



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный  
технический университет**

---

---

**Кафедра «Сопротивление материалов  
машиностроительного профиля»**

**А. И. Дудяк  
Ж. Г. Дикан**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ  
ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ**

**Пособие**

**Минск  
БНТУ  
2018**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Сопротивление материалов  
машиностроительного профиля»

А. И. Дудяк  
Ж. Г. Дикан

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Пособие

для студентов специальностей

1-36 01 01 «Технология машиностроения»,

1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,

1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов  
давлением», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины  
и производства», 1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы»,  
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2018

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251я73

Д81

**Р е ц е н з е н т ы:**

заведующий кафедрой «Теоретическая механика» БГАТУ,

доктор технических наук *А. Н. Орда*;

главный научный сотрудник лаборатории контактно-динамических методов контроля ГНУ «Институт прикладной физики НАН Беларуси»,

доктор технических наук, профессор *В. А. Рудницкий*

**Дудяк, А. И.**

Д81 Геометрические характеристики плоских сечений переменной жесткости : пособие для студентов специальностей 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / А. И. Дудяк, Ж. Г. Дикан. – Минск: БНТУ, 2018. – 32 с.

ISBN 978-985-550-993-7.

**УДК 539.3(075.8)**

**ББК 22.251я73**

Пособие содержит подробный вывод формул для определения геометрических характеристик сечений с переменной жесткостью, а также приведен пример расчета такого сечения.

**ISBN 978-985-550-993-7**

© Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., 2018

© Белорусский национальный  
технический университет, 2018

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в различных областях техники находят широкое применение изделия, изготовленные из различных композиционных материалов. Основная цель композиционных материалов состоит в том, что матрицу армируют другим материалом, обладающим более высокими физико-механическими характеристиками. Ярким примером такого материала является железобетон. Сечение любого железобетонного материала представляет состав, состоящий из двух или более материалов, отличающихся модулями продольной упругости  $E$ , модулями при кручении  $G$ , коэффициентами Пуассона, прочностными характеристиками и т. д. При этом разнородные материалы прочно соединены между собой и работают как единое целое.

Однако расчеты на прочность и жесткость таких стержней имеют существенные отличия от классических методов расчета. Для этих расчетов необходимо уметь определять ряд геометрических характеристик сечений.

В дисциплине «Соппротивление материалов» основным объектом исследований является стержень. В расчетах на прочность, жесткость и устойчивость стержней, состоящих из разнородных и прочно соединенных между собой отдельных стержней, необходимо уметь определять местоположение координатных осей, проходящих через центр жесткости сечения. К геометрическим характеристикам таких стержней относятся статические моменты жесткости, приведенные моменты жесткости сечений и радиусы инерции относительно координатных осей, проходящих через центр жесткости.

# 1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ЖЕСТКОСТИ И ЦЕНТРЫ ЖЕСТКОСТИ

Статические моменты жесткости по аналогии со статическим моментом плоской фигуры можно выразить интегралом следующего вида:

$$ES_x = E \int_A y dA;$$

$$ES_y = E \int_A x dA.$$

Следовательно, статический момент жесткости плоской фигуры представляет собой произведение модуля продольной упругости на статический момент площади. Для плоского поперечного сечения, состоящего из двух разнородных материалов и отличающихся модулями продольной упругости, приведенный статический момент жесткости примет вид, представленный на рис. 1.1.

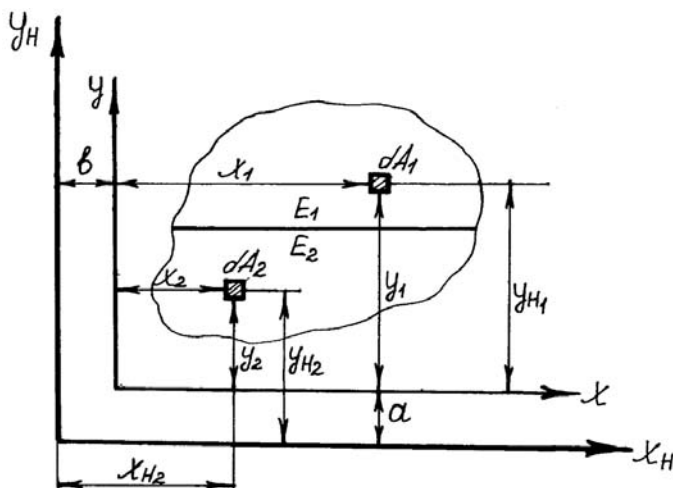


Рис. 1.1. Осевое сечение стержня произвольной формы, состоящее из прочно соединенных между собой стержней

$$(ES_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2; \quad (1.1)$$

$$(ES_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2, \quad (1.2)$$

где  $(ES_x)_{\text{пр}}$  и  $(ES_y)_{\text{пр}}$  – приведенные статические моменты жесткости относительно осей  $x$  и  $y$ .

$$S_{x1} = \int_{A_1} y_1 dA_1; S_{x2} = \int_{A_2} y_2 dA_2; S_{y1} = \int_{A_1} x_1 dA_1; S_{y2} = \int_{A_2} x_2 dA_2 - \text{ста-}$$

тические моменты площадей  $A_1$  и  $A_2$  относительно осей  $x$  и  $y$ .

