УДК 517.2

Ю. С. КРУК[1], Ю. Е. ДУДОВСКАЯ[2]

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

[1]Белорусский национальный технический университет
[2]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 27.02.2015)

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности узлов. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый из них отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером его производительность уменьшается, а процесс обслуживания ухудшается. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания [1]. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут быть частично ненадежны (случай полной потери работоспособности здесь не рассматривается).

Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными, причем неактивные формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в такое, когда они могут получать обслуживание, и наоборот [2].

В настоящей работе исследуется замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из N узлов. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i=\overline{1,N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i, уменьшает на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i-й узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t)=\left(z_1(t),z_2(t),...,z_N(t)\right)$, где $z_i(t)=\left(n_i(t),n_i'(t),l_i(t)\right)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла. Случайный процесс $z(t)$ имеет конечное фазовое пространство

$$Z=\left\{\left((n_1,n_1',l_1),(n_2,n_2',l_2),...,(n_N,n_N',l_N)\right): n_i,n_i'\geq 0, \sum_{i=1}^{N}\left(n_i+n_i'\right)=M, l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i-м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя в очереди – номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i'+1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i=\left(n_i,n_i',l_i\right)$, в режиме $l_i\left(l_i=\overline{0,r_i},\, i=\overline{1,N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\tau_i\left(\tau_i>0\right)$ i-й узел переходит в $\left(l_i+1\right)$-й режим $\left(l_i=\overline{0,r_i-1}\right)$, а с интенсивностью $\rho_i\left(\rho_i>0\right)$ – в $\left(l_i-1\right)$-й режим $\left(l_i=\overline{1,r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима на другой сохраняет общее число заявок в узле.

Время обслуживания одной активной заявки не зависит от времени обслуживания других и имеет показательное распределение с параметром μ_i $(i=\overline{1,N})$.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i-м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-й узел с вероятностью $p_{i,j}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}p_{i,j}=1,\, i=\overline{1,N}\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{i,i}=0,\, i=\overline{1,N}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления. Предполагается, что в начальный момент временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $\left(p_{i,j}\right)$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i p_{i,j},\; j=\overline{1,N}, \tag{1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [3].

Процесс $z(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний Z.

Предположим, что изолированный i-й узел сети имеет конечную емкость M. Это значит, что если поступающая заявка застает узел в состоянии $\left(n_i,n_i',l_i\right)$, для которого $n_i+n_i'=M$, то она покидает систему.

Обозначим через $p_i^M\left(z_i\right)$ стационарное распределение изолированного i-го узла, которое, вообще говоря, может отличаться от стационарного распределения i-го узла сети. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_i p_i^M\left(n_i-1,n_i',l_i\right)=p_i^M\left(n_i,n_i',l_i\right)\mu_i,\\
\nu_i p_i^M\left(n_i+1,n_i'-1,l_i\right)=\varphi_i p_i^M\left(n_i,n_i',l_i\right),\\
\tau_i p_i^M\left(n_i,n_i',l_i-1\right)=\rho_i p_i^M\left(n_i,n_i',l_i\right),\\
i=\overline{1,N}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Из уравнений обратимости (2) находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла:

$$p_i^M\left(n_i,n_i',l_i\right)=\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\mu_i\varphi_i}\right)^{n_i'}\left(\frac{\tau_i}{\rho_i}\right)^{l_i}p_i^M(0,0,0).$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (1).

Пусть $\{p(z), z\in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(z)\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i I_{[n_i\neq 0]}+\nu_i I_{[n_i\neq 0]}+\varphi_i I_{[n_i'\neq 0]}+\tau_i I_{[l_i\neq r_i]}+\rho_i I_{[l_i\neq 0]}\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{N}\Big(p\big([n_i-1,n_i'+1,l_i]\big)\varphi_i I_{[n_i\neq 0]}+p\big([n_i+1,n_i'-1,l_i]\big)\nu_i I_{[n_i'\neq 0]}\Big)+\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\Big(p\big([n_i,n_i',l_i+1]\big)\rho_i I_{[l_i\neq r_i]}+p\big([n_i,n_i',l_i-1]\big)\tau_i I_{[l_i\neq 0]}\Big)+\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p\big([n_i-1,n_i',l_i],[n_j+1,n_j',l_j]\big)\mu_j p_{j,i} I_{[n_i\neq 0]}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь в квадратных скобках указан узел, в котором произошли изменения, например,

$$
p\big([n_i-1,n_i'+1,l_i]\big)=p\big((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_i-1,n_i'+1,l_i),\ldots,(n_N,n_N',l_N)\big).
$$

Т е о р е м а. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид*

$$
p\big((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_N,n_N',l_N)\big)=\frac{1}{G(M,N)}p_1(n_1,n_1',l_1)\ldots p_N(n_N,n_N',l_N). \tag{4}
$$

Здесь вероятности $p_i(n_i,n_i',l_i)$ могут быть выбраны как стационарные вероятности состояний изолированного i-го узла емкости M, $G(M,N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия

$$
\sum_{((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_N,n_N',l_N))\in Z}p\big((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_N,n_N',l_N)\big)=1.
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эргодичность марковского процесса $z(t)$ следует из эргодической теоремы Маркова.

