МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. А. Крушевский
М. А. Хотомцева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие

Минск
БНТУ
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. А. Крушевский
М. А. Хотомцева

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2018

УДК 51(076.5)
ББК 22.311
К84

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, зав. кафедрой «Высшая математика № 1»
Белорусского национального технического университета
И. Н. Катковская;
зав. кафедрой «Высшая алгебра и защита информации»
Белорусского государственного университета,
доктор физ.-мат. наук, профессор *В. В. Беняш-Кривец*

Крушевский, Е. А.
К84 Вычислительная математика: пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / Е. А. Крушевский, М. А. Хотомцева. – Минск: БНТУ, 2018. – 67 с.
ISBN 978-985-550-695-0.

Издание предназначено для студентов строительных специальностей и содержит необходимые теоретические сведения и указания к решению задач. Приведены примеры и варианты заданий.

УДК 51(076.5)
ББК 22.311

ISBN 978-985-550-695-0

ВВЕДЕНИЕ

Пособие представляет собой лекционный материал по теме «Вычислительная математика» и ориентировано на начальное знакомство с курсом. Пособие разработано в соответствии с учебным планом и программой по дисциплине «Математика» и предназначено для студентов строительных специальностей БНТУ очной формы обучения.

В пособии сформулированы основные положения теории погрешности, теории приближенных вычислений, основ моделирования случайных величин с использованием метода Монте-Карло. Приведено множество примеров с решениями.

Данное издание будет полезным студентам и магистрантам дневной формы обучения при продолжении изучения темы «Математика», а также при прослушивании спецкурса для специальности 1-56 02 01 «Геодезия» и многих других специализированных спецкурсов на его основе.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

1.1. Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом а называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку, если же $a > A$, то – по избытку. Например, для $\sqrt{2}$ число 1,41 будет приближенным значением по недостатку, а 1,42 – по избытку, так как 1,41 < $\sqrt{2}$ < 1,42. Если a есть приближенное значение числа A, то пишут $a \approx A$.

Под *ошибкой* или *погрешностью* Δa приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т. е. $\Delta a = A - a$. Если $A > a$, то ошибка положительна: $\Delta a > 0$; если же $A < a$, то ошибка отрицательна: $\Delta a < 0$. Чтобы получить точное число A, нужно к приближенному числу a прибавить его ошибку Δa, т. е. $A = a + \Delta a$. Таким образом, точное число можно рассматривать как приближенное с ошибкой, равной нулю.

Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа $\Delta = |\Delta a|$.

Определение 1. Абсолютной погрешностью Δ приближенного числа a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом A и числом a, т. е.

$$\Delta = |A - a|. \tag{1.1}$$

Здесь следует различать два случая:

1) число A нам известно, тогда абсолютная погрешность Δ легко определяется по формуле (1.1);

2) число A нам не известно, что практически бывает чаще всего, и, следовательно, мы не можем определить и абсолютную погрешность Δ по формуле (1.1).

В этом случае полезно вместо неизвестной теоретической абсолютной погрешности Δ ввести ее оценку сверху, так называемую предельную абсолютную погрешность.

Пример 1. Длина и ширина комнаты, измеренные с точностью до 1 см, равны a = 5,43 м и b = 3,82 м. Оценить погрешность в определении площади комнаты $S = ab$ = 20,7426 м^2.

Решение. По условию задачи Δa = 0,01 м, Δb = 0,01 м. Крайние возможные значения площади равны

$$(a + 0{,}01)\,(b + 0{,}01) = 20{,}8352 \text{ м}^2;$$

$$(a - 0{,}01)\,(b - 0{,}01) = 20{,}6502 \text{ м}^2.$$

Сравнивая их с подсчитанным выше значением S, получаем оценку $|S - S_0| \leq$ 0,0926, что дает возможность указать абсолютную погрешность числа S в виде ΔS = 0,0926 м^2.

Здесь разумно округлить значение ΔS, например, так: ΔS = = 0,093 м^2 или ΔS = 0,10 м^2 (абсолютные погрешности округляют в большую сторону). При этом приближенное значение площади можно записать в виде S = 20,743 м^2 или S = 20,74 м^2, или даже S = 20,7 м^2.

Пример 2. В некоторую вычислительную машину мы можем ввести числа только с тремя значащими цифрами. С какой точностью мы можем ввести в нее числа π и 1/3?

Решение. Полагаем $\pi \approx 3{,}14 = a$ вместо π = 3,141592..., погрешность числа a можно оценить числом Δa = 0,0016. Полагаем 1/3 ≈ ≈ 0,333 = b, при этом погрешность числа b можно оценить числом Δb = 0,00034 или Δb = 0,0004.

Определение 2. Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа.

Таким образом, если Δ_a – предельная абсолютная погрешность приближенного числа a, заменяющего точное A, то

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a. \qquad (1.2)$$

Отсюда следует, что точное число A заключено в границах

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a.$$

Следовательно, $a - \Delta_a$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta_a$ – приближение числа A по избытку.

В этом случае для краткости пользуются записью $A = a \pm \Delta_a$.

Пример 3. Определить предельную абсолютную погрешность числа a = 3,14, заменяющего число π.

Решение. Так как имеет место неравенство 3,14 < π < 3,15, то $|a - \pi|$ < 0,01 и, следовательно, можно принять Δ_a = 0,01.

Если учесть, что 3,14 < π < 3,142, то будем иметь лучшую оценку: Δ_a = 0,002.

Заметим, что сформулированное выше понятие предельной абсолютной погрешности является весьма широким, а именно: *под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа а понимается любой представитель бесконечного множества неотрицательных чисел* $\{\Delta_a\}$, *удовлетворяющих неравенству* (1.2). Отсюда логически вытекает, что всякое число, большее предельной абсолютной погрешности данного приближенного числа, также может быть названо предельной абсолютной погрешностью этого числа. Практически удобно в качестве Δ_a выбирать возможно меньшее при данных обстоятельствах число, удовлетворяющее неравенству (1.2).

В записи приближенного числа, полученного в результате измерения, обычно отмечают его предельную абсолютную погрешность. Например, если длина отрезка l = 214 см с точностью до 0,5 см, то пишут l = 214 см ± 0,5 см. Здесь предельная абсолютная погрешность Δ_l = 0,5 см, а точная величина длины l отрезка заключена в границах 213,5 см < l < 214,5 см.

Абсолютная погрешность (или предельная абсолютная погрешность) не достаточна для характеристики точности измерения или вычисления. Так, например, если при измерении длин двух стержней получены результаты l_1 = 100,8 см ± 0,1 см и l_2 = 5,2 см ± 0,1 см, то, несмотря на совпадение предельных абсолютных погрешностей, качество первого измерения выше, чем второго. Для точности данных измерений существенна абсолютная погрешность, приходящаяся на единицу длины, которая носит название относительной погрешности.

Определение 3. Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A $(A \neq 0)$:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Отсюда $\Delta = |A|\delta$.

Так же как и для абсолютной погрешности, введем понятие предельной относительной погрешности.

Пример 4. Определить относительную погрешность числа S в примере 1.

Решение. $S = 20{,}7426$, $\Delta S = 0{,}0926$, поэтому $\delta = \dfrac{0{,}0926}{20{,}7426} = 0{,}45\,\%$.

Определение 4. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа.

По определению имеем $\delta \le \delta_a$, т. е. $\dfrac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$, отсюда $\Delta \le |A|\delta_a$.

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа a можно принять

$$\Delta_a = |A|\delta_a. \tag{1.3}$$

Так как на практике $A \approx a$, то вместо формулы (1.3) часто пользуются формулой

$$\Delta_a = |a|\delta_a.$$

Отсюда, зная предельную относительную погрешность δ_a, получают границы для точного числа. То обстоятельство, что точное число лежит между $a(1-\delta_a)$ и $a(1+\delta_a)$, условно записывают так: $A = a(1 \pm \delta_a)$.

Пусть a – приближенное число, заменяющее точное A, и Δ_a – предельная абсолютная погрешность числа a. Положим для определенности, что $A > 0$, $a > 0$ и $\Delta_a < a$. Тогда $\delta = \frac{\Delta}{A} \le \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}$. Следовательно, в качестве предельной относительной погрешности числа a можно принять $\delta_a = \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}$.

Аналогично получаем $\Delta = A\delta \le (a + \Delta)\delta_a$, отсюда $\Delta_a = \frac{a\delta_a}{1 - \delta_a}$.

Если (что обычно бывает), $\Delta_a \ll a$ и $\delta_a \ll 1$ (знак $\ll$ обозначает «значительно меньше»), то приближенно можно принять: $\delta_a \approx \Delta_a / a$, $\Delta_a \approx a\delta_a$.

Пример 5. Вес 1 дм^3 воды при 0°C $p = 999{,}847$ Г $\pm$ 0,001 Г. Определить предельную относительную погрешность результата взвешивания.

Решение. Очевидно, что $\Delta_p = 0{,}001$ Г и $p \le 999{,}846$ Г. Следовательно, $\delta_p = \frac{0{,}001}{999{,}846} \approx 10^{-4}$ %.

Пример 6. При определении газовой постоянной для воздуха получили $R = 29{,}25$. Зная, что относительная погрешность этого значения равна 1‰, найти пределы, в которых заключается R.

Решение. Имеем $\delta_R = 0{,}001$, тогда $\Delta_R = R\delta_R \approx 0{,}03$. Следовательно, $29{,}22 \le R \le 29{,}28$.

1.2. Основные источники погрешностей. Устойчивость. Корректность. Сходимость

Погрешности, встречающиеся в математических задачах, могут быть в основном разбиты на пять групп:

1. Погрешности, связанные с самой постановкой математической задачи. Математические формулировки редко точно отображают реальные явления: обычно они дают лишь более или менее идеализированные модели. Как правило, при изучении тех или иных явлений природы мы вынуждены принять некоторые условия, упрощающие задачу, что вызывает ряд погрешностей (погрешности задачи). Иногда бывает и так, что решить задачу в точной постановке

трудно или даже невозможно. Тогда ее заменяют близкой по результатам приближенной задачей. При этом возникает погрешность, которую можно назвать **погрешностью метода**.

2. Погрешности, связанные с наличием бесконечных процессов в математическом анализе. Функции, фигурирующие в математических формулах, часто задаются в виде бесконечных последовательностей или рядов. Более того, многие математические уравнения можно решить, лишь описав бесконечные процессы, пределы которых и являются искомыми решениями. Так как бесконечный процесс, вообще говоря, не может быть завершен за конечное число шагов, то мы вынуждены остановиться на некотором члене последовательности, считая его приближением к искомому решению. Понятно, что такой обрыв процесса вызывает погрешность, называемую обычно **остаточной погрешностью**.

3. Погрешности, связанные с наличием в математических формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно. Таковы, например, все физические константы. Условно назовем эту **погрешность начальной**.

4. Погрешности, связанные с системой счисления. При изображении даже рациональных чисел в десятичной системе счисления или другой позиционной системе справа от запятой может быть бесконечное число цифр (например, может получиться бесконечная десятичная периодическая дробь). При вычислениях, очевидно, можно использовать лишь конечное число этих цифр. Так возникает **погрешность округления**. Например, полагая $1/3 = 0{,}333$, получаем погрешность $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$. Приходится так же округлять и конечные числа, имеющие большое количество знаков.

5. Погрешности, связанные с действиями над приближенными числами **(погрешности действий)**. Понятно, что, производя вычисления с приближенными числами, погрешности исходных данных в какой-то мере мы переносим в результат вычислений. В этом отношении погрешности действий являются неустранимыми.

Само собой разумеется, что при решении конкретной задачи те или иные погрешности иногда отсутствуют, или влияние их ничтожно. Но, вообще говоря, для полного анализа погрешностей следует учитывать все их виды. В дальнейшем мы ограничимся в основном исчислением погрешностей действий и погрешностей методов.

Далее рассмотрим основные понятия, связанные с вычислительными задачами и алгоритмами.

