Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

А.Н. Андриянчик
О.Р. Габасова
З.Н. Примичева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методическое пособие

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

А.Н. Андриянчик
О.Р. Габасова
З.Н. Примичева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методическое пособие
для самостоятельной работы
и самоконтроля знаний

Минск 2009

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
А 65

Рецензент
Н.А. Микулик

Андриянчик, А.Н.
А 65 Неопределенный интеграл: методическое пособие для самостоятельной работы и самоконтроля знаний / А.Н. Андриянчик, О.Р. Габасова, З.Н. Примичева. – Минск: БНТУ, 2009. – 71 с.

ISBN 978-985-525-014-3.

В пособии содержится краткая теория, образцы решения основных типовых примеров, задания для самостоятельной работы. К задачам, предназначенным для самостоятельной работы, предлагаются ответы, что поможет студенту контролировать правильность решаемых примеров.

Методическое пособие является дополнением к существующим задачникам, будет полезным как для студентов дневной, так и заочной формы обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-014-3

Содержание

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на промежутке (a,b), то множество вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, описывает все первообразные для данной функции $f(x)$ на промежутке (a,b).

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке (a,b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

С геометрической стороны, неопределенный интеграл – это однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр семейства), обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в одной и той же точке параллельны между собой.

Определение 3. Операция нахождения первообразной функции называется интегрированием этой функции.

Поскольку операция интегрирования является обратной для операции дифференцирования, то правильность интегрирования проверяется дифференцированием функции, полученной в результате интегрирования.

Например, если $f(x)=\cos 2x$, то $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$, так как $F'(x)=(\frac{1}{2}\sin 2x+C)'=\frac{1}{2}\cdot\cos 2x\cdot 2+0=\cos 2x$.

Справедливы следующие свойства неопределенного интеграла:

1. $\int dF(x)=F(x)+C$, $\int F'(x)dx=F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

2. $(\int f(x)dx)'=f(x)$, $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$.

3. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$.

4. $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int 0du=C$.

2. $\int du=u+C$.

3. $\int u^{a}dx=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq 1$.

4. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C,\ u\neq 0$.

5. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq 1$.

6. $\int e^u du = e^u + C$.

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

8. $\int \cos u du = \sin u + C$.

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C, u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C, u \neq k\pi, k \in Z$.

11. $\int \mathrm{sh} u du = \mathrm{ch} u + C$.

12. $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$.

13. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.

14. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth} u + C, \; u \neq 0$.

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C, \; a \neq 0, \; |u| < |a|$.

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{u}{a} + C, a \neq 0$.

17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, a \neq 0, \; |u| \neq |a|$.

18. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C,\ \ a \neq 0,\ \ |u| \neq |a|$.

19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C,\ a \neq 0,\ |u| > |a|$, если знак «–», и любое u в случае, когда знак «+».

Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ выражается в элементарных функциях. Однако интеграл от элементарной функции может и не быть элементарной функцией. Так, например, интегралы $\int e^{-x^2}dx$ (интеграл Пуассона), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (интегралы Френеля), $\int \frac{dx}{\ln x}\ (x > 0,\ x \neq 1)$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ хотя и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Такие интегралы называются неберущимися.

Вычислим некоторые интегралы так называемым методом непосредственного интегрирования.

Примеры

1.1. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(x+2\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2+x^{3/2}-2x}{x^{1/3}}dx =$

$= \int (x^{5/3} + x^{7/6} - 2x^{2/3})dx = \int x^{5/3}dx + \int x^{7/6}dx - 2\int x^{2/3}dx =$

$= \frac{3}{8}x^{8/3} + \frac{6}{13}x^{13/6} - \frac{6}{5}x^{5/3} + C.$

1.2. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{x^2+(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx =$

$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int x^{-2}dx = = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$

1.3. $\int \frac{x^2+9}{x^2-8}dx = \int \frac{(x^2-8)+17}{x^2-8}dx = \int (1+\frac{17}{x^2-8})dx =$

$= \int dx + 17\int \frac{dx}{x^2-8} = x + \frac{17}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right| + C.$

1.4. $\int \frac{x^5-x^4+6x^3-4x^2+8x+3}{x^2+4}dx = \int (x^3-x^2+2x+\frac{3}{x^2+4})dx =$

$= \int x^3dx - \int x^2dx + 2\int xdx + 3\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$

1.5. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int (2\cdot 9)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.$

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x + C.$

1.7. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx = \int (\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-3}})dx =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C.$

1.8. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2})^2} = 4\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -4\operatorname{ctg} x + C.$

1.9. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

1.10. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\mathrm{ctg} x - x + C.$

1.11. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} +$

$+ \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \mathrm{tg} x + \frac{1}{2} x + C.$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

1.1. $\int \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) \cdot (\sqrt[4]{x} + x - 1) dx.$

1.2. $\int \left(\frac{3-x}{x} \right)^3 dx.$

1.3. $\int \sqrt{x \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x}}}\, dx$.

