами классической, линейной строительной механики называют расчетом по недеформированной расчетной схеме, или расчетом по недеформированному состоянию. Если сказать точнее, то классическая линейная строительная механика дает методы определения внутренних сил и перемещений, возникающих в элементах сооружения от нагрузок и воздействий, приложенных к начально-ненагруженному и недеформированному сооружению. При этом предполагается выполнение двух главных условий: материал сооружения подчиняется закону Гука, а перемещения элементов сооружения пренебрежимо малы по сравнению с габаритами сооружения и не влияют на распределение внутренних сил.

В реальных сооружениях искажением расчетных схем за счет их деформаций действительно можно пренебречь. Однако учет неизбежно существующих внутренних сил в элементах вновь нагружаемого сооружения не всегда является обоснованным. Обратимся к фактам.

*Факт первый.* Монтажник руками может свободно отклонить в сторону крюк подъемного крана. Но если к крюку будет подвешен

груз массой несколько тонн, то сделать это будет намного труднее. Слабо натянутая струна музыкального инструмента не звучит, но стоит ее натянуть, как тон ее звучания (частота свободных колебаний) будет тем выше, чем больше сила натяжения.

И тросы подъемного крана и струны музыкального инструмента находятся в равновесии в деформированном состоянии. Причем их равновесие в деформированном состоянии является устойчивым. После устранения дополнительных поперечных воздействий растянутые гибкие элементы вернуться в прямолинейное исходное состояние.

Следовательно, тросы или кинематические шарнирно-стержневые цепи (системы заведомо геометрически изменяемые) после предварительного натяжения могут прекрасно выполнять функции основных несущих элементов, скажем, в висячих и вантовых конструкциях. Их жесткость как растянутых элементов на дополнительные поперечные воздействия повышается с увеличением растягивающей продольной внутренней силы. Тканевая оболочка, натянутая внутренним давлением, приобретает достаточную жесткость и способность нести, допустим, снеговые нагрузки.

*Факт второй.* Шест для прыжков легкоатлет может поставить вертикально, удерживая его одной рукой. Может отклонить шест в сторону, вернуть его снова в вертикальное положение. Шест при этих манипуляциях будет оставаться прямолинейным, хотя в нем имеют место сжимающие усилия от собственного веса, а в наклонном положении – и изгибающие моменты и поперечные силы. По завершению каждой манипуляции шест находится в равновесии в деформированном состоянии. Но стоит к верхнему концу шеста приложить дополнительный груз, увеличивающий продольную сжимающую силу, то удержать шест руками в равновесии в вертикальном положении будет не просто. При малейшем отклонении от вертикали шест с грузом будет вырываться из рук. Более того, шест может изогнуться, и придать ему первоначальное вертикальное и прямолинейное положение без снятия груза будет невозможно. Деформационные свойства шеста, находящегося в прямолинейном деформированном состоянии равновесия, при более-менее значительных сжимающих внутренних силах существенно меняются. При малых сжимающих силах равновесие будет устойчивым, при больших сжимающих силах равновесие может оказаться неустойчивым. Аналогичным образом ведут себя и сжатые элементы любых сооружений.

Центрально сжатый прямолинейный стержень остается прямолинейным, только пока сжимающая нагрузка не достигла определенного уровня, называемого критическим. Если же сжимающая нагрузка превысит критический уровень, то сжатый стержень только теоретически сможет находиться в прямолинейном состоянии. Практически он обязательно изогнется, выпучится, перейдет в новое, криволинейное состояние равновесия. Теоретическая, прямолинейная форма равновесия в деформированном состоянии окажется неустойчивой. Под влиянием неизбежных случайных (даже малых) возмущений произойдет потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия в исходном деформированном состоянии, и стержень примет новую, устойчивую, криволинейную форму равновесия в новом деформированном состоянии.

Следовательно, при некоторых определенных значениях внешних сил упругая деформируемая система может иметь несколько состояний равновесия. Причем одни из них будут устойчивы, а другие неустойчивы. Поведение упругой деформируемой системы в зависимости от уровня нагрузки принято характеризовать диаграммой, называемой диаграммой (кривой) равновесных состояний. Так, на рис. 23.1 схематически изображен график зависимости поперечного прогиба  $\Delta$  прямолинейного центрально сжатого стержня от сжимающей силы  $F$ .

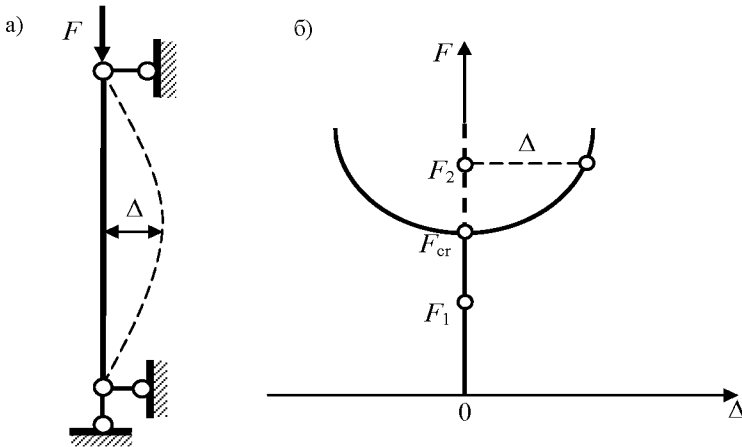


Рис. 23.1



Пока  $F = F_1 < F_{cr}$ , график лежит на оси ординат:  $\Delta = 0$ . При  $F = F_{cr}$ , наряду с прямолинейным состоянием равновесия ( $\Delta = 0$ ) возможны смежные отклоненные, изогнутые состояния равновесия ( $\Delta \neq 0$ ). Произошло разветвление (бифуркация) форм равновесия сжатого стержня в деформированном состоянии. При  $F = F_2 > F_{cr}$  прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, сжатый стержень в результате произвольного случайного бесконечно малого дополнительного возмущения обязательно выпучится и примет сжато-изогнутую форму равновесия ( $\Delta \neq 0$ ).

Достаточно высокая симметричная порталная рама, подъемистая арка или свод, нагруженные симметричной нагрузкой, при некотором уровне нагрузки могут внезапно принять кососимметричную форму деформаций. Произойдет потеря устойчивости симметричной формы равновесия в деформированном состоянии. Кривая равновесных состояний при потере устойчивости симметричной формы равновесия будет подобна кривой, рассмотренной ранее (рис. 23.1,б). Только теперь символ  $\Delta$  будет обозначать характерное кососимметричное (чаще всего горизонтальное) перемещение, которое в исследуемом сооружении при симметричных деформациях равно нулю.

С другой стороны, полагая сжато-изогнутая арка при определенном уровне нагрузки внезапно «прощелкивает» и в результате значительных перемещений становится растянуто-изогнутой (рис. 23.2,а). При  $F = F_{cr}$  сжато-изогнутая форма равновесия пологой арки становится неустойчивой. Арка теряет способность сопротивляться дальнейшему росту нагрузки. Происходит «хлопок», и арка при достаточной прочности материала переходит в новое, несмежное, растянуто-изогнутое устойчивое состояние равновесия. Кривая равновесных состояний в данном случае будет иметь совершенно иной вид (рис. 23.2,б). Точка  $A$  на кривой равновесных состояний является предельной. В этой точке наступает исчерпание несущей способности сжато-изогнутой арки. Арка приходит в движение. Только после «перескока» в точку  $B$  уже в растянуто-изогнутом состоянии равновесия арка способна вновь воспринимать нагрузку.

При значениях нагрузки, по модулю меньших критического, в арке возможны три равновесных состояния, одно из которых является не-

устойчивым. Неустойчивым состояниям равновесия на диаграмме равновесных состояний соответствует участок  $AC$ . Участок кривой равновесных состояний  $BC$  может быть реализован при нагружении прощелкнувшей арки нагрузкой обратного направления. При этом точка  $C$  будет предельной для нагрузки обратного направления.

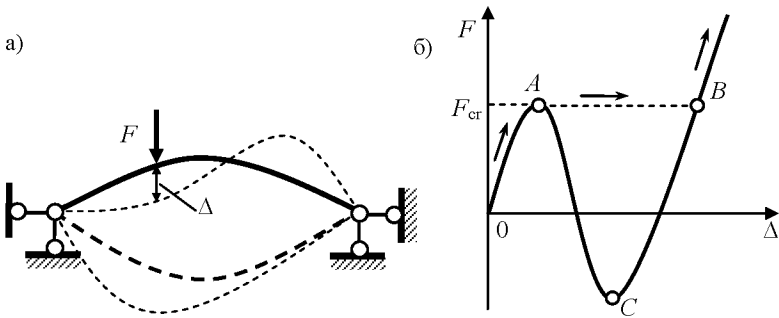


Рис. 23.2

Кривую равновесных состояний (см. рис. 23.2,б) можно трактовать как график изменения реакции в дополнительном опорном стержне, поставленном по направлению рассматриваемого характерного перемещения, в зависимости от смещения этого опорного стержня. Построить такой график можно только на основании нелинейных, точных расчетных зависимостей.

Потерю устойчивости, связанную с разветвлением (бифуркацией) форм равновесия в критическом состоянии (рис. 23.1), иногда называют потерей устойчивости первого рода. Потеря устойчивости первого рода характеризуется сменой формы равновесия в деформированном состоянии, при этом новая, смежная форма равновесия допускает в определенных пределах дальнейшее увеличение нагрузки и устойчивое равновесие в закритическом состоянии.

Потерю устойчивости, связанную с исчерпанием несущей способности в критическом состоянии (рис. 23.2), соответственно называют потерей устойчивости второго рода. При потере устойчивости второго рода смежных состояний равновесия нет.

Терять устойчивость равновесия могут не только сжимаемые системы. Гибкая высокая балка, изгибаемая в вертикальной плоскости,

при определенном уровне нагрузки может внезапно принять пространственную изгибно-крутильную форму деформаций. Произойдет потеря устойчивости плоской формы изгиба в деформированном состоянии. По изгибно-крутильной форме происходит потеря устойчивости высотных пространственных стержневых и пластинчато-стержневых систем.

Таким образом, от значений и знака внутренних, в первую очередь, осевых, продольных сил существенно зависит поведение уже нагруженного сооружения при дальнейшем его нагружении, пусть даже случайном и незначительном.

Потеря устойчивости равновесия сооружения в деформированном состоянии является следствием нарушения равновесия между внешними и внутренними силами. Однако с ростом нагрузок может нарушиться равновесие и между внешними силами: активными и реактивными, опрокидывающими (сдвигающими) и удерживающими. Как правило, это имеет место в сооружениях, содержащих односторонние, выключающиеся связи. Под действием неуравновешенных активных внешних сил сооружение просто приходит в движение. Примером могут служить опрокидывание под действием горизонтальных сил высокого блока, свободно стоящего на горизонтальной опорной поверхности; опрокидывание высокой башни при неравномерной осадке основания; сдвиг или опрокидывание подпорных стен; сползание по горному склону сооружения вместе с грунтовым массивом (оползень) и т. п. Явления, связанные с нарушением равновесия между внешними силами, называют потерей устойчивости положения в отличие от потери устойчивости равновесия в деформированном состоянии, связанной с нарушением равновесия между внешними и внутренними силами.

Равновесие сооружения в деформированном состоянии считается **устойчивым**, если любые малые дополнительные воздействия или дефекты (возмущения) вызывают в сооружении также малые дополнительные деформации, а после удаления дополнительных возмущений дополнительные деформации исчезают и сооружение принимает первоначальную форму равновесия.

Если после удаления дополнительных возмущений сооружение остается в отклоненном состоянии, или продолжает деформироваться и переходит в новое положение равновесия, или разрушается во время перехода из-за недостаточной прочности его элементов, то первоначальное равновесие в деформированном состоянии является **неустойчивым**.

Если сооружение сохраняет устойчивость равновесия в деформированном состоянии при бесконечно малых возмущениях этого состояния равновесия (возмущениях дополнительных, произвольных, случайных), то оно устойчиво «в малом». Если дополнительные возмущения являются конечными, достаточно большими, и сооружение устойчиво при больших возмущениях, то оно устойчиво «в большом».

Сооружение, устойчивое «в малом», может оказаться неустойчивым «в большом». Так, арка (см. рис. 23.2,а) при  $F = 0,85F_{cr}$  устойчива «в малом». Но при случайном возрастании этого значения нагрузки еще на 15 % произойдет «хлопок», потеря устойчивости второго рода. Следовательно, арка неустойчива «в большом».

И наоборот, не всякое сооружение, устойчивое «в большом», устойчиво «в малом». Натяннутая струна (шарнирно-стержневая цепь) устойчива «в большом» по отношению к достаточно большим поперечным смещениям. Любая поперечная нагрузка конечной величины вызовет в струне (цепи) растягивающие усилия. После снятия поперечной нагрузки струна (цепь) вернется в первоначальное положение.

Однако по отношению к бесконечно малым поперечным перемещениям натяннутая струна формально оказывается неустойчивой, так как не обладает поперечной жесткостью при бесконечно малых возмущениях и допускает бесконечно малые перемещения при отсутствии нагрузки и деформаций удлинения. Разумеется, это утверждение справедливо только в рамках теории исчисления бесконечно малых величин. Перемещения струны можно рассматривать как бесконечно малые величины первого порядка малости. Деформации удлинения струны при этом будут иметь второй порядок малости. Строго говоря, натяннутая и ненагруженная струна находится как бы в критическом состоянии ( $F_{cr} = 0$ ).

Предварительно натянутая струна по отношению к поперечным деформациям устойчива как «в малом», так и «в большом».

Исследование устойчивости сооружений «в большом» можно вести только в нелинейной постановке. Рассматриваемые ниже критерии устойчивости форм равновесия сооружений в деформированном состоянии и методы расчета сооружений на устойчивость относятся к устойчивости сооружений «в малом». Для изучения устойчивости сооружений «в малом», как правило, используются приближенные, линеаризованные уравнения статического и динамиче-

ского деформирования, то есть линеаризованные уравнения расчета по деформированному состоянию.

Еще раз обратим внимание читателя на смысл понятий: «Расчет сооружений по деформированному состоянию» и «Расчет сооружений по недеформированному состоянию».

Строго говоря, расчет сооружения по деформированному состоянию означает точный, геометрически нелинейный расчет сооружения на переход из заданного исходного состояния (деформированного или недеформированного) в новое деформированное состояние. При геометрически нелинейном расчете учитывается влияние полных (конечных) перемещений на распределение полных, окончательных усилий в элементах сооружения. Именно при геометрически нелинейном расчете необходимо учитывать точное выражение кривизны для установления связи изгибающих моментов с поперечными перемещениями изгибаемых стержней.

Однако расчет по деформированному состоянию может быть и линейным, то есть приближенным, линеаризованным, с отбрасыванием нелинейных членов второго и более высоких порядков малости. При этом внутренние силы исходного деформированного состояния рассматриваются как конечные величины. Расчет ведется на приращения нагрузок (воздействий), вызывающих приращения внутренних сил, деформаций и перемещений. При этом приращения всех параметров, характеризующих переход сооружения в новое деформированное состояние равновесия, полагаются достаточно малыми, строго говоря, бесконечно малыми по сравнению с соответствующими (большими, конечными) параметрами исходного состояния. В уравнениях равновесия отбрасываются все члены второго и выше порядков малости. Сохраняются только члены первого порядка малости, точнее, произведения конечных величин исходного состояния на бесконечно малые приращения искомых величин.

Расчет сооружения по недеформированному состоянию тем более является приближенным, так как полные деформации и полные перемещения теоретически полагаются бесконечно малыми величинами, а нагрузки и приращения усилий – конечными величинами. В уравнениях отбрасываются все члены первого, второго и выше порядков малости по сравнению с конечными величинами или члены второго и выше порядков малости по сравнению с членами первого порядка малости. Это приводит к относительно простым линейным

расчетным зависимостям. Чтобы обеспечить достоверность линейных расчетов, деформации и перемещения рассчитываемых реальных сооружений практически должны быть достаточно малыми, что и имеет место в рядовых, невысотных и неольшепролётных сооружениях. Исходное состояние считается ненагруженным, недеформированным. Наличие предшествующих нагрузок и вызванных ими внутренних сил, деформаций и перемещений никак не влияет на результаты расчета по недеформированному состоянию.

Указанные различия существенным образом используются в теории устойчивости сооружений и в расчетах сооружений по деформированному состоянию.

### 23.2. Статический метод исследования устойчивости

Предположим, что деформируемая система, представленная, допустим, дискретной расчетной схемой, загружена заданной нагрузкой, находится в равновесии в некотором деформированном состоянии. Причем перемещения, вызванные заданной нагрузкой, и, следовательно, расположение узлов системы в деформированном состоянии уже найдены или заданы заранее. Такое состояние назовем исходным, или начальным. В этом исходном состоянии равновесия положение всех узлов системы определено их обобщенными координатами, линейными и угловыми, т. е. известным вектором  $\vec{X}$ . Все внешние силы (нагрузки  $\vec{F}$ ) и вызванные ими усилия  $\vec{S}$  также известны и удовлетворяют уравнениям равновесия, составленным относительно этого исходного (начального) деформированного состояния:

$$A\vec{S} + \vec{F} = 0. \quad (23.1)$$

В матричном уравнении равновесия (23.1), подчеркнем это,  $A = A(\vec{X})$  есть в общем случае прямоугольная матрица равновесия, элементы которой зависят только от заданных обобщенных координат узлов, определяемых вектором  $\vec{X}$ .

Такое начальное деформированное состояние с установившимися деформациями практически существует в любом реальном сооружении, собранном из тяжелых элементов. Элементы изначально деформированы от собственного веса. Монтажникам только остается при-

дать деформированным элементам и их узловым соединениям проектное положение. Иногда к начальным усилиям от собственного веса добавляются усилия предварительного напряжения. Любая временная нагрузка всегда прикладывается к уже деформированному сооружению. Перемещения, вызванные временной нагрузкой, отсчитываются от некоторого конкретного деформированного состояния.