1. **Устойчивость.** Рассмотрим погрешности исходных данных. Поскольку это так называемые неустранимые погрешности и вычислитель не может с ними бороться, то нужно хотя бы иметь представление об их влиянии на точность окончательных результатов. Конечно, мы вправе надеяться на то, что погрешность результатов имеет порядок погрешности исходных данных. Всегда ли это так? К сожалению, нет. Некоторые задачи весьма чувствительны к неточностям в исходных данных. Эта чувствительность характеризуется так называемой устойчивостью. Пусть в результате решения задачи по исходному значению величины x находится значение искомой величины y. Если исходная величина имеет абсолютную погрешность Δx, то решение имеет погрешность Δy. Задача называется устойчивой по исходному параметру x, если решение y непрерывно от него зависит, т. е. малое приращение исходной величины Δx приводит к малому приращению искомой величины Δy. Другими словами, малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов. Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату. О подобных неустойчивых задачах также говорят, что они чувствительны к погрешностям исходных данных. Примером такой задачи является отыскание действительных корней многочленов вида

$$(x-a)^n = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

Изменение правой части на величину порядка ε приводит к погрешности корней порядка $\varepsilon^{1/n}$.

Интересной иллюстрацией неустойчивой задачи является так называемый пример Уилкинсона. Рассматривается многочлен

$$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19}... .$$

Очевидно, что корнями этого многочлена являются $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = 20$. Предположим, что один из коэффициентов многочлена вычислен с некоторой малой погрешностью. Например, коэффициент –210 при x^{19} увеличим на 2^{-23} (около 10^{-7}). В результате вычислений даже с точностью до 11 значащих цифр получим существенно другие значения корней. Изменение коэффициента –210 при x^{19} на $-210+10^{-7}$ привело к тому, что половина корней стали комплексными. Причина такого явления – неустойчивость самой задачи; вычисления выполнялись очень точно (11 разрядов), а погрешности округлений не могли привести к таким последствиям.

2. **Корректность.** Задача называется поставленной корректно, если для любых значений исходных данных из некоторого класса ее решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным. Рассмотренные выше примеры неустойчивых задач являются некорректно поставленными. Применять для решения таких задач численные методы, как правило, нецелесообразно, поскольку возникающие в расчетах погрешности округлений будут сильно возрастать в ходе вычислений, что приведет к значительному искажению результатов. Вместе с тем отметим, что в настоящее время развиты методы решения некоторых некорректных задач. Это в основном так называемые методы регуляризации. Они основываются на замене исходной задачи корректно поставленной задачей. Последняя содержит некоторый параметр, при стремлении которого к нулю решение этой задачи переходит в решение исходной задачи.

3. **Неустойчивость методов.** Иногда при решении корректно поставленной задачи может оказаться неустойчивым метод ее решения. В частности, по этой причине при вычислении синуса большого аргумента был получен результат, не имеющий смысла. Рассмотрим еще один пример неустойчивого алгоритма. Построим численный метод вычисления интеграла $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx,\ n = 1, 2, \ldots$.

Интегрируя по частям, находим $I_1 = e^{-1},\ I_2 = 1 - 2I_1,\ \ldots,\ I_n = 1 - nI_1$.

Пользуясь полученным рекуррентным соотношением, вычисляем $I_1 = 367\,879,\ I_2 = 0{,}263,\ \ldots,\ I_7 = 0{,}110,\ I_8 = 0{,}118,\ I_9 = -\,0{,}068$.

Значение интеграла I_9 не может быть отрицательным, поскольку подынтегральная функция на всем отрезке интегрирования [0; 1] неотрицательна. Исследуем источник погрешности. Видим, что округление в I_1 дает погрешность, равную примерно лишь $4{,}4 \cdot 10^{-7}$. Однако на каждом этапе эта погрешность умножается на число, модуль которого больше единицы (–2, –3, ..., –9), что в итоге дает 9. Это и приводит к результату, не имеющему смысла. Здесь снова причиной накопления погрешностей является алгоритм решения задачи, который оказался неустойчивым. Численный алгоритм (метод) называется корректным в случае существования и единственности численного решения при любых значениях исходных данных, а также в случае устойчивости этого решения относительно погрешностей исходных данных.

4. **Понятие сходимости.** При анализе точности вычислительного процесса одним из важнейших критериев является сходимость численного метода. Она означает близость получаемого численного решения задачи к истинному решению. Строгие определения разных оценок близости могут быть даны лишь с привлечением аппарата функционального анализа. Здесь мы ограничимся некоторыми понятиями сходимости, необходимыми для понимания последующего материала. Рассмотрим понятие сходимости итерационного процесса. Этот процесс состоит в том, что для решения некоторой задачи и нахождения искомого значения определяемого параметра (например, корня нелинейного уравнения) строится метод последовательных приближений. В результате многократного повторения этого процесса (или итераций) получаем последовательность значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Говорят, что эта последовательность сходится к точному решению $x = a$, если при неограниченном возрастании числа итераций предел этой последовательности существует и равен a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В этом случае имеем сходящийся численный метод.

Другой подход к понятию сходимости используется в методах дискретизации. Эти методы заключаются в замене задачи с непрерывными параметрами на задачу, в которой значения функций вычисляются в фиксированных точках. Это относится, в частности, к численному интегрированию, решению дифференциальных уравнений и т. п. Здесь под сходимостью метода понимается стремление значений решения дискретной модели задачи к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования). При рассмотрении сходимости важными понятиями являются ее вид, порядок и другие характеристики. С общей точки зрения эти понятия рассматривать нецелесообразно; к ним будем обращаться при изучении численных методов. Таким образом, для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

1.3. Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра. Число верных знаков

Известно, что всякое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + ... + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + ..., \quad (1.4)$$

где α_i – цифры числа a (α_i = 0, 1, 2, ..., 9), причем старшая цифра $\alpha_m \neq 0$, а m – некоторое целое число (старший десятичный разряд числа a). Например, $41{,}59\ldots = 4\cdot10^1 + 1\cdot10^0 + 5\cdot10^{-1} + 9\cdot10^{-2} + \ldots$.

Каждая единица, стоящая на определенном месте в числе a, написанном в виде десятичной дроби (1.4), имеет свое значение. Единица, стоящая на первом месте, равна 10^m, на втором – 10^{m-1}, на n-м – 10^{m-n+1} и т. д. На практике преимущественно приходится иметь дело с приближенными числами, представляющими собой конечные десятичные дроби:

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \beta_{m-2} 10^{m-2} + ... + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1}.$$

Все сохраняемые десятичные знаки β_i $(i = m, m-1, m-n+1)$ называются значащими цифрами приближенного числа b, причем возможно, что некоторые из них равны нулю (за исключением β_m). При позиционном изображении числа b в десятичной системе счисления иногда приходится вводить лишние нули в начале или в конце числа. Например, $b = 7\cdot10^{-2} + 0\cdot10^{-3} + 1\cdot10^{-4} + 0\cdot10^{-5} = \underline{0},\underline{0}7010$ или $b = 2\cdot10^9 + 0\cdot10^8 + 0\cdot10^7 + 3\cdot10^6 + 0\cdot10^5 = 2\,003\,00\underline{0}\,\underline{0}\underline{0}\underline{0}$.

Такие нули (в приведенных примерах они подчеркнуты) не считаются значащими цифрами.

Определение 1. Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения его десятичных разрядов, не причисляются к значащим цифрам.

Например, в числе 0,002 080 первые три нуля не являются значащими цифрами, так как они служат только для установления десятичных разрядов других цифр. Остальные два нуля являются значащими цифрами, так как первый из них находится между значащими цифрами 2 и 8, а второй, как это отражено в записи, указывает, что в приближенном числе сохранен десятичный разряд 10^{-6}. В случае, если в данном числе 0,002 080 последняя цифра не является значащей, то это число должно быть записано в виде 0,002 08. С этой точки зрения числа 0,002 080 и 0,002 08 неравноценны, так как первое из них содержит четыре значащих цифры, а второе – лишь три значащих цифры.

При написании больших чисел нули справа могут служить как для обозначения значащих цифр, так и для определения разрядов остальных цифр. Поэтому при обычной записи чисел могут возникнуть неясности. Например, рассматривая число 689 000, мы не имеем возможности по его виду судить о том, сколько в нем значащих цифр, хотя можно утверждать, что их не меньше трех. Этой неопределенности можно избежать, выявив десятичный порядок числа и записав его в виде $6{,}89 \cdot 10^5$, если оно имеет три значащих цифры; или $6{,}8900 \cdot 10^5$, если число имеет пять значащих цифр, и т. п. Вообще, такого рода запись удобна для чисел, содержащих большое количество незначащих нулей, например $0{,}000\,000\,120 = 1{,}20 \cdot 10^{-7}$ и т. п.

Введем понятие верных десятичных знаков приближенного числа.

Определение 2. Говорят, что n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого $n - 1$ значащей цифрой, считая слева направо. Таким образом, если для приближенного числа a (1.4), заменяющего точное число A, известно, что $\Delta = |A - a| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$, то, по определению, первые n цифр $\alpha_m, \alpha_{m-1}, ..., \alpha_{m-n+1}$ этого числа являются верными.

Например, для точного числа $A = 35{,}97$ число $a = 36{,}00$ является приближением с тремя верными знаками, так как $|A - a| = 0{,}03 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1$.

Заметим, что в математических таблицах все помещенные значащие цифры являются верными. Так, например, в пятизначных таблицах логарифмов гарантировано, что абсолютная погрешность мантиссы не превосходит $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ и т. п.

Термин «n верных знаков» не следует понимать буквально, т. е. так, что в данном приближенном числе a, имеющем n верных знаков, n первых значащих цифр его совпадают с соответствующими цифрами точного числа A. Например, приближенное число $a = 9{,}995$, заменяющее точное $A = 10$, имеет три верных знака, причем все цифры этих чисел различны. Однако во многих случаях дело обстоит именно так, что верные знаки приближенного числа одинаковы с соответствующими цифрами точного числа.

Замечание. В некоторых случаях удобно говорить, что число a является приближением точного числа A с n верными знаками в широком смысле, понимая под этим, что абсолютная погрешность $\Delta = |A - a|$ не превышает единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой приближенного числа.

Например, для точного числа $A = 412{,}3567$ число $a = 412{,}356$ является приближением с шестью верными знаками в широком смысле, так как $\Delta = 0{,}0007 < 1 \cdot 10^{-3}$.

В дальнейшем верные знаки приближенного числа мы будем понимать в смысле определения 2 (т. е. в узком смысле), если явно не оговорено противное.

1.4. Округление чисел

Рассмотрим некоторое приближенное или точное число a, записанное в десятичной нумерации. Часто бывает надобность в округлении этого числа, т. е. в замене его числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Число a_1 выбирают так, чтобы погрешность округления $|a_1 - a|$ была минимальной.

Правило округления (по дополнению). Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

3а) если же первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Иными словами, если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизменными; если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу. В исключительном случае, когда отброшенная часть в точности равна половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то для компенсации знаков ошибок округления используется правило четной цифры. Очевидно, что при применении правила округления погрешность округления не превосходит у единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Пример 1. Округляя число $\pi = 3{,}1415926535...$ до пяти, четырех и трех значащих цифр, получим приближенные числа 3,1416; 3,142; 3,14 с абсолютными погрешностями, меньшими $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Пример 2. Округляя число 1,2500 до двух значащих цифр, получим приближенное число 1,2 с абсолютной погрешностью, равной $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 0{,}05$.

Пример 3. Округлить число S = 20,7426 в примере 1 (пункт. 1.1) до верных знаков.

Решение. Так как в числе S три верных знака, то естественно записать S = 20,7. Однако при этом к абсолютной погрешности ΔS = 0,0926 приходится добавить еще величину 0,0426, отброшенную при округлении. Новая абсолютная погрешность $\Delta S = 0{,}136$ заставляет считать сомнительным уже третий знак числа S, и, следовательно, число 5 приходится округлять до двух знаков: $S = 21$ (ΔS = 0,44 < 0,5). Этот пример показывает, что округление результатов расчета до верных знаков не всегда целесообразно.

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных значащих цифр*. В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к округлению. Обычно руководствуются следующим практическим правилом: при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы. Окончательный результат может содержать не более чем одну излишнюю значащую цифру, по сравнению с верными. Если при этом абсолютная погрешность результата не превышает двух единиц последнего сохраненного десятичного разряда, то излишняя цифра называется сомнительной.

Приведенное правило позволяет без ущерба точности вычислений избегать написания лишних цифр и значительно экономит время вычислений. Сохранение запасных знаков имеет тот смысл, что обычно оценка погрешностей результатов производится для наихудших вариантов, и фактическая погрешность может оказаться значительно меньше максимальной теоретической. Таким образом, во многих случаях те значащие цифры, которые считаются неверными, на самом деле являются верными.