1.4. $\int \frac{2^{x+1} - 7^{x-1}}{14^x} dx.$

1.5. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2+4x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-4x^2}} \right) dx.$

1.6. $\int \left(\frac{1}{2x^2+3} - \frac{1}{2x^2-3} \right) dx.$

1.7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$

1.8. $\int \frac{3-2\sin^2 x}{1-\cos 2x} dx.$

1.9. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx.$

1.10. $\int \frac{x^4-2x^3-x^2+8x-7}{x^2-4}dx.$

Ответы:

1.1. $\frac{12}{19}x^{19/12}+\frac{3}{7}x^{7/3}-\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{4}{7}x^{7/4}+\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}+C.$

1.2. $-\frac{27}{2x^2}+\frac{27}{x}+9\ln|x|-x+C.$

1.3. $\frac{24}{41}x^{41/24}+C.$

1.4. $-\frac{2}{7^x\ln 7}+\frac{1}{7\cdot 2^x\ln 2}+C.$

1.5. $\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{2}x+C.$

1.6. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right|+C.$

1.7. $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$

1.8. $-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}x-x+C.$

1.9. $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C.$

1.10. $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ) В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

При вычислении неопределенных интегралов во многих случаях целесообразно введение новой переменной интегрирования, что позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного. Такой метод называется методом интегрирования подстановкой (заменой переменной интегрирования).

Теорема 1. Пусть на интервале (a,b) определена сложная функция $f(\varphi(x))$, функция $t=\varphi(x)$ непрерывна на этом интервале и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда если существует интеграл $\int f(t)dt$, то существует интеграл $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, причем справедлива формула

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt\Big|_{t=\varphi'(x)}.$$

Теорема 2. Пусть на интервале (a,b) определена сложная функция $f(\varphi(x))$, $t=\varphi(x)$ – непрерывная, строго монотонная на (a,b) функция, дифференцируемая во всех его внутренних точках. Тогда если существует интеграл $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$, то существует интеграл $\int f(t)dt$, причем имеет место формула

$$\int f(t)dt=\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}.$$

В отдельных случаях вместо введения новой переменной применяется метод *подведения функции под знак дифференциала,* который состоит в том, что под знак дифференциала записывается функция, дифференциал которой равен заданному выражению:

$$f'(x)dx = df(x).$$

Справедливы следующие преобразования дифференциала:

1) $dx = d(x+b),\ \forall b \in R;$

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax),\ \forall a \in R,\ a \neq 0;$

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b),\ \forall a,b \in R,\ a \neq 0;$

4) $xdx = \frac{1}{2} d(x^2);$

5) $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1}),\ \forall n \in R,\ n \neq -1;$

6) $\frac{1}{x} dx = d(\ln x);$

7) $\frac{1}{x^2} dx = -d(\frac{1}{x});$

8) $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d(\sqrt{x});$

9) $\sin x dx = -d(\cos x);$

10) $\cos x dx = d \sin x;$

11) $\frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\mathrm{tg} x);$

12) $\frac{1}{\sin^2 x} dx = -d(\mathrm{ctg} x);$

13) $e^x dx = d(e^x);$

14) $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x);$

15) $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg} x);$

16) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);$

17) $\sin 2x dx = -\frac{1}{2} d\cos 2x = d\sin^2 x = -d\cos^2 x;$

18) $\cos 2x dx = \frac{1}{2} d\sin 2x.$

Каждая из вышеприведенных формул справедлива на промежутке, где определена функция, стоящая под знаком дифференциала.

Примеры

2.1. Найти неопределенные интегралы методом подведения функции под знак дифференциала и методом подстановки:

а) $\int \cos(2x-3)dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[4]{tgx}}$; в) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

Решение

а) Первый способ:

$$\int \cos(2x-3)dx = \int \cos(2x-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x-3)' dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(2x-3)d(2x-3) = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + C.$$

б) Второй способ: пусть $2x-3=t$, тогда $2dx=dt$, и, значит, $dx = \frac{1}{2}dt$, отсюда

$$\int \cos(2x-3)dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t dt =$$
$$= \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + C$$

б) Первый способ:

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}}=\int\frac{(\mathrm{tg}x)'}{\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}}\,dx=$$

$$=\int(\mathrm{tg}x)^{-1/4}d(\mathrm{tg}x)=\frac{(\mathrm{tg}x)^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{3}(\mathrm{tg}x)^{3/4}+C.$$

Второй способ: пусть $\mathrm{tg}x=t$, тогда $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$, и, значит,

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt[4]{\mathrm{tg}x}}=\int\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=\int t^{-1/4}dt=\frac{t^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{3}(\mathrm{tg}x)^{3/4}+C.$$

в) Первый способ:

$$\int\frac{dx}{\arcsin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(\arcsin x)'dx}{\arcsin^3 x}=\int\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^3 x}=$$

$$=\int(\arcsin x)^{-3}d(\arcsin x)=\frac{(\arcsin x)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C.$$

Второй способ: пусть $\arcsin x=t$, тогда $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(t)$,

и, значит,

$$\int\frac{dx}{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}+C=$$

$$=-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C.$$

2.2. Найти неопределенные интегралы методом подведения функции под знак дифференциала.

а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$. б) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$. в) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5}dx$.

г) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$. д) $\int \frac{dx}{\sin^2(-x+2)}$. е) $\int \mathrm{tg}x dx$. ж) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

Решение

а) $$\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx = \int (1+\ln(x-1))(\ln(x-1))'dx =$$

$$= \int (1+\ln(x-1))d\ln(x-1) = \int d\ln(x-1) + \int \ln(x-1)d\ln(x-1) =$$

$$= \ln(x-1) + \frac{\ln^2(x-1)}{2} + C.$$

б) $$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx = \int \frac{(x-\sin x)'}{(x-\sin x)^2}dx = \int \frac{d(x-\sin x)}{(x-\sin x)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x-\sin x} + C.$$

в) $$\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x^3+3x)'}{(x^3+3x+1)^5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3+3x\right)}{(x^3+3x+1)^5} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3+3x+1\right)}{(x^3+3x+1)^5}\frac{1}{3}\frac{(x^3+3x+1)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{12(x^3+3x+1)^4} + C.$$

г) $$\int \frac{xdx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2)'dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4+1} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2 + C.$$

д) $\int \frac{dx}{\sin^2(-x+2)} = \int \frac{-(2-x)'dx}{\sin^2(2-x)} = -\int \frac{d(2-x)}{\sin^2(2-x)} = \text{ctg}(2-x)+C.$

е) $\int \text{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

ж) $\int \text{tg}^3 x dx = \int \text{tg}x \cdot \text{tg}^2 x dx = \int \text{tg}x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{\text{tg}x}{\cos^2 x} dx -$

$-\int \text{tg}x dx = \int \text{tg}x \cdot (\text{tg}x)' dx - \int \text{tg}x dx = \int \text{tg}x d\text{tg}x -$

$-\int \text{tg}x dx = \frac{\text{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$

2.3. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной интегрирования.

