

УДК 539.3

*А. С. КРАВЧУК<sup>1</sup>, А. И. КРАВЧУК<sup>1</sup>, Е. В. КОЧИК<sup>2</sup>, И. А. ТАРАСЮК<sup>3</sup>*

### **УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ЦЕНТРАЛЬНО-СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: ask\_Belarus@inbox.ru,*

<sup>2</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: zhenjatomilo@gmail.com,*

<sup>3</sup>*Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

Актуальность настоящего исследования состоит не только в том, что данные задачи не решены для композиционных тел, но и в том, что, к сожалению, несмотря на большой интерес к решению данного типа задач, до настоящего времени остались методические неточности их решения. Исследования, проведенные в данной статье, позволили сделать заключение, что общеизвестному уравнению потери устойчивости соответствуют только две схемы закрепления концов центрально-сжатого вдоль оси  $Ox$  стержня: двумя закрепленными по оси  $Oy$  концами, а также верхним закрепленным (конец приложения силы) и нижним свободно перемещающимся концом с дополнительным условием равенства нулю производной уравнения изогнутого нейтрального слоя в нижней точке.

Известное уравнение устойчивости по Эйлеру не может быть использовано для решения задач устойчивости с нижним «зачемленным», и верхним (конец приложения силы) свободным концами. Применяемое во многих работах повышение порядка дифференциального уравнения для обоснования иных схем закрепления не имеет никакого математического обоснования.

Получено выражение для первой критической силы в зависимости от концентрации компонент в композиционном материале. Получено решение задачи устойчивости для однородно стареющего вязкоупругого материала. Определено уравнение релаксации первой критической нагрузки. Данное решение обобщено на композиционный неоднородный материал, состоящий из однородно стареющих вязкоупругих материалов.

*Ключевые слова:* устойчивость стержней, вязкоупругие свойства твердых тел, композиционные тела, приближение Хилла кривизны композиционного стержня, эффективные деформационные и реологические свойства композиционного стержня.

*A. S. KRAVCHUK<sup>1</sup>, A. I. KRAVCHUK<sup>1</sup>, Y. V. KOCHYK<sup>2</sup>, I. A. TARASYUK<sup>3</sup>*

### **STABILITY OF COMPOSITE PRISMATIC ROD OF RECTANGULAR CROSS-SECTION AT CENTRAL COMPRESSION**

<sup>1</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus,  
e-mail: ask\_Belarus@inbox.ru,*

<sup>2</sup>*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus,  
e-mail: zhenjatomilo@gmail.com,*

<sup>3</sup>*Physico-Technical Institute of the National Academy of Sciences, Minsk, Belarus*

Actuality of this study is not only in the fact that these problems are not solved for composite rods, but also in the fact that, unfortunately, despite of the huge interest in solving this problems it was still remained methodological inaccuracies in their solutions. Studies carried out led to the conclusion that the known equation of the losses of stability corresponds to only two schemes of constraints of ends of centrally compressed along the  $Ox$  axis rod: two fixed-ends in  $Oy$  direction, as well as fixation in  $Oy$  direction of the top end (it means the rod end of application of the force) and fixation in  $Oy$  direction of derivative of the equation of neutral layer of rod at the bottom end.

The equation of Euler stability cannot be used to solve the problems of stability with the lower “clamped” and the free top ends. Applied in many papers increasing of order of differential equation for study of other schemes of fixation of rod ends has no mathematical justification.

An equation for definition of the value of the first critical force was obtained depending on the concentration of the components in the composite material. The solution to the problem of stability for uniform aging viscoelastic material of rod was hold. The relaxation equation of the first critical load was defined. This solution is generalized to inhomogeneous composite material which consists of homogeneously aging viscoelastic components.

*Keywords:* stability of rods, viscoelastic properties of solids, composite body, Hill approximation of curvature of the composite rod, effective deformation and rheological properties of the composite rod.

**Введение.** Вопросы обеспечения устойчивости сжатых стержней, изогнутых балок, пластин, оболочек и т.п. имеют большое значение в технике. Именно в этом направлении и развивалась главным образом теория устойчивости сооружений, получившая широкое применение в практике инженерных расчетов. Прикладной характер этой науки нередко приводил к тому, что теоретические обоснования и строгость изложения уходили на второй план, однако по мере развития этих методов назрела потребность в большем обобщении их на базе общей теории [1, 2].