Приходится также округлять точные числа, содержащие слишком много или бесконечное количество значащих цифр, сообразуясь с общей точностью вычислений. Заметим, что если точное число A округлить по правилу дополнения до n значащих цифр, то полученное таким образом приближенное число a будет иметь n верных цифр (в узком смысле). Если же приближенное число a, имеющее n верных цифр, округлить до n значащих цифр, то полученное новое приближенное число a_1, вообще говоря, будет иметь n верных цифр в широком смысле. Действительно, в силу неравенства $|A - a_1| \le |A - a| + |a - a_1|$ предельная абсолютная погрешность числа a_1 складывается из абсолютной погрешности числа a и погрешности округления.

1.5. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа

Сформулируем теорему, которая связывает величину относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков этого числа.

Теорема. Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит 10^{1-n}, деленное на первую значащую цифру данного числа, т. е. $\delta \le 10^{1-n} / \alpha_m$.

Следствие 1. За предельную относительную погрешность числа a можно принять $\delta_a = 10^{1-n} / \alpha_m$, α_m – первая значащая цифра числа a.

Следствие 2. Если число a имеет больше двух верных знаков, т. е. $n \ge 2$, то практически справедлива формула

$$\delta_a = 10^{1-n} / 2\alpha_m. \tag{1.5}$$

Пример 1. Какова предельная относительная погрешность, если вместо числа π взять число $a = 3{,}14$?

Решение. В нашем случае $\alpha_m = 3$ и $n = 3$. Следовательно, $\delta_a = 10^{1-3} / (2 \cdot 3) = 1/600 = \frac{1}{6}\%$.

Пример 2. Со сколькими десятичными знаками надо взять $\sqrt{20}$, чтобы погрешность не превышала 0,1%?

Решение. Так как первая цифра 4, то $\alpha_m = 4$, причем $\delta = 0{,}001$. Имеем $10^{1-n} / 4 \le 0{,}001$, отсюда $10^{n-1} \ge 250$ и $n \ge 4$.

Приведенная теорема дает возможность по числу верных знаков приближенного числа $a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots$ определить его относительную погрешность δ.

Для решения обратной задачи – определения количества n верных знаков числа $a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots$, если известна его относительная погрешность δ, – обычно пользуются приближенной формулой $\delta = \Delta / a$, ($a > 0$), где Δ – абсолютная погрешность числа a. Отсюда $\Delta = a\delta$. Учитывая старший десятичный разряд числа Δ, легко установить количество верных знаков данного приближенного числа a. В частности, если $\delta \le 10^{-n}$, то $\Delta \le (\alpha_m + 1) \cdot 10^m \cdot 10^{-n} \le$ $\le 10^{m-n+1}$, т. е. число a заведомо имеет n верных десятичных знаков в широком смысле. Аналогично, если $\delta \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, то число a имеет n верных знаков в узком смысле.

Пример 3. Приближенное число $a = 24\,253$ имеет относительную точность 1%. Сколько в нем верных знаков?

Решение. Имеем $\Delta = 24\,253 \cdot 0{,}01 \approx 243 = 2{,}43 \cdot 10^2$. Следовательно, число a имеет верными лишь первые две цифры ($n = 2$); цифра сотен является сомнительной. Согласно приведенному выше правилу число a предпочтительнее записать в виде $a = 2{,}43 \cdot 10^4$.

Замечание. Указанный способ определения числа верных знаков является приближенным. При точном подсчете верных цифр числа a следует исходить из неравенств $\delta \ge \Delta / (a + \Delta)$ и $\Delta \le a\delta / (1 - \delta)$, $0 \le \delta < 1$.

1.6. Таблицы для определения предельной относительной погрешности по числу верных знаков и наоборот

Если приближенное число написано с указанными верными десятичными знаками, то можно легко подсчитать его предельную относительную погрешность. Практически с таким подсчетом приходится сталкиваться часто и поэтому желательно рационализировать эту операцию. Табл. 1.1 указывает относительную погрешность (в процентах) приближенного числа в зависимости от количества его верных в широком смысле десятичных знаков его и от первых двух значащих цифр числа, считая слева направо.

Таблица 1.1

Относительная погрешность (в %) чисел с n верными знаками

Первые две значащие цифры	n		
	2	3	4
10 – 11	10	1	0,1
12 – 13	8,3	0,83	0,083
14, ..., 16	7,1	0,71	0,071
17, …, 19	5,9	0,59	0,059
20, …, 22	5	0,5	0,05
23, …, 25	4,3	0,43	0,043
26, …, 29	3,8	0,38	0,038
30, …, 34	3,3	0,33	0,033
35, …, 39	2,9	0,29	0,029
40, …, 44	2,5	0,25	0,025
45, …, 49	2,2	0,22	0,022
50, …, 59	2	0,2	0,02
60, …, 69	1,7	0,17	0,017
70, …, 79	1,4	0,14	0,014
80, …, 89	1,2	0,12	0,012
90, …, 99	1,1	0,11	0,011

Пусть, например, имеем приближенное число 0,00354 с тремя верными десятичными знаками. Так как здесь $n = 3$ и число 35 содержится в промежутке 35, ..., 39, то по табл. 1.1 находим $\delta = 0{,}29\%$. Если известна только первая цифра числа, например 4, то берем, конечно, большее из чисел 2,5 и 2,2, соответствующих возможным вариантам 40, ..., 44 и 45, ..., 49 (при $n = 2$). Если и первая цифра неизвестна, то берем числа из первой строки (10%; 1%; 0,1%), как наибольшие. Из этой таблицы мы видим, что три верных знака обеспечивают относительную точность (не менее 1%), достаточную для большинства технических расчетов. Заметим, что если приближенное число имеет два, три или четыре верных знака в узком смысле, то все числа таблицы нужно уменьшить вдвое. В табл. 1.1 приведены верхние границы для относительных погрешностей (в процентах), обеспечивающих данному приближенному значению то или другое число верных знаков в широком смысле в зависимости от его первых двух цифр.

Таблица 1.2

Число верных знаков приближенного числа в зависимости от предельной относительной погрешности (в %)

Первые две значащие цифры	n		
	2	3	4
10 – 11	4,2	0,42	0,042
12 – 13	3,6	0,36	0,036
14, ..., 16	2,9	0,29	0,029
17, …, 19	2,5	0,25	0,025
20, …, 22	2,2	0,22	0,022
23, …, 25	1,9	0,19	0,019
26, …, 29	1,7	0,17	0,017
30, …, 34	1,4	0,14	0,014
35, …, 39	1,2	0,12	0,012
40, …, 44	1,1	0,11	0,011
45, …, 49	1,0	0,1	0,01
50, …, 54	0,9	0,09	0,009
55, …, 59	0,8	0,08	0,008
60, …, 69	0,7	0,07	0,007
70, …, 79	0,6	0,06	0,006
80, …, 99	0,5	0,05	0,005

Покажем на примере, как надо пользоваться табл. 1.2. Пусть, например, дано приближенное число $a = 5{,}297$ с относительной погрешностью $\delta = 0{,}5\%$. Здесь первые две значащие цифры 5 и 2. Число, образованное этими цифрами, содержится между 50 и 54, причем последним, в зависимости от числа верхних знаков, соответствуют относительные погрешности 0,9%; 0,09%; 0,009% и т. д.

Так как $\delta = 0{,}5\% < 0{,}9\%$ и относительная погрешность числа не зависит от того, какие десятичные разряды выражают цифры этого числа, то число $a = 5{,}297$ имеет два верных десятичных знака в широком смысле.

Пример 1. Полагая $\pi = 3{,}142$; $\sqrt{7} = 2{,}65$; $e = 2{,}718$; $\lg 5 = 0{,}699$; $\sin 1^{\circ} = 0{,}0174$, по табл. 1.1 находим, что соответствующие относительные погрешности следующие: $\delta = 0{,}033\%$; $\delta = 0{,}19\%$; $\delta = 0{,}019\%$; $\delta = 0{,}17\%$; $\delta = 0{,}59\%$.

Пример 2. По прогибу стального стержня вычислен модуль Юнга $E = 2212...$ Т/см^2 с точностью до 2%. Сколько верных знаков в найденном значении? По табл. 1.2 находим $n = 2$. Следовательно, $E = 22 \cdot 10^2$ Т/см^2.

Пример 3. Для взрывчатой смеси в газомоторе вычислена газовая постоянная $R = 31{,}5...$ с относительной погрешностью $\delta = 1\%$. Определить число верных знаков. По табл. 1.2 находим $n = 2$. Значит, $R = 32$.

1.7. Погрешность суммы

Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – заданные приближенные числа. Рассмотрим их алгебраическую сумму $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n$. Очевидно, что $\Delta u = \pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm ... \pm \Delta x_n$ и, следовательно, $|\Delta u| \le |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|$.

Следствие. За предельную абсолютную погрешность алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + ... + \Delta_{x_n}. \qquad (1.6)$$

Из формулы (1.6) следует, что предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного (в смысле абсолютной погрешности) из слагаемых, т. е. слагаемого, имеющего максимальную абсолютную погрешность. Следовательно, с какой бы степенью точности ни были определены остальные слагаемые, мы не можем за их счет увеличить точность суммы. Поэтому не имеет смысла сохранять излишние знаки и в более точных слагаемых. Отсюда вытекает следующее, обычно применяемое, практическое правило для сложения приближенных чисел.

Правило. Чтобы сложить числа различной абсолютной точности, следует:

1) выделить числа, десятичная запись которых обрывается ранее других, и оставить их без изменения;

2) остальные числа округлить по образцу выделенных, сохраняя один или два запасных десятичных знака;

3) произвести сложение данных чисел, учитывая все сохраненные знаки;

4) полученный результат округлить на один знак.

При округлении по правилу дополнения слагаемых суммы $u = x_1 + x_2 + ... + x_n$ до m-го десятичного разряда погрешность округления суммы в самом неблагоприятном случае не превышает величины $\Delta_{\text{окр}} \le n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^m$.

Можно получить более точный расчет погрешности округления суммы, если учесть знаки ошибок округления слагаемых.

Пример. Найти сумму приближенных чисел: 0,348; 0,1834; 345,4; 235,2; 11,75; 9,27; 0,0849; 0,0214; 0,000354, каждое из которых имеет все верные значащие цифры (в широком смысле).

Решение. Выделяем числа наименьшей точности 345,4 и 235,2, абсолютная погрешность которых может достигать 0,1. Округляя остальные числа с точностью до 0,01, получим: 345,4; 235,2; 11,75; 9,27; 0,35; 0,18; 0,08; 0,02; 0,00. Их сумма равна 602,25. Округляя результат до 0,1 по правилу четной цифры, получим приближенное значение суммы 602,2.

Полная погрешность Δ результата складывается из трех слагаемых:

1) суммы предельных погрешностей исходных данных $\Delta_1 = 10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-6} = 0{,}221201 < 0{,}222$;

2) абсолютной величины суммы ошибок (с учетом их знаков) округления слагаемых $\Delta_2 = |-0{,}002 + 0{,}0034 + 0{,}0049 + 0{,}0014 + 0{,}000\,354| = 0{,}008054 < 0{,}009$;

3) заключительной погрешности округления результата $\Delta_3 = 0{,}050$.

Следовательно, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \le 0{,}222 + 0{,}009 + 0{,}050 = 0{,}281 <$
$< 0{,}3$. Таким образом, искомая сумма есть $602{,}2 \pm 0{,}3$.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. Если слагаемые – одного и того же знака, то предельная относительная погрешность их суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых, т. е. $\delta_u \le \max(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n})$.

1.8. Погрешность разности

Рассмотрим разность двух приближенных чисел $u = x_1 - x_2$.

По формуле (1.6) предельная абсолютная погрешность разности $\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}$, т. е. предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Отсюда предельная относительная погрешность разности

$$\delta_u = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}}{A}, \qquad (1.7)$$

где A – точное значение абсолютной величины разности чисел x_1 и x_2.

Замечание о потере точности при вычитании близких чисел. Если приближенные числа x_1 и x_2 достаточно близки друг к другу и имеют малые абсолютные погрешности, то число A мало. Из формулы (1.7) вытекает, что предельная относительная погрешность в этом случае может быть весьма большой, в то время как относительные погрешности уменьшаемого и вычитаемого остаются малыми, т. е. здесь происходит потеря точности.

