

УДК 539.3+621.039.5

П. И. ШИРВЕЛЬ<sup>1</sup>, А. В. ЧИГАРЕВ<sup>1</sup>, И. С. КУЛИКОВ<sup>2</sup>**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ, ПОЛЗУЧЕСТИ И РАДИАЦИОННОМ ОБЛУЧЕНИИ**<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет,<sup>2</sup>Смоленский государственный университет

(Поступила в редакцию 10.10.2014)

В настоящее время разработка и развитие теории и методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрических тел, находящихся в условиях неоднородного термического и радиационного нагружений, является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. В различных отраслях современной техники широко используются конструктивные элементы, выполненные в виде тел цилиндрической формы. В процессе эксплуатации они могут подвергаться воздействию как силовых, так и немеханических нагрузок (неравномерный нагрев и облучение элементарными частицами высокой энергии). Кроме того, длительное нахождение тел в физических и механических полях приводит к возникновению деформаций тепловой и радиационной ползучести. Решение подобных задач позволяет корректно определять НДС, а также продлить ресурс компонентов оборудования и других конструкций в условиях сложных немеханических воздействий. Научные результаты исследования нелинейных процессов деформирования, развивающихся во времени и пространстве, имеют важное значение при создании новых технологических процессов и аппаратов для использования на транспорте, в энергетике, авиации и атомной промышленности.

Вопросы моделирования процессов деформирования сплошных сред в условиях сложных техногенных воздействий рассмотрены в работах [1–5], но при этом в них не в полной мере учитывались все особенности НДС. В некоторых случаях (осесимметричный нагрев) при определении НДС оправдано использование одномерной осесимметричной модели для цилиндрических тел. Однако воздействие неоднородного в окружном направлении температурного поля при интенсивном облучении высокоэнергетическими частицами неизбежно приводит к появлению дополнительных напряжений в процессе эксплуатации. Таким образом, компоненты тензора деформаций, тензора напряжений и вектора перемещений будут зависеть как от радиальной, так и от окружной координат материальных точек тела. В этом случае необходимо рассматривать неосесимметричное НДС, под которым подразумевается зависимость характеристик деформирования не только от радиуса, но и от меридионального угла.

В настоящей работе рассматривается неосесимметричное НДС массивного цилиндрического тела, осевое сечение которого образует ограниченную связную область с кусочно-гладкой границей. С учетом того, что длина модельного тела значительно больше диаметра, его можно уподобить неограниченному цилиндру. Цилиндрическое тело находится в условиях обобщенной плоской деформации ( $\varepsilon_{zz} = \text{const}$ ), а распределение температуры является стационарным в том смысле, что все осредненные параметры и константы (свойства материалов, температура, скорость потока высокоэнергетических частиц и т.п.) не изменяются со временем. Для любого осевого сечения цилиндра характерно неоднородное распределение температуры  $T(r, \theta)$ , напряжений  $\sigma_{ij}(r, \theta)$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}(r, \theta)$ ,  $i, j = r, \theta, z$ . Считаем, что процесс деформирования не оказывает

существенного влияния на температурное поле тела, т. е. рассматривается несвязанная задача, решаемая в квазистатической постановке в предположении, что процессы нагрева, механического нагружения и облучения протекают настолько медленно, что в каждый отдельный момент времени объект исследования находится в равновесном состоянии. Уравнения состояния используем при условии аддитивности деформаций различного происхождения. Полагаем, что это имеет место не только в случае равномерного давления, но и при произвольных напряжениях и деформациях в условиях неравномерного нагрева и радиационного облучения [1, 2, 4, 5]. Таким образом, компоненты девиатора полных деформаций можно представить в виде суммы упругой и неупругой составляющих.