**Классическая геометрическая постановка задачи [1].** Представим теперь гибкую упругую полосу, установленную вертикально и закрепленную нижним концом (рис. 1). Допустим, что на верхний конец полосы передается сжимающая сила  $P$ , направленная вертикально вниз. При малых значениях силы она будет сжиматься, оставаясь прямолинейной.

Нагрузка, при которой начальная форма равновесия перестает быть устойчивой, называется критической. Приложение к стержню силы, равной критической или превышающей ее, ведет к продольному изгибу (рис. 1).

*Упругий однородный стержень из одного линейно-упругого материала.* Исследование устойчивости, как правило, проводится с использованием гипотез чистого изгиба, т. е. будем предполагать справедливой гипотезу плоских сечений, а нейтральный слой стержня будем считать несжимаемым и нерастяжимым.

Рассмотрим упругий призматический стержень прямоугольного сечения, сжатый продольной силой  $P$  (рис. 1). Напомним равенство, устанавливающее связь между радиусом кривизны  $\rho$  изгиба призматического бруса с прямоугольным сечением (шириной  $h$  и глубиной  $\Delta$ ) и приложенным моментом  $M$  :

$$EJ \frac{1}{\rho} = M, \quad (1)$$

где  $J = h^3 \Delta / 12$ .

Покажем, что использование непосредственно формулы (1) при выводе уравнения потери устойчивости по Эйлеру также верно, хотя в равенство (1) входят константы  $\rho$  и  $M$ , а при выводе упомянутого уравнения предполагается, что  $\rho$  и  $M$  являются функциями от  $z$ .

Будем предполагать, что  $\sigma_z$  не является константой, а зависит от координаты  $z$ . Тогда будем полагать, что [3, 4]

$$\sigma_z(z) = E \frac{y - \delta}{\rho(z)}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости.

Подставляя выражение (2) в уравнения равновесия [3, 4], получаем, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (y - \delta) dy = 0, \quad \frac{E}{\rho(z)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (y - \delta) y dy = \frac{M(z)}{\Delta}. \quad (3)$$

Проведя вычисления непосредственно в уравнениях равновесия (3), получаем аналог выражения (1) с переменными параметрами  $\rho(z)$  и  $M(z)$  :

$$EJ \frac{1}{\rho(z)} = M(z). \quad (4)$$

Из курса дифференциальной геометрии известно, что кривизна  $1/\rho(z)$  плоской кривой уравнением  $u(z)$  (перемещения изогнутой нейтральной линии балки) определяется соотношением [5]

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{\frac{d^2 u(z)}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{du(z)}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

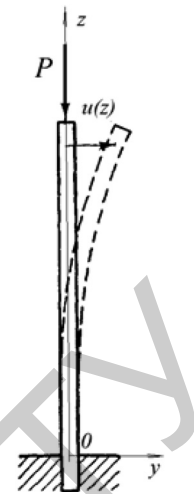


Рис. 1. Потеря устойчивости стержня, сжатого в осевом направлении

Для любой высоты  $z$  (рис. 1) будем считать, что изгибающий балку момент  $M(z)$  будет определяться уравнением

$$M(z) = Pu(z). \quad (6)$$

Предполагая малость  $du(z)/dz$  в выражении (5) такой, что  $(du(z)/dz)^2 \ll 1$ , и подставляя формулы (5) и (6) в (4), получаем в соответствии с правилом знаков

$$EJ \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = Pu(z). \quad (7)$$

Отметим, что уравнение (7), соответствующее схеме нагружения (рис. 1) с крайними условиями  $u(0) = 0$ ,  $\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = 0$ , имеет только нулевое решение, т.е. потеря устойчивости в виде, изображенном на рис. 1, невозможна.

Рассмотрим несколько другую схему потери устойчивости (рис. 2). Уравнение, отвечающее данному виду потери устойчивости, соответствует другому уравнению:

$$EJ \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -Pu(z). \quad (8)$$

В уравнении (8) кривизна стержня имеет противоположный знак с перемещениями нейтрального слоя  $u(z)$ . Уравнение (8) неразрывно связано с крайними условиями  $u(0) = 0$ ,  $u(\ell) = 0$ , где  $\ell$  – длина стержня, и соответствует только схеме потери устойчивости (рис. 2) и не может быть применено к потере устойчивости (рис. 1).