Вычислим, например, разность двух чисел: $x_1 = 47{,}132$ и $x_2 =$
$= 47{,}111$, каждое из которых имеет пять верных знаков. Вычитая, получим $u = 47{,}132 - 47{,}111 = 0{,}021$.

Таким образом, разность u имеет лишь две значащие цифры, из которых последняя сомнительна, так как предельная абсолютная погрешность разности $\Delta_u = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$.

Предельные относительные погрешности вычитаемого, уменьшаемого и разности соответственно $\delta_{x_1} = \dfrac{0{,}0005}{47{,}132} \approx 0{,}00001$, $\delta_{x_2} = $ $= \dfrac{0{,}0005}{47{,}111} \approx 0{,}00001$, $\delta_u = \dfrac{0{,}001}{0{,}021} \approx 0{,}05$. Предельная относительная погрешность разности здесь примерно в 5000 раз больше предельных относительных погрешностей исходных данных. Поэтому при приближенных вычислениях полезно преобразовывать выражения, вычисление числовых значений которых приводит к вычитанию близких чисел.

Пример. Найти разность $u = \sqrt{2{,}01} - \sqrt{2}$ с тремя верными знаками.

Решение. Так как $\sqrt{2{,}01}$ = 1,41774469... и $\sqrt{2}$ = 1,41421356..., то искомый результат есть u = 0,00353 = $3{,}53 \cdot 10^{-3}$. Этот результат можно получить, если записать искомое выражение в виде $u = \dfrac{0{,}01}{\sqrt{2{,}01} + \sqrt{2}}$ и взять корни лишь с тремя верными знаками. Действительно, $u = \dfrac{0{,}01}{1{,}42 + 1{,}41} = \dfrac{0{,}01}{2{,}83} = 10^{-2} \cdot 3{,}53 \cdot 0{,}1 = 3{,}53 \cdot 10^{-3}$.

Исходя из вышесказанного, получаем следующее практическое правило: при приближенных вычислениях следует по возможности избегать вычитания двух почти равных приближенных чисел; если же в силу необходимости приходится вычитать такие числа, то следует уменьшаемое и вычитаемое брать с достаточным числом запасных верных знаков (если такая возможность имеется). Например, если известно, что при вычитании чисел x_1 и x_2 первые m значащих цифр их пропадут, а результат необходимо иметь с n верными значащими цифрами, то следует взять x_1 и x_2 с $m + n$ верными значащими цифрами.

1.9. Погрешность произведения

Теорема. Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

Доказательство проводится путем логарифмирования произведения, после чего оно превращается в сумму.

Итак, если $u = x_1 x_2 \dots x_n$, то $\delta \le \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$. Данная формула, очевидно, остается верной также, если сомножители имеют различные знаки.

Следствие. Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей, т. е.

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n}. \qquad (1.8)$$

Если все множители произведения u весьма точны, за исключением одного, то из формулы (1.8) следует, что предельная относительная погрешность произведения в этом случае будет практически совпадать с предельной относительной погрешностью множителя, обладающего наименьшей точностью. В частном случае, если приближенным является лишь множитель x_1, то имеем просто $\delta_u = \delta_{x_1}$.

Зная предельную относительную погрешность δ_u произведения u, можно определить его предельную абсолютную погрешность Δ_u по формуле $\Delta_u = |u|\delta_u$.

Пример 1. Определить произведение u приближенных чисел $x_1 = 12{,}2$ и $x_2 = 73{,}56$ и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные.

Решение. Имеем $\Delta_{x_1} = 0{,}05$ и $\Delta_{x_2} = 0{,}005$. Отсюда $\delta_u = \frac{0{,}05}{12{,}2} + \frac{0{,}005}{73{,}56} = 0{,}0042$. Так как произведение $u = 897{,}432$, то $\Delta_u = u\delta_u = 897 \cdot 0{,}004 \approx 3{,}6$. Отсюда u имеет лишь два верных знака и результат следует записать так: $u = 897 \pm 4$.

Отметим частный случай $u = kx$, где k – точный множитель, отличный от нуля. Имеем: $\delta_u = \delta_x$ и $\Delta_u = |k|\Delta_x$, т. е. при умножении приближенного числа на точный множитель k предельная относительная погрешность не изменяется, а абсолютная предельная погрешность увеличивается в $|k|$ раз.

Пример 2. При наведении ракеты на цель предельная угловая ошибка $\varepsilon = 1'$. Каково возможное отклонение Δ_u ракеты от цели на дальности $x = 2000$ км при отсутствии корректирования ошибки?

Решение. Здесь $\Delta_u = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \cdot 2000$ км ≈ 580 м.

Очевидно, что относительная погрешность произведения не может быть меньше, чем относительная погрешность наименее точного из сомножителей. Поэтому здесь, как и в случае сложения, не имеет смысла сохранять в более точных сомножителях излишнее количество значащих цифр.

Полезно руководствоваться следующим правилом: чтобы найти произведение нескольких приближенных чисел с различным числом верных значащих цифр, достаточно:

1) округлить их так, чтобы каждое из них содержало на одну (или две) значащую цифру больше, чем число верных цифр в наименее точном из сомножителей;

2) в результате умножения сохранить столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в наименее точном из сомножителей (или удержать еще одну запасную цифру).

Пример 3. Найти произведение приближенных чисел $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 72{,}397$, верных в написанных знаках.

Решение. Применяя правило, после округления имеем $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 72{,}4$. Отсюда $x_1 x_2 = 2{,}5 \cdot 72{,}4 = 181 \approx 1{,}8 \cdot 10^2$.

1.10. Число верных знаков произведения

Пусть имеем произведение n сомножителей $u = x_1 x_2 \ldots x_n$ $(n \le 10)$, каждый из которых имеет по крайней мере m ($m > 1$) верных цифр. Пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – первые значащие цифры в десятичной записи множителей $x_i = \alpha_i 10^{p_i} + \beta_i 10^{p_i - 1} + \ldots$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Тогда по формуле (1.5) $\delta_{x_i} = \frac{10^{1-m}}{2\alpha_i}$ и, следовательно,

$$\delta_u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right) \cdot 10^{1-m}. \qquad (1.9)$$

Так как $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_n}\le 10,$ то $\delta_u \le \frac{10^{2-m}}{2}.$

Следовательно, в самом неблагоприятном случае произведение u имеет $m-2$ верных знака.

Правило. Если все сомножители имеют m верных десятичных знаков, и число сомножителей не больше 10, то число верных (в широком смысле) знаков произведения на одну или на две единицы меньше m.

Следовательно, если нужно обеспечить в произведении m верных десятичных знаков, то сомножители следует брать с одним или двумя запасными знаками. Если сомножители обладают различной точностью, то под m следует понимать число верных знаков в наименее точном из сомножителей. Таким образом, число верных знаков произведения небольшого числа сомножителей (порядка десяти) может быть на одну или две единицы меньше числа верных знаков в наименее точном из этих сомножителей.

Пример 1. Определить относительную погрешность и количество верных цифр произведения $u = 93{,}87 \cdot 9{,}236$.

Решение. По формуле (1.9) имеем $\delta_u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot 10^{-3} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-3} <$ $< \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}.$ Следовательно, произведение u имеет по меньшей мере три верные цифры.

Пример 2. Определить относительную погрешность и число верных цифр произведения $u = 17{,}63 \cdot 14{,}285$.

Решение. $\delta_u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\cdot 10^{-3} = 1\cdot 10^{-3}.$ Следовательно, в произведении будут по крайней мере три верные цифры (в широком смысле).

1.11. Погрешность частного

Если $u=\frac{x}{y},$ то $\ln u = \ln x - \ln y$ и $\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$. Отсюда $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$ Из последней формулы вытекает, что теорема из п. 1.9 верна и для частного.

Теорема. Относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя.

Следствие. Если $u = \frac{x}{y}$, то $\delta_u = \delta_x + \delta_y$.

Пример. Найти число верных знаков частного u = 25,7 : 3,6, если все написанные знаки делимого и делителя верны.

Решение. Имеем $\delta_u = \frac{0{,}05}{25{,}7} + \frac{0{,}05}{3{,}6} = 0{,}002 + 0{,}014 = 0{,}016$.

Так как $u = 7{,}14$, то $\Delta_u = 0{,}016 \cdot 7{,}14 = 0{,}11$. Поэтому частное u имеет два верных знака в широком смысле, т. е. $u = 7{,}1$ или, более точно, $u = 7{,}14 \pm 0{,}11$.

1.12. Число верных знаков частного

Пусть делимое x и делитель y имеют по меньшей мере m верных цифр. Если α и β – их первые значащие цифры, то за предельную относительную погрешность частного и может быть принята величина $\delta_u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot 10^{1-m}$.

Отсюда получаем правило:

1) если $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 2$, то частное u имеет по меньшей мере $m - 1$ верных знаков;

2) если $\alpha = 1$ или $\beta = 1$, то частное u заведомо имеет $m - 2$ верных знака.

1.13. Относительная погрешность степени и корня

Пусть $u = x^m$ (m – натуральное число), тогда $\ln u = m \ln x$ и, следовательно, $\left|\frac{\Delta u}{u}\right| = m\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$. Отсюда $\delta_u = m\,\delta_x$, т. е. предельная относительная погрешность m-й степени числа в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа.

Пусть теперь $u = \sqrt[m]{x}$, тогда $u^m = x$. Отсюда $\delta_u = \frac{\delta_x}{m}$, т. е. предельная относительная погрешность корня m-й степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа.

Пример. Определить, с какой относительной погрешностью и со сколькими верными цифрами можно найти сторону a квадрата, если его площадь $s = 12{,}34$ (с точностью до 0,01).

Решение. Имеем $a = \sqrt{s} = 3{,}5128\ldots$. Так как $\delta_s = \dfrac{0{,}01}{12{,}33} \approx 0{,}0008$, то $\delta_a = \delta_s / 2 = 0{,}0004$. Поэтому $\Delta_a = 3{,}5128 \cdot 0{,}0004 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Отсюда число a будет иметь примерно четыре верных знака (в широком смысле) и, следовательно, $a = 3{,}513$.

1.14. Вычисления без точного учета погрешностей

В предыдущих пуктах мы указали способы оценки предельной абсолютной погрешности действий. При этом предполагалось, что абсолютные погрешности компонент усиливают друг друга, что практически бывает сравнительно редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, рекомендуется пользоваться следующими правилами подсчета цифр:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший сохраненный десятичный разряд результата должен являться наибольшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных.
2. При умножении и делении приближенных чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом верных значащих цифр.
3. При возведении в квадрат или куб приближенного числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени.
4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных цифр имеет подкоренное число.
5. Во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.
6. При вычислениях с помощью логарифмов рекомендуется подсчитать число верных значащих цифр в приближенном числе, имеющем наименьшее число верных значащих цифр, и воспользоваться таблицей логарифмов с числом десятичных знаков, на единицу

большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые согласно предыдущим правилам обеспечивают $k + 1$ верную цифру в результате. Если некоторые данные имеют излишние младшие десятичные разряды (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр, чем другие (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), то их предварительно нужно округлить, сохраняя одну запасную цифру.

1.15. Общая формула для погрешности

Основная задача теории погрешности заключается в следующем: известны погрешности некоторой системы величин, требуется определить погрешность данной функции от этих величин.

Пусть задана дифференцируемая функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и пусть $|\Delta x_i|$ (i = 1, 2, ..., n) – абсолютные погрешности аргументов функции. Тогда абсолютная погрешность функции $|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)| - |f(x_1, x_2, ..., x_n)|$.

Обычно на практике $|\Delta x_i|$ – малые величины, произведениями, квадратами и высшими степенями которых можно пренебречь. Поэтому можно положить $|\Delta u| \approx |df(x_1, x_2, ..., x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|$. Итак,

$$|\Delta u| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|. \tag{1.10}$$

Отсюда, обозначая через Δ_{x_i} (i = 1, 2, ... n) предельные абсолютные погрешности аргументов x_i и через Δ_u – предельную погрешность функции u, для малых Δ_{x_i} получим

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \tag{1.11}$$

Разделив обе части неравенства (1.10) на u, будем иметь оценку для относительной погрешности функции u $\delta \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} / u \right| |\Delta x_i| =$ $= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, ..., x_n) \right| |\Delta x_i|$. Следовательно, за предельную относительную погрешность функции u можно принять

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln u \right| \Delta_{x_i}.$$

Пример 1. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности объема шара $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, если $\pi \approx 3{,}14$, а диаметр $d = 3{,}7$ см $\pm$ 0,5 см.