С учетом этих значений статических моментов площадей выражения (1.1) и (1.2) представим в следующем виде:

$$(ES_x)_{\text{пр}} = E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}; \quad (1.3)$$

$$(ES_y)_{\text{пр}} = E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}. \quad (1.4)$$

В соответствии со знаком координат статический момент жесткости может быть больше или меньше нуля. Поэтому для любого подобного сечения стержня можно определить местоположение координатных осей, относительно которых суммарный статический момент жесткости сечения будет равен нулю. Начало координат для таких осей назовем центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения  $x_{\text{ж}}$  и  $y_{\text{ж}}$  относительно принятых осей отсчета  $x$  и  $y$ . В этом случае приведенные моменты жесткости сечения равны произведению суммарной жесткости отдельных частей сечения на соответствующие координаты  $x_{\text{ж}}$  и  $y_{\text{ж}}$ :

$$(ES_x)_{\text{пр}} = (E_1 A_1 + E_2 A_2) y_{\text{ж}}; \quad (1.5)$$

$$(ES_y)_{\text{пр}} = (E_1 A_1 + E_2 A_2) x_{\text{ж}}. \quad (1.6)$$

Из последних выражений определим координаты центра жесткости сечения относительно координатных осей  $x$  и  $y$ :

$$x_{\text{ж}} = \frac{(ES_y)_{\text{пр}}}{E_1 A_1 + E_2 A_2};$$

$$y_{\text{ж}} = \frac{(ES_x)_{\text{пр}}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}.$$

С учетом выражений (1.3) и (1.4) формулы для определения  $x_{\text{ж}}$  и  $y_{\text{ж}}$  примут следующий вид:

$$x_{\text{ж}} = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2};$$

$$y_{\text{ж}} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}.$$

Если поперечное сечение балки состоит из  $n$  материалов, прочно соединенных между собой, но отличающихся друг от друга модулями продольной упругости, то формулы для определения координат центра жесткости сечения можно представить в следующем виде:

$$x_{\text{ж}} = \frac{E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2} + \dots + E_n S_{yn}}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n}; \quad (1.7)$$

$$y_{\text{ж}} = \frac{E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2} + \dots + E_n S_{xn}}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + \dots + E_n A_n}. \quad (1.8)$$

Анализируя выражения (1.7) и (1.8), приходим к выводу, что они будут полностью соответствовать формулам сопро-

тивления материалов для определения центра тяжести сечения из однородного материала. Для однородного материала  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ .

## 2. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЙ

Из дисциплины «Сопротивление материалов» известно, что осевыми моментами инерции для плоских сечений из однородного материала называются интегралы произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до соответствующих осей, и их можно представить в виде

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

Центробежный момент инерции представляет собой интеграл вида

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Полярный момент инерции – это интеграл вида

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где  $\rho$  – расстояние от начала координат до элементарной площадки  $dA$ .

В случае расчета на прочность и жесткость при изгибе и устойчивости стержней, сечения которых состоят из двух или более различных материалов и жестко соединены между собой, следует использовать приведенный момент инерции жесткости сечения. Для его определения рассмотрим стержень, состоящий



из двух разнородных материалов. Такое сечение показано на рис. 1.1. В этом случае приведенные моменты инерции жесткости сечения относительно осей  $x$  и  $y$  можно представить в следующем виде:

$$(EI_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2; \quad (2.1)$$

$$(EI_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \quad (2.2)$$

Центробежный приведенный момент инерции жесткости сечения можно выразить следующим образом:

$$(EI_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2, \quad (2.3)$$

где  $I_{x1} = \int_{A_1} y_1^2 dA_1$ ;  $I_{x2} = \int_{A_2} y_2^2 dA_2$ ;  $I_{y1} = \int_{A_1} x_1^2 dA_1$ ;  $I_{y2} = \int_{A_2} x_2^2 dA_2$  – осевые моменты инерции площадей  $A_1$  и  $A_2$  относительно осей  $x$  и  $y$ ;

$$I_{x1y1} = \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1; \quad I_{x2y2} = \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 \quad \text{– центробежные моменты}$$

инерции площадей  $A_1$  и  $A_2$  относительно осей  $x$  и  $y$ .

С учетом осевых и центробежных моментов инерции формулы (2.1)–(2.3) примут нижеприведенный вид:

$$(EI_x)_{\text{пр}} = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2};$$

$$(EI_y)_{\text{пр}} = E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2};$$

$$(EI_{xy})_{\text{пр}} = E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2}.$$

Если балка состоит из  $n$  стержней из различных материалов, то приведенные моменты инерции жесткости сечения балки следует определить из формул:

$$(EI_x)_{\text{пр}} = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + \dots + E_n I_{xn}; \quad (2.4)$$

$$(EI_y)_{\text{пр}} = E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} + \dots + E_n I_{yn}; \quad (2.5)$$

$$(EI_{xy})_{\text{пр}} = E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2} + \dots + E_n I_{xny_n}. \quad (2.6)$$

Величины осевых приведенных моментов инерции жесткости сечений (2.4) и (2.5) всегда будут положительны. В зависимости от положения осей  $x$  и  $y$  приведенный центробежный момент жесткости (2.6) может быть положительным и отрицательным.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Рассмотрим особые свойства приведенных статических моментов жесткости плоских сечений при параллельном переносе координатных осей. Оси  $x_n$  и  $y_n$  параллельны первоначальным осям  $x$  и  $y$ . Приведенные статические моменты жесткости сечения относительно осей  $x_n$  и  $y_n$  будут равны:

$$(ES_{x_n})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_{n1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{n2} dA_2; \quad (3.1)$$

$$(ES_{y_n})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_{n1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{n2} dA_2. \quad (3.2)$$

Координаты  $x_{н1}$ ,  $x_{н2}$ ,  $y_{н1}$  и  $y_{н2}$  в новой системе координатных осей представляют следующим образом:

$$x_{н1} = x_1 + b; \quad x_{н2} = x_2 + b; \quad y_{н1} = y + a; \quad y_{н2} = y_2 + a. \quad (3.3)$$

Подставив значения, приведенные в (3.3), в формулы (3.1) и (3.2), получим:

$$(ES_{xн})_{пр} = E_1 \int_{A_1} (y_1 + a) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + a) dA_2;$$

$$(ES_{yн})_{пр} = E_1 \int_{A_1} (x_1 + b) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x_2 + b) dA_2.$$

Раскрывая круглые скобки и интегрируя почленно, получим следующее:

$$(ES_{xн})_{пр} = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + aE_1 \int_{A_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2 + aE_2 \int_{A_2} dA_2;$$

$$(ES_{yн})_{пр} = E_1 \int_{A_1} x_1 dA_1 + bE_1 \int_{A_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2 + bE_2 \int_{A_2} dA_2.$$