Отметим также, что в учебной литературе [1, 2] не только уравнение (8) неверно используется для исследования схемы нагружения (рис. 1), но и произвольно повышается порядок дифференциального оператора в уравнении (8) до четвертого для того, чтобы охватить наиболее широкий круг вариантов закреплений концов стержня. Однако это – совершенно бессмысленное действие, исходя из того, что уравнение потери устойчивости имеет только вид (8) с одним возможным вариантом крайних условий  $u(0) = 0$ ,  $u(\ell) = 0$  и соответствует только рис. 2. В данном случае повышение порядка дифференциального оператора приводит к более сложному решению, части которого просто должны обнуляться за счет выбора соответствующих констант, чтобы совпасть с решением уравнения (8).

Даже в случае «зашемления» обоих концов балки, который близок к случаю рассматриваемому на рис. 2, уравнение с повышенным порядком не будет описывать устойчивость, поскольку кривизна «зашемленного» по концам стержня имеет переменный знак, т.е. базовое уравнение (8) неверно.

**Решение уравнения потери устойчивости.** Уравнение (8) можно привести к виду

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + a^2 u(z) = 0, \quad (9)$$

где  $a = \sqrt{P/EJ}$ .

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$u(z) = C_1 \cos(az) + C_2 \sin(az). \quad (10)$$

Исходя из крайних условий, из выражения (10) получаем систему линейных уравнений для определения констант  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 \cos(a\ell) + C_2 \sin(a\ell) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Чтобы система (11) имела ненулевое решение, достаточно  $\sin(a\ell) \equiv 0$ , т.е. критическое состояние стержня определяется уравнением

$$a\ell = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$



Рис. 2. Потеря устойчивости стержня при двух закрепленных концах

Таким образом, формально критические длины  $\ell_k$  сжатого стержня определяются уравнением по заданным геометрическим и механическим параметрам и приложенной нагрузке:

$$\ell_k = k\pi\sqrt{\frac{EJ}{P}} \quad (k=1,2,\dots). \quad (12)$$

Можно обратить уравнение (12) и получить значение критических нагрузок

$$P_k = EJ\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \quad (k=1,2,\dots). \quad (13)$$

Отметим, что в выражении (13) для практики важно первое критическое значение нагрузки  $P_1 = EJ(\pi/\ell)^2$ , при которой и происходит потеря устойчивости. Очевидно, что для более высоких критических нагрузок потеря устойчивости стержня тем более произойдет.

**Обобщение результатов исследования на случай композиционного стержня [4].** Для решения задачи устойчивости стержня с использованием эффективного модуля упругости рассматривается элемент композиционного материала (макроточка), на границе которого задаются воздействия, имитирующие воздействия, возникающие в твердом теле, т.е. в данном случае рассматривается чистый изгиб призматического поперечного элемента бруса длиной  $dz$ . При этом  $dz \ll \ell$ .

Предполагается, что значения объемных долей  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) (концентраций) компонент композиционного материала известны для бруса в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из призматических поперечных элементов бруса длиной  $dz$ . При усреднении упругих характеристик композиционного материала бруса предполагается, что механические свойства  $E_k$  (модуль упругости) известны для каждой компоненты  $k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). В [4] установлено, что при чистом изгибе композиционного структурно-неоднородного бруса аналогом выражения (4) может быть следующее уравнение:

$$\left\langle \frac{1}{\rho(z)} \right\rangle = \frac{1}{\langle E \rangle J} M(z), \quad (14)$$

где  $\langle 1/\rho(z) \rangle$  – средняя кривизна по теории Хилла для композиционного бруса,

$$\langle E \rangle = \frac{2\langle E \rangle_P \langle E \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi + \langle E \rangle_P},$$

$$\langle E \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^N \gamma_k E_k, \quad \langle E \rangle_P = \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}.$$

Таким образом, исходя из уравнения (14) и рассуждений (2)–(8), в случае композиционного материала аналогом выражения (9) является уравнение

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \langle a \rangle_X^2 u(z) = 0. \quad (15)$$

Здесь  $\langle a \rangle_X = \sqrt{P/\langle E \rangle_X J}$ . Таким образом, принимая во внимание формулы (9), (13) и (15), получаем, что первая критическая сила  $P_1$  для призматического бруса с прямоугольным поперечным сечением из композиционного структурно-неоднородного материала может быть определена следующим уравнением:

$$P_1 = \langle E \rangle_X J \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2. \quad (16)$$

*Потеря устойчивости вязкоупругим однородно стареющим стержнем.* При решении задачи устойчивости для вязкоупругого однородно стареющего стержня, нагруженного в осевом направлении нагрузкой  $P(t)$ , будем использовать обобщенное уравнение, аналогичное выражению (4) [6]:

$$\frac{1}{\rho(z,t)} = \frac{1}{JE(t)} \left[ M(z,t) + \int_0^t M(z,\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau \right] \quad (17)$$

( $E(t)$  – мгновенный модуль упругости,  $\Gamma(t,\tau)$  – ядро ползучести).