Относительно характера нагрева и облучения можно сделать следующие предположения: абсолютное значение и характер распределения поля температур характеризуются мощностью внутреннего тепловыделения, теплофизическими свойствами материала и условиями теплообмена с поверхностью тела; распределение деформаций радиационного распухания – временем, температурным полем и интегральным потоком высокоэнергетических частиц, например, нейтронов. Температура в теле измеряется либо экспериментально, либо на основе решения задачи теплообмена с окружающей средой. Распределение флюенса нейтронов по сечению описывается эмпирическими соотношениями, установленными на основе экспериментальных данных [5]. Таким образом, в предположении, что температурное поле и распухание являются известными функциями, изотропное термическое расширение и радиационные деформации вычисляются отдельно по известным зависимостям и для рассматриваемой задачи будут внешними заданными величинами.

Для описания процессов ползучести используем соотношения теории течения, обобщенные на общий случай радиационного облучения Ю. И. Лихачевым [1]. Рассматривая ползучесть как некоторый вид квазивязкого течения, допускаем, что в каждый момент времени скорость ползучести при данном структурном состоянии однозначно определяется действующим напряжением, флюенсом нейтронов и температурным полем. Таким образом, деформации терморadiационной ползучести, определяемые температурно-радиационными условиями и временем пребывания в данных условиях, подчиняются общим соотношениям, предполагающим пропорциональность компонент девиаторов напряжений и скоростей деформаций [6]. Также считаем, что законы ползучести, установленные на основе простейших испытаний в условиях радиационного облучения, можно распространить на сложное НДС [1, 2, 4, 5]. Принятые допущения позволяют разработать соответствующую механико-математическую модель для решения поставленной задачи, которая заключается в определении НДС длинных цилиндрических тел, неравномерно нагретых в радиальном и окружном направлениях, с учетом влияния облучения и физически нелинейных эффектов поведения материала.

Общая задача определения неосесимметричного НДС состоит в том, чтобы найти 10 функций (компоненты вектора перемещений, тензора напряжений и тензора деформаций), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям равновесия, физическим и геометрическим соотношениям, а также граничным условиям на всех точках граничной поверхности.

На рис. 1 изображена схема деформирования сплошной цилиндрической области под действием внешнего равномерного механического давления  $P_{ext}(t)$ , находящейся в стационарном неосесимметричном поле температур  $T(r, \theta)$  и подверженной облучению потоком быстрых нейтронов ( $\bar{E} > 0,1$  МэВ) с суммарным флюенсом  $\Phi(t)$ .

В соответствии с вышесказанным получены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие неосесимметричное НДС цилиндрических тел при ползучести и облучении. Приняв за искомые функции  $u(r, \theta)$  и  $v(r, \theta)$ , дальнейшее решение задачи сводим к интегрированию системы