Докажем, что (4) удовлетворяют уравнениям равновесия (3). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (3) на уравнения локального равновесия:

$$
\begin{aligned}
p(z)\sum_{i=1}^{N}\Big(\mu_i I_{[n_i\neq 0]}+\nu_i I_{[n_i\neq 0]}\Big)&=\sum_{i=1}^{N}p\big([n_i-1,n_i'+1,l_i]\big)\varphi_i I_{[n_i\neq 0]}+\\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p\big([n_i-1,n_i',l_i],[n_j+1,n_j',l_j]\big)\mu_j p_{j,i} I_{[n_i\neq 0]};
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
p(z)\sum_{i=1}^{N}\varphi_i I_{[n_i'\neq 0]}=\sum_{i=1}^{N}p\big([n_i+1,n_i'-1,l_i]\big)\nu_i I_{[n_i'\neq 0]}; \tag{6}
$$

$$
p(z)\sum_{i=1}^{N}\Big(\tau_i I_{[l_i\neq r_i]}+\rho_i I_{[l_i\neq 0]}\Big)=\sum_{i=1}^{N}\Big(p\big([n_i,n_i',l_i+1]\big)\rho_i I_{[l_i\neq r_i]}+p\big([n_i,n_i',l_i-1]\big)\tau_i I_{[l_i\neq 0]}\Big). \tag{7}
$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (5), разделим обе части на $p(z)=p\big((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_N,n_N',l_N)\big)$, получим:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\Big(\mu_i I_{[n_i\neq 0]}+\nu_i I_{[n_i\neq 0]}\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(n_i-1,n_i'+1,l_i)}{p_i(n_i,n_i',l_i)}\varphi_i I_{[n_i\neq 0]}++\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{p_i(n_i-1,n_i',l_i)\,p_j(n_j+1,n_j',l_j)}{p_i(n_i,n_i',l_i)\,p_j(n_j,n_j',l_j)}\mu_j p_{j,i} I_{[n_i\neq 0]}=\\
&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}\frac{\varepsilon_i\nu_i}{\mu_i\varphi_i}\varphi_i I_{[n_i\neq 0]}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}\mu_j p_{j,i} I_{[n_i\neq 0]}=\sum_{i=1}^{N}\Big(\mu_i I_{[n_i\neq 0]}+\nu_i I_{[n_i\neq 0]}\Big).
\end{aligned}
$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (6), разделим обе части на $p(z)=p\big((n_1,n_1',l_1),\ldots,(n_N,n_N',l_N)\big)$, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i I_{[n'_i\neq 0]}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i\left(n_i+1,n'_i-1,l_i\right)}{p_i\left(n_i,n'_i,l_i\right)}\nu_i I_{[n'_i\neq 0]}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\frac{\mu_i\varphi_i}{\varepsilon_i\nu_i}\nu_i I_{[n'_i\neq 0]}=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i I_{[n'_i\neq 0]}.$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (7), разделим обе части на $p(z)=p\left(\left(n_1,n'_1,l_1\right),...,\left(n_N,n'_N,l_N\right)\right)$, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i I_{[l_i\neq r_i]}+\rho_i I_{[l_i\neq 0]}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i\left(n_i,n'_i,l_i+1\right)}{p_i\left(n_i,n'_i,l_i\right)}\rho_i I_{[l_i\neq r_i]}+\frac{p_i\left(n_i,n'_i,l_i-1\right)}{p_i\left(n_i,n'_i,l_i\right)}\tau_i I_{[l_i\neq 0]}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tau_i}{\rho_i}\rho_i I_{[l_i\neq r_i]}+\frac{\rho_i}{\tau_i}\tau_i I_{[l_i\neq 0]}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\tau_i I_{[l_i\neq r_i]}+\rho_i I_{[l_i\neq 0]}\right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Якубович О. В., Дудовская Ю. Е.* // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 1 (18). С. 85–89.
2. *Boyarovich Yu. S.* // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73. P. 1616–1623.
3. *Gordon W. J.* // Oper. Res. 1967. N 15. P. 252–267.

J. S. KRUK, Yu. E. DUDOVSKAYA

STATIONARY DISTRIBUTION OF A CLOSED QUEUEING NETWORK WITH NON-ACTIVE CUSTOMERS AND MULTIMODE SERVICE STRATEGIES

Summary

A stationary distribution of condition probabilities of a closed queueing network is investigated. Devices of network nodes can operate in several modes. There are two types of customers in network nodes: ordinary (active) customers and temporarily non-active customers. There are input flows of signals that allow customers to change their state: from the non-active state to the state when they can receive service and vice versa.