Пусть  $u(z,t)$  – перемещение изогнутого нейтрального слоя балки в фиксированное время  $t$ . Тогда по аналогии будем определять кривизну  $1/\rho(z,t)$  плоской кривой с уравнением  $u(z,t)$  с фиксированным временем  $t$  аналогично выражению (5):

$$\frac{1}{\rho(z,t)} = \frac{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}}{\left( 1 + \left( \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (18)$$

Для любой высоты  $z$  будем считать, что изгибающий балку момент  $M(z,t)$  будет определяться уравнением, аналогичным выражению (6):

$$M(z,t) = P(t)u(z,t). \quad (19)$$

Предполагая малость  $\partial u(z,t)/\partial z$  в выражении (18) такой, что  $(\partial u(z,t)/\partial z)^2 \ll 1$ , и подставляя формулы (18) и (19) в (17), получаем в соответствии с правилом знаков для схемы потери устойчивости (рис. 2)

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -a(t)^2 u(z,t), \quad (20)$$

где  $a(t) = \sqrt{\frac{1}{JE(t)} \left[ P(t) + \int_0^t P(\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau \right]}$ .

Не повторяя формально вычисления предыдущего параграфа, можно получить критические длины  $\ell_k$  сжатого призматического стержня с прямоугольным сечением:

$$\ell_k = k\pi \sqrt{\frac{JE(t)}{P(t) + \int_0^t P(\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau}} \quad (k=1,2,\dots). \quad (21)$$

Можно обратить уравнение (21) и получить значение критических нагрузок

$$P_k(t) + \int_0^t P_k(\tau) \Gamma(t,\tau) d\tau = JE(t) \left( \frac{k\pi}{\ell} \right)^2 \quad (k=1,2,\dots). \quad (22)$$

Отметим, что если экспериментально установлено ядро релаксации, то, формально обращая выражение (22), можно получить для первой критической нагрузки (рис. 3)

$$P_1(t) = J \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \left( E(t) - \int_0^t E(\tau) R(t,\tau) d\tau \right). \quad (23)$$

Из формул (22) и (23) очевидно, что происходит релаксация (уменьшение критической нагрузки со временем).

*Композиционный структурно-неоднородный стержень из смеси вязкоупругих однородно стареющих материалов [6].* Предположения, используемые при решении задачи для композиционного бруса с учетом вязкоупругих свойств материалов, составляющих композицию, полностью соответствуют гипотезам для упругого случая, приведенного выше. Не повторяя рассуждений для элемента бруса длиной  $dz$ , отметим, что при усреднении вязкоупругих характеристик материалов, составляющих композицию, предполагается, что механические свойства  $E_k(t)$  (мгновенный модуль упругости) и  $\Gamma_k(t,\tau)$  (ядро ползучести) известны для каждой компоненты  $k$

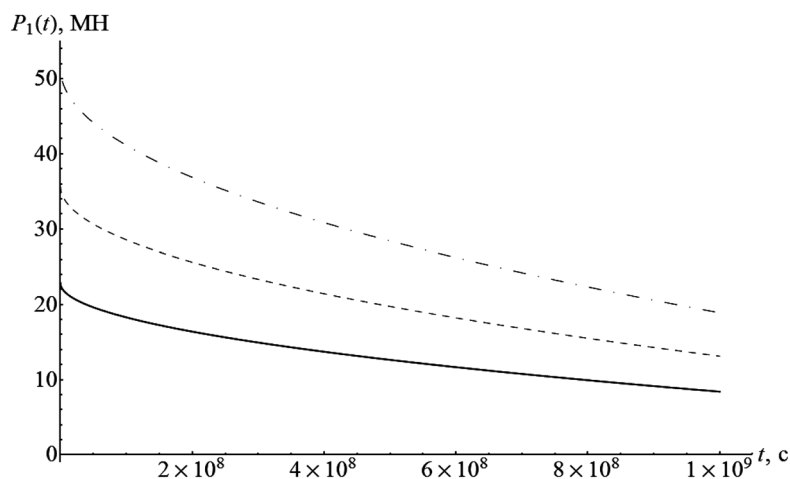


Рис. 3. Релаксация первой критической нагрузки (23) для стержней длиной  $\ell_1=10$  м (штрихпунктирная линия),  $\ell_2=12$  м (штриховая линия),  $\ell_3=15$  м (сплошная линия) ( $h=0,5$  м,  $\Delta=0,5$  м,  $E(t)=E=10^{11}$  Па, ядро в виде  $R(t, \tau)=10^{-5}(t-\tau)^{-1/2}$ )