а) $\int x^3 \cdot \sqrt{x^2-1} dx$.

б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

г) $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}}$.

д) $\int \frac{x}{(3-x)^7} dx$.

е) $\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}}$.

ж) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

з) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

Решение

а) Совершим замену переменной $\sqrt{x^2-1} = t$, $t \geq 0$, тогда $x=\sqrt{t^2+1}$, и, значит, $dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$. Отсюда

$$\int x^3\cdot\sqrt{x^2-1}dx=\int(t^2+1)^{3/2}\cdot t\cdot\frac{tdt}{(t^2+1)^{1/2}}=\int t^2\cdot(t^2+1)dt=$$

$$=\int(t^4+t^2)dt=\int t^4dt+\int t^2dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=$$

$$\frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+C$$

б) Положим $\sqrt{x-1}=t$, тогда $x=t^2+1$ и $dx=2tdt$. Следовательно,

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(t^2+1)^3}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^2+1)^3dt=$$

$$2\int(t^6+3t^4+3t^2+1)dt=\frac{2}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+2t^3+2t+C=\frac{2}{7}(x-1)^{7/2}+$$

$$+\frac{6}{5}(x-1)^{5/2}+2(x-1)^{3/2}+2\sqrt{x-1}+C.$$

в) Сделаем замену переменной $\sqrt[4]{x}=t, t\geq 0$, тогда $x=t^4, dx=4t^3dt$, и, значит,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int\frac{t^2dt}{t+1}=4\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt=$$

$$=4\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt=4\int(t-1+\frac{1}{t+1})dt=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|+C.$$

г) Положим $x=\frac{1}{t}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, и, следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt^2}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{((t^2+1)-1)d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)d\left(t^2+1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{t^2}+1\right)d\left(t^2+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{3/2}+$$

$$+\sqrt{t^2+1}+C=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{x^3}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$$

д) Сделаем подстановку $t=3-x$, тогда $x=3-t$, и, значит, $dx=-dt$. Отсюда

$$\int\frac{x}{(3-x)^7}dx=-\int\frac{3-t}{t^7}dt=-3\int t^{-7}dt+\int t^{-6}dt=-$$

$$-3\cdot\left(\frac{t^{-6}}{-6}\right)+\left(\frac{t^{-5}}{-5}\right)+C=\frac{1}{2t^6}-\frac{1}{5t^5}+C=\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^6}+C.$$

е) Заменим $\sqrt{1-e^x}=t, t\geq 0$, тогда $e^x=1-t^2$, и, значит, $e^xdx=-2tdt$. Отсюда

$$\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^x}}=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}\cdot e^xdx=\int\frac{(1-t^2)^2}{t}\cdot(-2t)dt=$$

$$=-2\int(1-2t^2+t^4)dt=-2(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5})+C=.$$

$$-2\sqrt{1-e^x}+\frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+C$$

ж) Положим $x = a\sin t, -a \le x \le a, -\pi/2 \le t \le \pi/2$, тогда $dx = a\cos t dt$, и, следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = \int a^2\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}\sin(2\arcsin\frac{x}{a}) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

где $\sin(2\arcsin\frac{x}{a}) = 2\sin\arcsin\frac{x}{a}\cdot\cos\arcsin\frac{x}{a} =$

$$= 2\cdot\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

з) Пусть $t = \sqrt{1 + 2\cos x}, t \ge 0$, тогда $\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, и, следовательно, $-\sin x dx = t dt$. Значит:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2\cos x}} = \int \frac{-t dt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1 + 2\cos x} + C.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить:

2.1. $\int (\mathrm{ctg} x + \frac{1}{\cos x} + x^3 \cdot \sqrt[4]{5x^4 - 2})dx.$

2.2. $\int \left(\frac{e^{2\arcsin(3x-4)}}{\sqrt{1 - 9x^2}} + \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} + \frac{x}{1 + x^4} - \frac{2x}{1 + x^2} \right)dx.$

2.3. $\int\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}+\frac{e^{\operatorname{tg}x}+\operatorname{ctg}x}{\cos^2 x}+\right.$

$$\left.+\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}+\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\right)dx$$

2.4. $\int\left(\frac{5+x}{3x^2+1}+\frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}}+\frac{x^4}{\cos(2x^5)}\right)dx.$

2.5. $\int\left(tg(\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arcctg}2x}}{1+4x^2}+\sin^2 4x\right)dx.$

2.6. $\int\left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}+\frac{x\cdot e^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}+(\sin x+x\cdot\cos x)\cdot e^{-2x\sin x}\right)dx.$

2.7. $\int\left(\frac{1}{x\cdot\sqrt{1-4\ln x}}+\frac{2}{x\cdot\sqrt{1-4\ln^2 x}}\right)dx.$

2.8. $\int\left(\frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x}+\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln 2x}}\right)dx.$

2.9. $\int\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}dx.$

2.10. $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x^3}}.$

2.11. $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{4-x^2}}.$

2.12. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

О т в е т ы :

2.1. $\ln|\sin x|+\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\frac{1}{25}(5x^4-1)^{5/4}+C$.