В данном разделе все уравнения записываются чисто формально. Читателю, в первую очередь, следует обратить внимание на смысл вводимых понятий и категорий.

Итак, приложим к системе, уже находящейся в деформированном состоянии и удовлетворяющей уравнениям равновесия (23.1), некоторую дополнительную нагрузку  $\Delta \vec{F}$ . Тогда первоначальное состояние равновесия нарушится, и система перейдет из исходного деформированного состояния в новое деформированное состояние. Переход в новое состояние равновесия будет характеризоваться приращениями внутренних сил  $\Delta \vec{S}$  и приращениями обобщенных координат, то есть перемещениями узлов  $\Delta \vec{X}$ , отсчитанными от начального состояния равновесия.

Строго говоря, вектор приращений координат  $\Delta \vec{X}$  следует рассматривать как блочный вектор, состоящий из двух подвекторов:

$$\Delta \vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{Z} \\ \Delta \vec{X}_0 \end{bmatrix},$$

где  $\vec{Z}$  – вектор неизвестных перемещений подвижных узлов;

$\Delta \vec{X}_0$  – вектор перемещений опорных узлов, задаваемый заранее (воздействие в виде смещения, осадки опор) или принимаемый равным нулю (в дальнейших выкладках примем  $\Delta \vec{X}_0 = 0$ ).

Добиться такого разделения можно простой нумерацией узлов: опорные узлы (опорные связи) нумеруются в последнюю очередь.

Порядок вектора неизвестных перемещений  $\vec{Z}$  равен числу возможных упругих перемещений узлов деформируемой системы, то есть равен степени свободы деформируемой системы и равен

порядку системы составляемых уравнений равновесия. По направлению опорных связей уравнения равновесия обычно не составляются.

В новом деформированном состоянии с измененной геометрией и измененными усилиями точные уравнения равновесия примут вид:

$$A(\vec{X} + \Delta\vec{X})(\vec{S} + \Delta\vec{S}) + \vec{F} + \Delta\vec{F} = 0$$

или:

$$A(\vec{X}, \vec{Z})(\vec{S} + \Delta\vec{S}) + \vec{F} + \Delta\vec{F} = 0. \quad (23.2)$$

Таким образом, уравнения равновесия (23.2) составлены относительно нового, неизвестного деформированного состояния.

Вычитая равенство (23.1) из (23.2), получим так называемые уравнения в приращениях:

$$A(\vec{X}, \vec{Z})(\vec{S} + \Delta\vec{S}) - A(\vec{X})\vec{S} + \Delta\vec{F} = 0. \quad (23.3)$$

Уравнения в приращениях для краткости запишем в условном обобщенном виде:

$$\vec{\Phi}(\vec{X}, \vec{S}, \vec{Z}, \Delta\vec{S}) = \Delta\vec{F}, \quad (23.4)$$

где  $\vec{\Phi}(\dots)$  есть в общем случае нелинейная вектор-функция своих вектор-аргументов.

Вектор перемещений  $\vec{Z}$  и вектор приращений усилий  $\Delta\vec{S}$  являются неизвестными, искомыми параметрами. Остальные параметры характеризуют исходное состояние равновесия и являются известными, заданными, определенными заранее.

Уравнения равновесия в приращениях (23.3) или (23.4) можно назвать уравнениями *статического деформирования*, так как они описывают деформирование, переход, движение деформируемой системы (медленное, без проявления сил инерции) из одного состояния равновесия в новое состояние равновесия, вызванное приращением нагрузки  $\Delta\vec{F}$ . Уравнения статического деформирования



(23.3) или (23.4) являются *нелинейными*. Нелинейность уравнений статического деформирования связана с *заметным изменением геометрии* сооружения за счет учета ненулевых перемещений узлов  $\vec{Z}$  и выражается произведением  $\vec{Z}\Delta\vec{S}$ . Такую нелинейность принято называть *геометрической нелинейностью*. Деформируемую систему, работа которой описывается нелинейными уравнениями деформирования, также называют *геометрически нелинейной*.

Разумеется, для определения неизвестных перемещений и неизвестных приращений усилий только одних уравнений статического деформирования (23.4) недостаточно. Геометрически нелинейная задача расчета сооружений является заведомо статически неопределимой. Необходимо уравнения статического деформирования (23.4) рассматривать совместно с геометрическими и физическими уравнениями. При точной постановке задачи они также будут нелинейными. Причем дополнительную нелинейность, которая может появиться из-за нелинейных физических уравнений, называют *физической нелинейностью*.

Вектор приращений внутренних сил  $\Delta\vec{S}$  в матричных уравнениях (23.3) или (23.4) обычно удается с той или иной степенью точности выразить с помощью геометрических и физических уравнений через вектор перемещений  $\vec{Z}$ . В результате получается система нелинейных уравнений равновесия (статического деформирования) только в приращениях координат, то есть в перемещениях:

$$\vec{\Phi}(\vec{X}, \vec{S}, \vec{Z}) = \Delta\vec{F}, \quad (23.5)$$

где неизвестным будет уже только вектор перемещений  $\vec{Z}$ .

Коэффициенты при неизвестных перемещениях в нелинейных уравнениях (23.5) будут зависеть не только от физических (жесткостных) характеристик элементов сооружения и его геометрии (вектор  $\vec{X}$ ), но и от усилий исходного состояния (вектор  $\vec{S}$ ).

Точные нелинейные уравнения статического деформирования (23.5) справедливы при произвольных воздействиях и дают возможность исследовать деформирование сооружения как «в малом», так и «в большом». К сожалению, точные нелинейные уравнения

статического деформирования вида (23.5) возможно построить только для шарнирно-стержневых расчетных схем с идеальными без трения шарнирами. Вывод нелинейных уравнений статического деформирования для изгибаемых стержневых и, тем более, для тонкостенных пространственных систем требует введения некоторых дополнительных упрощающих гипотез и предпосылок.

При классическом же расчете сооружений по недеформированному состоянию обычно предполагают, что перемещения, вызванные переходом деформируемой системы из исходного состояния равновесия в новое деформированное состояние равновесия, очень малы по сравнению с габаритами сооружения, и при составлении уравнений равновесия принимают их равными нулю. При этом геометрия нового деформированного состояния не отличается от геометрии исходного состояния равновесия, и уравнения равновесия в приращениях (23.3) при  $\vec{Z} = 0$  оказываются полностью идентичными исходным уравнениям равновесия (23.1):

$$A(\vec{X})\Delta\vec{S} + \Delta\vec{F} = 0. \quad (23.6)$$

Уравнения равновесия (23.6) описывают не столько переход в новое состояние равновесия, сколько возможность равновесия системы при новых нагрузках с новыми усилиями в исходном недеформированном состоянии с неизменной расчетной схемой. Таким образом, эти уравнения отвечают классическому линейному расчету по недеформированному состоянию, когда не делается различий между геометрией системы в нагруженном и ненагруженном состояниях. Деформируемую систему, расчет которой ведется в классической линейной постановке по недеформированной расчетной схеме, и сам расчет называют *геометрически линейными*.

Однако можно допустить, что перемещения деформируемой системы при малом изменении нагрузки также являются достаточно малыми, но ненулевыми. Тогда, разложив вектор-функцию  $\vec{\Phi}(\vec{X}, \vec{S}, \vec{Z})$  в нелинейных уравнениях (23.5) в степенной ряд относительно малых перемещений  $\vec{Z}$  и отбросив все нелинейные члены как величины высших порядков малости, можно получить уже линеаризованные уравнения статического деформирования относи-

тельно неизвестных перемещений, малых (строго говоря, бесконечно малых), но ненулевых:

$$[\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S})]\vec{Z} = \Delta\vec{F}, \quad (23.7)$$

где квадратная матрица  $\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S})$ , в математическом смысле, является матрицей первых частных производных (матрицей Якоби) нелинейной вектор-функции  $\vec{\Phi}(\vec{X}, \vec{S}, \vec{Z})$ .

Полученные уравнения (23.7) представляют собой канонические уравнения метода перемещений и учитывают деформированную схему сооружения. Их матрица коэффициентов  $\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S})$ , по физическому смыслу, является матрицей внешней жесткости системы в деформированном состоянии. Ее основное отличие от классической матрицы внешней жесткости состоит в том, что ее элементы (единичные реакции)  $r_{ij}$  зависят не только от материала и размеров составляющих сооружение элементов, но и от усилий в них, то есть от усилий исходного деформированного состояния равновесия.

Так как за исходное, начальное состояние равновесия может быть принято любое мгновенное состояние равновесия деформируемой системы при ее медленном, статическом деформировании, вызванном медленным, статическим изменением внешних воздействий, то матрицу внешней жесткости деформируемой системы в таком состоянии равновесия следует рассматривать как матрицу мгновенной жесткости сооружения в этом мгновенном состоянии равновесия. Матрица мгновенной жесткости сооружения характеризует способность сооружения в нагруженном состоянии сопротивляться действию дополнительных малых (теоретически бесконечно малых) нагрузок и воздействий.

Если в исходном состоянии деформируемая система будет ненапряжена ( $\vec{S} = 0$ ), то линеаризованные уравнения статического деформирования (23.7) превращаются в обыкновенные линейные канонические уравнения метода перемещений, применяемые при расчете сооружений по недеформированному состоянию:

$$\mathbf{R}\vec{Z} = \Delta\vec{F}, \quad (23.8)$$

где

$$R = R(\vec{X}, 0) = R(\vec{X}); \quad \Delta \vec{F} = -\vec{R}_F;$$

$\vec{R}_F$  – вектор реакций от внешних воздействий в дополнительных связях основной системы метода перемещений.

Таким образом, расчет сооружений *на переход в новое деформированное состояние* может быть осуществлен как в *нелинейной* постановке (23.2)–(23.5), так и в *линейной* (23.6)–(23.8). С другой стороны, *геометрически линейный* расчет сооружений может быть выполнен как *по недеформированному* состоянию (23.6) и (23.8), так и *по деформированному* состоянию (23.7).

Линейные уравнения (23.7), в отличие от линейных уравнений (23.8), следует называть *линеаризованными* уравнениями расчета *по деформированному состоянию*, чтобы подчеркнуть, что они получены *линеаризацией* точных, нелинейных уравнений (23.5) расчета по деформированному состоянию.

Линеаризованные уравнения статического деформирования (23.7) характеризуют деформируемую систему, уже находящуюся в деформированном, напряженном состоянии равновесия, и составлены, подчеркнем это, в форме канонических уравнений метода перемещений.

Необходимо отметить, что нелинейные уравнения равновесия в приращениях (23.3) совместно с соответствующими нелинейными уравнениями совместности деформаций (геометрическими и физическими) формально можно было бы разрешить относительно вектора приращений усилий  $\Delta \vec{S}$ , то есть представить решение в форме метода сил. Однако трудности математического характера не позволяют сделать это в достаточно общей и, тем более, простой форме.

В противовес, уравнения статического деформирования в перемещениях: нелинейные (23.5) и линеаризованные (23.7), – оказались чрезвычайно удобными для их применения к расчету сооружений по деформированному состоянию. Более того, именно линеаризованные уравнения статического деформирования в форме метода перемещений и положены в основу статического метода исследования устойчивости равновесия в «малом».

Сущность статического метода расчета сооружений на устойчивость заключается в исследовании условий существования ненулевых реше-

ний однородных линеаризованных уравнений статического деформирования, то есть условий существования смежных состояний равновесия или условий исчерпания сооружением несущей способности.

### 23.3. Критическое равновесие

Линеаризованные уравнения статического деформирования (23.7) будут тем точнее, чем меньше дополнительная нагрузка и чем меньше вызванные ею приращения усилий и перемещений. Так, если предположить, что дополнительная нагрузка на сооружение стремится к нулю и в пределе исчезает ( $\Delta \vec{F} = 0$ ), то линеаризованные уравнения (23.7) становятся однородными:

$$[\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S})]\vec{Z} = 0, \quad (23.9)$$

и абсолютно точно характеризуют исходное деформированное состояние равновесия.

Как известно из линейной алгебры, однородные алгебраические уравнения кроме очевидного нулевого, тривиального решения

$$\vec{Z} = 0,$$

могут иметь и ненулевое решение

$$\vec{Z} \neq 0,$$

если определитель системы окажется равным нулю:

$$\text{Det}[\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S})] = 0. \quad (23.10)$$

Выполнение условия (23.10) означает, что матрица мгновенной жесткости деформируемой системы в исходном состоянии равновесия является вырожденной. В этом случае деформируемая система может иметь ненулевые перемещения при нулевой дополнительной нагрузке, то есть при ее отсутствии.

Уровень и характер усилий (как правило, сжимающих) исходного состояния  $\vec{S}$  и уровень вызвавшей их нагрузки  $\vec{F}$  в исходном состоянии, при которых возможно существование ненулевых решений однородных линеаризованных уравнений статического деформирования, называют критическим. Равновесное состояние деформируемой системы при критической нагрузке также называют критическим.

В критическом состоянии деформированное сооружение может иметь несколько состояний равновесия: заданное, исходное деформированное состояние равновесия с нулевыми приращениями усилий и перемещений и одно или несколько смежных, отклоненных состояний равновесия с ненулевыми перемещениями и соответственно с ненулевыми приращениями усилий. То есть в деформированном сооружении может иметь место так называемое явление ветвления (бифуркации) форм равновесия в деформированном состоянии.

Однако в критическом состоянии может быть и явление совершенно иного характера. Деформируемая система при критической нагрузке теряет способность сопротивляться дальнейшему росту нагрузки. В этом случае система просто не в состоянии уравновесить дополнительную нагрузку, пусть и бесконечно малую, и будет стремиться перейти в новое состояние равновесия. Такое критическое состояние равновесия называют предельным. Примером может служить прощёлкивание симметричной арки при симметричной нагрузке.

К сожалению, линеаризованные уравнения статического деформирования (23.7), (23.9) и условие критического равновесия (23.10) не позволяют классифицировать критическое равновесие с качественной стороны. Но только они дают возможность установить наличие критического равновесия.

Если в исходном состоянии исследуемая система не имеет начальных усилий ( $\vec{S} = 0$ ), то условие

$$Det[\mathbf{R}(\vec{X}, 0)] = Det[\mathbf{R}(\vec{X})] = 0 \quad (23.11)$$

является критерием геометрической изменяемости исследуемой системы. В этом случае однородная система уравнений (23.8) при отсутствии нагрузки ( $\Delta\vec{F} = 0$ ) допускает ненулевые решения, так

как исследуемая геометрически изменяемая система имеет бесконечное множество конфигураций. Условие (23.11) может быть также и критерием мгновенной изменяемости или критерием мгновенной жесткости исследуемой системы. С точки зрения устойчивости сооружений, ненапряженные геометрически изменяемые, мгновенно изменяемые и мгновенно жесткие конфигурации следует считать критическими.

Статический метод обнаружения критического равновесия в деформированном состоянии, основанный на исследовании ненулевых решений линеаризованных уравнений статического деформирования, применяется к исследованию устойчивости сооружений еще со времен Эйлера и часто связывается с его именем. Однако классическая формулировка статического метода (метода Эйлера) была несколько иная и состояла в следующем.

Сооружению, содержащему сжатые элементы, придавалось смежное, отклоненное, деформированное положение. Для отклоненного положения составлялись уравнения равновесия, из которых определялись значения полных сжимающих нагрузок, способных уравновесить систему в отклоненном состоянии. Найденные значения нагрузок и принимались в качестве критических.

Для полного понимания особенностей расчета сооружений на устойчивость путем определения критического состояния и критических нагрузок следует принимать во внимание следующее.

При малейшем отклонении сжимающей нагрузки от своего критического значения в любую сторону (даже в сторону увеличения сжимающих сил) условие критического равновесия (23.10) будет нарушено. Однородные уравнения статического деформирования (23.9) становятся невырожденными. Они будут формально иметь только тривиальное, нулевое решение, и соответствующее состояние мгновенного равновесия с нулевыми перемещениями для деформированной системы будет формально единственным. И это будет справедливо, при каких угодно уровнях нагрузки, пусть даже больших, но только не критических.

Напомним, что критических нагрузок при дискретной расчетной схеме будет конечное множество, а при континуальной расчетной схеме – бесконечное множество. Подчеркнем еще раз, что смежные формы равновесия в исходном состоянии возможны при уровнях нагрузки, строго равных критическим. Ни больше, ни меньше.

Такие теоретические выводы противоречат экспериментальным данным. Реальные сооружения при сжимающих нагрузках не критических, но больших наименьшей критической, теряют устойчивость.

Значит, условие невырожденности матрицы мгновенной жесткости

$$\text{Det}[\mathbf{R}(\bar{X}, \bar{S})] \neq 0$$

говорит только об отсутствии критического равновесия, но не несет никакой информации об устойчивости или неустойчивости этого не критического состояния равновесия.

Следовательно, возможности статического метода исследования устойчивости сооружений, основанного на поиске ненулевых решений уравнений статического деформирования, сильно ограничены. Установить устойчивость или неустойчивость сооружений при нагрузках, не равных критическим, статическим методом не удастся. Объяснить это возможно только с позиций динамики сооружений. Даже медленный переход деформируемой системы в смежное состояние равновесия при потере устойчивости есть все-таки движение. Проанализировать действительное поведение деформируемой системы в докритических, критических и закритических состояниях равновесия удастся только методами динамики сооружений.

#### 23.4. Динамический метод исследования устойчивости

Динамический метод исследования устойчивости сооружений заключается в изучении характера движения деформируемой системы относительно исследуемого деформированного состояния равновесия.