( $k=\overline{1, N}$ ) композиционного материала. Используя результаты [6], можно получить уравнение, аналогичное выражению (17):

$$\left\langle \frac{1}{\rho(z, t)} \right\rangle = \frac{1}{J \langle E(t) \rangle} \left( M(z, t) + \int_0^t M(z, \tau) \langle \Gamma(t, \tau) \rangle d\tau \right), \quad (24)$$

где  $\langle 1/\rho(z, t) \rangle$  – средняя кривизна по Хиллу для бруса из вязкоупругого композиционного неоднородного материала,

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &= \frac{2 \langle E(t) \rangle_P \langle E(t) \rangle_\Phi}{\langle E(t) \rangle_\Phi + \langle E(t) \rangle_P}, \\ \langle E(t) \rangle_P &= \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1}, \quad \langle E(t) \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^N \gamma_k E_k(t), \\ \langle \Gamma(t, \tau) \rangle &= \frac{\langle E(t) \rangle_\Phi}{\langle E(t) \rangle_\Phi + \langle E(t) \rangle_P} \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P + \frac{\langle E(t) \rangle_P}{\langle E(t) \rangle_\Phi + \langle E(t) \rangle_P} \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi, \\ \langle \Gamma(t) \rangle_P &= \langle E(t) \rangle_P \left( \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)} \right), \quad \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \Gamma_k(t, \tau). \end{aligned}$$

С помощью уравнения (24) можно при соответствующих ограничениях получить уравнение (20) с параметром  $\langle a(t) \rangle$ :

$$\langle a(t) \rangle = \sqrt{\frac{1}{J \langle E(t) \rangle} \left[ P(t) + \int_0^t P(\tau) \langle \Gamma(t, \tau) \rangle d\tau \right]}. \quad (25)$$

Соответственно для композиционного неоднородного стержня изменение первой критической нагрузки во времени  $t$  можно определить с помощью уравнения

$$P_1(t) + \int_0^t P_1(\tau) \langle \Gamma(t, \tau) \rangle d\tau = J \langle E(t) \rangle \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2.$$

**Заключение.** Исследования, проведенные в данной статье, позволили заключить, что общеизвестному уравнению потери устойчивости соответствуют только две схемы закрепления кон-



цов центрально-сжатого вдоль оси  $Ox$  стержня: двумя закрепленными по оси  $Oy$  концами, а также верхним закрепленным (конец приложения силы) концом и нижним свободно перемещающимся концом с дополнительным условием равенства нулю производной уравнения изогнутого нейтрального слоя в нижней точке.

Уравнение устойчивости по Эйлеру не может быть использовано для решения задач устойчивости с нижним «защемленным» и верхним (конец приложения силы) свободным концами.

Применяемое во многих работах повышение порядка дифференциального уравнения для обоснования иных схем закрепления не имеет никакого математического обоснования. Получено выражение для первой критической силы в зависимости от концентрации компонент в композиционном материале. Получено решение задачи устойчивости для однородно стареющего вязкоупругого материала. Определено уравнение релаксации первой критической нагрузки. Данное решение обобщено для композиционного неоднородного материала, состоящего из однородно стареющих вязкоупругих материалов.

### Список использованной литературы

1. *Ржаницын, А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем / А. Р. Ржаницын. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1965. – 475 с.
2. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. *Филин, А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами сплошных сред и строительной механики. Т 2. / А. П. Филин. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
4. *Кравчук, А. С.* Чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев из линейно-упругих материалов / А. С. Кравчук, Е. В. Томило // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2014. – № 3. – С. 15–20.
5. *Бронштейн, И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука. 1986. – 544 с.
6. *Кравчук, А. С.* Вязкоупругий чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев / А. С. Кравчук, Е. В. Томило // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 3 (28). – С. 47–51.

Поступила в редакцию 15.05.2015