2.2. $\frac{1}{6}e^{2\arcsin 3x-4}+\frac{1}{3}\mathrm{tg}(x^3)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2)-\ln(1+x^2)+C$.

2.3. $\frac{1}{8}\sqrt{16\sin^2 x+9}+e^{\mathrm{tg}x}+\ln|\mathrm{tg}x|+2\sqrt{3-\cos^2 x}-.$

$$-\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3}\right|+C.$$

2.4. $\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\sqrt{3}x)+\frac{1}{6}\ln(3x^2+1)-\frac{2}{3}\sqrt{5-3x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}\right)+$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+1}\right|+\frac{1}{10}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+x^5\right)\right|+C.$$

2.5. $\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|-\frac{3}{8}(\mathrm{arcctg}2x)^{4/3}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

2.6. $\mathrm{arctg}\frac{e^x}{2}+e^{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{2}e^{-2x\sin x}+C$.

2.7. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+\arcsin(2\ln x)+C$.

2.8. $\frac{1}{6\cos^3 2x}-\frac{1}{2\cos 2x}+\frac{3}{2}(\ln 2x)^{2/3}+C$.

2.9. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-(x+1)+4\sqrt{x+1}-4\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C$.

2.10. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$.

2.11. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$.

2.12. $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и интеграл $\int udv$, причем справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

называемая формулой интегрирования по частям.

Неудачный выбор функций u и v может привести к более сложному интегралу, чем исходный интеграл.

Пример. Найти $\int x\sin xdx$.

Решение

Пусть $u=\sin x$, $dv=xdx$. Покажем, что такой выбор функций u и v является неудачным. Действительно, учитывая, что $du=\cos xdx$, $v=x^2/2$, по формуле интегрирования по частям получим

$$\int x\sin x dx=\frac{x^2}{2}\cdot\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\cos x dx.$$

При этом $\int\frac{x^2}{2}\cdot\cos x dx$ сложнее, чем исходный интеграл.

Положим теперь $u=x, dv=\sin x dx$. Тогда в силу того, что $v=-\cos x$, имеем

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Рассмотрим три основных типа интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P_n(x)f(x)dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n, n\in N\cup\{0\}$, $f(x)$ – одна из следующих функций: $e^x, \sin x, \cos x$, вычисляются подстановкой $u=P_n(x), dv=f(x)dx$.

2. Интегралы вида $\int P_n(x)f(x)dx$, где $f(x)$ – одна из функций вида $\log_a x\ (a>0, a\neq 1), \arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg}\, x, \mathrm{arcctg}\, x$, вычисляются подстановкой $u=f(x), dv=P_n(x)dx$.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx dx, \int e^{ax}\sin bx dx, \int\sin(\ln x)dx,$ $\int\cos(\ln x)dx, \int\sqrt{a^2\pm x^2}dx$, $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, где $a, b\in R, a\neq 0, n\in N$, вычисляются с помощью применения формулы интегрирования по частям дважды, в результате чего получают линейное уравнение относительно исходного интеграла.

Примеры

3.1. Найти $\int(x^2-6x+2)e^{3x}dx$.

Р е ш е н и е

Пусть $u = x^2 - 6x + 2, dv = e^{3x}dx$, тогда $du = (2x-6)dx, v = \frac{1}{3}e^{3x}$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int (x^2 - 6x + 2)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{3}\int (x-3)e^{3x}dx.$$

Применим теперь формулу интегрирования по частям к последнему интегралу. Положим $u = (x-3), dv = e^{3x}dx$, тогда $du = dx, v = \frac{1}{3}e^{3x}$, и, значит,

$$\int (x^2 - 6x + 2)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3}(x-3)e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx) =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{9}(x-3)e^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{9}(x-3)e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = 27e^{3x}(9x^2 - 60x + 38) + C.$$

3.2. Найти $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$.

Р е ш е н и е

Пусть $u = \cos x$, $dv = \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$, тогда $du = -\sin x dx$, $v = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x}$. Отсюда

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

3.3. Найти $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение

Пусть $u = x^2, dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, тогда $du = 2xdx, v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$, и, значит,

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \cdot \sqrt{x^2+1} - 2\int x \cdot \sqrt{x^2+1}dx = x^2 \cdot \sqrt{x^2+1} -$$

$$-\int \sqrt{x^2+1}d(x^2+1) = x^2 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{3} + C.$$

3.4. Найти $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Решение

Положим $u = \operatorname{arctg} x, dv = xdx$, тогда $du = \frac{dx}{x^2+1}, v = \frac{x^2}{2}$. Отсюда

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

3.5. Найти $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Решение

Пусть $u=\arcsin\sqrt{x}, dv=\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, тогда $du=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$ $v=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x},$ и, значит,

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$
$$=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C\,.$$

3.6. Найти $\int\cos(\ln x)dx$.