Решение. Рассматривая π и d как переменные величины, вычисляем частные производные $\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} d^3 = 8{,}44$, $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = 21{,}5.$

В силу формулы (1.11) предельная абсолютная погрешность объема $\Delta_V = \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \right| |\Delta\pi| + \left| \frac{\partial V}{\partial d} \right| |\Delta d| = 8{,}44 \cdot 0{,}0016 + 21{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}013 + 1{,}075 =$ $= 1{,}088$ см$^3 \approx 1{,}1$ см^3.

Поэтому $V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 26{,}9$ см^3 $\pm$ 1,1 см^3. Отсюда предельная относительная погрешность объема $\delta_V = \frac{1{,}088}{26{,}9} = 0{,}0404 \approx 4\%$.

Пример 2. Для определения модуля Юнга E по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула $E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 \cdot p}{a^3 \cdot b \cdot s}$, где l – длина стержня, a и b – измерения поперечного сечения стержня, s – стрела прогиба, p – нагрузка. Вычислить предельную относительную погрешность при определении модуля Юнга E, если

$p = 20$ кГ, $\delta_p = 0{,}1\%$; $a = 3$ мм; $\delta_a = 1\%$; $b = 44$ мм; $\delta_b = 1\%$, $l = 50$ см; $\delta_l = 1\%$; $s = 2{,}5$ см; $\delta_s = 1\%$.

Решение. $\ln E = 3\ \ln l + \ln p - 3\ \ln a - \ln b - \ln s - \ln 4$. Отсюда, заменяя приращения дифференциалами, будем иметь $\frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta l}{l} +$ $+\frac{\Delta p}{p} - 3\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta s}{s}$. Следовательно, $\delta_E = 3\delta_l + \delta_p + 3\delta_a + \delta_b + \delta_s =$ $= 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}001 + 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}081$.

Таким образом, предельная относительная погрешность составляет 0,081, т. е. примерно 8% от измеряемой величины.

Произведя численные расчеты, имеем $E = (2{,}10 \pm 0{,}17)\cdot 10^6$ кГ/см^2.

1.16. Обратная задача теорий погрешностей

На практике важна также обратная задача: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.

Эта задача не определена математически, так как заданную предельную погрешность Δ_u функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно обеспечить, устанавливая по-разному предельные абсолютные погрешности Δ_{x_i} ее аргументов. Простейшее решение обратной задачи дается так называемым принципом *равных влияний*. Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности Δ_u функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пусть величина предельной абсолютной погрешности Δ_u задана. Тогда на основании формулы (1.11)

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}\ . \qquad (1.12)$$

Предполагая, что все слагаемые равны между собой, будем иметь $\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\Delta_{x_1} = \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\Delta_{x_2} = ... = \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\Delta_{x_n} = \frac{\Delta_u}{n}$. Отсюда

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n} / \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|, \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{1.13}$$

Пример 1. Радиус основания цилиндра $R \approx 2$ м; высота цилиндра $H \approx 3$ м. С какими абсолютными погрешностями нужно определить R и H, чтобы его объем V можно было вычислить с точностью до 0,1 м^3?

Решение. Имеем $V = \pi R^2 H$ и $\Delta_V = 0{,}1$ м^3. Полагая $R = 2$ м, $H = 3$ м, $\pi = 3{,}14$; приближенно получим $\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH = 37{,}7$, $\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12{,}6$, $\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12$. Отсюда, так как $n = 3$, то на основании формулы (1.13) будем иметь: $\Delta_R = \frac{0{,}1}{3 \cdot 37{,}7} < 0{,}001$, $\Delta_H = \frac{0{,}1}{3 \cdot 12{,}6} <$ $< 0{,}003$, $\Delta_\pi = \frac{0{,}1}{3 \cdot 12} < 0{,}003$.

Нередко при решении обратной задачи по принципу равных влияний мы можем столкнуться с таким случаем, когда найденные по формуле (1.13) предельные абсолютные погрешности отдельных независимых переменных окажутся настолько малыми, что добиться соответствующей точности при измерении этих величин практически невозможно. В таких случаях следует отступить от принципа равных влияний и за счет разумного уменьшения погрешностей одной части переменных добиться увеличения погрешностей другой части переменных.

Пример 2. С какой точностью надо измерить радиус круга $R = 30{,}5$ см и со сколькими знаками взять π, чтобы площадь круга была известна с точностью до 0,1%?

Решение. Имеем $s = \pi R^2$ и $\ln s = \ln \pi + 2 \ln R$. Отсюда $\frac{\Delta_s}{s} =$ $= \frac{\Delta_\pi}{\pi} + \frac{2\Delta_R}{R} = 0{,}001$. По принципу равных влияний следует положить:

$\dfrac{\Delta_\pi}{\pi} = 0{,}0005$; $\dfrac{2\Delta_R}{R} = 0{,}0005$. Отсюда $\Delta_R \le 0{,}0025R = 0{,}0076$ см, $\Delta_\pi \le 0{,}0016$. Таким образом, следовало бы взять $\pi = 3{,}14$ и измерять R с точностью до тысячных долей сантиметра. Ясно, что такая точность измерения практически трудно осуществима. Поэтому выгоднее поступить следующим образом: взять $\pi = 3{,}142$, отсюда $\dfrac{\Delta_\pi}{\pi} = 0{,}00013$. Тогда $\dfrac{2\Delta_R}{R} = 0{,}01 - 0{,}00013 = 0{,}0087$ и $\Delta_R \le 0{,}13$ см. Такая точность достигается сравнительно легко.

Иногда допускают, что предельная абсолютная погрешность всех аргументов x_i (i = 1, 2, ..., n) одна и та же. Тогда, полагая $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n}$, из формулы (1.12) будем иметь $\Delta_{x_i} = \Delta_u \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$, ($i$ = 1, 2, ..., n).

Наконец, можно предположить, что точность измерения всех аргументов x_i (i = 1, 2, ..., n) одинакова, т. е. предельные относительные погрешности δ_{x_i} (i = 1, 2, ..., n) аргументов равны между собой. Отсюда получим $\dfrac{\Delta_{x_1}}{|x_1|} = \dfrac{\Delta_{x_2}}{|x_2|} = \ldots = \dfrac{\Delta_{x_n}}{|x_n|} = k$, где k – общее значение отношений. Следовательно, $\Delta_{x_i} = k|x_i|$ (i = 1, 2, ..., n). Подставляя эти значения в формулу (1.12), находим $\Delta_u = k\sum\limits_{i=1}^{n} \left|x_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$ и $k = \Delta_u \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \left|x_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$. Таким образом, окончательно имеем $\Delta_{x_i} k = |x_i| \Delta_u \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \left|x_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|$, ($i$ = 1, 2, ..., n). Можно также использовать и другие варианты.

Аналогично решается вторая обратная задача теории погрешности, когда задана предельная относительная погрешность функции и ищутся предельные абсолютные или относительные погрешности аргумента.

Иногда в самой постановке задачи имеются условия, не позволяющие использовать принцип равных влияний.

Пример 3. Стороны прямоугольника $a \approx 5$ м и $b \approx 200$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении этих сторон, одинаковая для обеих сторон, чтобы площадь S прямоугольника можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta_S = 1$ м^2?

Решение. Так как $S = ab$, то $\Delta S \approx b\Delta a + a\Delta b$ и $\Delta_S \approx b\Delta_a + a\Delta_b$. Согласно условию задачи $\Delta_a = \Delta_b$, поэтому $\Delta_a = \dfrac{\Delta_S}{a+b} = \dfrac{1}{205} \approx 0{,}005$ м = = 5 мм.

1.17. Понятие о вероятностной оценке погрешности

Пусть имеем сумму n слагаемых $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Тогда предельная абсолютная погрешность суммы, как известно, равна $\Delta_u = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}$.

Отсюда в случае, когда предельные абсолютные погрешности слагаемых одинаковы, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = \Delta$, будем иметь $\Delta_u = n\,\Delta$.

Формула (1.6) дает максимальное возможное значение абсолютной погрешности суммы. Эта предельная погрешность достигается лишь тогда, когда ошибки всех слагаемых: 1) наибольшие из возможных и 2) имеют одинаковые знаки. При большом количестве слагаемых такое неблагоприятное стечение обстоятельств является маловероятным. Фактически ошибки отдельных слагаемых, как правило, имеют различные знаки и, следовательно, частично компенсируют друг друга. Поэтому наряду с теоретической предельной погрешностью суммы Δ_u вводят практическую предельную погрешность Δ_u^*, реализуемую с некоторой мерой достоверности.

Ограничимся рассмотрением простейшего случая. Пусть абсолютные погрешности Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ слагаемых суммы $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ независимы и подчиняются нормальному закону с одной и той же мерой точности. Положим, что с вероятностью, превышающей число γ, абсолютные погрешности слагаемых не превышают числа Δ, т. е. $P\,(|\,\Delta x_i\,| \le \Delta) > \gamma$. При этом условии в теории вероятностей доказывается, что с той же мерой достоверности абсолютная погрешность суммы *u* будет удовлетворять неравенству $|\,\Delta u\,| \le \Delta\sqrt{n}$, где *n* – число слагаемых.

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность суммы можно принять число $\Delta_u^* = \Delta\sqrt{n}$.

Например, складывая 100 чисел с абсолютной погрешностью 0,1, мы получим теоретическую предельную ошибку суммы $\Delta_u = 0{,}1 \cdot 100 = 10$. Фактически же можно ожидать, что эта ошибка не превзойдет величины 0,1 · 10 = 1.

В частности, рассмотрим среднее арифметическое *n* чисел $\xi = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,/\,n$. Согласно строгой теории предельная абсолютная ошибка $\Delta_\xi = n \cdot \Delta / n = \Delta$, , тогда как с большой степенью достоверности можно утверждать, что практически $\Delta_\xi^* = \sqrt{n}\Delta / n = \Delta / \sqrt{n}$, т. е. практически достоверно, что среднее арифметическое приближенных чисел имеет повышенную точность по сравнению с этими числами, причем $\Delta_\xi^* \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично для случая умножения *n* сомножителей с одинаковой относительной предельной погрешностью δ можно доказать, что практическая предельная относительная погрешность произведения определяется формулой $\delta_u^* = \delta\sqrt{n}$.

Задачи

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел:

а) 2,1514; *б*) 0,16152; *в*) 0,01204; *г*) 1,225;
д) –0,0015281; *е*) –392,85; *ж*) 0,1545; *з*) 0,003922;
и) 625,55; *к*) 94,525.

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям:

а) $a = 13267,\ \Delta_a = 0{,}1\%$; *б*) $a = 2{,}32,\ \Delta_a = 0{,}7\%$;

в) $a = 35{,}72,\ \Delta_a = 1\%$; *г*) $a = 0{,}896,\ \Delta_a = 10\%$;

д) $a = 232{,}44,\ \Delta_a = 1\%$.

3. При измерении некоторых углов получили числа $\alpha_1 = 21°37'3''$, $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = 1°10''$, $\alpha_4 = 75°20'44''$. Определить относительные погрешности чисел α_1, α_2, α_3, α_4, полагая абсолютную погрешность измерения равной $1''$.

4. Определить количество верных знаков в числе x, если известна его абсолютная погрешность:

а) $x = 0{,}3941,\ \Delta_x = 0{,}25\cdot 10^{-2}$; *б*) $x = 0{,}1132,\ \Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-3}$;

в) $x = 38{,}2543,\ \Delta_x = 0{,}27\cdot 10^{-2}$; *г*) $x = 293{,}481,\ \Delta_x = 0{,}1$;

д) $x = 2{,}325,\ \Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-1}$; *е*) $x = 14{,}00231,\ \Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-3}$;

ж) $x = 0{,}0842,\ \Delta_x = 0{,}15\cdot 10^{-2}$; *з*) $x = 0{,}00381,\ \Delta_x = 0{,}1\cdot 10^{-4}$;

и) $x = -32{,}285,\ \Delta_x = 0{,}2\cdot 10^{-2}$, *к*) $x = -0{,}2113,\ \Delta_x = 0{,}5\cdot 10^{-2}$.