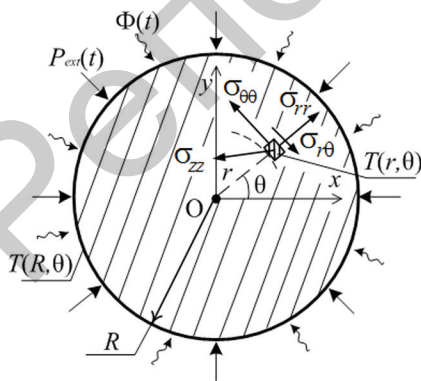


Рис. 1. Общая схема неосесимметричного НДС

двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами относительно перемещений. Разрешающая система уравнений, описывающая несимметричное деформирование, получена в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{2r^2(1-\mu)} \left( (1-2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r \partial \theta} - (3-4\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) = \\ \frac{1-2\mu}{(1-\mu)r} \left( \varepsilon_{rr}^c - \varepsilon_{\theta\theta}^c + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial r} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \left( \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon^s}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\vartheta}{r^2} + \frac{1}{r^2(1-2\mu)} \left( 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + (3-4\mu) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \\ \frac{4}{r} \varepsilon_{r\theta}^c + 2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}^c}{\partial r} - \frac{2}{r(1-2\mu)} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^c}{\partial \theta} (\mu-1) - \mu \left( \frac{\partial \varepsilon_{rr}^c}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}^c}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{2(1+\mu)}{r(1-2\mu)} \left( \frac{\partial \varepsilon^{th}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon^s}{\partial \theta} \right). \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^c$ ,  $\varepsilon_{ij}^{th}$ ,  $\varepsilon_{ij}^s$  – компоненты тензоров неупругих деформаций ползучести, термического расширения, радиационного распухания (свеллинг) соответственно;  $\mu$  – значения коэффициента Пуассона, характерные для конкретного диапазона действующих температур и облучения. Заметим, что в общем случае физико-механические и теплофизические свойства модельной среды зависят от температуры и облучения потоком частиц большой энергии как от параметров. Учитывая, что данная зависимость слабая и качественно не сказывается на результатах расчетов НДС [1–3], можно с достаточной уверенностью использовать их усредненные значения для конкретных диапазонов температур и потоков высокоэнергетического излучения. Отметим, что система (1) при отсутствии нагрева и облучения переходит в известные соотношения теории упругости и термоупругости [7]. Последнее служит дополнительным контролем правильности составления уравнений механико-математической модели.

Как видно из системы (1), радиальное и окружное перемещения любой материальной точки цилиндра зависят от деформаций ползучести, нелинейно связанных с напряжениями. Таким образом, деформации терморadiационной ползучести нелинейно зависят от перемещений, которые в свою очередь изначально определяются с учетом ползучести. Это говорит о нелинейности и связности решаемой задачи определения напряженного состояния и задачи ползучести [6]. Далее нелинейную систему (1) можно переписать сокращенно в операторном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_{11}u + A_{12}\vartheta) = f_1(\varepsilon^{th}, \varepsilon^s, \varepsilon_{ij}^c), \\ (A_{21}u + A_{22}\vartheta) = f_2(\varepsilon^{th}, \varepsilon^s, \varepsilon_{ij}^c). \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  – специальные дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[ (\eta+2)\Delta_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right], \quad A_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\eta+1) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\eta+3}{r} \right], \\ A_{21} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\eta+1) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\eta+3}{r} \right], \quad A_{22} = \left[ \Delta_1 + \frac{\eta+2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right], \\ \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \quad \eta = \frac{2\mu}{1-2\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \neq 0. \end{aligned}$$

Функции  $f_1, f_2$ , определяются правыми частями системы (1).

Исходя из общей схемы нагружения для сплошного цилиндра, система определяющих уравнений дополняется смешанными граничными условиями:

$$u(0, \theta) = \vartheta(0, \theta) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}(R, \theta) = -P_{ext}(t); \quad \sigma_{r\theta}(R, \theta) = 0. \quad (4)$$

По приведенным выше зависимостям в дальнейшем необходимо вычислить распределение перемещений, напряжений и деформаций во всех точках по периметру сечения длинного цилиндрического тела с течением времени  $t$ , которое выполняет роль параметра, определяющего кинетику изменения НДС. Отметим, что при рассмотрении задач неосесимметричного деформирования в перемещениях  $(u, \vartheta)$  получается разрешающая система из двух нелинейных дифференциальных уравнений в отличие от системы из трех дифференциальных уравнений при решении в напряжениях. Если на поверхности тела заданы усилия, то решать поставленную задачу можно и в напряжениях, если изначально заданы перемещения (вторая основная задача), то сформулировать условия в напряжениях в общем виде невозможно: такие условия будут содержать интегралы от напряжений и их производных. В частных случаях специальные преобразования дают возможность сформулировать равенства, но такие преобразования не всегда удается довести до конечного результата даже для упругой среды [8].