Решение

Положим $u=\cos(\ln x), dv=dx$, тогда $du=-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx, v=x$, и, следовательно,

$$\int\cos(\ln x)dx=\cos(\ln x)\cdot x+\int\sin(\ln x)dx\,.$$

Пусть теперь $u=\sin(\ln x), dv=dx$, тогда $du=\cos(\ln x)\cdot$ $\cdot\frac{1}{x}dx, v=x$. Применяя формулу интегрирования по частям к последнему интегралу, получим

$$\int\cos(\ln x)dx=\cos(\ln x)\cdot x+\sin(\ln x)\cdot x-\int\cos(\ln x)dx\,.$$

Отсюда

$$\int\cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C\,.$$

3.7. Найти $\int e^{ax}\cos bxdx$ и $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Решение

Вычислим сначала $\int e^{ax}\cos bxdx$. Полагая $u = e^{ax}$, $dv = \cos bxdx$, получим $du = ae^{ax}dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$. Отсюда

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Пусть теперь $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx$, тогда $du = ae^{ax}dx$, $v = -\frac{1}{b}\cos bx$, и, значит,

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Обозначая $I = \int e^{ax}\cos bxdx$, получим линейное уравнение относительно искомого интервала

$$I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Отсюда

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx\text{, и, значит,}$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\cdot\sin bx + a\cdot\cos bx) + C.$$

Аналогично находим и второй интеграл:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C .$$

Задания для самостоятельной работы

Найти:

3.1. $\int x \ln(x-1) dx$;

3.2. $\int \arcsin x dx$;

3.3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$;

3.4. $\int e^{\sqrt{x}} dx$;

3.5. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$;

3.6. $\int x^3 e^{x^2} dx$;

3.7. $\int \frac{\sin^2 x dx}{e^x}$;

3.8. $\int (2x^2 + 7) \sin 3x dx$;

3.9. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;

3.10. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;

3.11. $\int \sqrt{1+x^2} dx$;

Ответы:

3.1. $\frac{x^2 - 1}{2} \ln|x-1| - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C$.

3.2. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

3.3. $2 \arcsin x \sqrt{1+x} + 4\sqrt{1-x} + C$.

3.4. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

3.5. $-\dfrac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$.

3.6. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$.

3.7. Указание: положить $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)+C.$$

3.8. $-\dfrac{1}{3}(2x^2+7)\cos 3x+\dfrac{4}{9}x\sin 3x+\dfrac{4}{27}\cos 3x+C$.

3.9. $\dfrac{1}{2x^2}(\ln x+\dfrac{1}{2})+C$.

3.10. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$.

3.11. $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|)+C$.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональной функцией называется функция вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{4}$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, $a_i\in R$, $i=\overline{0,n}$, $a_0\neq 0$,

$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_i \in R,\ i = \overline{0, m},\ b_0 \neq 0$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Рациональные функции называются рациональными дробями. При $n < m$ рациональная дробь (41.) называется правильной, при $n \geq m$ – неправильной.

Если рациональная дробь (4.1) является неправильной, то, разделив числитель на знаменатель, получим равенство

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{M_l(x)}{N_s(x)},$$

где $\frac{M_l(x)}{N_s(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Среди правильных рациональных дробей различают четыре типа простейших дробей:

1. $\frac{A}{x-a}$;

2. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2, k \in N$;

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2, k \in N$,

где A, M, N, a, p, q – действительные числа;

k – натуральное число, $p^2 - 4q < 0$.

Интегралы от простейших дробей вычисляются следующим образом:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

П р и м е р ы

4.1. $\int \frac{5dx}{x-4} = 5\int \frac{d(x-4)}{x-4} = 5\ln|x-4| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) =$

$$= A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C .$$

4.2. $\int \frac{3}{(x-5)^4}dx = 3\int (x-5)^{-4}d(x-5) =$

$$= 3\cdot\frac{(x-5)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{(x-5)^3} + C .$$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx =$

$$= \left[x+\frac{p}{2} = t,\ dx = dt,\ q-\frac{p^2}{4} = a^2 > 0 \right] = \int \frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Mtdt}{t^2+a^2} +$$

$$+\int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C .$$

4.3. $\int \frac{3x-5}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{3x-5}{(x+1)^2+9}dx = [x+1=t,\, dx=dt] =$

$$= \int \frac{3t-8}{t^2+9}dt = \int \frac{3tdt}{t^2+9} - \int \frac{8}{t^2+9}dt = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - 8\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C .$$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Mx+N}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^k}dx =$

$$= \left[x+\frac{p}{2}=t,\, dx=dt,\, q-\frac{p^2}{4}=a^2 \right] = \int \frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$= M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} .$$

4.4. $\int \frac{2x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{2x-1}{((x+1)^2+1)^2}dx = [x+1=t,\, dx=dt] =$

$$= \int \frac{2t-3}{(t^2+1)^2}dt = 2\int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} - 3\int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}dt = 2\int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} - 3\int \frac{dt}{t^2+1} +$$

$$+3\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - 3\int \frac{dt}{t^2+1} + 3\int \frac{t\cdot tdt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u=t,\, du=dt, \\ v=\int \frac{tdt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{array} \right] = -\frac{1}{t^2+1} - 3\operatorname{arctg} t +$$

$$+3\left(-\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\right) + C = -\frac{1}{t^2+1} - 3\operatorname{arctg} t - \frac{3t}{2(t^2+1)} +$$

$$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C = -\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{3t+1}{t^2+1} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{3x-4}{x^2+2x+2} + C .$$

Для интегрирования правильной дроби нужно:

1. Разложить знаменатель дроби на простые множители.

2. Представить дробь в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами.

3. Найти коэффициенты.