Введя в уравнения статического деформирования силы инерции, получим дифференциальные уравнения движения деформируемой системы вблизи исходного деформированного состояния равновесия. Ограничимся на данном этапе однородными линеаризованными уравнениями статического деформирования (23.7), которым будут соответствовать однородные линеаризованные дифференциальные уравнения движения в прямой форме:



$$M\ddot{Z} + [R(\vec{X}, \vec{S})]\dot{Z} = 0. \quad (23.12)$$

Уравнения (23.12) описывают свободные колебания упругой системы относительно деформированного состояния равновесия. Однако истинный характер движения деформируемой системы относительно исходного деформированного состояния равновесия зависит от корней характеристического (частотного) уравнения системы дифференциальных уравнений движения (23.12). В общем случае, движение может быть поступательным, или колебательным, или аperiодическим. В соответствии с разделом 20.2, частотное (вековое) уравнение примет вид:

$$Det[R(\vec{X}, \vec{S}) - \omega^2 M] = 0. \quad (23.13)$$

Так как матрица мгновенной жесткости деформируемой системы  $R(\vec{X}, \vec{S})$  и матрица масс  $M$ , как правило, симметричны, то корни характеристического уравнения (23.13), в роли которых выступают квадраты собственных частот  $\omega^2$ , будут действительными числами. В зависимости от значений корней характеристического уравнения (23.13) решения однородных дифференциальных уравнений движения (23.12), как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, могут иметь вид (в главных координатах):

$$\vec{Z}(t) = \vec{A}_j \sin(\omega_j t + \psi_j) \quad \text{при } \omega_j^2 > 0; \quad (23.14)$$

$$\vec{Z}(t) = \vec{A}_j t + \psi_j \quad \text{при } \omega_j^2 = 0; \quad (23.15)$$

$$\vec{Z}(t) = \vec{A}_j e^{\eta t} + \vec{B}_j e^{-\eta t} \quad \text{при } \omega_j^2 < 0, \quad (23.16)$$

где  $\eta = \sqrt{-\omega^2}$ ;  $j$  – номер собственной частоты;

$\vec{A}, \vec{B}$  – собственные векторы;

$\psi$  – начальная фаза.

Полученные формулы определяют характер движения деформируемой системы вблизи деформированного состояния равновесия,

характеризуемого внутренними силами  $\vec{S}$ , которые вызваны фиксированной и неизменной статической нагрузкой  $\vec{F}$ , и позволяют сделать заключение об устойчивости или неустойчивости этого состояния равновесия. Возможны три следующих варианта.

1. Все корни характеристического уравнения (23.13) положительны. Относительно деформированного состояния равновесия возможны малые свободные гармонические колебания (23.14) с круговыми собственными частотами  $\omega$  и постоянными амплитудами  $\vec{A}$ . При учете сил сопротивления такие свободные колебания будут затухающими. Таким образом, любые малые дополнительные воздействия, выведшие деформированную систему из исходного состояния равновесия, после их устранения вызовут только малые свободные колебания системы около исходного состояния равновесия. С течением времени свободные колебания затухнут, и система вернется в исходное состояние равновесия.

Следовательно, исходное деформированное состояние равновесия является **устойчивым**, если относительно такого состояния равновесия деформируемая система допускает малые свободные колебания.

2. Среди положительных корней характеристического уравнения (23.13) есть один или несколько нулевых. Матрица мгновенной жесткости сооружения в исследуемом состоянии равновесия является вырожденной, ее определитель равен нулю. Деформируемая система находится в критическом равновесии. При выводе деформируемой системы из критического равновесия ее перемещения могут остаться постоянными, равными начальному отклонению. Произойдет бифуркация состояний равновесия. При возмущении с начальной скоростью перемещения системы будут расти по линейному закону (23.15). Система будет удаляться от положения равновесия с постоянной скоростью. Следовательно, критическое равновесие в деформированном состоянии следует считать **неустойчивым**: система не вернется в исходное состояние равновесия после устранения малых возмущений, нарушивших это равновесие.

3. Среди корней характеристического уравнения (23.13) есть хотя бы один отрицательный. Перемещения деформируемой системы, выведенной из исходного состояния равновесия, будут расти по экспоненциальному закону (23.16). Деформируемая система будет

стремиться перейти в некоторое новое состояние равновесия. Исходное деформированное состояние системы является **неустойчивым**. Равновесие в нем возможно только теоретически. При малейшем отклонении от этого состояния равновесия система приходит в движение и будет только удаляться. Возврат в исходное состояние равновесия невозможен.

### 23.5. Критерии устойчивости равновесия

Таким образом, как следует из вышеизложенного, *физическим критерием* устойчивого равновесия в деформированном состоянии является способность сооружения совершать малые затухающие или незатухающие свободные колебания относительно этого положения равновесия. *Аналитическим критерием* будет отсутствие нулевых и отрицательных корней в характеристическом уравнении (23.13). Это равносильно требованию о *положительной определенности* матрицы мгновенной жесткости, входящей в линеаризованные уравнения статического деформирования (23.7), (23.9) и в линеаризованные дифференциальные уравнения движения (23.12). Положительная определенность симметричной матрицы означает положительность не только её определителя, но и положительность всех главных миноров и, следовательно, всех собственных значений. С этой точки зрения, и статический метод исследования устойчивости сооружений, и динамический полностью эквивалентны. Более того, положительная определенность матрицы мгновенной жесткости является критерием устойчивого равновесия как консервативных, так и неконсервативных деформируемых систем.

Рассмотренные выше линеаризованные уравнения статического деформирования и линеаризованные дифференциальные уравнения движения в общей теории устойчивости, связанной с именем выдающегося ученого А.М. Ляпунова, называются уравнениями в приращениях. Именно на исследовании линейных уравнений движения в приращениях и основывается исследование устойчивости сооружений, по терминологии А.М. Ляпунова, в первом приближении, устойчивости сооружений «в малом».

### 23.6. Энергетический метод исследования устойчивости

Требование о положительной определенности матриц мгновенной жесткости сооружений в устойчивых состояниях равновесия вытекает и из энергетических принципов общей механики. Как известно, в устойчивых состояниях равновесия полная энергия деформируемой системы минимальна. Минимум полной энергии деформируемой системы является *энергетическим критерием* устойчивости равновесия.

По отношению к исследуемому деформированному состоянию равновесия изменение (приращение) полной энергии системы можно выразить через матрицу мгновенной жесткости и вариации перемещений (возможные перемещения, отсчитываемые от деформированного состояния равновесия). Так как приращение нагрузки при исследовании устойчивости равновесия полагается равным нулю, то изменение потенциала дополнительных внешних сил равно нулю. Суммарная работа уже приложенных нагрузок и вызванных ими внутренних сил в исследуемом деформированном состоянии равновесия на вариациях перемещений как на возможных перемещениях также равна нулю (в исходном состоянии система уравновешена). В результате приращение полной энергии системы в деформированном состоянии при вариациях перемещений равно (с обратным знаком) действительной работе только приращений внутренних сил. Если последние выразить через перемещения, то выражение для вычисления приращения полной энергии примет вид:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \vec{Z}^T R(\vec{X}, \vec{S}) \vec{Z}. \quad (23.17)$$

Условие стационарности приращения полной потенциальной энергии приводит к системе уже знакомых однородных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{E}}{\partial \vec{Z}} = R(\vec{X}, \vec{S}) \vec{Z} = 0. \quad (23.18)$$

Чтобы равновесие упругой системы в деформированном состоянии было устойчивым, необходимо, чтобы матрица вторых частных

производных (матрица Гессе) полной потенциальной энергии как функции многих переменных (23.17), или, что то же самое, чтобы матрица первых частных производных (матрица Якоби) системы алгебраических уравнений (23.18) была положительно определенной:

$$R(\vec{X}, \vec{S}) > 0. \quad (23.19)$$

Напомним, что положительная определенность симметричной матрицы означает не только положительность её определителя, но и положительность всех главных миноров и, следовательно, положительность всех ее собственных значений.

При выполнении условия (23.19) полная потенциальная энергия упругой системы минимальна. Система однородных уравнений (23.18) имеет единственное нулевое решение  $\vec{Z} = 0$ . Система обладает опорностью (способностью сопротивляться) на любое дополнительное воздействие, и в ней возможны свободные колебания. Следовательно, равновесие деформируемой системы устойчиво.

### 23.7. Качественный метод исследования устойчивости

Метод исследования устойчивости равновесия сооружений в деформированном состоянии, сводящийся к исследованию знаковой определенности матрицы мгновенной жесткости, называют *качественным методом*. Качественный метод позволяет получить прямой ответ на вопрос: "Устойчиво или неустойчиво сооружение при данном характере и уровне нагрузки? Да? Или нет?".

Критическая нагрузка является количественной характеристикой устойчивости сооружения. При этом под критической нагрузкой следует понимать, в запас устойчивости, наибольшее значение некоторого параметра, характеризующего данный вид нагрузки с количественной стороны, при котором сооружение еще устойчиво. Определять критическое значение параметра нагрузки приходится методом последовательных приближений, методом проб и ошибок.

Рассмотренные выше критерии устойчивости сооружений в деформированном состоянии относятся к понятию общей, глобальной устойчивости некоторой дискретной модели исследуемого сооружения. В соответствии с введенной ранее методикой дискретизации расчетных схем сооружений с целью их компьютерного исследования

дискретная расчетная модель реального сооружения состоит из отдельных элементов, стержней, соединенных между собой в узлах, жестко или шарнирно. Положительная определенность матрицы мгновенной жесткости дискретной модели сооружения в деформированном состоянии гарантирует равенство нулю дополнительных статических узловых перемещений при отсутствии дополнительных статических узловых нагрузок или иных дополнительных статических воздействий. Одновременно гарантируется способность дискретной модели сооружения совершать свободные колебания относительно деформированного состояния равновесия.

Однако любая дискретная модель деформируемого сооружения состоит из континуальных элементов, стержней, каждый из которых имеет бесконечное множество критических состояний и может быть причиной локальной, местной неустойчивости даже при неподвижных, несмещаемых узлах всей дискретной модели. Сильно утрированным примером может служить гибкий деревянный брус, подпирающий железобетонное перекрытие: брус выпучился, потерял устойчивость, а железобетонная конструкция может совершать свободные колебания, её равновесие устойчиво.

В реальных строительных сооружениях должна быть обеспечена как общая, глобальная устойчивость всего сооружения, так и местная, локальная устойчивость каждого элемента. Поэтому исследование глобальной устойчивости сооружения следует проводить только после обеспечения локальной устойчивости всех элементов.

Проверка местной устойчивости отдельных элементов проводится при полностью закрепленных узлах дискретной модели, т.е. в основной системе метода перемещений, и выполняется известными методами по формулам Эйлера, вытекающим из исследования ненулевых решений дифференциального уравнения продольного изгиба (эти вопросы будут рассмотрены ниже).

Итак, для завершения изложения теории расчета сооружений на устойчивость остается только рассмотреть, во-первых, методы исследования устойчивости отдельных стержней, составляющих основную систему метода перемещений, или дискретную расчетную схему исследуемого сооружения; во-вторых – методы формирования матриц мгновенной жесткости сооружений в деформированных состояниях равновесия; и, в-третьих – методы исследования знаковой определенности матриц.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ ОПОРАХ

### 24.1. Дифференциальное уравнение изгиба сжатого стержня

Рассмотрим центрально сжатый стержень постоянного поперечного сечения, находящийся в прямолинейном исходном деформированном состоянии равновесия (рис. 24.1). Потеря устойчивости сжатого прямолинейного стержня будет сопровождаться его изгибом. Составим уравнение статического деформирования сжатого прямолинейного стержня при его переходе в отклоненное деформированное состояние. Переход обусловлен малыми вертикальными перемещениями  $u(x)$  за счет изгибных деформаций. Горизонтальные перемещения за счет искривления стержня будут величинами более высокого порядка малости, и их не учитываем.

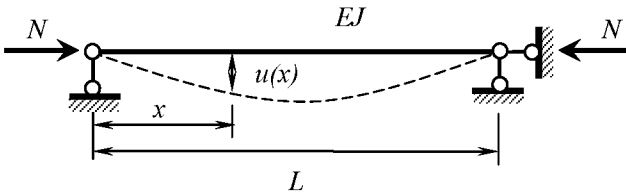


Рис. 24.1

Для определения упругой линии искривленного стержня воспользуемся дифференциальным уравнением изгиба балки:

$$EJ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + M(x) = 0, \quad (24.1)$$

где  $M(x)$  – изгибающие моменты в сечениях изогнутого стержня.

Значение изгибающего момента в сечении с абсциссой  $x$  можно вычислить по простой формуле (см. рис. 24.1):

$$M(x) = Nu(x). \quad (24.2)$$

Подставив выражение изгибающего момента (24.2) в (24.1), получим дифференциальное уравнение относительно функции прогибов в отклоненном состоянии равновесия:

$$EJ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + Nu(x) = 0. \quad (24.3)$$

Полученное уравнение (24.3) называют дифференциальным уравнением продольного изгиба сжатого стержня. Очевидным решением уравнения продольного изгиба является тривиальное, нулевое решение  $u(x) = 0$ . Однако в зависимости от определенных, критических значений продольной сжимающей силы  $N$  уравнение продольного изгиба может иметь и ненулевые решения, соответствующие критическим состояниям сжатого стержня.

Критические значения сжимающей силы зависят от длины стержня  $L$ , его изгибной жесткости  $EJ$ , а также от опорных устройств стержня, определяющих граничные условия. Для стержня на двух опорах таких граничных условий может быть сформулировано четыре: по два на каждом конце. Чтобы поиск критических значений сжимающей силы для стержней при разных условиях опирания носил единообразный характер, дифференциальное уравнение второго порядка (24.3) дифференцируют дважды и получают дифференциальное уравнение продольного изгиба четвертого порядка:

$$EJ \frac{d^4 u}{dx^4} + N \frac{d^2 u}{dx^2} = 0. \quad (24.4)$$

Дифференциальное уравнение (24.4) может иметь ненулевое решение общего вида:

$$u(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4, \quad (24.5)$$

$$\text{где } k = \sqrt{N/EJ}. \quad (24.6)$$



## 24.2. Учет опорных закреплений сжатых стержней

Постоянные интегрирования, входящие в общее решение (24.5) определяют в зависимости от условий опирания сжатых стержней.

Рассмотрим процедуру определения постоянных интегрирования на примере центрально сжатого стержня с жесткой заделкой на одном конце и шарнирно-подвижной опорой на другом (рис. 24.2).

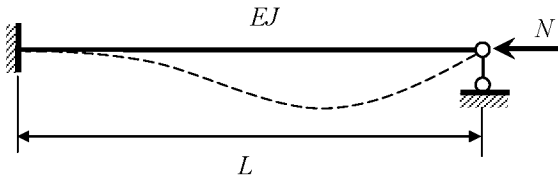


Рис. 24.2

Обратим внимание на то, что и заделка и опорный стержень являются абсолютно жесткими, недеформируемыми. Граничные условия в заделке обуславливают равенство нулю перемещения и угла поворота опорного сечения. На противоположном конце стержня нулевыми являются перемещение опорного сечения поперек оси стержня и изгибающий момент в опорном шарнире, пропорциональный второй производной от линии прогибов. Следовательно, имеем следующие четыре дополнительные (граничные) условия для определения четырех постоянных интегрирования:

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 0; \quad u(L) = 0; \quad u''(L) = 0. \quad (24.7)$$

Дифференцируя общее решение (24.5) дважды и подставляя в (24.7), получим следующую систему четырех совместных уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} u(0) &= C_2 + C_4 = 0; \\ u'(0) &= kC_1 + C_3 = 0; \\ u(L) &= C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + C_3L + C_4 = 0; \\ u''(L) &= -k^2C_1 \sin kL - k^2C_2 \cos kL = 0. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Искомые постоянные интегрирования не равны нулю, если определитель полученной системы уравнений равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ -\sin kL & -\cos kL & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяв третью строку полученного определителя суммой третьей и четвертой строк и разложив затем определитель по элементам четвертой строки, получим уравнение для определения критического значения произведения  $kL$  :

$$kL \cos kL - \sin kL = 0,$$

или:

$$\operatorname{tg} kL = kL. \quad (24.9)$$

Трансцендентное уравнение (24.9) имеет бесконечное множество корней. По физическому смыслу решаемой задачи нас интересует наименьший положительный корень  $kL = 4,493$ , которому будет соответствовать на основании (24.6) наименьшая критическая сжимающая продольная сила:

$$N^{cr} = \frac{4,493^2 EJ}{L^2} = \frac{20,19EJ}{L^2}. \quad (24.10)$$

Так как система однородных уравнений (24.8) при выполнении условия (24.9) является вырожденной, то ее ненулевое решение может быть получено с точностью до произвольного ненулевого множителя. Итак, примем  $C_1 = C$ . Затем последовательно найдем:

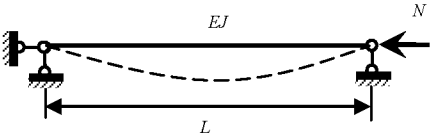
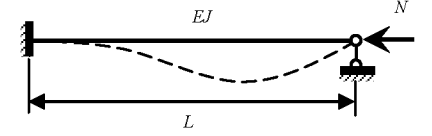
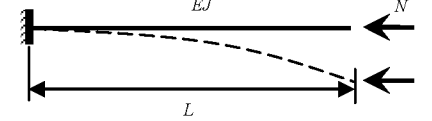
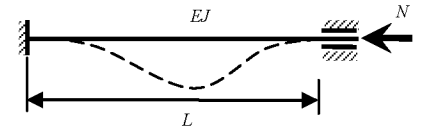
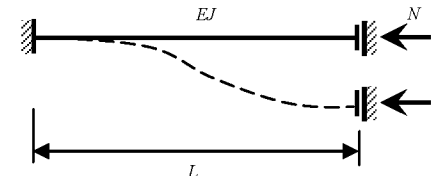
$$C_3 = -kC_1 = -kC; \quad C_4 = -C_3L = kLC; \quad C_2 = -C_4 = -kLC.$$

В результате уравнение (24.5), определяющее отклоненную, смежную форму равновесия рассматриваемого сжатого стержня в критическом состоянии (уравнение формы потери устойчивости), примет вид (см. рис. 24.2):

$$u(x) = C(\sin kx - kL \cos kx - kx + kL).$$

Значения критических сжимающих продольных сил и соответствующие формы потери устойчивости прямолинейных стержней постоянного сечения при других условиях опирания на недеформируемые (жесткие) опорные устройства приведены в табл. 24.1.