Замыкают систему (1) условия, обусловленные особенностями решения в перемещениях с точностью до поступательного перемещения тела в целом:

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \vartheta(r, \theta)}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = 0, \theta^0, \quad (5)$$

где  $\theta^0$  может принимать различные значения в зависимости от закона распределения заданной функции температур  $T(r, \theta)$  по периметру сечения;  $0 \leq \theta \leq \theta^0$  – условие периодичности решения, определяемое периодом функции распределения температур. Граничные условия на торцах не рассматриваются, так как цилиндр считается длинным, анализируются сечения, достаточно удаленные от торцов (в соответствии с принципом Сен-Венана). Расчетная область интегрирования для механико-математической модели квазистатического неосесимметричного деформирования длинного сплошного цилиндра представлена на рис. 2, а. Без ограничения общности построения механико-математической модели рассмотренный случай может быть дополнен моделями деформирования полого (рис. 2, б) и многослойного цилиндров. В случае многослойного цилиндрического тела, считая, что соседние слои не имеют свободы перемещений относительно друг друга, предполагается дополнительно задавать условия сшивки:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^I(R_{ext}^I) &= \sigma_{rr}^{I+1}(R_{int}^{I+1}); \sigma_{r\theta}^I(R_{ext}^I) = \sigma_{r\theta}^{I+1}(R_{int}^{I+1}), \\ u^I(R_{ext}^I) &= u^{I+1}(R_{int}^{I+1}); \vartheta^I(R_{ext}^I) = \vartheta^{I+1}(R_{int}^{I+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $I = 1, 2, \dots, J$  – номер слоя,  $J$  – количество слоев;  $R_{int}^I, R_{ext}^I$  – радиусы  $I$ -го слоя.

Задача определения неосесимметричного НДС цилиндрической области даже в упругой постановке является сложной и ее решение, кроме элементарных решений, точно удовлетворяющее всем заданным граничным условиям, удается получить при упрощенных допущениях. Как правило, в литературе рассматриваются различные неосесимметричные задачи, когда компоненты упругого перемещения и напряжения допускают разложение в тригонометрические ряды. Исто-

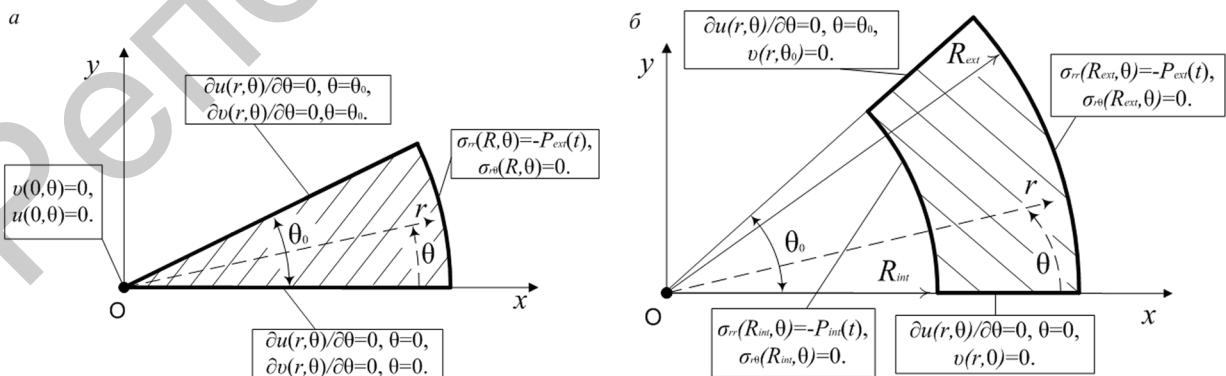


Рис. 2. Расчетная область и условия на границе длинного тела односвязной (а) и двусвязной (б) цилиндрической геометрии

рически большинство попыток получения таких решений связано с разложением нагрузки в ряд Фурье, который для цилиндров бесконечной длины приводит к представлению решения в виде интегралов Фурье. Такой подход, однако, не позволяет учитывать немеханическое нагружение, а также полностью удовлетворять условиям на торцах [7,8]. Существенно расширить круг решаемых неосесимметричных задач позволяют приближенные численные методы.