4. Проинтегрировать простые дроби.

$$4.5.\ \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx\,.$$

Решение

Поскольку степень числителя равна степени знаменателя, то подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Поэтому сначала выделим целую часть:

$$\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}=5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\,.$$

Тогда

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\int\left(5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\right)dx=$$

$$=5\int dx+\int \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx=5x+I\,,$$

где $I=\int \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\int \frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}dx\,.$

Пусть $\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4}\,.$

Найдем значения A, B, C методом неопределенных коэффициентов. Приводя к общему знаменателю правую часть последнего равенства, получим

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A(x^2-5x+4)+B(x^2-4x)+C(x^2-x)}{x^3-5x^2+4x}.$$

Отсюда

$$25x^2-20x+2=A(x^2-5x+4)+B(x^2-4x)+C(x^2-x).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составим систему

$$\begin{cases} A+B+C=25, \\ -5A-4B-C=-20, \\ 4A=2. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{7}{3}, C=\frac{161}{6}$.

При нахождении неопределенных коэффициентов A, B, C можно использовать метод произвольных значений. Для этого в равенство

$$25x^2-20x+2=A(x^2-5x+4)+B(x^2-4x)+C(x^2-x)$$

вместо x последовательно подставим три произвольных значения $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4A=2; \\ -3B=7; \\ 12C=322. \end{cases}$$

Отсюда имеем $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{7}{3}, C=\frac{161}{6}$.

Значит,

$$I=\int\left(\frac{1}{2x}-\frac{7}{3(x-1)}+\frac{161}{6(x-4)}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{161}{6}\int\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C\,,$$

и, следовательно,

$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C\,.$$

4.6. Найти $\int\frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}dx$.

Решение

Поскольку подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, то разложение этой дроби на простейшие примет вид

$$\frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+13}\,,$$

и, значит,

$$\frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}=\frac{Ax(x^2-4x+13)+B(x^2-4x+13)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2-4x+13)}\,.$$

Отсюда, приравнивая числители последнего равенства, имеем

$$3x^3-x^2-4x+13=Ax(x^2-4x+13)+B(x^2-4x+13)+(Cx+D)x^2\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A + C = 3; \\ -4A + B + D = -1; \\ 13A - 4B = -4; \\ 13B = 13. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $A = 0$, $B = 1$, $C = 3$, $D = -2$. Значит,

$$\int \frac{3x^3 - x^2 - 4x + 13}{x^2(x^2 - 4x + 13)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 13} \right) dx = \int x^{-2} dx +$$

$$+ \int \frac{3x - 2}{(x-2)^2 + 9} dx = \begin{bmatrix} x - 2 = t \\ dx = dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{x} + \int \frac{3t + 4}{t^2 + 9} dt = -\frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.$$

4.7. Найти $\int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+1)^2} dx$.

Поскольку подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, то, представив ее в виде суммы простейших дробей, получим

$$\frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$x^3 + 3 = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)(x+1)(x^2+1) + (Dx + E)(x+1).$$

$$\begin{cases} A+B=0; \\ C+B=1; \\ 2A+C+B+D=0; \\ C+B+E+D=0; \\ A+C+E=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B; \\ C=1-B; \\ D=2B-1+B-B=2B-1; \\ E=1-2B-B-1+B=-2B; \\ -B+1-B-2B=3; \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{3}{2}, D=-2, E=1.$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}dx+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x-3}{x^2+1}dx-2\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+$$

$$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x-\left(x\cdot(-\frac{1}{2(x^2+1)})+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{x+2}{2(x^2+1)}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти:

4.1. $\int\frac{x^4+x^2+6}{x^4+3x^2+2}dx$. 4.2. $\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$. 4.3. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

4.4. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$. 4.5. $\int\frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$. 4.6. $\int\frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$.

4.7. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)}$. 4.8. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Ответы:

4.1. $x+6\operatorname{arctg}x-\frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

4.2. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$.

4.3. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$.

4.4. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.5. $-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left|x^2+4\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

4.6. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

4.7. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

4.8. $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx,$$

где R – рациональная функция;

$n \in N$;

$p_1,\ldots,p_n$ – рациональные числа;

a, b, c, d – действительные числа,

рационализируются подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m,$$

где m – общий знаменатель рациональных чисел $p_1,\ldots,p_n$.

Пример 5.1. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

Решение

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому обозначим $2x+1=t^6$. Отсюда

$$x=\frac{1}{2}(t^6-1),\ dx=3t^5dt,$$

и, значит,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}=\int\frac{3t^5}{t^3+t^2}dt=3\int\frac{t^3}{t+1}dt=3\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt=$$

$$=t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-3\ln|t+1|+C=\sqrt{2x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+$$

$$+3\sqrt[6]{2x+1}-3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}+1\right|+C.$$

П р и м е р 5.2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Р е ш е н и е

Так как $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$, то подстановка $\frac{x+2}{x-1} = t^4$.

Отсюда $x = \frac{t^4+2}{t^4-1}$, $dx = \frac{-12t^3dt}{(t^4-1)^2}$, $x-1 = \frac{3}{t^4-1}$, $x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1}$,

и, значит,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\int \frac{-12t^3(t^4-1)^2}{(t^4-1)^2 \cdot t \cdot 3 \cdot 3t^4}dt = -\frac{4}{3}\int dt = -\frac{4}{3}t + C = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} + C.$$

Выражение вида $x^m \cdot (a+bx^n)^p$, где a, b – действительные числа; $a \neq 0, b \neq 0$; m, n, p – рациональные числа; $n \neq 0$, $p \neq 0$; называется дифференциальным биномом. Интегралы от таких функций рационализируются только в следующих трех случаях:

p – целое число;

$\frac{m+1}{n}$ – целое число;

$\frac{m+1}{n} + p$ – целое число.

В первом случае применяется подстановка $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n. Во втором случае – подстановка $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p. В третьем случае – подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель p.