Таблица 24.1

№ пп	Схема стержня и форма потери устойчивости	Критическая продольная сила
1		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$
2		$N^{cr} = \frac{20,19EJ}{L^2}$
3		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}$
4		$N^{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2}$
5		$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$

Итак, при значениях продольной сжимающей силы, меньших критического значения  $N < N^{cr}$ , прямолинейная форма равнове-

сия центрально сжатого стержня является устойчивой. При значениях продольной сжимающей силы, равных или больших критического значения

$$N \geq N^{cr},$$

прямолинейная форма равновесия сжатого стержня становится неустойчивой.

Пример 24.1. Найти критическое значение равномерно распределенной нагрузки  $q$ , приложенной к ригелю однопролетной одноэтажной рамы (рис. 24.3). Изгибную жесткость ригеля можно принять бесконечно большой по сравнению с изгибной жесткостью стоек.

Равномерно распределенная по всему пролету нагрузка вызывает в стойках сжимающие усилия:

$$N = \frac{qL}{2}.$$

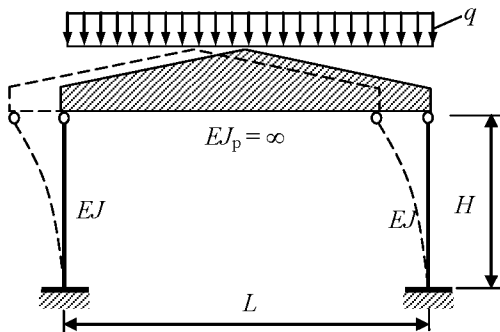


Рис. 24.3

Сжатые стойки жестко защемлены в фундаментах. Их верхние торцы в местах стыка с ригелем могут свободно поворачиваться. Вследствие отсутствия горизонтальных связей в уровне покрытия ригель может сместиться по горизонтали (рис. 24.3). Такие кососимметричные деформации в симметричной системе не вызовут в ригеле продольных усилий. Следовательно, при кососимметричных

деформациях системы стойки можно рассматривать как свободные сжатые консоли, заземленные только нижними торцами. В соответствии со схемой 3 (табл. 24.1) их критические продольные силы вычислим по формуле:

$$N^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4H^2}.$$

Таким образом, критическая равномерно распределенная нагрузка равна:

$$q^{cr} = \frac{2N^{cr}}{L} = \frac{\pi^2 EJ}{2LH^2}.$$

В случае симметричной формы потери устойчивости ригель рамы не должен сместиться по горизонтали. Это будет соответствовать как бы наличию горизонтальных связей в уровне покрытия. Сжатые стойки при симметричных деформациях будут находиться как бы в условиях закрепления в соответствии со схемой 2 (табл. 24.1), что приведет к большей критической нагрузке.

Итак, наименьшая критическая нагрузка отвечает кососимметричной форме потери устойчивости рамы.

**Пример 24.2.** Определить критическое значение вертикальной силы  $F$  (рис. 24.4). Установить, который из стержней системы первым потеряет устойчивость.

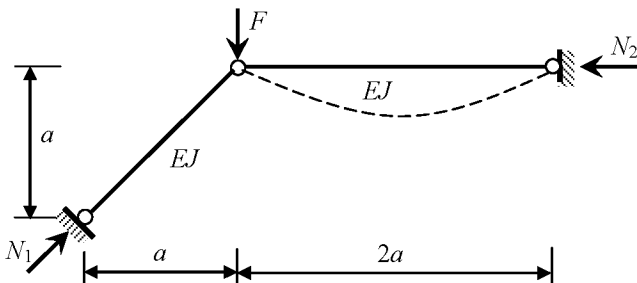


Рис. 24.4

Внешняя вертикальная сила  $F$  вызывает сжимающие продольные силы в обоих стержнях системы:

$$N_1 = \sqrt{2} F; \quad N_2 = F.$$

Продольными деформациями стержней по сравнению с изгибными можно пренебречь. Поэтому промежуточный шарнирный узел системы можно считать несмещаемым. Условия закрепления сжатых стержней соответствуют схеме 1 (табл. 24.1). Соответствующие критические продольные силы в стержнях равны:

$$N_1^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{2a^2}; \quad N_2^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2}.$$

Определяем критическое значение внешней вертикальной силы из условия потери устойчивости наклонным стержнем:

$$F_1^{cr} = \frac{N_1^{cr}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 EJ}{2\sqrt{2} a^2}.$$

Из условия потери устойчивости горизонтальным стержнем критическое значение внешней вертикальной силы равно:

$$F_2^{cr} = N_2^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2}.$$

Наименьшее критическое значение внешней вертикальной силы равно:

$$F^{cr} = \min(F_1^{cr}; F_2^{cr}) = F_2^{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4a^2}.$$

Следовательно, с ростом силы  $F$  первым потеряет устойчивость горизонтальный стержень (рис. 24.4).

### 24.3. Особые случаи исследования устойчивости сжатых стержней

Исследование устойчивости прямых сжатых стержней в общем случае переменного поперечного сечения при переменных по длине стержня продольных силах (рис. 25.5,а) может быть выполнено на основании исследования ненулевых решений дифференциального уравнения изгиба таких стержней, имеющего вид:

$$[EJ(x)y''(x)]' + [N(x)y'(x)]' = 0.$$

В общем случае аналитического решения такое дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами не имеет. Его решение возможно приближенными или численными методами.

Ориентируясь на компьютерные технологии, исследование устойчивости таких стержней сводят к исследованию устойчивости стержней кусочно-постоянного поперечного сечения с сосредоточенными сжимающими силами, приложенными в узлах на границе участков с разными жесткостными параметрами (рис. 24.5,б). После такой замены сжатый прямой стержень уже представляет собой частный случай стержневой системы, а именно прямолинейную многоэлементную консольную балку.

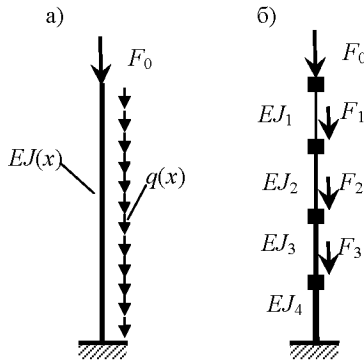


Рис. 24.5

Стержень с заделкой на одном конце и упругой опорой на другом (рис. 24.6,а) рассматривается как двухстержневая система: пру-

жина заменяется стержнем эквивалентной жесткости. Стержень с двумя упругими опорами (рис. 24.6,б) – как шарнирно-стержневая система из трех элементов.

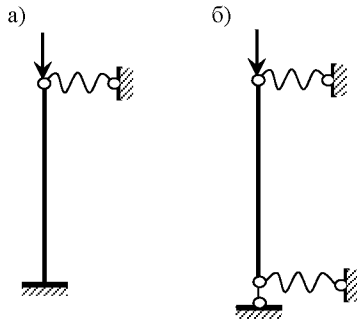


Рис. 24.6

Решетчатые составные сжатые стержни (рис. 24.7,а) можно рассматривать либо как фермы с шарнирными узлами, либо как рамы с жесткими узлами. Решетчатые стержни можно рассматривать и как комбинированные системы с неразрезными поясами (рис. 24.7,б). Составные стержни с планками можно также рассматривать как рамы (рис. 24.7,в). Практически расчет на устойчивость сжатых балок, рам, ферм и комбинированных систем ведется с единых позиций методом перемещений, изучению которого посвящена глава 25.

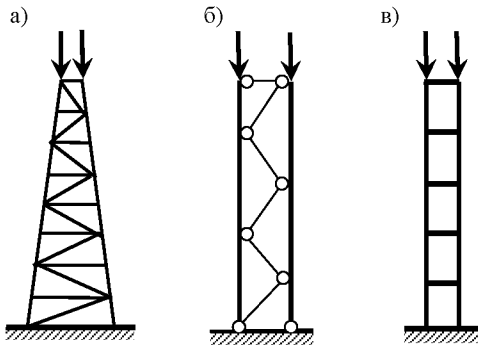


Рис. 24.7



## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 25.1. Основные допущения и сущность метода перемещений

В настоящее время расчет на устойчивость любых деформируемых систем проводится в основном методом перемещений с помощью компьютеров. В основе метода перемещений при расчете стержневых систем на устойчивость лежит дифференциальное уравнение изгиба сжатого прямолинейного стержня постоянного сечения (24.4). Реакции сжатых прямолинейных стержней при неоднородных (ненулевых) граничных условиях (при единичных кинематических воздействиях) приведены в табл. 25.1.

Предварительно до исследования устойчивости необходимо выполнить статический расчет сооружения, линейный или, при необходимости, нелинейный. Целью статического расчета является определение перемещений узлов сооружения и внутренних сил в его элементах, характеризующих деформированное состояние. Изгибающие моменты и поперечные силы в расчетах на устойчивость имеют второстепенное значение, и поэтому их далее не рассматривают. Растягивающими продольными силами в стержнях системы как повышающими жесткость сооружения в деформированном состоянии обычно пренебрегают (в запас жесткости и устойчивости). Первостепенное же значение в расчетах на устойчивость принимают продольные сжимающие силы, понижающие в деформированном состоянии жесткость сооружения.

Геометрия сооружения в деформированном состоянии задается координатами узлов с учетом перемещений, найденных статическим расчетом, если влияние этих перемещений на геометрию сооружения существенно. Чаще всего изменением геометрии расчетной схемы сооружения в деформированном состоянии пренебрегают. Искривлением деформированных стержней, соединяющих узлы деформированной расчетной схемы, пренебрегают тоже. Криволинейные оси деформированных стержней заменяют их хордами. Условно стержни полагают прямолинейными, длина стержня принимается равной длине хорды. Жесткость поперечных сечений стержней по их длине должна быть известной и постоянной. Известными и постоянными по длине стержней должны быть и внутренние продольные силы.

Таким образом, расчетная схема стержневой системы в деформированном состоянии с целью расчета на устойчивость представляется в виде дискретной модели, состоящей из жестких и (или) шарнирных узлов, соединенных прямолинейными стержнями постоянного поперечного сечения с постоянными по их длине продольными силами. Если это не так, то в систему вводятся дополнительные узлы в таком количестве, чтобы изгибные жесткости и продольные силы в соединяющих их стержнях можно было считать постоянными.

Нагрузки исходного состояния, вызвавшие продольные силы, в дальнейшем расчете не участвуют, а сами продольные силы рассматриваются как параметры, характеризующие способность стержней воспринимать дополнительные воздействия.

Основная система и основные неизвестные метода перемещений выбираются в обычном порядке, путем закрепления узлов деформируемой системы от возможных угловых и линейных смещений введением дополнительных угловых и линейных связей. Так как дополнительные узловые нагрузки при исследовании устойчивости полагаются нулевыми, то канонические уравнения метода перемещений получаются однородными:

$$R(\vec{N})\vec{Z} = 0,$$

где  $R$  – матрица мгновенной жесткости, элементы которой, реакции  $r_{ik}$  во введенных дополнительных связях, зависят от продольных сил в стержнях системы.

Вычисление элементов матрицы мгновенной жесткости ведут обычным путем. Дополнительным связям придают единичные перемещения, строят единичные эпюры, методом вырезания узлов или методом сечений определяют реакции во введенных дополнительных связях. Основная особенность метода перемещений в расчетах на устойчивость состоит в том, что в сжатых стержнях эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений получаются криволинейными за счет дополнительного изгибающего действия продольных сил. А выражения для вычисления реакций в опорах сжатых стержней содержат поправочные множители в виде специальных функций от безразмерных параметров  $\nu$  (греческая буква

«ню»). В несжатых стержнях построение единичных эпюр изгибающих моментов и вычисление реакций ведется в обычном порядке, как при статическом расчете.

В качестве безразмерного параметра принимается произведение  $\nu = kL$ , где  $k$  определяется формулой (24.6), а  $L$  есть длина сжатого стержня. В результате между параметром  $\nu$  и сжимающим усилием  $N$  в каждом стержне устанавливается взаимосвязь:

$$\nu = L\sqrt{\frac{N}{EJ}}; \quad N = \frac{\nu^2 EJ}{L^2}, \quad (25.1)$$

где  $N$  – модуль сжимающей продольной силы.

Формулы для вычисления реакций и эпюры изгибающих моментов от единичных смещений опор сжатых стержней приведены в табл. 25.1. Они получены в результате интегрирования дифференциального уравнения продольного изгиба (24.4) при соответствующих неоднородных, единичных краевых условиях. С целью единообразия обозначений в полученные формулы введены специальные поправочные коэффициенты – функции безразмерного параметра  $\nu$ , учитывающие влияние сжимающих сил:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\nu) &= \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; & \varphi_4(\nu) &= \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \\ \varphi_2(\nu) &= \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}; & \eta_1(\nu) &= \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \\ \varphi_3(\nu) &= \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}; & \eta_2(\nu) &= \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right). \end{aligned} \quad (25.2)$$

Специальные поправочные функции (25.2) табулированы, их значения представлены в табл. 25.2.

Таблица 25.1

№ пп	Расчетная схема, эпюра моментов, реакции	Значение опорной реакции
1		$i = \frac{EJ}{L}; \quad \nu = L\sqrt{\frac{N}{EJ}}$ $M = 3i\varphi_1(\nu)$ $R = \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu)$
2		$M = \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu)$ $R = \frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu)$
3		$M_1 = 4i\varphi_2(\nu)$ $M_2 = 2i\varphi_3(\nu)$ $R = \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu)$
4		$M = \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu)$ $R = \frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu)$
5		$R = \frac{N}{L} = \frac{i}{L^2}\nu^2$
6		$M = i\nu \operatorname{tg} \nu$

Таблица 25.2

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990
0,2	0,9973	0,9987	1,0007	0,9993	0,9840	0,9960
0,3	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,4	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,5	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,6	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,7	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510
0,8	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,9	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189
1,0	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,1	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8788
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744
1,6	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,8	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8436	1,0849	0,9241	-0,8103	0,5566
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1051	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7295	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1497
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2251	0,8275	-3,1609	0,0267
3,2	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457

1	2	3	4	5	6	7
3,6	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4904	-0,3954
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6969	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372
4,1	-2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,1956	-0,8103
4,3	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,1581	-0,9005
4,4	-15,3271	0,0648	1,7310	0,6202	-21,7805	-0,9931
4,5	227,9269	-0,0048	1,8070	0,5991	221,1769	-1,0884
4,6	14,6693	-0,0809	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8186	-0,1645	1,9920	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4023	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3896
4,9	4,1463	-0,3607	2,2375	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3923	0,4793	-4,9719	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6099	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7629	2,7960	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9422	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9474
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4182	3,8236	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3266	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1803	5,1346	0,2580	-9,7065	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2139	0,2195	-10,2831	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6679	7,8727	0,1790	-10,8613	-2,7219
6,0	0,5551	-5,1594	10,7270	0,1361	-11,4449	-2,8639
6,1	0,3656	-8,2336	16,7392	0,0907	-12,0377	-3,0102
6,2	0,1700	-18,5905	37,3084	0,0424	-12,6433	-3,1609

Следовательно, коэффициенты однородных канонических уравнений метода перемещений содержат специальные функции и зависят от безразмерных параметров  $\nu$  (25.1):

$$R(\nu)\vec{Z} = 0.$$

Критическим состояниям равновесия отвечают ненулевые перемещения узлов деформируемой системы:

$$\vec{Z} \neq 0,$$

что возможно, если матрица мгновенной жесткости вырождена, и её определитель равен нулю:

$$\text{Det}[R(\nu)] = 0.$$

Полученное уравнение критического равновесия является нелинейным (для изгибаемых стержневых систем – трансцендентным) относительно одного из параметров  $\nu$ , принимаемого за основное неизвестное, через которое выражаются все остальные параметры в соответствии с формулами (25.1). С точки зрения устойчивости сооружений, интерес представляет только наименьший из положительных корней уравнения критического равновесия, соответствующий наименьшей критической нагрузке.

Устойчивым состояниям равновесия отвечают нулевые решения однородных канонических уравнений метода перемещений. Однако, критерием глобальной устойчивости сооружения является положительная определенность матрицы мгновенной жесткости деформированной системы, т.е. матрицы единичных реакций:

$$R(\nu) > 0.$$

Для заключения о глобальной устойчивости сооружения при данном уровне нагрузок (при известных значениях параметров  $N$  и  $\nu$ ) достаточно составить матрицу мгновенной жесткости и провести анализ ее знаковой определенности: привести к верхнему треугольному виду или разложить на треугольные множители и исследовать знаки диагональных элементов. Методы исследования устойчивости сооружений без решения уравнения критического равновесия получили название качественных. Качественные методы позволяют найти и критические состояния на основе метода дихотомии спектра критических параметров, что особенно актуально для многоэлементных деформируемых систем.

Однако критерии глобальной устойчивости сооружения не являются достаточными. Даже при полностью неподвижных узлах сооружения должна быть обеспечена локальная устойчивость всех его элементов, то есть должны быть устойчивы все сжатые элементы основной системы метода перемещений.

Практическая реализация проверки устойчивости сооружения в деформированном состоянии при заданной нагрузке (и/или других воздействиях) может быть выполнена по следующему алгоритму.