Окончательно выражения для приведенных статических моментов жесткости сечения относительно новых координат  $x_n$  и  $y_n$ , параллельных исходным осям  $x$  и  $y$ :

$$(ES_{xн})_{пр} = (ES_x)_{пр} + a(E_1 A_1 + E_2 A_2);$$

$$(ES_{yн})_{пр} = (ES_y)_{пр} + b(E_1 A_1 + E_2 A_2).$$

Если поперечное сечение балки состоит из  $n$  материалов, отличающихся между собой модулями продольной упругости,

то формулы для определения приведенных статических моментов жесткости будут равны:

$$(ES_{xH})_{\text{пр}} = (E_1 S_x)_{\text{пр}} + a \sum_{i=1}^n E_i A_i;$$

$$(ES_{yH})_{\text{пр}} = (E_1 S_y)_{\text{пр}} + b \sum_{i=1}^n E_i A_i,$$

где  $E_i A_i$  – жесткости при растяжении или сжатии соответствующих частей поперечного сечения балки.

#### 4. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Приведенные моменты инерции жесткости относительно новых координатных осей  $x_H$  и  $y_H$  в соответствии с рис. 1.1 можно описать выражениями:

$$(EI_{xH})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_{H1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{H2}^2 dA_2;$$

$$(EI_{yH})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_{H1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{H2}^2 dA_2.$$

Подставив значения координат  $x_{H1}$ ,  $x_{H2}$ ,  $y_{H1}$  и  $y_{H2}$  из выражения (3.3) в последние выражения, получим:

$$(EI_{xH})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (y_1 + a)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + a)^2 dA_2;$$

$$(EI_{yH})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x_1 + b)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x_2 + b)^2 dA_2.$$

Раскрывая скобки и интегрируя почленно:

$$\begin{aligned}
 (EI_{xH})_{\text{пр}} &= E_1 \left[ \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + 2a \int_{A_1} y_1 dA_1 + a^2 \int_{A_1} dA_1 \right] + \\
 &+ E_2 \left[ \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + 2a \int_{A_2} y_2 dA_2 + a^2 \int_{A_2} dA_2 \right] = \\
 &= E_1 \left[ I_{x1} + 2aS_{x1} + a^2 A_1 \right] + E_2 \left[ I_{x2} + 2aS_{x2} + a^2 A_2 \right] = \quad (4.1) \\
 &= (E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}) + 2a(E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}) + \\
 &+ a^2 (E_1 A_1 + E_2 A_2) = (EI_x)_{\text{пр}} + 2a(ES_x)_{\text{пр}} + a^2 \sum_{i=1}^n A_i E_i;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (EI_{xH})_{\text{пр}} &= E_1 \left[ \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + 2a \int_{A_1} y_1 dA_1 + a^2 \int_{A_1} dA_1 \right] + \\
 &+ E_2 \left[ \int_{A_2} y_2^2 dA_2 + 2a \int_{A_2} y_2 dA_2 + a^2 \int_{A_2} dA_2 \right] = \\
 &= E_1 \left[ I_{x1} + 2aS_{x1} + a^2 A_1 \right] + E_2 \left[ I_{x2} + 2aS_{x2} + a^2 A_2 \right] = \quad (4.2) \\
 &= (E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}) + 2a(E_1 S_{x1} + E_2 S_{x2}) + \\
 &+ a^2 (E_1 A_1 + E_2 A_2) = (EI_x)_{\text{пр}} + 2a(ES_x)_{\text{пр}} + a^2 \sum_{i=1}^n A_i E_i.
 \end{aligned}$$

Наибольшее практическое значение имеют оси, проходящие через центр жесткости сечения. В соответствии с выражениями (1.5) и (1.6) приведенные статические моменты жесткости сечения будут равны нулю. Поэтому относительно центральных осей жесткости выражения (4.1) и (4.2) будут иметь следующий вид:

$$(EI_{xH})_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} + a^2 \sum_{i=1}^n E_i A_i; \quad (4.3)$$

$$(EI_{yH})_{\text{пр}} = (EI_y)_{\text{пр}} + b^2 \sum_{i=1}^n E_i A_i. \quad (4.4)$$

Центробежный приведенный момент инерции жесткости сечения балки соответствует

$$(EI_{xHyH})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x_1 + b)(y_1 + a) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x_2 + b)(y_2 + a) dA_2.$$

Раскрывая круглые скобки и почленно интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} (EI_{xHyH})_{\text{пр}} &= E_1 \left[ \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + a \int_{A_1} x_1 dA_1 + b \int_{A_1} y_1 dA_1 + ab \int_{A_1} dA_1 \right] + \\ &+ E_2 \left[ \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 + a \int_{A_2} x_2 dA_2 + b \int_{A_2} y_2 dA_2 + ab \int_{A_2} dA_2 \right] = \\ &= (E_1 I_{x_1 y_1} + E_2 I_{x_2 y_2}) + (E_1 b S_{x_1} + E_1 a S_{y_1} + E_2 b S_{x_2} + E_2 a S_{y_2}) + \\ &+ E_1 ab A_1 + E_2 ab A_2 = (EI_{xy})_{\text{пр}} + ab (E_1 A_1 + E_2 A_2) + b (E_1 S_{x_1} + E_2 S_{x_2}) + \\ &+ a (E_1 S_{y_1} + E_2 S_{y_2}) = (EI_{xy})_{\text{пр}} + ab \sum_{i=1}^n E_i A_i + b (ES_x)_{\text{пр}} + a (ES_y)_{\text{пр}}. \end{aligned}$$

Так как приведенные статические моменты жесткости сечения равны нулю относительно центральных осей жесткости, то относительно этих осей центробежный приведенный момент инерции жесткости сечения равен

$$(EI_{xHyH})_{\text{пр}} = (EI_{xy})_{\text{пр}} + ab \sum_{i=1}^n E_i A_i. \quad (4.5)$$

Из выражений (4.3) и (4.4) следует, что приведенные осевые моменты инерции жесткости сечения относительно произвольных осей, параллельных первоначальным осям, равны приведенным осевым моментам инерции жесткости сечения относительно центральных осей жесткости сечения плюс произведение суммы жесткостей отдельных частей сечения при осевом растяжении или сжатии на квадрат расстояния между соответствующими осями.