5. Определить количество верных знаков в числе a, если известна его относительная погрешность:

а) $a = 1{,}8921,\ \delta_a = 0{,}1\cdot 10^{-2}$; *б*) $a = 0{,}2218,\ \delta_a = 0{,}2\cdot 10^{-1}$;

в) $a = 22{,}351,\ \delta_a = 0{,}15$; *г*) $a = 0{,}02425,\ \delta_a = 0{,}5\cdot 10^{-2}$;

д) $a = 0{,}000135,\ \delta_a = 0{,}15$; *е*) $a = 9{,}3598,\ \delta_a = 0{,}1\%$;

ж) $a = 0{,}11452,\ \delta_a = 10\%$; *з*) $a = 48361,\ \delta_a = 1\%$;

и) $a = 592{,}8,\ \delta_a = 2\%$; *к*) $a = 14{,}9360,\ \delta_a = 1\%$.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ (РАЗЫГРЫВАНИЕ) СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г., когда появилась статья под названием «Метод Монте-Карло» (Н. Метрополис, С. Улам). Создателями этого метода считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама. В СССР первые статьи были опубликованы в 1955–1956 гг. (В. В. Чавчанидзе, Ю. А. Шрейдер, В. С. Владимиров).

Однако теоретическая основа метода была известна давно. Кроме того, некоторые задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, т. е. фактически методом Монте-Карло. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, так как моделировать случайные величины вручную – очень трудоемкая работа. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению ЭВМ.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом, а одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий круг задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной математики, успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

В подавляющем большинстве задач, решаемых методами Монте-Карло, вычисляют математические ожидания некоторых случайных величин. Так как чаще всего математические ожидания представляют собой обычные интегралы, в том числе и кратные, то центральное положение в теории методов Монте-Карло занимают методы вычисления интегралов.

2.1. Моделирование дискретной случайной величины

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a:

$$M\left(X\right)=a.$$

Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений x_i случайной величины X, находят их среднее арифметическое

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

и принимают $\overline{x}$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a,

$$a\approx a^*=\overline{x}.$$

Рассмотрим, как разыграть дискретную случайную величину X, то есть вычислить последовательность ее возможных значений $x_i\ \left(i=1, 2, \ldots\right)$, зная закон распределения X.

Введем обозначения: R – непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0; 1); $r_j\ \left(j=1, 2, \ldots\right)$ – случайные числа (возможные значения) R.

Правило. *Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную законом распределения*

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

надо:

1. Разбить интервал $(0;1)$ оси Or на n частичных интервалов:

$$\Delta_1 = (0;\, p_1),\quad \Delta_2 = (p_1;\, p_1 + p_2), \ldots, \Delta_n = (p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1};\, 1).$$

2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел или воспользовавшись средствами Excel для генерирования случайных чисел) случайное число r_j.

Если r_j попало в частичный интервал Δ_j, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Примечание. Перечислим имеющиеся в ***Excel*** средства для генерирования случайных чисел:

– функция **СЛЧИС**, вычисляющая случайные числа, которые равномерно распределены на отрезке $[0;1]$;

– средство **Генерация случайных чисел** из надстройки ***Пакет анализа***, предоставляющее возможность генерировать случайные числа, которые имеют следующие распределения: равномерное, нормальное, Бернулли, биномиальное, Пуассона, заданное дискретное распределение.

Пример. Разыграть шесть возможных значений дискретной случайной величины *X*, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Решение. 1. Разобьем интервал $(0;1)$ оси Or точками с координатами 0,22; 0,22 + 0,17 = 0,39 на три частичных интервала:

$$\Delta_1 = (0;\, 0{,}22),\ \Delta_2 = (0{,}22;\, 0{,}39),\ \Delta_3 = (0{,}39;\, 1).$$

2. Найдем каким-либо из указанных способов шесть случайных чисел, например: 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87.

Случайное число $r_1 = 0{,}32$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_2 = 10$. Случайное число $r_2 = 0{,}17$ принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение $x_1 = 2$.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

Задачи

1. Разыграть восемь возможных значений дискретной случайной величины *X*, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	3	8	12	23
p	0,2	0,12	0,43	0,23

2. Разыграть пять опытов по схеме Бернулли. Опыт состоит из трех независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,4.

Указание. Составить сначала закон распределения дискретной случайной величины *X* – числа появлений события *A* в трех независимых испытаниях, если в каждом испытании вероятность появления события *A* равна 0,4.

3. Разыграть шесть опытов по схеме Бернулли. Опыт состоит из четырех испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,5.

2.2. Разыгрывание полной группы событий

Требуется разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы, вероятности которых известны. Разыгрывание полной группы событий сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины.

Правило. *Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *полной группы,* *вероятности которых* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *известны, достаточно разыграть (по правилу из пункта 2.1) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_i = i$*, то считается, что наступило событие* A_i.

Пример 1. Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу; $p_1 = P\left(A_1\right) = 0{,}22$; $p_2 = P\left(A_2\right) = 0{,}31$; $p_3 = P\left(A_3\right) = 0{,}47.$

Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Решение. В соответствии с правилом настоящего параграфа надо разыграть дискретную случайную величину *X* с законом распределения:

X	1	2	3
p	0,22	0,31	0,47

По правилу пункта 2.1 разобьем интервал $(0;1)$ на три частичных интервала: $\Delta_1 = \left(0;\, 0{,}22\right)$; $\Delta_2 = \left(0{,}22;\, 0{,}43\right)$; $\Delta_3 = \left(0{,}43;\, 1\right)$.

Найдем каким-либо из указанных способов пять случайных чисел, например: 0,61; 0,19; 0,69; 0,04; 0,46.

Случайное число $r_1 = 0{,}61$ принадлежит интервалу Δ_3, поэтому $X = 3$ и, следовательно, наступило событие A_3. Аналогично найдем остальные события. В итоге получим искомую последовательность событий: A_3, A_1, A_3, A_1, A_3.

Пример 2. События *A* и *B* независимы и совместны. Разыграть четыре испытания, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,7, а события *B* – 0,4.

Решение. Возможны четыре исхода испытания:

$A_1 = AB$, причем в силу независимости событий $P(AB) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$;

$A_2 = A\overline{B}$, причем $P(A\overline{B}) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$;

$A_3 = \overline{A}B$, причем $P(\overline{A}B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$;

$A_4 = \overline{A}\,\overline{B}$, причем $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$.

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: A_1 с вероятностью $p_1 = 0,28$, A_2 с вероятностью $p_2 = 0,42$, A_3 с вероятностью $p_3 = 0,12$, A_4 с вероятностью $p_4 = 0,18$.

Эта задача в соответствии с правилом настоящего параграфа сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X с законом распределения

X	1	2	3	4
p	0,28	0,42	0,12	0,18

Найдем каким-либо из указанных способов четыре случайных числа, например: 0,32; 0,17; 0,90; 0,05.

Используя правило пункта 2.1, легко найдем искомую последовательность результатов четырех испытаний: A_2, A_1, A_4, A_1.

Задачи

1. Заданы вероятности четырех событий A_1, A_2, A_3, A_4, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0,15$; $p_2 = P(A_2) = 0,64$; $p_3 = P(A_3) = 0,05$; $p_4 = P(A_4) = 0,16$. Разыграть 10 испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

2. События A и B независимы и совместны. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6, а события B – 0,8.

Указание. Составить полную группу событий: $A_1 = AB$, $A_2 = A\overline{B}$, $A_3 = \overline{A}B$, $A_4 = \overline{A}\,\overline{B}$. Для определенности взять случайные числа: 0,69; 0,07; 0,49; 0,41; 0,38.

2.3. Разыгрывание непрерывной случайной величины

Известна функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины *X*. Требуется разыграть *X*, т. е. вычислить последовательность возможных значений x_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

А. Метод обратных функций.

Правило 1. *Для того чтобы разыграть возможное значение* x_i *непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения* $F(x)$, *надо выбрать случайное число* r_i, *приравнять его функции распределения и решить относительно* x_i *полученное уравнение* $F(x_i) = r_i$.

Если известна плотность вероятности $f(x)$, то используют правило 2.

Правило 2. *Для того чтобы разыграть возможное значение* x_i *непрерывной случайной величины X, зная ее плотность вероятности* $f(x)$, *надо выбрать случайное число* r_i *и решить относительно* x_i *уравнение*

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx = r_i$$

или уравнение

$$\int_{a}^{x_i} f(x)\,dx = r_i,$$

где a − наименьшее конечное возможное значение X.

Б. Метод суперпозиции.

Правило 3. *Для того чтобы разыграть возможное значение случайной величины X, функция распределения которой*

$$F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+\ldots+C_nF_n(x),$$

где $F_k(x)$ *– функции распределения* $(k=1,2,\ldots,n)$*,* $C_k>0$*,* $C_1+C_2+\ldots+C_n=1$*, надо выбрать два независимых случайных числа* r_1 *и* r_2 *и по случайному числу* r_1*, разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины* Z *(по правилу 1):*

Z	1	2	…	n
p	C_1	C_2	…	C_n

Если окажется, что $Z=k$*, то решают относительно x уравнение* $F_k(x)=r_2$*.*

Пусть задана плотность вероятности непрерывной случайной величины *X* в виде $f(x)=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)$, где $f_k(x)$ – плотности вероятностей, а коэффициенты C_k положительны и их сумма равна единице. Если окажется, что $Z=k$, то решают (по правилу 2) относительно x_i уравнение $\int_{-\infty}^{x_i} f_k(x)dx=r_2$ или уравнение $\int_{a}^{x_i} f_k(x)dx=r_2$.

Пример 1. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале $(a;b)$, если ее функцию распределения равна $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$, $(a<x<b)$.

Решение. В соответствии с правилом 1 приравняем заданную функцию распределения случайному числу r_i: $\dfrac{x-a}{b-a}=r_i$. Решив это уравнение относительно x_i, получим явную формулу для разыгрывания возможных значений *X*: $x_i=(b-a)r_i+a$.

Пример 2. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины, заданной плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{b}{(1+ax)^2}$ в интервале $\left[0; \dfrac{1}{b-a}\right]$, вне этого интервала $f(x) = 0.$

Решение. Используя правило 2, напишем уравнение $b\int\limits_0^{x_i} \dfrac{dx}{(1+ax)^2} = r_i$. Решив это уравнение относительно x_i, окончательно получим $x_i = \dfrac{r_i}{(b - a r_i)}$.

Пример 3. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения $F(x) = 1 - \dfrac{1}{3}\left(2e^{-2x} + e^{-3x}\right)$, $(0 < x < \infty)$.

Решение. В соответствии с правилом 3 представим заданную функцию в виде

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-3x}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - e^{-2x}\right).$$

Функции, заключенные в скобках, являются функциями распределения показательного закона, поэтому можно принять:

$$F_1 = 1 - e^{-3x}, \quad F_2 = 1 - e^{-2x}, \quad C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z	1	2
p	1/3	2/3

Выберем независимые случайные числа r_1 и r_2. Разыграем Z по случайному числу r_1, для чего по правилу пункта 2.1 построим частичные интервалы $\Delta_1 = \left(0; \frac{1}{3}\right)$ и $\Delta_2 = \left[\frac{1}{3}; 1\right)$. Если $r_1 < \frac{1}{3}$, то $Z = 1$; если $r_1 \geq \frac{1}{3}$, то $Z = 2$.

Итак, возможное значение X находят, решая относительно x уравнение $1 - e^{-3x} = r_1$, если $r_1 < \frac{1}{3}$ или $1 - e^{-2x} = r_2$, если $r_1 \geq \frac{1}{3}$.

Решив эти уравнения, получим:

$$x = \left(-\ln\left(1 - r_2\right)\right)/3, \text{ если } r_1 < \frac{1}{3};$$

$$x = \left(-\ln\left(1 - r_2\right)\right)/2, \text{ если } r_1 \geq \frac{1}{3}.$$

Приняв во внимание, что случайные величины R и $1 - R$ в интервале (0; 1) распределены одинаково, окончательно имеем более простые формулы:

$$x = \left(-\ln r_2\right)/3, \text{ если } r_1 < \frac{1}{3};$$

$$x = \left(-\ln r_2\right)/2, \text{ если } r_1 \geq \frac{1}{3}.$$

Задачи

1. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале (4; 14).

Указание. Для определенности взять случайные числа: 0,74; 0,02; 0,94; 0,36.

2. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной случайной величины *X*, распределенной по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\left(x > 0\right)$.