1. При заданном уровне нагрузки и других воздействиях необходимо вычислить внутренние силы в элементах сооружения. Для большинства реальных сооружений это можно выполнить путем классического расчета по недеформированному состоянию.

2. Проверить по формулам Эйлера местную устойчивость всех элементов дискретной модели при неподвижных узлах, то есть устойчивость основной системы метода перемещений (ОСМП).

3. Если устойчивость ОСМП обеспечена, то необходимо составить матрицу мгновенной жесткости всего сооружения в деформированном состоянии с учетом найденных внутренних сил. Все главные диагональные элементы (главные единичные реакции) матрицы мгновенной жесткости в деформированном состоянии должны быть положительны. Наличие отрицательных или нулевых элементов на главной диагонали свидетельствует о местной неустойчивости соответствующих фрагментов деформируемой системы в исследуемом состоянии равновесия.

4. Если главные диагональные элементы матрицы мгновенной жесткости сооружения в деформированном состоянии положительны, то выполняется разложение матрицы мгновенной жесткости на множители методом квадратных корней или по методу Гаусса (проводится прямой ход).

5. Для заключения об общей устойчивости сооружения исследуются знаки элементов, расположенных на главных диагоналях множителей матрицы мгновенной жесткости. Если все диагональные элементы положительны, и среди них нет близких к нулю, то при заданной нагрузке равновесие сооружения устойчиво. Если среди диагональных элементов есть близкие к нулю, то данный уровень нагрузки и воздействий близок к критическому. Если разложение матрицы прервано из-за появления нулевого ведущего элемента, то равновесие является критическим. Если среди диагональных элементов есть хотя бы один отрицательный, то равновесие при данном уровне внешних воздействий неустойчиво.

Пример 25.1. Найти критическое значение равномерно распределенной нагрузки, действующей на двухпролетную однорусую раму (рис. 25.1).



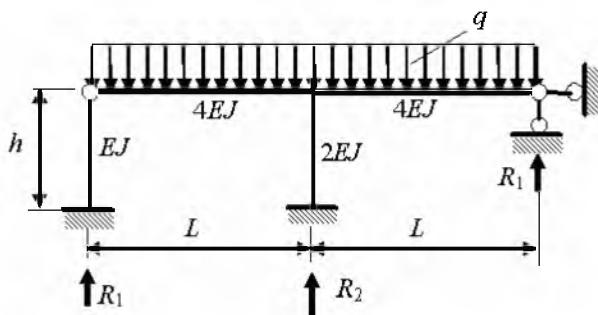


Рис. 25.1

Определяем продольные силы в стержнях рамы. Рама один раз кинематически неопределима. При данном расположении нагрузки жесткий узел рамы не поворачивается, и сжимающие усилия возникают только в стойках:

$$N_1 = R_1 = 3qL/8, \quad N_2 = R_2 = 10qL/8.$$

Основная система метода перемещений с эквивалентной узловой нагрузкой показана на рис. 25.2. Там же показаны погонные жесткости стержней, вычисленные в предположении, что численно  $h = L/2$ , а  $EJ = L$ .

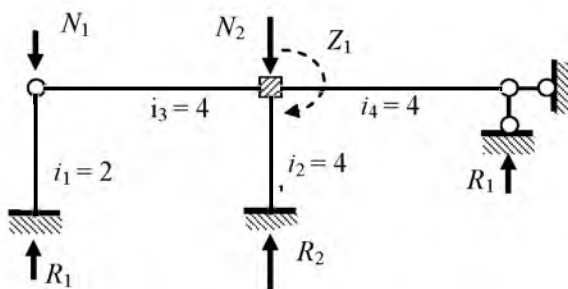


Рис. 25.2

В основной системе метода перемещений (на жесткий узел наложена моментная связь) сжатые стойки могут потерять устойчивость по Эйлеру при критических продольных силах

$$N_1^{\ominus} = \frac{20,19EJ}{h^2}; \quad N_2^{\ominus} = \frac{4\pi^2 2EJ}{h^2},$$

откуда следуют соответствующие Эйлеровы критические значения распределенной нагрузки, отвечающие критическим состояниям сжатых стержней основной системы метода перемещений:

$$q_1^{\ominus} = \frac{8N_1^{\ominus}}{3L} = \frac{53,84EJ}{Lh^2}; \quad q_2^{\ominus} = \frac{8N_2^{\ominus}}{10L} = \frac{63,16EJ}{Lh^2}.$$

При снятой дополнительной связи с ростом распределенной нагрузки левая сжатая стойка и правая Т-образная часть рамы будут деформироваться независимо друг от друга. Левая сжатая стойка будет терять устойчивость по Эйлеру как стержень на несмещаемых опорах.

Соответствующая критическая нагрузка  $q_1^{\ominus}$  уже найдена.

Найдем критическое значение нагрузки из условия потери глобальной устойчивости правой, Т-образной частью рамы. Повернем в основной системе метода перемещений дополнительную заделку на единичный угол и построим «единичную» эпюру изгибающих моментов (рис. 25.3).

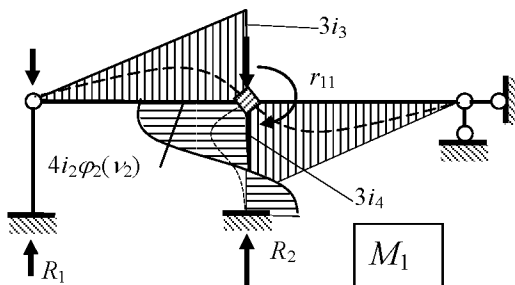


Рис. 25.3

Вырежем узел, найдем реактивный момент и приравняем его нулю:

$$r_{11} = 3i_3 + 3i_4 + 4i_2\varphi_2(\nu_2) = 24 + 16\varphi_2(\nu_2) = 0.$$

Из полученного уравнения критического состояния найдем:

$$\varphi_2(\nu_2) = -24/16 = -1,5.$$

По найденному значению специальной функции  $\varphi_2(\nu_2)$  с помощью табл. 25.2 определим критическое значение параметра  $\nu_2 = 5,52$  (округление произведено в меньшую сторону, в запас устойчивости). Соответствующее критическое значение продольной сжимающей силы в правой стойке равно:

$$N_2^{cr} = \frac{\nu_2^2 2EJ}{h^2},$$

откуда следует критическое значение распределенной нагрузки, отвечающей критическому равновесию Т-образной части рамы:

$$q_2^{cr} = \frac{8N_2^{cr}}{10L} = \frac{48,75EJ}{Lh^2}.$$

Наименьшее критическое значение распределенной нагрузки равно:

$$q_{\min}^{cr} = \min(q_1^{\ominus}; q_2^{\ominus}; q_2^{cr}) = q_2^{cr} = \frac{48,75EJ}{Lh^2}.$$

Таким образом, с ростом равномерно распределенной нагрузки первой потеряет устойчивость Т-образная часть рамы. Выпучивание сжатой стойки будет сопровождаться поворотом жесткого узла и деформациями ригеля. Форма потери устойчивости будет тождественна эпюре деформаций от единичного поворота дополнительной связи (рис. 25.3).

## 25.2. Особенности дискретизации деформируемых систем при автоматизированном расчете на устойчивость методом перемещений

Расчет на устойчивость сложных систем с числом возможных упругих смещений узлов, большим двух – трех, целесообразно вести без раскрытия определителя в уравнении критического равновесия, рассматривая его как неявно заданное трансцендентное уравнение относительно параметра нагрузки:

$$\text{Det}[R(\nu)] = 0, \text{ или символически } \Psi(\nu) = 0.$$

Для решения таких уравнений общего вида применяют численные методы, требующие только вычисления их левых частей, в данном случае вычисления значения определителя.

Кроме того, проверка устойчивости сооружения в конкретном деформированном состоянии равновесия может быть осуществлена качественным методом без вычисления определителя матрицы мгновенной жесткости. При этом основные вычислительные затраты будут обусловлены только формированием матрицы мгновенной жесткости и приведением ее к треугольному виду (разложением на треугольные множители).

Разумеется, весь расчет следует вести на основе компьютерных технологий, применяя дискретные расчетные схемы, численные методы и соответствующее программное обеспечение.

Рассмотрим методику расчета стержневых систем на устойчивость, основанную на общих уравнениях строительной механики. При составлении уравнений равновесия дополнительные узловые нагрузки при исследовании устойчивости равновесия не прикладываются, а только подразумеваются. Но рассматриваются все возможные перемещения узлов, по направлению которых дополнительные нагрузки могли бы быть приложены. Напомним, что жесткие узлы плоской стержневой системы (рамы) имеют по три возможных перемещения: два линейных и одно угловое. Шарнирные узлы плоской стержневой системы или фермы имеют только по два линейных перемещения. Комбинированные узлы, где часть стержней стыкуется жестко, а часть примыкает шарнирно, относят к жестким узлам и наделяют тремя степенями свободы. Количество

возможных перемещений  $n$  всех узлов деформируемой системы определяет ее степень свободы и порядок системы уравнений равновесия, которая составляется точно так же, как и при статическом расчете.

Итак, дополнительные воздействия будут характеризоваться нулевым вектором сил  $\Delta \vec{F} = 0$ . Возможные перемещения узлов деформируемой системы составят вектор узловых перемещений  $\vec{Z}$ . Порядок этих векторов равен степени свободы системы  $n$ .

Если в результате исследования будет доказано, что матрица мгновенной жесткости системы в деформированном состоянии положительно определена, то исследуемое деформированное состояние равновесия устойчиво.

Правило знаков для узловых перемещений и внутренних сил может быть принято таким же, как и при статическом расчете, т. е. обычным для сопротивления материалов и строительной механики. Растягивающие продольные силы считаются положительными. Положительная поперечная сила направлена вправо, если смотреть на нее с середины той части стержня, к которой эта поперечная сила приложена. Положительные изгибающие моменты растягивают нижние волокна горизонтального стержня. Для наклонных и вертикальных стержней правило знаков сохраняется, но для определенности следует выбрать направление наблюдения так, чтобы начало стержня (узел в начале стержня) было расположено слева от наблюдателя, а конец стержня (узел на конце стержня) – справа от наблюдателя. Во избежание путаницы, точку наблюдения рекомендуется выбирать так, чтобы левый узел стержня имел меньший номер по сравнению с правым.

Главное отличие расчета стержневых систем на устойчивость с применением общих уравнений строительной механики состоит в назначении независимых компонент вектора приращений стержневых внутренних сил  $\Delta \vec{S}_j$  и соответствующего вектора приращений деформаций  $\vec{\Lambda}_j$ .

Рассмотрим центрально растянутый силой  $N$  (сжатый при  $N < 0$ ) уравновешенный прямолинейный стержень длиной  $L$  (рис. 25.4,а).

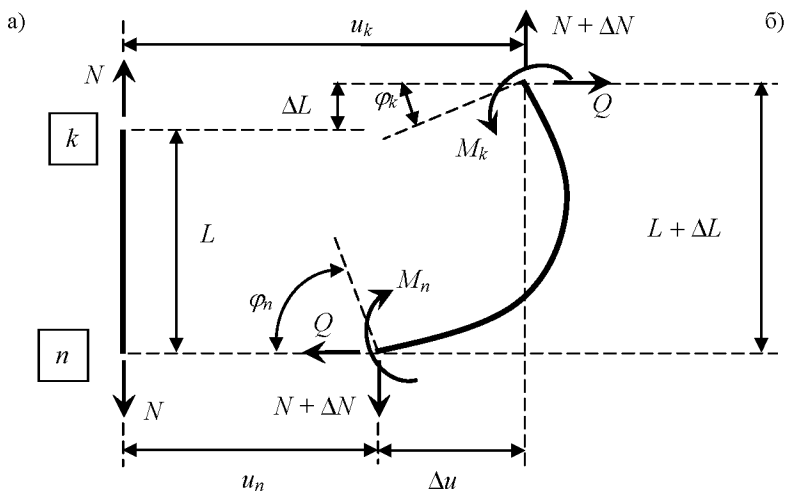


Рис. 25.4

Предположим, что под действием дополнительных достаточно малых сил и моментов  $\Delta N$ ,  $Q$ ,  $M_n$ ,  $M_k$  стержень изогнулся и перешел в новое положение равновесия (рис. 25.4,б), где  $\Delta L$ ,  $\Delta u$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_k$  – также достаточно малые абсолютные деформации удлинения и сдвига (перекоса) стержня и углы поворота его концов. Два уравнения равновесия в виде сумм проекций на оси координат, очевидно, удовлетворяются. Составим третье уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно нижнего конца стержня в деформированном состоянии (рис. 25.4,б):

$$M_n - M_k + Q(L + \Delta L) - (N + \Delta N)\Delta u = 0. \quad (25.3)$$

Пренебрегая в уравнении (25.3) произведениями  $Q\Delta L$  и  $\Delta N\Delta u$  как величинами второго порядка малости, разрешим его относительно сдвигающего усилия  $Q$ :

$$Q = \frac{M_k - M_n}{L} + \frac{N}{L}\Delta u = \frac{M_k - M_n}{L} + \frac{N}{L}(u_k - u_n). \quad (25.4)$$

Как следует из (25.4), сдвигающее усилие  $Q$  выражается уже не только через концевые сосредоточенные моменты  $M_n$  и  $M_k$ . Оно зависит от продольной силы и от перемещений, в частности, от степени перекоса стержня при его переходе в деформированное состояние. То есть от тангенса угла между первоначальной осью стержня и его хордой в деформированном состоянии:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta u}{L} = \frac{(u_k - u_n)}{L}.$$

Таким образом, в уравнения равновесия вошли неизвестные перемещения концов стержня. Продольная сила  $N$  исходного состояния, отнесенная к длине стержня, выступает в роли коэффициента при неизвестном перекосе стержня, другими словами, при разности поперечных перемещений концов стержня. Полные углы поворота  $\varphi_n$  и  $\varphi_k$  концов стержня и концевые моменты  $M_n$  и  $M_k$  также зависят от перекоса стержня и, следовательно, от продольной силы исходного состояния. Справедливо и обратное утверждение. Если на концы прямолинейного растянутого (сжатого) стержня наложить связи и придать им малые конечные перемещения, так чтобы он получил деформации  $\varphi_n, \varphi_k, \Delta u$ , то возникшие в наложенных связях реактивные моменты  $M_n$  и  $M_k$  и реактивная поперечная сила  $Q$  будут зависеть как от полученных деформаций, так и от начального продольного усилия  $N$ .

Итак, на основании зависимости (25.4) для изгибаемого растянутого стержня с двумя жесткими узлами (рис. 25.5) из шести действующих по его концам приращений усилий (приращений реакций) в качестве независимых следует оставить четыре. Следовательно, вектор независимых приращений усилий примет вид:

$$\Delta \vec{S}_j = [\Delta N \quad M_n \quad M_k \quad Q]^T, \quad (25.5)$$

где  $Q$  – это не поперечная сила, а искомое приращение усилия сдвига, нормальное к оси стержня в исходном состоянии.

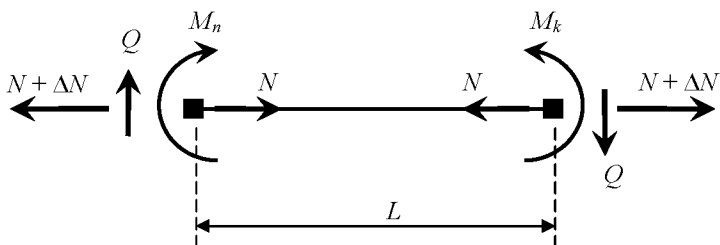


Рис. 25.5

Вектор приращений деформаций  $\vec{\Lambda}_j$ , соответствующий вектору приращений усилий  $\vec{\Delta S}_j$ , примет вид (рис. 25.6):

$$\vec{\Lambda}_j^T = [\Delta L \quad \varphi_n \quad \varphi_k \quad \Delta u]. \quad (25.6)$$

В дальнейшем приращения усилий и приращения деформаций, если это не исказит смысла, будем называть просто усилиями и деформациями.

Если стержень рамы одним концом крепится к узлу шарнирно, то в шарнире изгибающий момент равен нулю, и в векторе усилий (25.5) соответствующий изгибающий момент должен быть вычеркнут. Следовательно, и в векторе деформаций (25.6) должен быть вычеркнут соответствующий угол поворота.

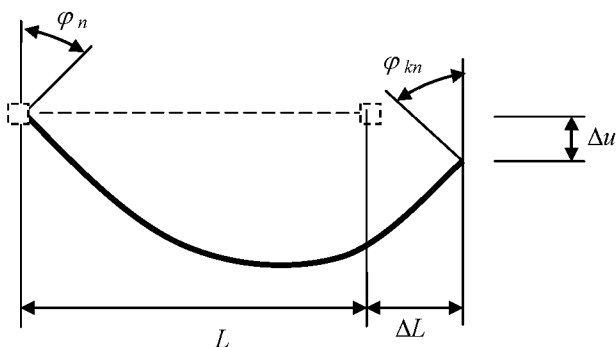


Рис. 25.6



Если растянутый (сжатый) стержень выполняет в раме роль затяжки (распорки) или является стержнем фермы (оба узла шарнирные), то в векторе приращений усилий  $\vec{\Delta S}_j$  остаются две компоненты: приращение продольной силы  $\Delta N$  и усилие сдвига  $Q$ . Соответственно и в векторе деформаций  $\vec{\Lambda}_j$  останутся две компоненты: удлинение стержня  $\Delta L$  и перекося стержня  $\Delta u$ .

На последнее обстоятельство следует обратить особое внимание, так как при статическом расчете для стержней, имеющих шарниры на обоих концах, в соответствующих векторах обычно оставляют по одной компоненте. Отметим, что и при статическом расчете усилия сдвига и деформации сдвига также можно было бы не исключать из числа независимых искомых параметров.