Пример 5.3. Найти $\int \sqrt[3]{x} \cdot (2+\sqrt{x})^2 dx$.

Р е ш е н и е

Так как $p = 2$ – целое число, то $x = t^6$.

Тогда $dx = 6t^5 dt, \sqrt[3]{x} = t^2, \sqrt{x} = t^3$, и, значит,

$$\int \sqrt[3]{x} \cdot (2+\sqrt{x})^2 dx = \int t^2 \cdot (2+t^3)^2 \cdot 6t^5 dt =$$

$$= 6\int (4t^7 + 4t^{10} + t^{13}) dt = 3t^8 + \frac{24}{11}t^{11} + \frac{3}{7}t^{14} + C = 3\sqrt[3]{x^4} +$$

$$+ \frac{24}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + C.$$

П р и м е р 5.4. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Р е ш е н и е

$m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n} = 2$ – целое число, то подстановка $1+\sqrt[4]{x} = t^3$. Отсюда $x = (t^3-1)^4, dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt$, и, значит,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2 (t^3-1)^3 dt =$$

$$= 12\int t^3 \cdot (t^3-1) dt = 12\int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3} + C.$$

Пример 5.5. Найти $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx$.

Решение

$m=-6,\ n=2,\ p=\frac{5}{2}$. Так как $\frac{m+1}{n}+p=0$ – целое число, то подстановка $x^{-2}+1=t^2$. Тогда $x=(t^2-1)^{-1/2}$, $dx=-t(t^2-1)^{-3/2}dt$, $1+x^2=x^2t^2=\frac{t^2}{t^2-1}$.

Отсюда

$$\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx=\int -\frac{t^5\cdot(t^2-1)^3}{(t^2-1)^{5/2}}\cdot t(t^2-1)^{-3/2}dt=$$

$$=-\int \frac{t^6}{t^2-1}dt=-\int (t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1})dt=-\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{5}(x^{-2}+1)^{5/2}-\frac{1}{3}(x^{-2}+1)^{3/2}-\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^{-2}+1}-1}{\sqrt{x^{-2}+1}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{(1+x^2)^{5/2}}{x^5}-\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{x^3}-\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x}-\ln\left|\sqrt{1+x^2}-x\right|+C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где M, N, a, b, c – действительные числа, $a\neq 0$, подстановкой $x+\frac{b}{2a}=t$ приводятся к виду

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = M\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+d}} + (N-\frac{Mb}{2a})\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+d}},$$

в котором $d = c - \frac{b^2}{4a}$, интеграл $\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+d}} = \frac{1}{2a}\int \frac{d(at^2+d)}{\sqrt{at^2+d}} =$ $= \frac{1}{a}\sqrt{at^2+d} + C$,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+d}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\sqrt{a}t + \sqrt{at^2+d}\right| + C$$ при $a > 0$ и

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+d}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{\sqrt{a}t}{\sqrt{d}} + C,$$ если $a < 0$.

Пример 5.6. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx$.

Решение

Учитывая, что $x^2-6x+18=(x-3)^2+9$, положим $x-3=t$, тогда $x=t+3, dx=dt$, и, значит,

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-6x+18}}dx = \int \frac{3(t+3)-1}{\sqrt{t^2+9}}dt = \int \frac{3t+8}{\sqrt{t^2+9}}dt =$$

$$=3\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+9}} + 8\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{\sqrt{t^2+9}} + 8\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = 3\sqrt{t^2+9} +$$

$$+8\ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + C = 3\sqrt{x^2-6x+18} + 8\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+18}\right| + C.$$

П р и м е р 5.7. Найти $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

Р е ш е н и е

Так как $5+2x-x^2=-(x-1)^2+6$, то сделаем замену переменной $t=x-1$. Тогда $x=t+1$, $dx=dt$, и, следовательно,

$$\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=\int \frac{8(t+1)-11}{\sqrt{6-t^2}}dt=8\int \frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}-$$

$$-3\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=-4\int \frac{d(6-t^2)}{\sqrt{6-t^2}}-3\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=-8\sqrt{6-t^2}-$$

$$-3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

Для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m; a, b, c – действительные числа; $a\neq 0$; удобно пользоваться формулой

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (5.1)$$

в которой $Q(x)$ – многочлен степени не выше чем $m-1$,

λ – некоторое действительное число, причем коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ можно найти методом неопределенных коэффициентов.

П р и м е р 5.8. Найти $\int \frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$.

Р е ш е н и е

Воспользуемся формулой (5.1). Так как $P_m(x)=P_3(x)=$ $=9x^3-3x^2+2$, то $Q(x)=Ax^2+Bx+C$, и, значит, формула (5.1) примет вид

$$\int \frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx=(Ax^2+Bx+C)\cdot\sqrt{3x^2-2x+1}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}.$$

Продифференцируем последнее равенство по переменной x, получим

$$\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}=(2Ax+B)\sqrt{3x^2-2x+1}+$$
$$+(Ax^2+Bx+C)\frac{6x-2}{2\cdot\sqrt{3x^2-2x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{3x^2-2x+1}}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, имеем равенство

$$9x^3-3x^2+2=(2Ax+B)(3x^2-2x+1)+(Ax^2+Bx+C)(3x-1)+\lambda.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases}6A+3A=9;\\3B-4A-A+3B=-3;\\2A-2B-B+3C=0;\\B-C+\lambda=2.\end{cases}$$

Решая систему, находим $A=1, B=\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{3}, \lambda=\frac{4}{3}$. Следовательно,

$$\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx=(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})\sqrt{3x^2-2x+1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+1}}=$$

$$=(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})\sqrt{3x^2-2x+1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}}}=$$

$$=(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})\sqrt{3x^2-2x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}(x-\frac{1}{3}))}{\sqrt{3(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}}}=$$

$$=(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})\sqrt{3x^2-2x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}(x-\frac{1}{3})+\sqrt{3x^2-2x+1}\right|+C$$

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ вычисляются при помощи тригонометрических подстановок $x=\frac{a}{\cos t}, x=a\sin t, x=a\,\mathrm{tg}t$.