3. Разыграть пять возможных значений непрерывной случайной величины *X*, заданной плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{10}{(1+2x)^2}$ в интервале (0; $\dfrac{1}{8}$), вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности взять случайные числа: 0,186; 0,333; 0,253; 0,798; 0,145.

4. Найти явную формулу для разыгрывания равномерно распределенной случайной величины *X*, заданной плотностью вероятности $f(x)=2$ в интервале (0; 0,5), вне этого интервала $f(x)=0$.

5. Разыграть пять возможных значений непрерывной равномерно распределенной случайной величины *X*, заданной плотностью вероятности $f(x)=0{,}1$ в интервале (0; 10), вне этого интервала $f(x)=0$.

Указание. Для определенности принять случайные числа: 0,690; 0,749; 0,413; 0,887; 0,637.

6. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины *X*, заданной функцией распределения $F(x)=1-\dfrac{1}{3}\left(2e^{-2x}+e^{-3x}\right)$, $(0<x<\infty)$.

Указание. Принять $F_1(x)=1-e^{-2x}$, $F_2(x)=1-e^{-x}$.

7. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрывания непрерывной случайной величины *X*, заданной плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{4}{27}\left(1+(x-1)^3\right)$ в интервале (0; 3), вне этого интервала $f(x)=0$.

2.4. Приближенное разыгрывание нормально распределенной случайной величины

Требуется приближенно разыграть нормальную случайную величину.

Правило. *Для того чтобы приближенно разыграть возможное значение* x_i *нормальной случайной величины X с параметрами* $a=0$

и $\sigma = 1$*, надо сложить 12 независимых случайных чисел и из полученной суммы вычесть 6.*

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6 = S_i - 6.$$

Замечание. Если требуется приближенно разыграть нормальную случайную величину Z с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ, то, разыграв возможное значение x_i по приведенному выше правилу, находят искомое возможное значение по формуле

$$z_i = \sigma x_i + a.$$

Пример 1. Разыграть четыре возможных значения нормальной случайной величины с параметрами: *а*) $a = 0$ и $\sigma = 1$; *б*) $a = 2$ и $\sigma = 3$.

Решение. *а*) В соответствии с правилом разыграем возможное значение x_1 нормальной случайной величины X с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ по формуле $x_1 = \sum_{j=1}^{12} r_j - 6 = S_1 - 6.$ Сгенерируем каким-либо из способов, описанных в пункте 2.1, первых 12 случайных чисел, пусть, например, мы получили следующие числа: 0,37; 0,54; 0,20; 0,48; 0,05; 0,64; 0,89; 0,47; 0,42; 0,96; 0,24; 0,80. Сложив эти числа, получим $S_1 = 6{,}06.$ Искомое возможное значение $x_1 = S_1 - 6 = 6{,}06 - 6 = 0{,}06.$

Аналогично, получив во второй, третий и четвертый раз по 12 случайных чисел, получим: $S_2 = 4{,}90;$ $S_3 = 4{,}48;$ $S_3 = 4{,}90;$ $S_4 = 6{,}83.$ Следовательно,

$$x_2 = 4{,}90 - 6 = -1{,}10; \quad x_3 = 4{,}48 - 6 = -1{,}52; \quad x_4 = 6{,}83 - 6 = 0{,}83.$$

б) Найдем возможные значения нормальной случайной величины Z с параметрами $a = 2$ и $\sigma = 3$ по формуле $z_i = 3x_i + 2$. Подставив возможные значения x_i, найденные в пункте *а*), получим

$x_1 = 3 \cdot 0,06 + 2 = 2,18.$ Аналогично найдем остальные возможные значения $z_2 = -1,3;$ $z_3 = -2,56;$ $z_4 = 4,49.$

Задачи

1. Разыграть пять возможных значений нормальной случайной величины с параметрами: *а*) $a = 0$ и $\sigma = 1$; *б*) $a = 10$ и $\sigma = 2$.

2. Разыграть 50 возможных значений нормальной случайной величины X с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ и оценить параметры разыгранной величины.

2.5. Вычисление интегралов методом Монте-Карло

А. Способ усреднения подынтегральной функции.

В качестве оценки определенного интеграла $I = \int_a^b \varphi(x)\, dx$ принимают

$$I_1^* = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

где n – число испытаний; x_i – возможные значения случайной величины X, распределенной равномерно в интервале интегрирования $(a; b)$. Их разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a) r_i$, где r_i – случайное число.

Дисперсия усредняемой функции $\varphi(x)$ равна

$$\sigma^2 = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - \big(M(\varphi(x))\big)^2,$$

где $M(\varphi(x)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$, $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Если точное значение дисперсии вычислить трудно или невозможно, то находят выборочную дисперсию (при $n > 30$)

$$D_{\text{в}} = \sum \frac{u_i^2}{n} - \left(\sum \frac{u_i}{n} \right)^2$$

или исправленную дисперсию (при $n < 30$)

$$D_{\text{в}} = \frac{n}{n-1} \left(\sum \frac{u_i^2}{n} - \left(\sum \frac{u_i}{n} \right)^2 \right),$$

где $u_i = \varphi(x_i)$.

Эти формулы для вычисления дисперсии применяют и при других способах интегрирования, когда усредняемая функция не совпадает с подынтегральной функцией.

Далее мы выведем формулу для оценки определенного интеграла $I = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$. Введем в рассмотрение случайную величину X, распределенную равномерно в интервале интегрирования $(a; b)$ с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Тогда математическое ожидание

$$M(\varphi(x)) = \int\limits_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a) M(\varphi(x))$.

Заменив математическое ожидание $M(\varphi(x))$ его оценкой – выборочной средней, получим оценку искомого интеграла

$$I_1^* = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i),$$

x_i – возможные значения случайной величины X.

Так как случайная величина X распределена равномерно в интервале $(a;b)$ с плотностью $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, то x_i разыгрывают по формуле $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b dx = r_i$ (см. пункт 2.3, правило 2). Отсюда $x_i = a + (b-a)r_i$, где r_i – случайное число.

Пример 1. Найти: *а*) оценку I_1^* определенного интеграла $I=\int\limits_1^3 (x+1)dx$; *б*) абсолютную погрешность $\left|I-I_1^*\right|$; *в*) минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$.

Решение: *а*) Используем формулу $I_1^* = \dfrac{(b-a)}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$. По условию $a=1,\ b=3,\ \varphi(x)=x+1$. Примем для простоты число испытаний $n=10$. Тогда $I_1^* = \dfrac{(3-1)}{10}\cdot\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i+1)=\dfrac{2}{10}\cdot\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i+1)$, где возможные значения x_i разыгрывают по формуле $x_i = a+(b-a)r_i = 1 + (3-1)r_i = 1+2r_i$, где r_i – случайное число.

Результаты десяти испытаний приведены в таблице. Случайные числа r_i получены одним из описанных в пункте 2.1 способом.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
x_i	1,200	2,946	1,506	1,752	2,040	1,270	2,726	1,934	1,708	2,752
φ_i	2,200	3,946	2,506	2,752	3,040	2,270	3,726	2.934	2,7080	3,752

Из таблицы находим $\sum\varphi(x_i)=29{,}834.$ Искомая оценка $I_1^* = 2\cdot\dfrac{29{,}834}{10}=5{,}967.$

б) Приняв во внимание, что $I=\int\limits_1^3 (x+1)\,dx=6,$ найдем абсолютную погрешность $\left|16-5,9671\right|=0,033.$

в) Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X)=X+1$. Учитывая, что случайная величина X в интервале интегрирования (1; 3) распределена равномерно и ее дисперсия $D(X)=\dfrac{(3-1)^2}{12}=\dfrac{1}{3},$ получим $\sigma^2=D(X+1)=D(X)=\dfrac{1}{3}.$

Найдем минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta=0,1$. Из равенства $\Phi(t)=\dfrac{0,95}{2}=0,475$ по таблице значений функции $\Phi(x)$ находим $t=1,96.$ Искомое минимальное число испытаний $n=\dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}=\dfrac{1,96^2\cdot\frac{1}{3}}{0,1^2}=128.$

Пример 2. В качестве приближенного значения интеграла $I=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx$ принята оценка $I_1^*=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x_i).$ Найти минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,95 верхняя граница ошибки $\delta=0,1$.

Решение. Найдем дисперсию усредняемой функции $\varphi(X)=\cos X$, учитывая, что случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ с плотностью $f(x)=\dfrac{2}{\pi}$:

$$\sigma^2=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx-\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)^2=0,09.$$

Из равенства $\Phi(t)=\dfrac{0,95}{2}=0,475$ по таблице значений функции $\Phi(x)$ находим $t=1,96.$

Искомое минимальное число испытаний $n=\dfrac{t^2\sigma^2}{\delta^2}=\dfrac{1{,}96^2\cdot 0{,}09}{0{,}1^2}=35.$

В качестве оценки двойного интеграла $I=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dx\,dy,$ где область интегрирования D принадлежит единичному квадрату $\left(0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\right),$ принимают

$$I_1^*=\frac{S}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i,\ y_i\right), \tag{2.1}$$

где S – площадь области интегрирования, N – число случайных точек $\left(x_i;\ y_i\right),$ принадлежащих области интегрирования.

Если вычислить площадь S трудно, то в качестве ее оценки можно принять $S^*=\dfrac{N}{n}.$ В этом случае формула (2.1) имеет вид

$$I_1^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i,\ y_i\right),$$

где n – число испытаний.

Пример 3. Найти оценку I^* интеграла $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1\left(x+y\right)dy.$ Произвести 10 испытаний.

Решение. Область интегрирования ограничена линиями $y=x,$ $y=1,$ $x=0$ и, очевидно, принадлежит единичному квадрату. Площадь области интегрирования (прямоугольного треугольника) $S=\dfrac{1\cdot 1}{2}=0{,}5.$

Используем формулу

$$I_1^*=\frac{S}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i,y_i\right)=\frac{0{,}5}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i,y_i\right),$$

где N – число случайных точек $\left(x_i,\ y_i\right),$ которые принадлежат области интегрирования; у этих точек $y_i\ge x_i$ (при каждом испытании, в котором это условие выполняется, в счетчик N записывают единицу). Пары независимых случайных чисел (x_i, y_i) берем из таблицы случайных чисел, начиная с первой строки сверху. Результаты 10 испытаний приведены в таблице.

Номер испытания i	x_i	y_i	Счетчик $y_i \geq x_i$	$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$
1	0,100	0,973	1	1,073
2	0,253	0,376	1	0,629
3	0,520	0,135		
4	0,863	0,467		
5	0,354	0,876	1	1,230
6	0,809	0,590		
7	0,911	0,737		
8	0,542	0,048		
9	0,056	0,489	1	0,545
10	0,474	0,296		
$\sum$			4	3,477

Из таблицы находим $N = 4$, $\sum_{i=1}^{4} f(x_i, y_i) = 3,477$. Подставив эти числа в формулу (2.1), получим искомую оценку:

$$I^* = 0,5 \cdot \frac{3,477}{4} = 0,435.$$

Сравнительно большое расхождение полученной оценки с точным значением $I = 0,5$ объясняется малым числом испытаний.

В качестве оценки интеграла $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, где область интегрирования V принадлежит единичному кубу $(0 \leq x \leq 1;$ $0 \leq y \leq 1;\ 0 \leq z \leq 1)$, принимают

$$I_1^* = \frac{V}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i), \tag{2.2}$$

где V – объем области интегрирования, N – число случайных точек (x_i, y_i, z_i), принадлежащих области интегрирования.

Если вычислить объем трудно, то в качестве его оценки можно принять $V^* = \frac{N}{n}$. В этом случае формула (2.2) имеет вид

$$I_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i),$$

где n – число испытаний.

Б. Способ существенной выборки, использующий «вспомогательную плотность распределения».

В качестве оценки интеграла $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ принимают

$$I_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)},$$

где n – число испытаний; $f(x)$ – плотность распределения «вспомогательной» случайной величины X, причем $\int_a^b f(x)dx = 1$; x_i – возможные значения X, которые разыгрывают по формуле

$$\int_a^{x_i} f(x)dx = r_i.$$

Функцию $f(x)$ желательно выбирать так, чтобы отношение $\frac{f(x)}{|\varphi(x)|}$ при различных значениях x изменялось незначительно. В частности, если $f(x) = \frac{1}{b-a}$, получим оценку I_1^*.

Выведем формулу для оценки I_2^*.