Для реализации численного подхода в области изменения независимых переменных ( $0 \leq \theta \leq \theta^0$ ,  $0 \leq r \leq R$ ) строилась криволинейная структурированная сетка, связанная с границами интегрируемой области (рис. 3). Регулярная структура такой сетки в дальнейшем позволит организовать эффективную работу с разреженными матрицами при решении систем уравнений, причем матрицы коэффициентов системы будут полнозаполненными. При построении шаблона использовались неявные разностные схемы с весовыми коэффициентами. В основу предлагаемого численного метода решения полученной разностной системы уравнений на основе формул (1)–(5) заложены метод конечных разностей, метод матричной прогонки, идеи метода дробных шагов Н. Н. Яненко, теория аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функции, а также итерационные методы. Дискретная система, описывающая общий случай неосесимметричного НДС в условиях терморadiационного нагружения, окончательно представлена в виде

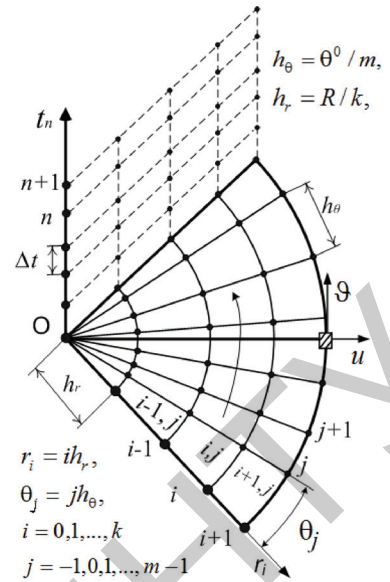


Рис. 3. Численная схема разбиения сечения модели

$$\begin{cases} \chi_{li} u_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\chi_{li}) u_{i,j+1}^n + \chi_{li} u_{i-1,j+1}^n = d_{i,j}^n, \\ \xi_{li} \vartheta_{i+1,j+1}^n - (1 + 2\xi_{li}) \vartheta_{i,j+1}^n + \xi_{li} \vartheta_{i-1,j+1}^n = k_{i,j}^n, \\ \chi_{li} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha; \quad \xi_{li} = \frac{r_i^2(1-2\mu)}{2(\mu-1)} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $d_{i,j}^n$ ,  $k_{i,j}^n$  – функции от перемещений на предыдущих слоях по окружной координате ( $j, j-1$ ):

$$d_{i,j}^n = -2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n(1 - \chi_{2i}\Lambda_2) - F_{1i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})H_i,$$

$$H_i = 2r_i^2(1-\mu)h_\theta^2 / (2\mu-1); \quad \chi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta,$$

$$k_{i,j}^n = -2\vartheta_{i,j}^n + \vartheta_{i,j-1}^n(1 - \xi_{2i}\Lambda_2) - F_{2i,j}^n(u_{i,j}, \vartheta_{i,j})M_i, \quad \xi_{2i} = \frac{2r_i^2(1-\mu)}{2\mu-1} \frac{h_\theta^2}{h_r^2} \beta,$$

$$M_i = r_i^2(1-2\mu)h_\theta^2 / (2\mu-2), \quad \alpha + \beta = 1.$$

Нелинейные члены  $F_1$  и  $F_2$  определяются по выражениям, представленным в конечно-разностной форме и включающим в себя частные производные от искомым функций и неупругие деформации: термическое расширение, радиационное распухание, деформации ползучести.

Для определения неизвестных функций  $u_{i,j+1}$ ,  $\vartheta_{i,j+1}$  на каждом шаге по окружной координате имеем систему уравнений (7) с граничными условиями (3)–(5), которые в общем виде для  $n$ -го временного этапа деформирования переписываются в дискретной форме по формулам численного дифференцирования. При этом условия (4) в напряжениях первоначально конвертируются относительно перемещений через физические уравнения и формулы Коши:

$$\begin{aligned}
u_{0,j}^n = 0; \quad \mathfrak{G}_{0,j}^n = 0, \quad u_{i,-1}^n = u_{i,0}^n, \quad u_{i,m-2}^n = u_{i,m-1}^n, \quad \mathfrak{G}_{i,-1}^n = \mathfrak{G}_{i,0}^n, \\
\mathfrak{G}_{i,m-2}^n = \mathfrak{G}_{i,m-1}^n, \\
\frac{u_{k,j}^n - u_{k-1,j}^n}{h_r} (1 - \mu) + \frac{\mu}{R} \left( u_{k,j}^n + \frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n - \mathfrak{G}_{k,j-1}^n}{h_\theta} + C \right) = \\
(\varepsilon_{k,j}^{th} + \varepsilon_{k,j}^{s(n)})(1 + \mu) - (2\mu - 1)\varepsilon_{(rr)k,j}^{c(n)} - \frac{P_{ext}^n (1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E}, \\
\frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n - \mathfrak{G}_{k-1,j}^n}{h_r} + \frac{1}{R} \left( \frac{u_{k,j}^n - u_{k,j-1}^n}{h_\theta} \right) - \frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n}{R} = \varepsilon_{(rr)k,j}^{c(n)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Все вышеприведенные соотношения математической модели НДС сплошного цилиндра будут справедливы и для модельного тела двусвязной цилиндрической геометрии, если из условий (8) исключить первые два соотношения и дополнить условиями на внутренней поверхности в разностной форме (рис. 2, б). В конечно-разностной форме граничные условия для полого цилиндра при неосесимметричном деформировании примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_{i,-1}^n = u_{i,0}^n, \quad u_{i,m-2}^n = u_{i,m-1}^n, \quad \mathfrak{G}_{i,-1}^n = \mathfrak{G}_{i,0}^n, \quad \mathfrak{G}_{i,m-2}^n = \mathfrak{G}_{i,m-1}^n, \\
\frac{u_{k,j}^n - u_{k-1,j}^n}{h_r} (1 - \mu) + \frac{\mu}{R} \left( u_{k,j}^n + \frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n - \mathfrak{G}_{k,j-1}^n}{h_\theta} + C \right) = \\
(\varepsilon_{k,j}^{th} + \varepsilon_{k,j}^{s(n)})(1 + \mu) - (2\mu - 1)\varepsilon_{(rr)k,j}^{c(n)} - \frac{P_{ext}^n (1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E}, \\
\frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n - \mathfrak{G}_{k-1,j}^n}{h_r} + \frac{1}{R} \left( \frac{u_{k,j}^n - u_{k,j-1}^n}{h_\theta} \right) - \frac{\mathfrak{G}_{k,j}^n}{R} = \varepsilon_{(rr)k,j}^{c(n)}, \\
\frac{u_{1,j}^n - u_{0,j}^n}{h_r} (1 - \mu) + \frac{\mu}{R_{int}} \left( u_{0,j}^n + \frac{\mathfrak{G}_{0,j}^n - \mathfrak{G}_{0,j-1}^n}{h_\theta} + C \right) = \\
(\varepsilon_{0,j}^{th} + \varepsilon_{0,j}^{s(n)})(1 + \mu) - (2\mu - 1)\varepsilon_{(rr)0,j}^{c(n)} - \frac{P_{int}^n (1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E}, \\
\frac{\mathfrak{G}_{1,j}^n - \mathfrak{G}_{0,j}^n}{h_r} + \frac{1}{R_{int}} \left( \frac{u_{0,j}^n - u_{0,j-1}^n}{h_\theta} \right) - \frac{\mathfrak{G}_{0,j}^n}{R_{int}} = \varepsilon_{(rr)0,j}^{c(n)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В случае многослойного цилиндрического тела граничные условия (8) и (9) необходимо дополнить выражениями (6), предварительно представив их в дискретной конечно-разностной форме.

Полученные системы разностных уравнений имеют матрицы трехдиагональной структуры и могут быть решены по методу матричной прогонки, на основе модификации численной схемы, разработанной в [9, 10]. Так, система (7) расщепляется на две системы, которые решаются прогонками с учетом параметра времени  $t$ : первая – по радиальному перемещению, а вторая – по окружному перемещению. Прогонка осуществляется по радиусам, начинающимся для каждого луча в центре сечения и оканчивающимся на границах исследуемой области. Такие прогонки имеют свои особенности, вызванные характером сетки, расчетной областью и видом рассматриваемых физически нелинейных эффектов. По окончании текущего шага расчета в алгоритме, реализующем механико-математическую модель с учетом необратимых деформаций, фиксируются величины, характеризующие НДС каждой точки по периметру модельного тела в конце  $n$ -го этапа нагружения, затем начинается расчет  $(n+1)$ -го этапа. В результате для получения решения на следующем  $(n+1)$ -м временном слое решается новая система неоднородных линейных