Следовательно, и при расчете на устойчивость размерность векторов усилий и деформаций для отдельных стержней зависит от условий прикрепления этих стержней к узлам системы.

Из векторов усилий  $\vec{\Delta S}_j$  и векторов деформаций  $\vec{\Lambda}_j$  отдельных стержней составляются в соответствии с нумерацией стержней общий вектор усилий  $\vec{\Delta S}$  и общий вектор деформаций  $\vec{\Lambda}$  деформируемой системы в целом:

$$\vec{\Delta S} = \begin{bmatrix} \vec{\Delta S}_1 \\ \vec{\Delta S}_2 \\ \dots \\ \vec{\Delta S}_k \end{bmatrix}; \quad \vec{\Lambda} = \begin{bmatrix} \vec{\Lambda}_1 \\ \vec{\Lambda}_2 \\ \dots \\ \vec{\Lambda}_k \end{bmatrix}, \quad (25.7)$$

где  $k$  – количество стержней (элементов) деформируемой системы.

Второе основное отличие расчета стержневых систем на устойчивость от их статического расчета по недеформированной расчетной схеме состоит в построении матрицы внутренней жесткости  $G_j$  прямолинейного деформированного стержня, связывающей векторы приращений усилий и приращений деформаций:

$$\Delta \vec{S}_j = \mathbf{G}_j \vec{\Lambda}_j. \quad (25.8)$$

Матрица внутренней жесткости стержня  $\mathbf{G}_j$  строится с учетом продольного усилия в этом стержне на основе общего решения дифференциального продольно-поперечного уравнения изгиба стержня. Соответствующие формулы будут даны ниже.

Блочная матрица внутренней жесткости стержневой системы в исходном деформированном состоянии составляется обычным путем из соответствующих матриц внутренней жесткости отдельных стержней:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & & & \\ & \mathbf{G}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \mathbf{G}_m \end{bmatrix}. \quad (25.9)$$

Матрица мгновенной внешней жесткости всей стержневой системы, необходимая для исследования устойчивости ее исходного деформированного состояния, также строится по обычной матричной формуле:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\vec{X}) \mathbf{G}(\vec{X}, \vec{S}) [\mathbf{A}(\vec{X})]^T, \quad (25.10)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\vec{X})$  – обычная матрица уравнений равновесия относительно приращений усилий в исходном состоянии.

Уравнения равновесия в исходном состоянии составляются с учетом деформированной геометрии, если влияние статических перемещений значительно, но с прямолинейными стержнями. Внешние узловые силы исходного состояния и вызванные ими начальные внутренние продольные силы в уравнения равновесия не включаются. В уравнения равновесия входят только соответствующие приращения усилий  $\Delta N, M_n, M_k, Q$ . При этом усилия поперечного сдвига из уравнений равновесия не исключаются. Начальные продольные силы исходного деформированного состояния в уравнения

равновесия не входят, в каждом узле они уравновешены и учитываются посредством специальных функций при построении матриц внутренней жесткости отдельных стержней  $G_j$ . Из матриц внутренней жесткости отдельных стержней формируется общая матрица (25.9) внутренней жесткости  $G = G(\vec{X}, \vec{S})$ .

Элементы матриц внутренней жесткости зависят от внутренних продольных сил исходного состояния. Обычно в расчетах на устойчивость рядовых сооружений принимают во внимание только сжимающие продольные силы. Растягивающие продольные силы как параметры учитываются в расчетах по деформированному состоянию только относительно гибких, большепролетных и высотных сооружений.

### 25.3. Матрица внутренней жесткости сжатого стержня

Матрица внутренней жесткости  $G_j$  сжатого стержня номер  $j$  с двумя жесткими узлами по концам (рис. 25.5, 25.6) при  $N \leq 0$ , преобразующая вектор приращений деформаций  $\vec{\Lambda}_j$  (25.6) в вектор приращений реакций  $\Delta\vec{S}_j$  (25.5), в соответствии с формулой (25.8) будет иметь вид:

$$G_j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}, \quad (25.11)$$

где элемент  $g_{ik}$  обозначает приращение реакции под номером  $i$ , вызванное единичной деформацией (приращением деформации) с номером  $k$ .

Номера приращений реакций и деформаций определены их расположением в векторах (25.5) и (25.6).

Следовательно, первый столбец матрицы (25.11) соответствует приращениям реакций соответственно  $\Delta N, M_n, M_k, Q$  от единич-

ного (бесконечно малого) удлинения сжатого стержня  $\Delta L = 1$ . Удлинение прямолинейного сжатого стержня не вызывает его изгиба. Поэтому побочные элементы первого столбца (и первой строки) матрицы (25.11) равны нулю.

Первый элемент главной диагонали матрицы внутренней жесткости (25.11) при соблюдении гипотезы о малости деформаций определяется обычным путем по закону Гука как приращение продольных реакций сжатого стержня от единичного удлинения:

$$g_{11} = \frac{EA}{L}. \quad (25.12)$$

Второй столбец матрицы внутренней жесткости рассматриваемого сжатого стержня составляют приращения реакций, вызванные поворотом узла в начале стержня по часовой стрелке на единичный угол  $\varphi_n = 1$ .

Третий столбец составляют приращения реакций, вызванные поворотом узла на конце стержня против часовой стрелки на единичный угол  $\varphi_k = 1$ .

Четвертый столбец – это приращения реакций от взаимного единичного поперечного сдвига концевых узлов стержня  $\Delta u = 1$  (рис. 25.6).

Все реакции определяются с помощью общего решения дифференциального уравнения изгиба сжатого стержня при соответствующих граничных условиях (табл. 25.1).

В соответствии с таблицей реакций сжато-изогнутых стержней (табл. 25.1) и принятым правилом знаков (рис. 25.5) при единичных деформациях (рис. 25.6) и получены формулы для вычисления элементов матрицы внутренней жесткости в прямолинейном сжатом стержне с двумя жесткими узлами по концам. В этих формулах использованы специальные безразмерные трансцендентные функции  $\varphi_2(v)$ ,  $\varphi_3(v)$ ,  $\varphi_4(v)$ ,  $\eta_2(v)$  (25.2) от безразмерного параметра:

$$v = L \sqrt{\frac{|N|}{EJ}} \quad (N \leq 0), \quad (25.13)$$

где под  $N$  подразумевается отрицательное, сжимающее усилие исходного состояния.

В общем виде матрица внутренней жесткости сжатого стержня с двумя жесткими узлами по концам имеет вид:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i\varphi_2(\nu) & -2i\varphi_3(\nu) & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) \\ 0 & -2i\varphi_3(\nu) & 4i\varphi_2(\nu) & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) \\ 0 & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & \frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu) \end{bmatrix}. \quad (25.14)$$

Формула (25.8) для сжатого стержня с шарнирным узлом в начале (отсутствует реактивный момент  $M_n$  и исключен угол поворота  $\varphi_n$ ) и жестким узлом на конце в развернутом виде примет вид:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ M_k \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3i\varphi_1(\nu) & \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) \\ 0 & \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) & \frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \varphi_k \\ \Delta u \end{bmatrix}. \quad (25.15)$$

Матрица внутренней жесткости для сжатого стержня с жестким узлом в начале стержня и шарнирным узлом на конце (отсутствует реактивный момент  $M_k$  и исключен угол поворота  $\varphi_k$ ) будет отличаться знаками побочных элементов от соответствующей матрицы в формуле (25.15). Формула (25.8) для такого стержня примет вид:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ M_n \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3i\varphi_1(\nu) & -\frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) \\ 0 & -\frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) & \frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \varphi_n \\ \Delta u \end{bmatrix}. \quad (25.16)$$

В последних двух матричных формулах применены еще две специальные безразмерные трансцендентные функции  $\varphi_1(\nu)$ ,  $\eta_1(\nu)$  безразмерного аргумента-параметра  $\nu$  (25.13).

При нулевом значении безразмерного параметра  $\nu$  все специальные функции принимают единичные значения (обращаем внимание на раскрытие неопределенности вида  $0/0$  при  $\nu \rightarrow 0$ ), а соответствующие матричные формулы расчета по деформированному состоянию становятся эквивалентными формулам классического расчета по недеформированному состоянию.

Матрицы внутренней жесткости, входящие в формулы (25.15) и (25.16), можно получить из общей матрицы (25.14) путем исключения из нее по алгоритму Гаусса–Жордано соответственно второй или третьей строки (и столбца). Более точно, путем исключения соответствующего угла поворота из формулы (25.8), как неизвестного из системы линейных алгебраических уравнений.

Для сжатого стержня с шарнирными узлами по обоим концам матрица внутренней жесткости может быть получена путем исключения соответствующего угла поворота из зависимостей (25.15) или (25.16), либо обоих углов из зависимости (25.8) с матрицей (25.14). В результате получим:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{N}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l \\ \Delta u \end{bmatrix}. \quad (25.17)$$

В матрицу внутренней жесткости в (25.17) значение продольной силы  $N$  должно быть подставлено со своим знаком. Для растяну-

того стержня со знаком «плюс». Для сжатого стержня со знаком «минус». Для сжатого стержня можно также воспользоваться вытекающей из (25.13) общепринятой подстановкой:

$$\frac{N}{L} = -\frac{\nu^2 EJ}{L^3}. \quad (25.18)$$

Формула (25.17) подтверждает важное следствие, которое неоднократно отмечалось ранее. Растянутый шарнирно закрепленный стержень сопротивляется поперечному воздействию: реакция смещаемой опоры направлена в сторону смещения. Смещенный растянутый стержень стремится вернуться в исходное состояние. Сжатый шарнирно закрепленный стержень является “толкающим” стержнем: реакция смещаемой опоры направлена навстречу смещению. Смещенный сжатый стержень приходится удерживать от дальнейшего смещения. При нулевой продольной силе шарнирно закрепленный стержень остается нейтральным к поперечному сдвигу, никак на него не реагирует. Именно поэтому и удалось исключить деформации поперечного сдвига из матричных уравнений статического расчета по недеформированному состоянию.

**Пример 25.2.** Проверить устойчивость равновесия симметричной статически неопределимой рамы (рис. 25.7) и найти критическое значение параметра нагрузки  $F^{cr}$ .

Номинальное значение параметра нагрузки примем равным  $F = 750$  кН. Будем считать, что жесткостные параметры стержней рамы равны:

$$\begin{aligned} EA_1 = EA_4 &= 9 \cdot 10^6 \text{ кН}; & EJ_1 = EJ_4 &= 3 \cdot 10^5 \text{ кНм}^2; \\ EA_2 = EA_3 &= 12 \cdot 10^6 \text{ кН}; & EJ_2 = EJ_3 &= 6 \cdot 10^5 \text{ кНм}^2. \end{aligned}$$

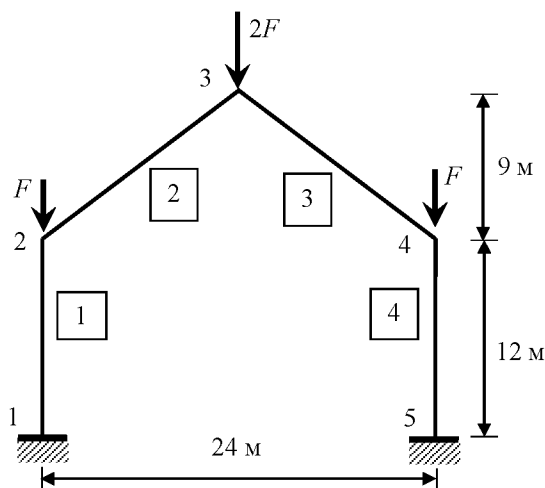


Рис. 25.7

Расчет рамы выполним на компьютере с учетом продольных деформаций ее стержней, используя общие уравнения строительной механики. Три узла рамы обладают 9-ю степенями свободы: 3 угла поворота и 6 линейных смещений. Следовательно, степень кинематической неопределенности рамы равна 9. Количество неизвестных независимых усилий в четырех стержнях рамы в сумме равно 16. Таким образом, размерность предстоящих решению задач для современных компьютеров является не очень большой.

Однако упругая симметрия рамы и симметрия заданной нагрузки позволяют еще более снизить порядок подлежащих решению алгебраических задач. Для этого достаточно рассмотреть половину рамы, исследуя по отдельности ее симметричные и кососимметричные деформации. Отметим сразу, что подобное разложение не является обязательным. Современные компьютеры свободно оперируют матрицами, порядок которых составляет десятки и сотни тысяч. Здесь это сделано, во-первых, с целью иллюстрации и, во-вторых, чтобы обрабатываемые матрицы уместились на страницах данного издания

При симметричных деформациях узел 3 рамы может перемещаться только по вертикали, не поворачиваясь. Соответствующая



дискретная расчетная схема рамы, предназначенная для исследования симметричных деформаций рамы, показана на рис. 25.8.

При кососимметричных деформациях рамы ее центральный узел 3 не будет смещаться по вертикали, и в этом узле будут равны нулю изгибающий момент и горизонтальная составляющая внутренней силы. Следовательно, узел 3 можно представить шарнирным в виде шарнирно-подвижной опоры. Однако, чтобы векторы внутренних сил и деформаций, а также матрицы внутренней жесткости в стержнях полурам были одинаковыми для симметричных и кососимметричных деформаций, будем рассматривать и при кососимметричных деформациях узел 3 как жесткий узел, но на шарнирно-подвижной опоре (рис. 25.9).

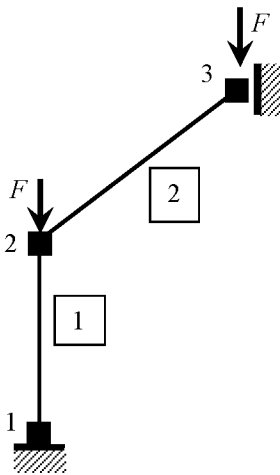


Рис. 25.8

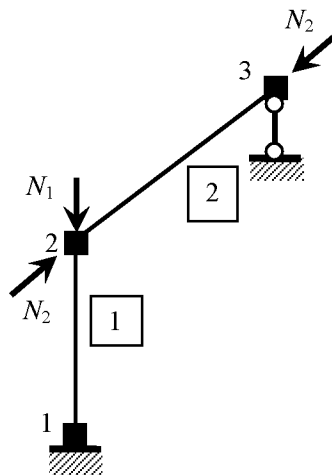


Рис. 25.9

Рассмотрим симметричные деформации исходной рамы. Сначала выполним статический расчет, чтобы определить внутренние силы от заданной номинальной нагрузки.

Вектор возможных упругих перемещений двух узлов 2 и 3 полурамы (рис. 25.8) имеет четыре компоненты: горизонтальное перемещение, вертикальное перемещение и угол поворота узла 2 и

единственное вертикальное перемещение узла 3 (рассматриваем ненулевые перемещения):

$$\vec{V}^T = [u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad v_3].$$

Соответствующий вектор нагрузок для статического расчета полурамы примет вид:

$$\vec{F} = [0 \quad -750 \quad 0 \quad -750]^T.$$

Вектор неизвестных независимых усилий в двух стержнях полурамы будет состоять из восьми компонент:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 \\ \vec{S}_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_{n1} \\ M_{k1} \\ Q_1 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_2 = \begin{bmatrix} N_2 \\ M_{n2} \\ M_{k2} \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Вырежем узлы 2 и 3 (рис. 25.10) и составим четыре уравнения равновесия:

$$\sum X_2 = 0;$$

$$\sum Y_2 = 0;$$

$$\sum M_2 = 0;$$

$$\sum Y_3 = 0.$$

Для наклонного стержня имеем:  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

Уравнения равновесия запишем в виде:

$$A\vec{S} = \vec{F}.$$

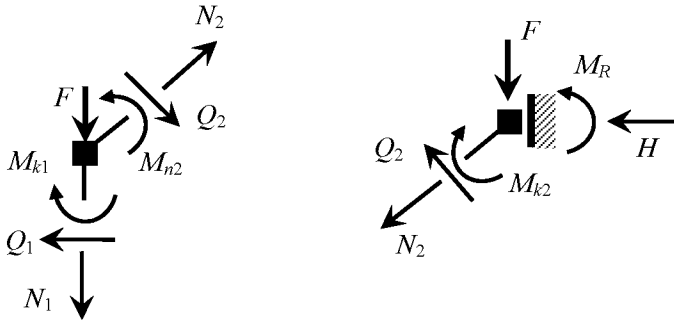


Рис. 25.10

Следовательно, матрица коэффициентов (матрица равновесия) размером  $4 \times 8$  примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0,8 & 0 & 0 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & -0,8 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений равновесия, подчеркнем это, усилия сдвига не исключены.