Из выражения (4.5) следует, что приведенный центробежный момент инерции относительно осей, параллельных центральным осям жесткости сечения, равен приведенному центробежному моменту инерции жесткости сечения плюс произведение суммы жесткостей частей сечения на расстояния между ними.

## **5. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ**

Допустим, что известны осевые и центробежный моменты инерции жесткости сечения относительно координатных осей  $x$  и  $y$  (рис. 5.1).

$$(EI_x)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2;$$

$$(EI_y)_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2;$$

$$(EI_{xy})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2.$$

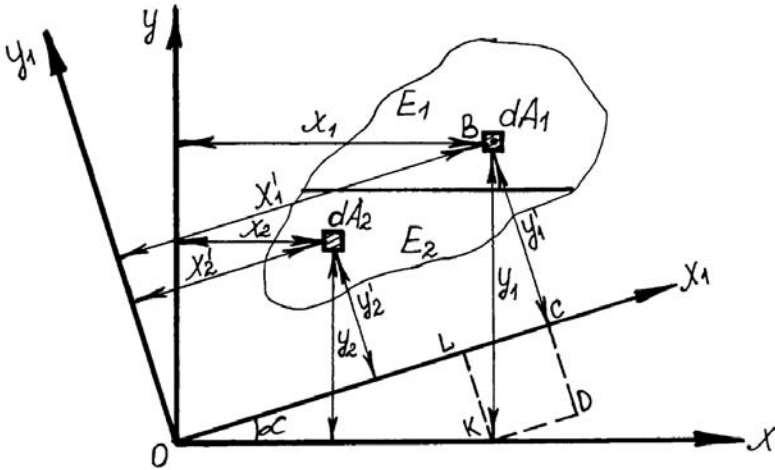


Рис. 5.1. Осевое сечение, состоящее из двух различных материалов

Повернем оси  $x$  и  $y$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки, считая такое направление поворота осей положительным. Найдем приведенные моменты инерции жесткости сечения относительно новых осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$(EI_{x_1})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (y'_1)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y'_2)^2 dA_2; \quad (5.1)$$

$$(EI_{y_1})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} (x'_1)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (x'_2)^2 dA_2; \quad (5.2)$$

$$(EI_{x_1 y_1})_{\text{пр}} = E_1 \int_{A_1} x'_1 y'_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x'_2 y'_2 dA_2. \quad (5.3)$$

Координаты произвольной элементарной площади  $dA_1$  в новых координатах  $x'_1$  и  $y'_1$  выражаются через прежние координаты  $x_1$  и  $y_1$  следующим образом:



$$x_1' = OC = OL + KD = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha;$$

$$y_1' = BC = BD - LK = y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha.$$

Аналогично координаты  $x_2'$  и  $y_2'$  можно выразить через первоначальные координаты  $x_2$  и  $y_2$ :

$$x_2' = x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha;$$

$$y_2' = y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha.$$

Подставив полученные значения новых координат в формулы (5.1)–(5.3), получим:

$$\begin{aligned} (EI_{x_1})_{\text{пп}} &= E_1 \int_{A_1} (y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha)^2 dA_1 + \\ &+ E_2 \int_{A_2} (y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha)^2 dA_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (EI_{y_1})_{\text{пп}} &= E_1 \int_{A_1} (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)^2 dA_1 + \\ &+ E_2 \int_{A_2} (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)^2 dA_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (EI_{x_1 y_1})_{\text{пп}} &= E_1 \int_{A_1} (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)(y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha) dA_1 + \\ &+ E_2 \int_{A_2} (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)(y_2 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha) dA_2. \end{aligned}$$