уравнений по изложенной выше численной методике. Таким образом, для любого текущего момента времени  $t_n$  имеем полную замкнутую систему из  $2km$  неоднородных алгебраических уравнений с  $2km$  неизвестными. Подобным образом находится численное решение задачи определения неосесимметричного НДС в радиальных и окружных перемещениях. Зная вектор перемещений, можно построить тензоры полных деформаций и напряжений в любой точке по периметру модельного тела с последующей оценкой его НДС на основе того или иного критерия. Отметим, что требуемая точность в процессе решения по предлагаемому методу может достигаться, с одной стороны, измельчением шага криволинейной структурированной сетки в радиальном и окружном направлениях, с другой стороны, повышением степени порядка аппроксимации самих выражений частных производных в конечных разностях (например, на основе дифференцирования интерполяционного полинома Лагранжа или более удобных для численного использования интерполяционных формул Ньютона). Общая схема процесса численного решения для односвязной цилиндрической области представлена на рис. 3.

В [11–15] подробно рассмотрены особенности реализации разработанной механико-математической модели, которая включала в себя моделирование обобщенного плоского квазистатического деформированного состояния ( $\varepsilon_{zz} = C(t) \neq 0$ ) и отдельную процедуру вычисления необратимых деформаций. При определении значений деформаций ползучести на каждом временном шаге использовалась теория течения с учетом радиационной составляющей. Величины деформаций радиационного распухания на каждом этапе нагружения определялись с помощью эмпирических зависимостей, полученных на основе внутрореакторных испытаний тепловыделяющих и конструкционных материалов. Для проведения исследований на разработанной механико-математической модели деформирования реализованы алгоритм расчета неосесимметричного НДС и компьютерная программа решения двумерной задачи ползучести в условиях облучения. Программная модель реализована на C# в среде Microsoft Visual Studio 2011 и позволяет обрабатывать и визуализировать результаты расчетов цилиндрических тел (сплошной, полый, многослойный цилиндры) для различных типов граничных условий и видов физической нелинейности (радиационное распухание, ползучесть). Архитектура программного комплекса является модульной, что позволяет в дальнейшем добавлять новые функциональные возможности. Как пример, возможно создание отечественных компьютерных программ, моделирующих комплексное поведение высоконагруженных цилиндрических элементов конструкций и компонентов оборудования, составляющих барьеры безопасности промышленных ядерных энергетических установок: топливо – тепловыделяющий элемент – трубопроводы и корпусные конструкции первого контура – защитная оболочка энергетической установки (принцип глубокоэшелонируемой защиты).

Совместно со специалистами Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, Физико-технического института, Объединенного института машиностроения и Объединенного института энергетических и ядерных исследований – Сосны НАН Беларуси планируется использование разработанных моделей и программных средств для определения оптимальных эксплуатационных нагрузок цилиндрических элементов конструкций и компонентов оборудования в машиностроении и энергетике: анализ НДС конструктивных элементов; прогнозирование ресурса конкретных технических устройств и анализ возможных механизмов и причин их повреждения в условиях экстремальной эксплуатации; применение изложенной методики и разработанного пакета прикладных программ при проведении прочностных расчетов с целью повышения точности прогнозирования ресурса широко используемых в современной технике конструктивных элементов оборудования в виде цилиндрических тел в различных условиях экстремального нагружения. Полученные результаты могут наряду с нейтронно-физическим и теплофизическим блоками стать одной из трех составляющих общего компьютерного кода класса Best Estimate для проведения комплексных расчетов нейтронно-физических, теплофизических и прочностных характеристик цилиндрических конструктивных элементов ядерных реакторов. Результаты проведенного исследования являются хорошей основой для создания общей программы расчета характеристик активных зон ядерных реакторов: нейтронно-физический расчет – теплофизический расчет – НДС и обратная связь: нейтронно-физический расчет – теплофизический расчет – НДС, но уже с учетом изменившейся геометрии активной зоны в результате деформирования.