Готовим данные для вычисления матриц внутренней жесткости вида (25.14) для стержней 1 и 2. Вычисляем  $i_1 = 300000/12 = 25000$ ;  $i_2 = 600000/15 = 40000$ . Затем при значениях параметров устойчивости  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 = 0$  (статический расчет) и единичных значениях всех специальных функций формируем по формулам (25.14) матрицы внутренней жесткости четвертого порядка для стержней. Матрица внутренней жесткости системы буде квазидиагональной восьмого порядка:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & \\ & G_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{G}_1 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & -1,25 \\ 0 & -5 & 10 & 1,25 \\ 0 & -1,25 & 1,25 & 0,208333 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & -1,60 \\ 0 & -8 & 16 & 1,60 \\ 0 & -1,60 & 1,60 & 0,213333 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу-произведение:

$$\mathbf{GA}^T = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 75 & 0 & 0 \\ -1,25 & 0 & 5 & 0 \\ 1,25 & 0 & -10 & 0 \\ 0,2083 & 0 & -1,25 & 0 \\ -64 & -48 & 0 & 48 \\ 0,96 & -1,28 & 16 & 1,28 \\ -0,96 & 1,28 & -8 & -1,28 \\ -1,28 & 0,1707 & -1,6 & -0,1707 \end{bmatrix}.$$

Затем вычисляем матрицу внешней жесткости полурамы:

$$\mathbf{R} = \mathbf{AGA}^T = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 51,4851 & 38,2976 & -0,2900 & -38,2976 \\ 38,2976 & 103,9365 & -1,2800 & -28,9365 \\ -0,2900 & -1,2800 & 26,0000 & 1,2800 \\ -38,2976 & -28,9365 & 1,2800 & 28,9365 \end{bmatrix}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\mathbf{R}\vec{V} = \vec{F},$$

и находим:

$$\vec{V} = 10^{-4} \cdot [-1377,05 \quad -20,0000 \quad 75,8065 \quad -1871,81]^T.$$

И, наконец, вычисляем вектор внутренних сил:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \mathbf{GA}^T \vec{V} = \\ &= [-1500 \quad 2100 \quad -2479 \quad -381,6 \quad -755,3 \quad -2479 \quad 3086 \quad 3710]^T, \end{aligned}$$

откуда выбираем сжимающие продольные силы:

$$N_1 = -1500 \text{ кН}; \quad N_2 = -755,3 \text{ кН}.$$

Для дальнейшего расчета на устойчивость придется формировать для стержней с учетом специальных трансцендентных функций матрицы внутренней жесткости вида:

$$\mathbf{G}_1 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10\varphi_2(\nu_1) & -5\varphi_3(\nu_1) & -1,25\varphi_4(\nu_1) \\ 0 & -5\varphi_3(\nu_1) & 10\varphi_2(\nu_1) & 1,25\varphi_4(\nu_1) \\ 0 & -1,25\varphi_4(\nu_1) & 1,25\varphi_4(\nu_1) & 0,208333\eta_2(\nu_1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16\varphi_2(\nu_2) & -8\varphi_3(\nu_2) & -1,60\varphi_4(\nu_2) \\ 0 & -8\varphi_3(\nu_2) & 16\varphi_2(\nu_2) & 1,60\varphi_4(\nu_2) \\ 0 & -1,60\varphi_4(\nu_2) & 1,60\varphi_4(\nu_2) & 0,213333\eta_2(\nu_2) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем безразмерные параметры, соответствующие найденному уровню продольных сил:

$$\nu_1 = 12 \sqrt{\frac{1500}{300000}} = 0,8485; \quad \nu_2 = 15 \sqrt{\frac{755,3}{600000}} = 0,5322.$$

Вычисляем значения соответствующих специальных трансцендентных функций:

$$\varphi_2(\nu_1) = 0,9758; \quad \varphi_2(\nu_2) = 0,9905;$$

$$\varphi_3(\nu_1) = 1,0123; \quad \varphi_3(\nu_2) = 1,0048;$$

$$\varphi_4(\nu_1) = 0,9879; \quad \varphi_4(\nu_2) = 0,9953;$$

$$\eta_2(\nu_1) = 0,9279; \quad \eta_2(\nu_2) = 0,9717,$$

и формируем с их учетом матрицы внутренней жесткости стержней:

$$\mathbf{G}_1 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,758 & -5,062 & -1,2349 \\ 0 & -5,062 & 9,758 & 1,2349 \\ 0 & -1,2349 & 1,2349 & 0,19331 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_2 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15,848 & -8,038 & -1,5925 \\ 0 & -8,038 & 15,848 & 1,5925 \\ 0 & -1,5925 & 1,5925 & 0,2073 \end{bmatrix}.$$

Затем образуем блочную матрицу внутренней жесткости полурамы:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \\ & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix},$$

и вычисляем матрицу внешней жесткости полурамы:

$$\mathbf{R} = \mathbf{AGA}^T = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 51,47 & 38,30 & -0,2794 & -38,30 \\ 38,30 & 103,933 & -1,2740 & -28,93 \\ -0,2794 & -1,2740 & 25,61 & 1,2740 \\ -38,30 & -28,93 & 1,2740 & 28,9365 \end{bmatrix}.$$

Приводим матрицу внешней жесткости прямым ходом по Гауссу к верхнему треугольному виду (можно было бы разложить и на симметричные треугольные множители):

$$R \Rightarrow (\text{Гаусс}) \Rightarrow R_U = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 51,47 & 38,30 & -0,2794 & -38,30 \\ 0 & 75,43 & -1,0661 & -0,4310 \\ 0 & 0 & 25,59 & 1,0600 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3845 \end{bmatrix}$$

После прямого хода по Гауссу на главной диагонали треугольной матрицы находятся положительные элементы. Следовательно, при заданном уровне нагрузок никакие симметричные малые возмущения не могут вызвать потерю устойчивости равновесия.

Проверяем устойчивость рамы при кососимметричных возмущениях. Составляем уравнения равновесия для полурамы, моделирующей кососимметричные деформации (рис. 25.9). Вырезаем узлы (рис. 25.11) и получаем пять уравнений равновесия по направлениям возможных упругих перемещений. Три уравнения, как и раньше, для узла 2 и два уравнения для узла 3:

$$\sum X_3 = 0; \quad \sum M_3 = 0.$$

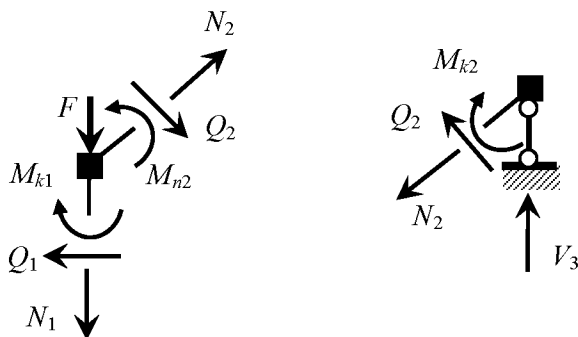


Рис. 25.11

Матрица равновесия при кососимметричных деформациях примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0,8 & 0 & 0 & -0,6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнив построение матрицы внешней жесткости второй полурамы по прежней формуле:

$$R = AGA^T$$

и, приведя ее прямым ходом по Гауссу к треугольному виду, получим:

$$R_U = \begin{bmatrix} 51,47 & 38,30 & -0,2794 & -51,270 & 0,9550 \\ & 75,43 & -1,066 & -0,1438 & -1,985 \\ & & 25,59 & -1,236 & 8,015 \\ & & & 0,1326 & 0,3800 \\ & & & & 12,18 \end{bmatrix}.$$

И при кососимметричных возмущениях равновесие рамы при заданном уровне нагрузок остается устойчивым.

Чтобы определить критическую нагрузку, необходимо выполнить ее поиск, допустим, методом половинного деления или методом подбора.

Определим приближенное значение критической продольной силы в стойках по формуле Эйлера, предположив, что ригель является для стоек «плавающим» защемлением:

$$N_{кр}^{\partial} = \pi^2 EI_1 / L_1^2 = 3.1416^2 \cdot 300000 / 12^2 = 20561 \text{ кН.}$$

Таким образом, заведомо завышенное критическое сжимающее усилие в стойке более чем в  $k = 20561/1500 \approx 13$  раз превосходит (по модулю) номинальное усилие.



Повторяем расчет на устойчивость при 10-кратных продольных силах ( $k = 10$ ):

$$N_1 = -1500 \cdot 10 = -15000 \text{ кН},$$

$$N_2 = -755.3 \cdot 10 = -7553 \text{ кН}.$$

При таких продольных силах рама неустойчива, так как при кососимметричных деформациях на главной диагонали матрицы внешней жесткости, приведенной к треугольному виду, появился отрицательный элемент.

Уменьшаем продольные силы, приняв  $k = 8$ , и еще раз выполняем расчет на устойчивость. Отрицательных чисел на главной диагонали треугольного сомножителя нет. Рама устойчива при восьмикратном превышении заданной нагрузки.

Применяя методику половинного деления, последовательно находим критическое значение коэффициента  $k_{cr} = 9,10$ .

Подобным образом можно найти критическую нагрузку с заданной точностью, изменяя не только значения продольных внутренних сил, но и значения и расположение внешних нагрузок. В последнем случае придется при каждой попытке проводить и статический расчет.

Как следует из вышеизложенного, трудоемкость и точность определения критических нагрузок зависит от конкретного программного обеспечения и умения пользователя использовать преимущества компьютерных технологий на основе численных методов и существующего прикладного программного обеспечения.

#### **25.4. Матрица внутренней жесткости растянутого стержня**

Выше отмечалось, что растягивающие продольные усилия в элементах деформируемой системы повышают ее мгновенную жесткость. Во многих случаях этим повышением пренебрегают, что идет в запас жесткости и устойчивости. При необходимости влияние растягивающих сил на деформации изгиба и общую жесткость сооружения также может быть учтено, особенно при компьютерной реализации вычисле-

ний. Для этого достаточно ввести специальные функции для растянутых стержней, которые будут использованы при формировании матриц внутренней жесткости растянутых стержней.

Основное отличие формального учета растягивающих внутренних сил от соответствующего учета сжимающих внутренних сил состоит в том, что безразмерный параметр  $\nu$  (25.13) для растянутого стержня становится мнимой величиной. Поэтому введем новое обозначение соответствующего безразмерного параметра для растянутых стержней:

$$\gamma = L\sqrt{\frac{N}{EJ}} \quad (N \geq 0). \quad (25.19)$$

На основании (25.19) и (25.13) будем иметь следующие соотношения (здесь  $i$  – мнимая единица):

$$\nu = i\gamma; \quad \nu^2 = -\gamma^2; \quad \sin(i\gamma) = i \operatorname{sh}(\gamma); \quad \operatorname{tg}(i\gamma) = i \operatorname{th}(\gamma). \quad (25.20)$$

Учитывая соотношения (25.20), вместо специальных безразмерных функций безразмерного параметра  $\nu$  для сжатых стержней легко получить соответствующие безразмерные функции безразмерного параметра  $\gamma$  уже для растянутых стержней:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\gamma) &= \frac{\gamma^2 \operatorname{th} \gamma}{3(\gamma - \operatorname{th} \gamma)}; & \varphi_4(\gamma) &= \varphi_1\left(\frac{\gamma}{2}\right); \\ \varphi_2(\gamma) &= \frac{\gamma(\gamma - \operatorname{th} \gamma)}{8 \operatorname{th} \gamma \left(\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right)}; & \eta_1(\gamma) &= \frac{\gamma^3}{3(\gamma - \operatorname{th} \gamma)}; \\ \varphi_3(\gamma) &= \frac{\gamma(\operatorname{sh} \gamma - \gamma)}{4 \operatorname{sh} \gamma \left(\frac{\gamma}{2} - \operatorname{th} \frac{\gamma}{2}\right)}; & \eta_2(\gamma) &= \eta_1\left(\frac{\gamma}{2}\right); \\ N &\geq 0; & \gamma &= L\sqrt{\frac{N}{EJ}}. \end{aligned} \quad (25.21)$$

Полученные в предыдущем разделе формулы для вычисления “единичных” реакций и построения матриц внутренней жесткости для сжатых стержней полностью применимы и для построения матриц внутренней жесткости растянутых стержней, при условии замены параметра  $\nu$  (25.13) на параметр  $\gamma$  (25.19) и специальных функций (25.2) на специальные функции (25.21). При компьютерной реализации учет влияния растягивающих усилий на жесткость стержневой системы в деформированном состоянии ничуть не сложнее учета сжимающих усилий. Вычислительные затраты примерно одинаковы.

### 25.5. Матрица внешней жесткости сжатого стержня как конечного элемента

При компьютерной реализации расчетов деформируемых систем на устойчивость построение требуемой матрицы мгновенной жесткости сооружения в исследуемом состоянии равновесия может быть выполнено с помощью метода конечных элементов. Для построения общей матрицы мгновенной жесткости всего сооружения достаточно уметь построить в местных системах координат матрицы мгновенной жесткости отдельных конечных элементов. Разумеется, компоненты соответствующих матриц мгновенной жесткости должны учитывать наличие, по крайней мере, внутренних сжимающих сил в элементах сооружения. Это легко выполняется с помощью таблиц реакций сжатых стержней (табл. 25.1) и таблиц специальных трансцендентных функций (табл. 25.2), рассмотренных ранее.

Рассмотрим сжатый стержневой конечный элемент с жесткими узлами (рис. 25.12), отнесенный к местной системе координат.

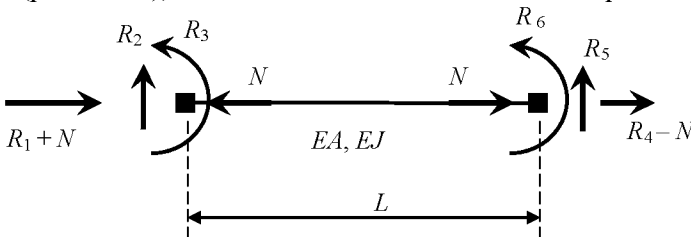


Рис. 25.12

Вектор приращений узловых реакций  $\vec{R}$  шестого порядка связан с соответствующим вектором узловых перемещений  $\vec{Z}$  с помощью матрицы мгновенной жесткости  $K$  также шестого порядка:

$$\vec{R} = K\vec{Z}. \quad (25.22)$$

Матрица мгновенной жесткости  $K$  является матрицей внешней жесткости рассматриваемого сжатого стержневого конечного элемента в местной системе координат. Ее компоненты, единичные реакции в опорных связях, вызванные поочередным единичным смещением каждой опорной связи, зависят также от сжимающей продольной силы в элементе. Значения единичных реакций легко определяются с помощью табл. 25.1 по методике, примененной в разделах 25.3. В соответствии с направлением узловых реакций (рис. 25.12), определяющих также и направление узловых перемещений, матрица мгновенной жесткости рассматриваемого стержневого конечного элемента в местной системе координат примет вид:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu) & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 0 & -\frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu) & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) \\ 0 & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 4i\varphi_2(\nu) & 0 & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 2i\varphi_3(\nu) \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu) & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 0 & \frac{12i}{L^2}\eta_2(\nu) & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) \\ 0 & \frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 2i\varphi_3(\nu) & 0 & -\frac{6i}{L}\varphi_4(\nu) & 4i\varphi_2(\nu) \end{bmatrix}, \quad (25.23)$$

где, как обычно, введены обозначения:

$$i = \frac{EJ}{L}; \quad \nu = L\sqrt{\frac{|N|}{EJ}}.$$

Аналогично могут быть получены матрицы мгновенной жесткости для стержневых конечных элементов с другими опорными закреплениями (рис. 25.13, 25.14).

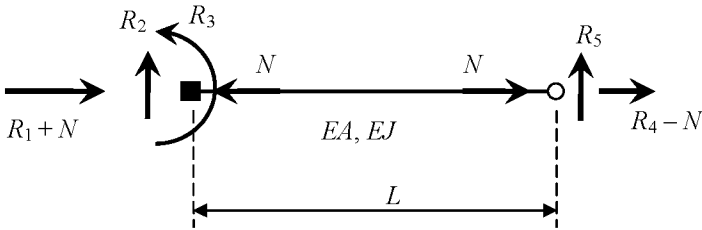


Рис. 25.13

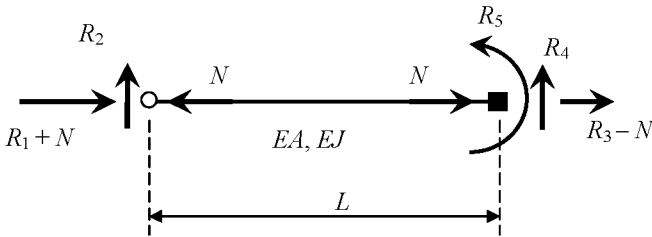


Рис. 25.14

Для стержневого конечного элемента с шарниром на конце (рис. 25.13) матрица мгновенной жесткости может быть получена из матрицы (25.23) путем исключения реактивного момента на конце стержня. Эта матрица будет иметь размеры  $5 \times 5$  :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) & \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) & 0 & -\frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) \\ 0 & \frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) & 3i\varphi_1(\nu) & 0 & -\frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) & -\frac{3i}{L}\varphi_1(\nu) & 0 & \frac{3i}{L^2}\eta_1(\nu) \end{bmatrix}. \quad (25.24)$$

Для стержневого конечного элемента с шарниром в начале стержня (рис. 25.14) из матрицы (25.23) потребуется исключить реактивный момент в начале стержня. Матрица мгновенной жесткости стержня с шарниром в начале также будет пятого порядка и в локальной системе координат примет вид:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{L^2}\eta_1(v) & 0 & -\frac{3i}{L^2}\eta_1(v) & \frac{3i}{L}\varphi_1(v) \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3i}{L^2}\eta_1(v) & 0 & \frac{3i}{L^2}\eta_1(v) & -\frac{3i}{L}\varphi_1(v) \\ 0 & \frac{3i}{L}\varphi_1(v) & 0 & -\frac{3i}{L}\varphi_1(v) & 3i\varphi_1(v) \end{bmatrix}. \quad (25.25)$$

Сжатый стержневой конечный элемент с шарнирами на обоих концах (рис. 25.15,а) имеет особенность, которая состоит в том, что от поперечного сдвига в его опорах появляются отрицательные поперечные реактивные силы (рис. 25.15,б).