Раскрывая круглые скобки и почленно интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}
 (EI_{x1})_{\text{пп}} &= E_1 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_1} y_1^2 dA_1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + \sin^2 \alpha \int_{A_1} x_1^2 dA_1 \right] + \\
 &+ E_2 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_2} y_2^2 dA_2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 + \sin^2 \alpha \int_{A_2} x_2^2 dA_2 \right] = \\
 &\hspace{15em} (5.4) \\
 &= \cos^2 \alpha E_1 I_{x1} - \sin 2\alpha E_1 I_{x1y1} + \sin^2 \alpha E_1 I_{y1} + \cos^2 \alpha E_2 I_{x2} - \\
 &- \sin 2\alpha E_2 I_{x2y2} + \sin^2 \alpha E_2 I_{y2} = \cos^2 \alpha (E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}) - \\
 &- \sin 2\alpha (E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2}) + \sin^2 \alpha (E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}) = \\
 &= s(EI_x)_{\text{пп}} \cos^2 \alpha - (EI_{xy})_{\text{пп}} \sin 2\alpha + (EI_y)_{\text{пп}} \sin^2 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (EI_{y1})_{\text{пп}} &= E_1 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + \sin^2 \alpha \int_{A_1} y_1^2 dA_1 \right] + \\
 &+ E_2 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_2} x_2^2 dA_2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2 + \sin^2 \alpha \int_{A_2} y_2^2 dA_2 \right] = \\
 &\hspace{15em} (5.5) \\
 &= \cos^2 \alpha E_1 I_{y1} + \sin 2\alpha E_1 I_{x1y1} + \sin^2 \alpha E_1 I_{x1} + \cos^2 \alpha E_2 I_{y2} + \\
 &+ \sin 2\alpha E_2 I_{x2y2} + \sin^2 \alpha E_2 I_{x2} = \cos^2 \alpha (E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}) + \\
 &+ \sin 2\alpha (E_1 I_{x1y1} + E_2 I_{x2y2}) + \sin^2 \alpha (E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2}) = \\
 &= (EI_x)_{\text{пп}} \sin^2 \alpha + (EI_{xy})_{\text{пп}} \sin 2\alpha + (EI_y)_{\text{пп}} \cos^2 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( EI_{x_1 y_1} \right)_{\text{пп}} = E_1 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_1} x_1 y_1 \, dA_1 - \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_1} x_1^2 \, dA_1 + \right. \\
& \left. + \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_1} y_1^2 \, dA_1 - \sin^2 \alpha \int_{A_1} x_1 y_1 \, dA_1 \right] + E_2 \left[ \cos^2 \alpha \int_{A_2} x_2 y_2 \, dA_2 - \right. \\
& \left. - \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_2} x_2^2 \, dA_2 + \sin \alpha \cos \alpha \int_{A_2} y_2^2 \, dA_2 - \sin^2 \alpha \int_{A_2} x_2 y_2 \, dA_2 \right] = \\
& = E_1 \left[ \cos^2 \alpha I_{x_1 y_1} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha I_{y_1} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha I_{x_1} - \sin^2 I_{x_1 y_1} \right] + \\
& + E_2 \left[ \cos^2 \alpha I_{x_2 y_2} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha I_{y_2} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha I_{x_2} - \sin^2 I_{x_2 y_2} \right] = \\
& = E_1 \left[ I_{x_1 y_1} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} (I_{x_1} - I_{y_1}) \sin 2\alpha \right] + \\
& + E_2 \left[ I_{x_2 y_2} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} (I_{x_2} - I_{y_2}) \sin 2\alpha \right] = \\
& = E_1 I_{x_1 y_1} \cos 2\alpha + E_2 I_{x_2 y_2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} E_1 (I_{x_1} - I_{y_1}) \sin 2\alpha + \\
& + \frac{1}{2} E_2 (I_{x_2} - I_{y_2}) \sin 2\alpha = (E_1 I_{x_1 y_1} + E_2 I_{x_2 y_2}) \cos 2\alpha + \\
& + \frac{1}{2} [(E_1 I_{x_1} + E_2 I_{x_2}) - (E_1 I_{y_1} + E_2 I_{y_2})] \sin 2\alpha = \\
& = (EI_{xy})_{\text{пп}} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} [(EI_x)_{\text{пп}} - (EI_y)_{\text{пп}}] \sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Складывая почленно выражения (5.4) и (5.5), получим

$$(EI_{x_1})_{\text{пп}} + (EI_{y_1})_{\text{пп}} = (EI_x)_{\text{пп}} + (EI_y)_{\text{пп}}. \tag{5.7}$$

Из последнего выражения следует, что при повороте прямоугольных осей сумма осевых моментов жесткости сечения не изменяется и равна постоянной величине.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ

Следует отметить, что формулы (5.4)–(5.6) справедливы и для координатных осей, проходящих через центр жесткости сечения. Рассматривая выражения (5.4) и (5.5), легко сказать, что с изменением угла  $\alpha$   $(EI_{x1})_{\text{пр}}$  и  $(EI_{y1})_{\text{пр}}$  меняются, но в соответствии с равенством (5.7) их сумма остается постоянной. Очевидно, что при некоторых значениях угла  $\alpha$  один из приведенных моментов инерции жесткости сечения будет максимальным, а другой минимальным. Продифференцируем выражение (5.4) по углу  $\alpha$  и приравняем к нулю:

$$\begin{aligned} & \left[ (EI_x)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha \right]' - \left[ (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha \right]' + \left[ (EI_y)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha \right]' = \\ & = (EI_x)_{\text{пр}} 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) - (EI_{xy})_{\text{пр}} 2 \cos 2\alpha + \\ & \quad + (EI_y)_{\text{пр}} 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно преобразовать в равенство

$$-(EI_x)_{\text{пр}} \sin 2\alpha - 2(EI_{xy})_{\text{пр}} \cos 2\alpha + (EI_y)_{\text{пр}} \sin 2\alpha = 0.$$

Разделив последнее выражение на  $\sin 2\alpha$ , получим

$$2(EI_x)_{\text{пр}} \operatorname{tg} 2\alpha = (EI_y)_{\text{пр}} - (EI_x)_{\text{пр}}.$$

Из последнего выражения легко определить значение угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(EI_{xy})_{\text{пр}}}{(EI_y)_{\text{пр}} - (EI_x)_{\text{пр}}}. \quad (6.1)$$

Легко заметить, что выражение (6.1) можно получить из (5.6), приравняв центробежный момент инерции жесткости сечения  $(EI_{x_1y_1})_{\text{пр}}$  относительно повернутых осей  $x_1$  и  $y_1$  к нулю.

При этом один из осевых приведенных моментов инерции жесткости будет максимальным, а другой минимальным. Оси, относительно которых приведенный момент инерции жесткости будет равен нулю, будем называть главными осями жесткости.

Оси могут совпадать с центром жесткости сечения, а приведенный центробежный момент инерции сечения относительно этих осей может быть равен нулю. Такие оси будем называть главными центральными осями жесткости сечения и обозначать  $U$  и  $V$ .

Положительный угол  $\alpha$ , в соответствии с принятым значением, откладывают путем поворота координатных осей против часовой стрелки, а отрицательный – по часовой стрелке.