## Выводы

1. Разработана механико-математическая модель расчета неосесимметричного НДС неравномерно нагретых по периметру длинных цилиндрических тел в условиях квазистатического нагружения, отличающаяся учетом особенностей деформирования материалов в терморadiационных потоках (необратимое изменение объема, тепловая и радиационная ползучесть).

2. Дано численное решение краевой задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, описывающих перемещения в длинных сплошных и полых цилиндрах при неосесимметричном НДС в случае смешанных граничных условий.

3. На основе предложенных моделей созданы алгоритмы и программные средства, позволяющие проводить численное исследование НДС элементов конструкций и компонентов оборудования в условиях ползучести при сложных квазистатических терморadiационных воздействиях.

4. Возможный экономический эффект заключается в том, что полученные результаты позволят без проведения дорогостоящих экспериментов и связанных с ними энергетических и материальных затрат рассчитать НДС и критические нагрузки при проектировании цилиндрических конструктивных элементов энергетического и машиностроительного оборудования, работающего в экстремальных условиях.

## Литература

1. Лихачев Ю. И., Пупко В. Я. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М., 1975.
2. Куликов И. С., Нестеренко В. Б., Тверковкин Б. Е. Прочность элементов конструкций при облучении. Мн., 1990.
3. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам / Пер. с англ. М. Ф. Диментберга и др. М., 1959.
4. Писаренко Г. С. Прочность и пластичность материалов в радиационных потоках. Киев, 1979.
5. Olander D. R. Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements/ USA: Technical Information Center Energy Research and Development Administration, 1976.
6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., 1966.
7. Колтунов М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., 1975.
8. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1979.
9. Ширвель П. И., Куликов И. С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2012. № 4. С. 51–62.
10. Чигарев А. В., Ширвель П. И. // Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. междунар. науч. конф., посвященной 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина, 19–23 сент. 2011 г. Тула. Тула, 2011. С. 237–247.
11. Ширвель П. И., Чигарев А. В., Сергей А. А. // Теоретическая и прикладная механика: Междунар. науч.-техн. сб. Мн., 2014. Вып. 29. С. 173–178.
12. Чигарев А. В., Ширвель П. И. // Наука и техника. 2013. № 4. С. 46–53.
13. Ширвель П. И., Куликов И. С., Чигарев А. В., Сергей А. А. // Теоретическая и прикладная механика: Междунар. науч.-техн. сб. Мн., 2014. Вып. 29. С. 79–85.
14. Ширвель П. И. // Теоретическая и прикладная механика. 2015. Вып. 30. С. 116–125.
15. Ширвель П. И., Чигарев А. В., Куликов И. С. Прочность неравномерно нагретых цилиндрических тел в условиях ползучести и радиационного облучения. Мн., 2014.

*P. I. SHIRVEL, A. V. CHIGAREV, I. S. KULIKOV*

### NUMERICAL SIMULATION OF STRAIN-STRESS STATE OF CYLINDRICAL BODIES AT ANISOTROPIC HEATING, CREEP AND RADIATION

#### Summary

A new model of 2D( $r,\theta$ ) asymmetric stress/strain state taking into account the change of displacements, stresses and strains as a function of radial and circumferential coordinates has been suggested. A numerical solution to solve steady stress/strain state problem under creep, swelling and thermal strain has been obtained. A method and algorithm of the numerical analysis of long cylindrical solid bodies have been offered. The obtained results can be used at design and development of a wide class of problems for power engineering and nuclear power. The proposed mechanical model and numerical method can be the basis for the development of «Best Estimate» computer code to simulate the behavior of structural elements and components of the equipment in a whole spectrum of extreme operational modes, including emergency situations.