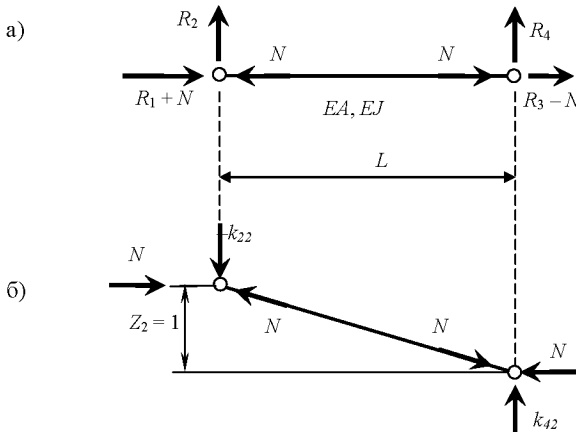


Рис. 25.15

Матрица мгновенной жесткости такого элемента будет четвертого порядка. В местной системе координат, связанной со стержнем, она примет вид:

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{N}{L} & 0 & \frac{N}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{N}{L} & 0 & -\frac{N}{L} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{\nu^2 EJ}{L^3} & 0 & \frac{\nu^2 EJ}{L^3} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\nu^2 EJ}{L^3} & 0 & -\frac{\nu^2 EJ}{L^3} \end{bmatrix}. \tag{25.26}
 \end{aligned}$$

В данном разделе под  $N$  понимается модуль сжимающей продольной силы.

### 25.6. Понятие о расчете сооружений по деформированному состоянию

Итак, равновесие сооружения в деформированном состоянии устойчиво, если матрица мгновенной жесткости сооружения в этом состоянии, вычисляемая, допустим, по формуле (25.10) или иным способом, положительно определена. Чтобы подчеркнуть, что элементы этой матрицы зависят не только от геометрии деформируемой системы, но и от продольных усилий деформированного состояния, будем обозначать ее следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\vec{X}, \vec{S}) = \mathbf{R}(\vec{X}, \vec{N}) > 0. \quad (25.27)$$

Однородные уравнения равновесия в перемещениях

$$\left[ \mathbf{R}(\vec{X}, \vec{N}) \right] \vec{Z} = 0$$

с положительно определенной матрицей мгновенной жесткости в устойчивом деформированном состоянии будут иметь единственное, нулевое решение. Для нас важно, что это решение единственно.

Следовательно, устойчивая в деформированном состоянии стержневая система может быть нагружена дополнительной нагрузкой  $\Delta \vec{F}$ . Перемещения  $\vec{Z}$ , вызванные дополнительной нагрузкой, будут единственным решением уравнений метода перемещений с матрицей мгновенной жесткости деформированного состояния:

$$\left[ \mathbf{R}(\vec{X}, \vec{N}) \right] \vec{Z} = \Delta \vec{F}. \quad (25.28)$$

Приращения усилий  $\Delta \vec{S}$  от дополнительной нагрузки могут быть выражены через найденные перемещения по формуле вида:

$$\Delta \vec{S} = - \left[ \mathbf{G}(\vec{X}, \vec{N}) \right] \left[ \mathbf{A}(\vec{X}) \right]^T \vec{Z}. \quad (25.29)$$

Новые координаты и полные усилия нового деформированного состояния равновесия, полученные путем элементарного суммирования, могут быть приняты за параметры нового исходного состояния:

$$\vec{X} + \vec{Z} \rightarrow \vec{X}; \quad \vec{S} + \Delta \vec{S} \rightarrow \vec{S}; \quad \vec{N} + \Delta \vec{N} \rightarrow \vec{N}. \quad (25.30)$$

Новое исходное состояние, если оно окажется устойчивым, может быть подвергнуто следующему нагружению. Остается только отнести вычисленные усилия к новой хорде деформированного стержня. Изгибающие моменты не изменятся, а продольные и сдвигающие силы должны быть перевычислены по следующим формулам:



$$N \cos \alpha + Q \sin \alpha \rightarrow N, \quad (25.31)$$

$$Q \cos \alpha - N \sin \alpha \rightarrow Q,$$

где слева от знака присваивания стоят вычисленные полные усилия, отнесенные к хорде стержня в исходном состоянии равновесия, а справа – усилия, отнесенные к новой хорде деформированного стержня;

$\alpha$  – угол поворота (перекоса) хорды стержня в новом состоянии по отношению к исходному состоянию:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta u}{L + \Delta L}. \quad (25.32)$$

Таким образом, на основании зависимостей (25.28)–(25.32) можно построить шаговый процесс многоступенчатого нагружения для расчета геометрически нелинейных систем. Указанный шаговый процесс эквивалентен применению метода Эйлера к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым методом непрерывного продолжения может быть сведена задача расчета геометрически нелинейной деформируемой системы.

Относительно любого устойчивого состояния равновесия деформированная система может совершать малые колебания, которые будут описываться линейными дифференциальными уравнениями движения вида:

$$M\ddot{\vec{Z}} + [\mathbf{R}(\vec{X}, \vec{N})]\dot{\vec{Z}} = \Delta\vec{F}(t). \quad (25.33)$$

При этом собственные частоты и собственные формы свободных колебаний будут зависеть как от размеров поперечных сечений и свойств материала его элементов, так и от геометрии сооружения в достигнутом деформированном состоянии равновесия, и от значений и расположения текущих (а не полных) масс сооружения, зависящих от уровня нагрузки. Но в основном они будут зависеть от уровня внутренних сил в нагруженных элементах сооружения. То есть, динамические характеристики сооружения в процессе его на-

гружения зависят от значений мгновенных масс и мгновенной жесткости сооружения и относятся к конкретному мгновенному деформированному состоянию равновесия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
2. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные и пространственные системы: учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
3. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
5. Киселев, В.А. Строительная механика: учебник для вузов / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1976. – 511 с.
6. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений) / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1969. – 432 с.
7. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учебник / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
8. Строительная механика: учебник для вузов / Ю.И. Бутенко [и др.]. – Киев: Высшая школа, 1989. – 479 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Глава 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ .....	4
1.1. Задачи и методы строительной механики .....	4
1.2. Понятие о расчетной схеме сооружения и ее элементах ..	6
1.3. Классификация сооружений. ....	13
1.4. Степень свободы плоской стержневой системы .....	20
1.5. Принципы образования геометрически неизменяемых систем .....	31
1.6. Матрицы в задачах строительной механики .....	37
1.7. Краткий исторический очерк развития строительной механики .....	40
Глава 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА ПРИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ ....	46
2.1. Понятие о статически определимых системах. Их основные свойства .....	46
2.2. Метод сечений .....	47
2.3. Метод замены связей .....	55
2.4. Кинематический метод .....	60
Глава 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ОТ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК .....	64
3.1. Понятие о подвижной нагрузке и особенностях расчета на ее действие .....	64
3.2. Статический метод построения линий влияния усилий в простых балках .....	65
3.3. Кинематический метод построения линий влияния усилий ..	74
3.4. Определение усилий по линиям влияния от неподвижных нагрузок .....	77
3.5. Линии влияния усилий при узловой передаче нагрузки ....	83
3.6. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния .....	85
3.7. Понятие об огибающих эпюрах .....	91

Глава 4. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ .....	95
4.1. Общие сведения и принципы образования .....	95
4.2. Расчет трехшарнирных арок .....	97
4.3. Линии влияния усилий в трехшарнирных арках .....	104
4.4. Рациональное очертание оси арки .....	108
4.5. Расчет трехшарнирных арок с надарочным строением ...	110
4.6. Расчет трехшарнирных рам .....	112
4.7. Расчет составных рам .....	118
Глава 5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ .....	123
5.1. Понятие о фермах, их классификация, анализ структуры .....	123
5.2. Определение усилий в стержнях ферм от неподвижных нагрузок .....	129
5.3. Определение усилий с использованием метода замены связей .....	134
5.4. Особенности определения усилий в стержнях шпренгельных ферм .....	136
5.5. Построение линий влияния усилий в фермах .....	144
5.5.1. Построение линий влияния усилий в балочных фермах .....	144
5.5.2. Построение линий влияния усилий в консольных фермах .....	151
5.5.3. Построение линий влияния усилий в шпренгельных фермах .....	156
Глава 6. РАСЧЕТ РАСПОРНЫХ ФЕРМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ .....	166
6.1. Расчет распорных ферм .....	166
6.2. Расчет комбинированных систем .....	169
Глава 7. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....	176
7.1. Общие сведения о перемещениях стержневых систем ...	176
7.2. Работа внешних статически приложенных сил .....	177
7.3. Работа внутренних сил плоской линейно-упругой стержневой системы .....	180

7.4. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам .....	184
7.5. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений ..	186
7.6. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы .....	191
7.7. Способы вычисления интегралов Мора .....	196
7.8. Определение перемещений от тепловых воздействий ....	210
7.9. Определение перемещений, вызываемых перемещениями опор .....	213
7.10. Матричная форма определения перемещений .....	214
7.11. Линии влияния перемещений .....	220
7.12. Матрица влияния перемещений .....	222

## Глава 8. МЕТОД СИЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ

ПЛОСКИХ РАМ .....	225
8.1. Статически неопределимые системы и их свойства .....	225
8.2. Определение степени статической неопределимости. ....	228
8.3. Основная система и основные неизвестные .....	232
8.4. Канонические уравнения метода сил .....	233
8.5. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	236
8.6. Построение окончательных эпюр усилий .....	238
8.7. Алгоритм расчета. Проверки расчета .....	240
8.8. Понятие о рациональной основной системе и способы ее выбора. ....	249
8.9. Определение перемещений в статически неопределимых системах .....	254
8.10. Расчет рам на действие температуры и смещение опор. ....	258
8.11. Линии влияния усилий .....	265

## Глава 9. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ .....

272	
9.1. Степень кинематической неопределимости. Основные неизвестные .....	272
9.2. Основная система. ....	275
9.3. Канонические уравнения. ....	288
9.4. Статический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений .....	290

9.5. Кинематический способ определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений . . . . .	293
9.6. Построение и проверки эпюр $M, Q, N$ в заданной системе от внешней нагрузки . . . . .	299
9.7. Расчет рам с наклонными элементами . . . . .	304
9.8. Использование симметрии системы . . . . .	309
9.9. Расчет рам на тепловое воздействие . . . . .	314
9.10. Расчет рам на смещение опор . . . . .	320
9.11. Построение линий влияния усилий. . . . .	323
9.12. Расчет рам с учетом продольных деформаций стержней . . . . .	330
Глава 10. СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД. . . . .	333
10.1. Сопоставление метода сил и метода перемещений. . . . .	333
10.2. Совместное использование метода сил и метода перемещений . . . . .	334
10.3. Смешанный метод . . . . .	339
Глава 11. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК. . . . .	344
11.1. Общие сведения . . . . .	344
11.2. Примеры расчета неразрезной балки . . . . .	344
11.3. Построение линий влияния усилий. . . . .	357
11.4. Огибающие эпюры усилий. . . . .	359
11.5. Расчет неразрезных балок на упругих опорах. . . . .	361
Глава 12. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ . . . . .	364
12.1. Виды статически неопределимых ферм. . . . .	364
12.2. Особенности расчета статически неопределимых ферм . . . . .	365
12.3. Построение линий влияния усилий. . . . .	367
Глава 13. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК, ВИСЯЧИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ . . . . .	370
13.1. Виды статически неопределимых арок . . . . .	370
13.2. Расчет двухшарнирной арки с затяжкой . . . . .	371
13.3. Влияние податливости затяжки на усилие в затяжке . . . . .	375

13.4. Особенности расчета бесшарнирной арки . . . . .	377
13.5. Применение метода перемещений к расчету статически неопределимых арок . . . . .	381
13.6. Понятие о расчете комбинированных и висячих систем . . . . .	382
<b>Глава 14. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>386</b>
14.1. Виды пространственных систем. . . . .	386
14.2. Опоры пространственных стержневых систем. Кинематический анализ. . . . .	387
14.3. Определение усилий и перемещений в статически определимых пространственных рамах. . . . .	392
14.4. Расчет пространственных ферм . . . . .	396
14.5. Особенности расчета статически неопределимых пространственных систем . . . . .	401
<b>Глава 15. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ . . . . .</b>	<b>404</b>
15.1. Понятие о дискретной физической модели . . . . .	404
15.2. Нагрузки и перемещения . . . . .	406
15.3. Усилия и деформации . . . . .	408
15.4. Уравнения равновесия . . . . .	410
15.5. Геометрические уравнения. . . . .	412
15.6. Принцип двойственности . . . . .	415
15.7. Физические уравнения. . . . .	416
15.8. Особенности расчета системы на изменение температуры, осадку опор и неточность изготовления стержней . . . . .	418
15.9. Общие уравнения для расчета стержневой системы. Смешанный метод. . . . .	420
15.10. Метод перемещений. . . . .	421
15.11. Метод сил. . . . .	427
15.12. Статически определимые системы . . . . .	433
15.13. Основные уравнения строительной механики для стержня . . . . .	434
15.14. Формирование матрицы равновесия и матрицы внутренней жесткости для стержневой системы. . . . .	444
15.15. Матрицы влияния перемещений и усилий. . . . .	450



15.16. Пространственные фермы .....	454
15.17. Пространственные рамы .....	458

## Глава 16. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	473
16.1. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия ...	473
16.2. Потенциальная энергия деформации упругой системы ...	476
16.3. Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы обобщенных перемещений и обобщенных сил. Производные от выражений потенциальной энергии .....	479
16.4. Полная энергия деформируемой системы .....	482
16.5. Принцип вариации перемещений .....	485
16.6. Способы решения вариационных задач .....	489
16.7. Расчет упругих систем на основе принципа вариации перемещений .....	492
16.8. Принцип вариации напряжений или внутренних сил ...	496
16.9. Применение принципа вариации внутренних сил к расчету упругих систем .....	498
16.10. Сущность метода конечных элементов .....	500
16.11. Матрица жесткости стержня в местной системе координат .....	503
16.12. Матрица жесткости стержня в общей системе координат .....	516
16.13. Формирование матрицы жесткости всей системы .....	518
16.14. Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента для расчета тонких плит .....	523
16.15. Общие замечания о методе конечных элементов .....	536

## Глава 17. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ .....

17.1. Общие понятия .....	537
17.2. Предельное состояние сжато-растянутого элемента по нормальному сечению .....	538
17.3. Предельное состояние изгибаемого элемента по нормальному сечению .....	539
17.4. Предельное состояние систем и методы расчета .....	544

17.5. Расчет стержневых систем по несущей способности . . . .	547
Глава 18. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ . . . . .	556
18.1. Динамические нагрузки и их классификация . . . . .	556
18.2. Силы инерции и степень свободы деформируемой системы . . . . .	559
18.3. Силы сопротивления движению . . . . .	566
18.4. Виды колебаний . . . . .	567
18.5. Задачи и методы динамики сооружений . . . . .	569
Глава 19. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ . . . . .	571
19.1. Дифференциальное уравнение движения . . . . .	571
19.2. Свободные колебания . . . . .	574
19.3. Общий случай действия возмущающей нагрузки . . . . .	580
19.4. Действие внезапно приложенной нагрузки . . . . .	581
19.5. Действие гармонической нагрузки . . . . .	582
19.6. Резонанс и его развитие во времени . . . . .	585
19.7. Свободные колебания с учетом сил сопротивления . . . . .	586
19.8. Вынужденные колебания с учетом сил сопротивления . . . . .	594
19.9. Кинематическое возбуждение колебаний . . . . .	597
Глава 20. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ . . . . .	600
20.1. Дифференциальные уравнения движения в общем виде . . . . .	600
20.2. Свободные незатухающие колебания . . . . .	604
20.3. Действие вибрационной нагрузки при отсутствии сил сопротивления . . . . .	619
20.4. Действие вибрационной нагрузки при учете сил сопротивления . . . . .	627
20.5. Решение уравнений движения в общем случае методом разложения по собственным формам . . . . .	631
Глава 21. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ . . . . .	635
21.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с распределенной массой . . . . .	635

21.2. Свободные колебания. Балочные функции . . . . .	637
21.3. Вынужденные колебания при вибрационной нагрузке . . . . .	642
Глава 22. ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ СООРУЖЕНИЙ . . . . .	648
22.1. Приближенные методы определения частот собственных колебаний . . . . .	648
22.2. Замена распределенных масс сосредоточенными . . . . .	653
22.3. Специальные численные методы решения частичной проблемы собственных колебаний . . . . .	654
22.4. Применение метода степенных рядов для прямого интегрирования дифференциальных уравнений движения . . . . .	666
Глава 23. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ . . . . .	669
23.1. Понятие о равновесии в деформированном состоянии. Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия. . . . .	669
23.2. Статический метод исследования устойчивости . . . . .	678
23.3. Критическое равновесие . . . . .	685
23.4. Динамический метод исследования устойчивости . . . . .	688
23.5. Критерии устойчивости равновесия . . . . .	691
23.6. Энергетический метод исследования устойчивости . . . . .	692
23.7. Качественный метод исследования устойчивости. . . . .	693
Глава 24. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ ОПОРАХ . . . . .	695
24.1. Дифференциальное уравнение изгиба сжатого стержня . . . . .	695
24.2. Учет опорных закреплений сжатых стержней. . . . .	697
24.3. Особые случаи исследования устойчивости сжатых стержней . . . . .	703
Глава 25. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. . . . .	705
25.1. Основные допущения и сущность метода перемещений. . . . .	705
25.2. Особенности дискретизации деформируемых систем при автоматизированном расчете на устойчивость методом перемещений . . . . .	716
25.3. Матрица внутренней жесткости сжатого стержня. . . . .	723
25.4. Матрица внутренней жесткости растянутого стержня. . . . .	737

25.5. Матрица внешней жесткости сжатого стержня как конечного элемента. ....	739
25.6. Понятие о расчете сооружений по деформированному состоянию .....	743
Литература .....	747

Учебное издание

БОРИСЕВИЧ Арсений Александрович  
СИДОРОВИЧ Евгений Мечиславович  
ИГНАТЮК Валерий Иванович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Технический редактор И.Н. Зюзикова  
Компьютерная верстка: О.В. Дубовик, И.Н. Зюзикова

---

Подписано в печать . . . 2009.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 43,94. Уч.-изд. л. 25,28. Тираж 500. Заказ . . .

---

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.

220013, Минск, проспект Независимости, 65.