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ

В соответствии с принятым обозначением осей  $U$  и  $V$ , выражения осевых приведенных моментов жесткости сечения, согласно выражениям (5.4) и (5.5), представим в следующем виде:

$$(EI_u)_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha - (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha + (EI_y)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha; \quad (7.1)$$

$$(EI_v)_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha + (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha + (EI_y)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha. \quad (7.2)$$

Просуммировав левые и правые части формулы (7.1) и (7.2), получим

$$(EI_u)_{\text{пр}} + (EI_v)_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha + \\ + (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha + (EI_y)_{\text{пр}} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

или

$$(EI_u)_{\text{пр}} + (EI_v)_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} + (EI_y)_{\text{пр}}. \quad (7.3)$$

Определим разность между левыми и правыми частями уравнений (7.1) и (7.2):

$$(EI_u)_{\text{пр}} (EI_v)_{\text{пр}} = (EI_x)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha - (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha + \\ + (EI_y)_{\text{пр}} \sin^2 \alpha - (EI_x)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha - (EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha - \\ - (EI_y)_{\text{пр}} \cos^2 \alpha = (EI_x)_{\text{пр}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \\ - (EI_y)_{\text{пр}} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2(EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha = \\ = \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \cos 2\alpha - 2(EI_{xy})_{\text{пр}} \sin 2\alpha \right]. \quad (7.4)$$

Выражение (6.1) можно представить в виде следующего уравнения:

$$(EI_{xy})_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left[ (EI_y)_{\text{пр}} - (EI_x)_{\text{пр}} \right] \operatorname{tg} 2\alpha = \\ = -\frac{1}{2} \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}. \quad (7.5)$$

Подставив  $(EI_{xy})_{\text{пр}}$  из выражения (7.5) в выражение (7.4), получим

$$\begin{aligned}
(EI_u)_{\text{пр}} - (EI_v)_{\text{пр}} &= \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] \cos 2\alpha + \\
&+ \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \sin 2\alpha = \\
&= \frac{1}{\cos 2\alpha} \left\{ \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \right\} = \\
&= \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] \frac{1}{\cos \alpha}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Из тригонометрии известно следующее соотношение:

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}.$$

Подставив в выражение (7.6) вместо  $\operatorname{tg} 2\alpha$  его значение, выраженное через осевые и центробежный моменты инерции жесткости сечения (6.1), получим

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{4(EI_{xy})_{\text{пр}}^2}{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2}}.$$

Подставив последнее значение  $\frac{1}{\cos \alpha}$  в формулу (7.6), имеем

$$\begin{aligned}
&(EI_u)_{\text{пр}} - (EI_v)_{\text{пр}} = \\
&= \left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right] \sqrt{\frac{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})_{\text{пр}}^2}{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2}}
\end{aligned}$$

или

$$(EI_u)_{\text{пр}} - (EI_v)_{\text{пр}} = \sqrt{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})^2}. \quad (7.7)$$

Из выражения (7.7) определим  $(EI_u)_{\text{пр}}$ :

$$(EI_u)_{\text{пр}} = (EI_v)_{\text{пр}} + \sqrt{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})^2}. \quad (7.8)$$

Подставив значение  $(EI_u)_{\text{пр}}$  в выражение (7.3), получим

$$2(EI_v)_{\text{пр}} + \sqrt{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})^2} = (EI_x)_{\text{пр}} + (EI_y)_{\text{пр}}.$$

Окончательно получим  $(EI_v)_{\text{пр}}$ , которое позволяет определять осевой приведенный момент инерции жесткости сечения относительно главной центральной оси жесткости:

$$\begin{aligned} (EI_v)_{\text{пр}} &= \frac{1}{2} \left[ (EI_x)_{\text{пр}} + (EI_y)_{\text{пр}} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})^2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Подставив последнее выражение для  $(EI_v)_{\text{пр}}$  в формулу для получения  $(EI_u)_{\text{пр}}$  (7.8), получим

$$\begin{aligned} (EI_u)_{\text{пр}} &= \frac{1}{2} \left[ (EI_x)_{\text{пр}} + (EI_y)_{\text{пр}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\left[ (EI_x)_{\text{пр}} - (EI_y)_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xy})^2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$



Формулы (6.1), (7.9) и (7.10) позволяют определять место положения главных центральных осей жесткости и приведенные осевые моменты инерции жесткости сечения, что является важным в практических расчетах стержней с переменной жесткостью сечения при плоском поперечном изгибе, косом изгибе и т. д.

**Пример:** определить место положения главных центральных осей жесткости и величину осевых моментов инерции жесткости сечения балки, состоящей из прочно соединенных между собой алюминиевого и стального стержней. Сечение показано на рис. 7.1. Модуль продольной упругости стали  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, а алюминия –  $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$  МПа.

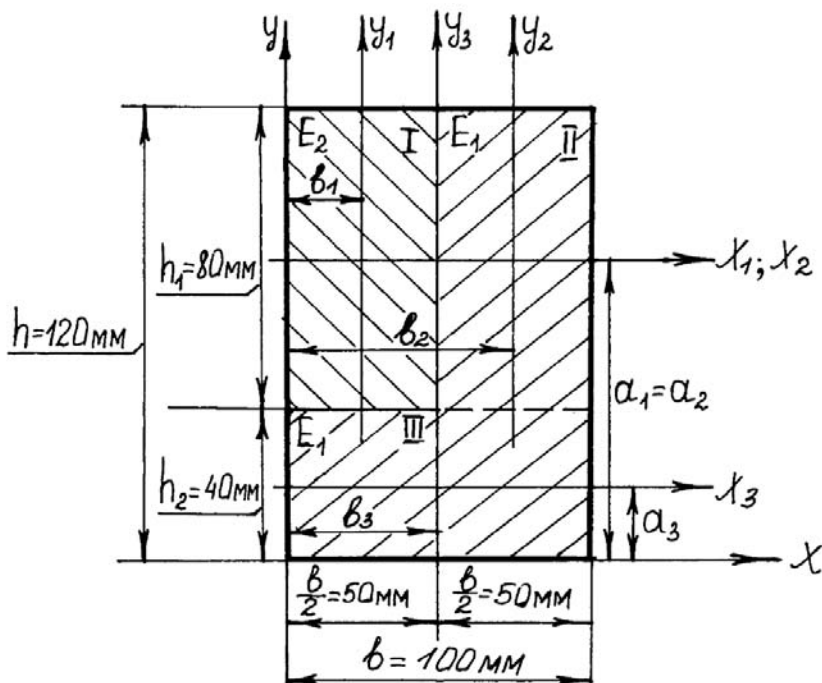


Рис. 7.1. Осевое сечение балки, состоящей из стального и алюминиевого стержней

1) Разобьем сечение на три прямоугольника и проведем оси, проходящие через центр тяжести отдельных фигур. Определим расстояние от осей отсчета  $x$  и  $y$  до центральных осей отдельных фигур:

$$a_1 = a_2 = 30 \text{ мм}; \quad a_3 = 20 \text{ мм}; \quad b_1 = 25 \text{ мм}; \\ b_2 = 75 \text{ мм}; \quad b_3 = 50 \text{ мм}.$$