Пусть $f(x)$ – плотность распределения некоторой случайной величины X в интервале интегрирования $(a; b)$, т. е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 1.$

Представим интеграл I в виде $I = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x)\,dx.$ Таким образом, интеграл I имеет вид математического ожидания функции $F(X) = \frac{\varphi(X)}{f(X)}.$ В качестве оценки этого математического ожидания, а следовательно, и равного ему интеграла I, примем выборочную среднюю

$$I_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)},$$

где x_i – возможные значения X, которые разыгрывают по известной плотности $f(x)$, n – число испытаний. Искомая оценка получена.

Пример 4. Найти оценку I_2^* интеграла $I = \int\limits_0^1 e^x dx.$

Решение. Так как $e^x = 1 + x + \ldots,$ то в качестве плотности распределения «вспомогательной» случайной величины X примем функцию $f(x) = C(1+x)$. Из условия $C\int\limits_0^1 (1+x)\,dx = 1$ найдем $C = \frac{2}{3}.$

Итак, $f(x) = \frac{2}{3}(1+x).$ Запишем искомый интеграл так:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\frac{2}{3}(1+x)}\frac{2}{3}(x+1)\,dx.$$

Таким образом, интеграл $I=\int_0^1 e^x dx$ представлен в виде математического ожидания функции $\dfrac{e^x}{\frac{2}{3}(1+x)}$. В качестве искомой оценки примем выборочную среднюю (для простоты ограничимся десятью испытаниями) $I_2^* = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\dfrac{e^{x_i}}{\frac{2}{3}(x_i+1)} = 0{,}15\sum_{i=1}^{10}\dfrac{e^{x_i}}{x_i+1}$, где x_i – возможные значения *X*, которые разыгрывают по известной плотности $f(x)=\dfrac{2}{3}(1+x)$. По правилу 2 (см. пункт 2.3), имеем $\dfrac{2}{3}\int_0^{x_i}(x+1)dx = r_i$.

Отсюда находим явную формулу для разыгрывания возможных значений *X*:

$$x_i = \sqrt{1+3r_i} - 1.$$

В таблице приведены результаты 10 испытаний.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876
x_i	0,140	0,980	0,326	0,459	0,600	0,185	0,894	0,550	0,436	0,905
e^{x_i}	1,150	2,664	1,385	1,582	1,822	1,203	2,445	1,733	1,546	2,472
x_i+1	1,140	1,980	1,326	1,459	1,600	1,185	1,894	1,550	1,436	1,905
$\dfrac{e^{x_i}}{x_i+1}$	1,009	1,345	1,044	1,084	1,139	1,015	1,291	1,118	1,077	1,298

Сложив числа последней строки таблицы, получим $\sum_{i=1}^{10}\dfrac{e^{x_i}}{x_i+1} = 11{,}42$.

Искомая оценка в силу формулы (2.2) равна $I_2^* = 0{,}15\cdot 11{,}42 = 1{,}713$.

В. Способ, основанный на истолковании интеграла как площади.

Пусть подынтегральная функция неотрицательна и ограничена: $0 \le \varphi(x) \le c,$ а двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике D с основанием $(b-a)$ и высотой c. Тогда двумерная плотность вероятности $f(x, y) = \dfrac{1}{(b-a)c}$ для точек, принадлежащих D; $f(x, y) = 0$ вне D.

В качестве оценки интеграла $I = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$ принимают

$$I_3^* = (b-a) \cdot c \cdot \frac{n_1}{n},$$

где n – общее число случайных точек $(x_i, y_i),$ принадлежащих D; n_1 – число случайных точек, которые расположены под кривой $y = \varphi(x).$

Выведем формулу для оценки $I_3^*.$ Введем в рассмотрение двумерную случайную величину $(X, Y),$ распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $(b-a)$ и высотой c, плотность вероятности которой $f(x, y) = \dfrac{1}{(b-a)c}.$ Составляющая X распределена в интервале $(a; b)$ равномерно с плотностью $\dfrac{1}{b-a}.$ Составляющая Y распределена в интервале $(0; c)$ с плотностью $\dfrac{1}{c}.$

Если разыграно n точек $(x_i, y_i),$ принадлежащих прямоугольнику D, из которых n_1 точек оказались под кривой $y = \varphi(x),$ то отношение площади, определяемой интегралом $I,$ к площади прямоугольника D $\dfrac{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}{(b-a)\cdot c} \approx \dfrac{n_1}{n}$. Отсюда $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\cdot c\cdot\dfrac{n_1}{n}$. Таким образом, в качестве оценки интеграла $I = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ можно принять $I_3^* = (b-a)\cdot c\cdot\dfrac{n_1}{n}$.

Пример 5. Найти оценку I_3^* интеграла $\int\limits_0^2 \left(4-x^2\right)dx$.

Решение. Используем формулу для I_3^*. В интервале (0; 2) подынтегральная функция $\varphi(x) = 4-x^2$ неотрицательна и ограничена, причем $\varphi(x) \le \varphi(0) = 4$. Следовательно, можно принять $c = 4$.

Введем в рассмотрение двумерную случайную величину (X, Y), распределенную равномерно в прямоугольнике D с основанием $b-a = 2-0 = 2$ и высотой $c = 4$, плотность вероятности которой $f(x, y) = \dfrac{1}{(2-0)\cdot 4} = \dfrac{1}{8}$.

Разыграем n =10 случайных точек (x_i, y_i), принадлежащих прямоугольнику D. Учитывая, что составляющая X в интервале (0; 2) распределена равномерно с плотностью $f_1(x) = \dfrac{1}{2}$ и составляющая Y в интервале (0; 4) распределена равномерно с плотностью $f_2(x) = \dfrac{1}{4}$, разыграем координаты случайной точки (x_i, y_i), принадлежащей прямоугольнику D, по паре независимых случайных чисел (r_i, R_i):

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^{x_i} dx = r_i, \qquad \frac{1}{4}\int\limits_a^{y_i} dy = R_i.$$

Отсюда $x_i = 2r_i$, $y_i = 4R_i$.

Если окажется, что $y_i < 4 - x_i$, то точка (x_i, y_i) лежит под кривой $y = \varphi(x)$ и в «счетчик n_i» надо добавить единицу.

Результаты десяти испытаний приведены в таблице.

Номер испытания i	r_i	$x_i = 2r_i$	x_i^2	$4 - x_i^2$	R_i	$y_i = 4R_i$	$y_i < 4 - x_i^2$
1	0,100	0,200	0,040	3,960	0,973	3,892	1
2	0,253	0,506	0,256	3,744	0.376	1,504	1
3	0,520	1,040	1,082	2,918	0,135	0,540	1
4	0,863	1,726	2,979	1,021	0,467	1,868	
5	0,354	0,708	0,501	3,499	0.876	3,504	
6	0,809	1,618	2,618	1,382	0,590	2,360	
7	0,911	1,822	3,320	0,680	0,737	2,948	
8	0,542	1,084	1,175	2,825	0,048	0.192	1
9	0,056	0,112	0,013	3,987	0,489	1.956	1
10	0,474	0,948	0,899	3.101	0,296	1,184	1

Из таблицы находим $n_1 = 6.$ Искомая оценка интеграла

$$I_3^* = (b-a) \cdot c \cdot \frac{n_1}{n} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{6}{10} = 4{,}8.$$

Г. Способ «выделения главной части».

В качестве оценки интеграла $I = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ принимают

$$I_4^* = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(\varphi(x_i) - g(x_i)\big) + \int_a^b g(x)\,dx,$$

где x_i – возможные значения случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале интегрирования $(a;b)$. Их разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a)r_i$, где r_i – случайное число. Функция $g(x) \approx \varphi(x)$, причем интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ можно вычислить обычными методами.

Выведем формулу для оценки I_4^*.

Введем в рассмотрение случайную величину *X*, распределенную равномерно в интервале интегрирования $(a;b)$ с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.

Допустим, что найдена такая функция $g(x)$, которая «мало отличается» от $\varphi(x)$, интеграл от которой можно вычислить, не прибегая к методу Монте-Карло. Тогда математическое ожидание функции $F(X) = (b-a)\big(\varphi(X) - g(X)\big) + \int_a^b g(x)\,dx$ равно I.

Действительно, учитывая распределение величины *X*, получим

$$M\big(F(X)\big) = (b-a)\int_a^b \big(\varphi(x) - g(x)\big)\frac{dx}{b-a} + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)dx = I.$$

Таким образом, в качестве оценки математического ожидания $M(F(X))$, а, следовательно, и интеграла I, можно принять среднее арифметическое *n* значений функции $F(X)$:

$$I_4^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\varphi(x_i) - g(x_i)\big) + \int_a^b g(x)\,dx,$$

где x_i – возможные значения величины *X*, которые разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a)r_i$.

Пример 6. Найти оценку I_4^* интеграла $I=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Решение. Так как $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\ldots,\left(|x|\le 1\right),$ то возьмем $g(x)=$ $=1+\dfrac{1}{2}x^2.$ Тогда, полагая число испытаний n = 10, имеем оценку

$$I_4^*=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(\sqrt{1+x_i^2}-\left(1+\frac{1}{2}x_i^2\right)\right)+\int\limits_0^1\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)dx.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$I_4^*=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10}\left(2\sqrt{1+x_i^2}-x_i^2\right)+\frac{1}{6}. \tag{2.3}$$

Учитывая, что $a=0,\ b=1,$ возможные значения x_i разыграем по формуле $x_i=a+(b-a)r_i=r_i.$ Результаты вычислений приведены в таблице.

Номер испытания i	r_i	x_i^2	$1+x_i^2$	$\sqrt{1+x_i^2}$	$2\sqrt{1+x_i^2}-x_i^2$
1	0,100	0,010	1,010	1,005	2,000
2	0,973	0,947	1,947	1,395	1,843
3	0,253	0,064	1,064	1,032	2,000
4	0,376	0,141	1,141	1,068	1,995
5	0,520	0,270	1,270	1,127	1,984
6	0,135	0,018	1,018	1,009	2,000
7	0,863	0,745	1,745	1,321	1,897
8	0,542	0,218	1,218	1,104	1,990
9	0,354	0,125	1,125	1,061	1,997
10	0,870	0,767	1,767	1,329	1,891

Сложив числа последнего столбца таблицы, найдем сумму 19,597, подставив которую в соотношение (2.3), получим искомую оценку интеграла $I_4^*=\dfrac{19{,}597}{20}+\dfrac{1}{6}=1{,}145.$ Заметим, что точное значение $I=1{,}147.$

Задачи

1. В качестве приближенного значения интеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ принята оценка I_1^*. Найти минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,99 верхняя граница ошибки $\delta = 0{,}05$.

2. Найти *а*) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_2^5 x^2\,dx$; *б*) дисперсию σ^2 усредняемой функции $\varphi(X) = X^2$; *в*) минимальное число испытаний, которые с надежностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки $\delta = 0{,}1$.

3. Найти: *а*) оценку I_1^* определенного интеграла $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; *б*) дисперсию e^x усредняемой функции $\varphi(X) = e^X$; *в*) минимальное число испытаний, при котором с надежностью 0,95 верхняя граница ошибки $\delta = 0{,}02$.

4. Найти оценку определенных интегралов:

$$а)\ \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x\,dx; \qquad б)\ \int\limits_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$$

5. Найти оценку I^* интегралов:

$$а)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy; \quad б)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy; \quad в)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y}\,dy.$$

Произвести по 10 испытаний. Случайные числа записывать с тремя знаками после запятой.

6. Найти оценки I_2^* определенных интегралов:

$$а)\int_1^3 (x+1)\,dx; \quad б)\int_0^1 e^{2x}\,dx; \quad в)\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx; \quad г)\int_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$$

Указание. Принять в качестве «вспомогательной плотности» функцию, соответственно равную: *а*) $\frac{x}{4}$; *б*) $\frac{1}{2}(1+2x)$; *в*) $\frac{8x}{\pi^2}$; *г*) $\frac{1,092}{1+x}$.

7. Найти оценку I_3^* интеграла $\int_1^4 \frac{4}{x}dx$.

8. Найти оценку I_3^* интеграла $\int_0^1 e^x\,dx$.

9. Найти оценку I_4^* интеграла $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Указание. Принять функцию $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$, т. к. $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\ldots$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КРУШЕВСКИЙ Евгений Александрович
ХОТОМЦЕВА Марина Альбертовна

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Пособие
для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Редактор *Ю. В. Ходочинская*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 30.04.2018. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 100. Заказ 110.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.