2) В соответствии с формулами (1.7) и (1.8) определим положение центральных осей жесткости сечения:

$$X_{\text{ж}} = \frac{E_2 S_{x1} + E_1 S_{x3} + E_1 S_{x2}}{E_2 A_1 + E_1 A_3 + E_1 A_2} = \frac{E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 a_1 \right) + E_1 (b h_2 a_3) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 a_2 \right)}{E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) + E_1 (b h_2) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 \right)} = \\ = \frac{0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 80) + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40 \cdot 20) + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 80)}{0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40) + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80)} = \\ = 54,468 \text{ мм};$$

$$Y_{\text{ж}} = \frac{E_2 S_{y1} + E_1 S_{y3} + E_1 S_{y2}}{E_2 A_1 + E_1 A_3 + E_1 A_2} = \frac{E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 b_1 \right) + E_1 (b h_2 b_3) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 b_2 \right)}{E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) + E_1 (b h_2) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 \right)} = \\ = \frac{0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 25) + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40 \cdot 50) + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 75)}{0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40) + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80)} = \\ = 56,915 \text{ мм}.$$

На рис. 7.2 приведено поперечное сечение стержня с центральными осями жесткости  $x_j$  и  $y_j$ .

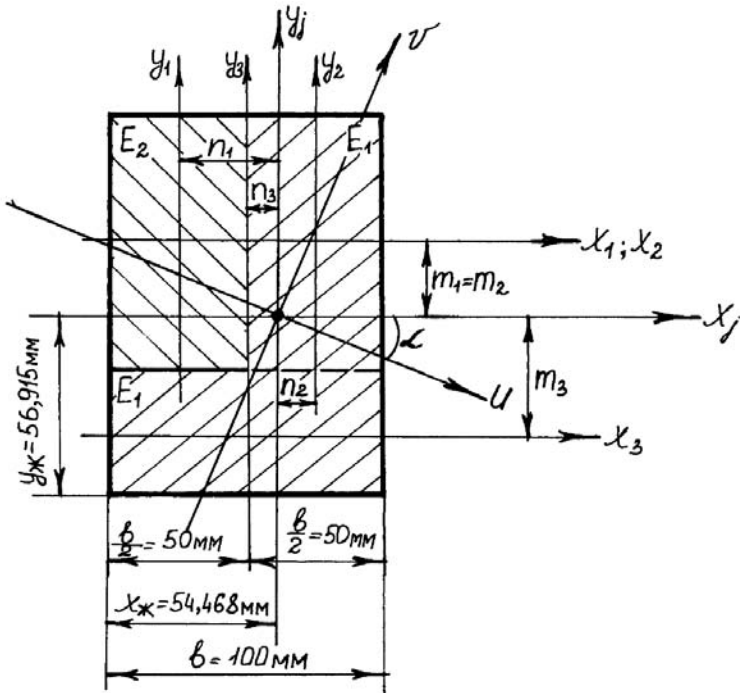


Рис. 7.2. Осовое сечение с центральными осями жесткости  $x_j$  и  $y_j$

3) Определим расстояние от центральных осей жесткости сечения  $x_j$  и  $y_j$  до центральных осей отдельных фигур:

$$m_1 = m_2 = h - y_{ж} - \frac{h_1}{2} = 120 - 54,468 - 20 = 45,532 \text{ мм};$$

$$m_2 = -\left(y_{ж} - \frac{h}{2}\right) = -(54,468 - 20) = -34,468 \text{ мм};$$

$$n_1 = -\left(x_{ж} - \frac{b}{2}\right) = -(54,468 - 50) = -4,468 \text{ мм};$$

$$n_2 = -(x_{ж} - b) = -(54,468 - 100) = 45,532 \text{ мм};$$

$$n_3 = b - x_{ж} - \frac{b}{4} = 100 - 54,468 - 25 = 20,532 \text{ мм}.$$

4) Проверим правильность определения положения центральных осей жесткости сечения. Приведенные статические моменты жесткости сечения относительно осей  $x_j$  и  $y_j$  должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} (ES_{xj})_{\text{пр}} &= E_2 S_{x1} + E_1 S_{x3} + E_1 S_{x2} = E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 m_1 \right) + \\ &+ E_1 (b h_2 m_3) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 m_2 \right) = 0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 25,532) + \\ &+ 2 \cdot 10^5 [100 \cdot 40 \cdot (-34,468)] + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 25,532) = \\ &= 275\,745,6 \cdot 10^5 - 275\,744 \cdot 10^5 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм}. \end{aligned}$$

Ошибка расчета составляет 0,00058 % и связана с округлением числовых величин.

$$\begin{aligned} (ES_{yj})_{\text{пр}} &= E_2 S_{y1} + E_1 S_{y3} + E_1 S_{y2} = E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 n_1 \right) + \\ &+ E_1 (b h_2 n_3) + E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 n_2 \right) = 0,7 \cdot 10^5 [50 \cdot 80 \cdot (-31,915)] + \\ &+ 2 \cdot 10^5 [100 \cdot 40 \cdot (-6,915)] + 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80 \cdot 18,085) = \\ &= -144\,682 \cdot 10^5 + 144\,680 \cdot 10^5 = -2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{мм}. \end{aligned}$$

Ошибка расчета составляет 0,00138 %.

5) Определим приведенные осевые моменты инерции жесткости сечения:

$$\begin{aligned}
(EI_{xj})_{\text{пр}} &= E_2 I_{x1} + E_2 A_1 m_1^2 + E_1 I_{x3} + E_1 A_3 m_3^2 + E_1 I_{x2} + E_1 A_2 m_2^2 = \\
&= E_2 \frac{b h_1^3}{12} + E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) m_1^2 + E_1 \frac{b h_2^3}{12} + E_1 (b h_2) m_3^2 + E_1 \frac{2}{12} h_1^3 + \\
&+ E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) m_2^2 = 0,7 \cdot 10^5 \cdot \frac{50 \cdot 80^3}{12} + 0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) \cdot 25,532^2 + \\
&+ 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{100 \cdot 40^3}{12} + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40) \cdot 25,532^2 + 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{50 \cdot 80^3}{12} + \\
&+ 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) (-34,468)^2 = 233,84 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EI_{yj})_{\text{пр}} &= E_2 I_{y1} + E_2 A_1 n_1^2 + E_1 I_{y3} + E_1 A_3 n_3^2 + E_1 I_{y2} + E_1 A_2 n_2^2 = \\
&= E_2 \frac{h_1 \left( \frac{b}{2} \right)^3}{12} + E_2 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) n_1^2 + E_1 \frac{h_2 b^3}{12} + E_1 (b h_2) n_3^2 + E_1 \frac{h_1 \left( \frac{b}{2} \right)^3}{12} + \\
&+ E_1 \left( \frac{b}{2} h_1 \right) n_2^2 = 0,7 \cdot 10^5 \frac{80 \cdot 50}{12} + 0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) (-31,915) + \\
&+ 2 \cdot 10^5 \frac{40 \cdot 100^3}{12} + 2 \cdot 10^5 (40 \cdot 100) (-18,085)^2 + 2 \cdot 10^5 \frac{80 \cdot 50^3}{12} + \\
&+ 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) (-6,915)^2 = 148,71 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.
\end{aligned}$$

б) Определим центробежный момент инерции жесткости сечения относительно осей  $x_j$  и  $y_j$ :

$$\begin{aligned}
(EI_{xyj})_{\text{пр}} &= E_2 A_1 m_1 n_1 + E_1 A_3 m_3 n_3 + E_1 A_2 m_2 n_2 = 0,7 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) \times \\
&\times 25,532 \cdot (-31,915) + 2 \cdot 10^5 (100 \cdot 40) \cdot 25,532 \cdot 18,085 + \\
&+ 2 \cdot 10^5 (50 \cdot 80) (-34,468) (-6,915) = 33,19 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}.
\end{aligned}$$

7) Используя выражение (6.1), определим положение главных центральных осей жесткости сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(EI_{xjyj})_{\text{пр}}}{(EI_{yj})_{\text{пр}} - (EI_{xj})_{\text{пр}}} = \frac{2 \cdot 33,19 \cdot 10^{10}}{148,71 \cdot 10^{10} - 233,84 \cdot 10^{10}} = -0,7797;$$

$$2\alpha = -37,94^\circ;$$

$$\alpha = -18,97^\circ.$$

Главные центральные оси жесткости  $U$  и  $V$  получим поворотом осей  $x_j$  и  $y_j$  по часовой стрелке, так как угол  $\alpha$  имеет отрицательное значение.

В соответствии с выражениями (7.9) и (7.10) определим главные центральные приведенные моменты инерции жесткости сечения:

$$\begin{aligned} (EI_u)_{\text{пр}} &= \frac{1}{2} \left[ (EI_{xj})_{\text{пр}} + (EI_{yj})_{\text{пр}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\left[ (EI_{xj})_{\text{пр}} - (EI_{yj})_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xjyj})_{\text{пр}}^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 233,84 \cdot 10^{10} + 148,71 \cdot 10^{10} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\left( 233,84 \cdot 10^{10} - 148,71 \cdot 10^{10} \right)^2 + 4 \cdot \left( 33,19 \cdot 10^{10} \right)^2} = \\ &= 191,275 \cdot 10^{10} + 53,975 \cdot 10^{10} = 245,25 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EI_v)_{\text{пр}} &= \frac{1}{2} \left[ (EI_{xj})_{\text{пр}} + (EI_{yj})_{\text{пр}} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \sqrt{\left[ (EI_{xj})_{\text{пр}} - (EI_{yj})_{\text{пр}} \right]^2 + 4(EI_{xyj})_{\text{пр}}^2} = \\
&= \frac{1}{2} \left[ 233,84 \cdot 10^{10} + 148,71 \cdot 10^{10} \right] - \\
&- \frac{1}{2} \sqrt{\left( 233,84 \cdot 10^{10} - 148,71 \cdot 10^{10} \right)^2 + 4 \cdot \left( 33,19 \cdot 10^{10} \right)^2} = \\
&= 191,275 \cdot 10^{10} - 53,975 \cdot 10^{10} = 137,3 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.
\end{aligned}$$

В данной работе разработана методика определения центра жесткости для сечений переменной жесткости. Получены выражения для определения геометрических характеристик таких сечений.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для студентов / В. И. Феодосьев. – Москва: МГТУ, 1999. – 588 с.
2. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – 6-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2008. – 560 с.
3. Кинасошвили, Р. С. Сопротивление материалов : учебник / Р. С. Кинасошвили. – 6-е изд., перераб. – Москва: Физматгиз, 1960. – 388 с.
4. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарёв, А. Л. Квитка. – Киев: Вища школа, 1986. – С. 458–461.
5. Подскрепко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскебко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.



## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ЖЕСТКОСТИ И ЦЕНТРЫ ЖЕСТКОСТИ .....	4
2. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЙ .....	7
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ .....	9
4. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ .....	11
5. ПРИВЕДЕННЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ .....	14
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ .....	19
7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ .....	20
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	31

Учебное издание

**ДУДЯК** Александр Иванович  
**ДИКАН** Жанна Геннадьевна

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ**

Пособие

для студентов специальностей

1-36 01 01 «Технология машиностроения»,

1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,

1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов  
давлением», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины  
и производства», 1-55 01 02 «Интегральные сенсорные системы»,

1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Редактор *Т. В. Грищенко*

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 05.06.2018. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 100. Заказ 232.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.