Пример 5.9. $$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{\cos t} \\ dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}t \end{array}\right|$$

$$\int\mathrm{tg}t\cdot\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=tgt-t+C\,.$$

П р и м е р 5.10. $\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx=2\cos t dt \\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t \end{array}\right|=\int 4\cos^2 t dt=$

$$=2\int(1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+2\sin t\cos t+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти:

5.1. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$. 5.2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$. 5.3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

5.4. $\int x\sqrt{1+x^4}dx$. 5.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$. 5.6. $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$.

5.7. $\int\sqrt{x^2-4x+1}dx$. 5.8. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$. 5.9. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

О т в е т ы :

5.1. $\frac{4}{3}(t^3-\ln\left|t^3+1\right|+C, t=\sqrt[4]{x}$.

5.2. $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

5.3. Указание: домножить и разделить подынтегральную функцию на $\sqrt[3]{1+x}$.

$$\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t^2+t+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

5.4. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right|+C$.

5.5. $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}+C$.

5.6. $3\sqrt{x^2-4x+5}+\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C$.

5.7. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{3}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$.

5.8. $\frac{81}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)+C,\ t=\arcsin\frac{x}{3}$.

5.9. $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C$.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \qquad (6.2)$$

где R – рациональная функция переменных $U_1=\sin x$, $U_2=\cos x$. Указанный интеграл всегда рационализируется так называемой универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, -\pi<x<\pi, -\infty<t<\infty$, для которой справедливы соотношения

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (6.2)$$

Пример 6.1. Найти $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Решение

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, -\pi < x < \pi,\ -\infty < t < \infty$. Учитывая (6.2), получим

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} = 2\int \frac{dt}{(t-4)^2-1} =$$

$$= 2\int \frac{d(t-4)}{(t-4)^2-1} = \ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| + C = = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.$$

Однако универсальная подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Рассмотрим другие методы, которые значительно быстрее позволяют вычислить интеграл (6.1). Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то есть функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$, то целесообразно применить подстановку $\cos x = t$.

Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то есть функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\cos x$, то рекомендуется применить подстановку $\sin x = t$.

Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ -\pi < x < \pi,\ -\infty < t < \infty$.

Пример 6.2. Найти $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Решение

Учитывая, что $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}$, и, значит, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, применим подстановку $\cos x = t$. Тогда $-\sin x dx = dt$, и, следовательно,

$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{(1 + \sin^2 x) \cdot \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = -\int \frac{2 - t^2}{2t^2 - 1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int (1 - \frac{3}{2t^2 - 1}) dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} t -$$

$$- \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

Пример 6.3. Найти $\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$.

Решение

Так как $R(\sin x, \cos x) = \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$, и, значит, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применим подстановку $\mathrm{tg} x = t, -\pi/2 < x < \pi/2$. Тогда

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, x = \mathrm{arctg} t, dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{2+3\sin 2x-4\cos^2 x}=\int \frac{dt}{2t^2+6t-2}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(t+\frac{3}{2})}{(t+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right|+C.$$

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx,$$

где m, n – рациональные числа.

Если m – нечетное число, то применяется подстановка $\cos x=t$. Если n – нечетное число, то целесообразна подстановка $\sin x=t$. Если m, n – неотрицательные четные числа, то применяется метод понижения степени с помощью формул

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x), \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если m, n – положительные нечетные числа, то рекомендуется подстановка $\cos 2x=t$.

Если $m+n$ – четное число, то применяется подстановка $\mathrm{tg}x=t, -\pi/2<x<\pi/2$, или $\mathrm{ctg}x=t, 0<x<\pi$.

Указанные подстановки применяются и к интегралам $\int \mathrm{tg}^m x dx, \int \mathrm{ctg}^m x dx, m\in N$.

Пример 6.4. Найти $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin^5 x}}dx$.

Решение

Так как $n = 3$ – нечетное число, то положим $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$. Отсюда

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin^5 x}}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^{5/4} x} = \int \frac{1-t^2}{t^{5/4}}dt = \int t^{-5/4}dt - \int t^{3/4}dt =$$

$$= \frac{t^{-1/4}}{-1/4} - \frac{t^{7/4}}{7/4} + C = -\frac{4}{\sqrt[4]{\sin x}} - \frac{4}{7}\sqrt[4]{\sin^7 x} + C.$$

Пример 6.5. Найти $\int \sin^4 2x \cdot \cos^6 2x dx$.

Решение

Применяя метод понижения степени, получим

$$\int \sin^4 2x \cdot \cos^6 2x dx = \int (\sin 2x \cdot \cos 2x)^4 \cdot \cos^2 2x dx =$$

$$= \int (\frac{1}{2}\sin 4x)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 4x dx +$$

$$+\frac{1}{32}\int \sin^4 4x \cos 4x dx = \frac{1}{32}\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 8x)\right)^2 dx + \frac{1}{128}\int \sin^4 4x d\sin 4x =$$

$$= \frac{1}{128}\int (1-2\cos 8x + \cos^2 8x)dx + \frac{1}{128}\int \sin^4 4x d\sin 4x =$$

$$= \frac{1}{128}\int (1-2\cos 8x + \frac{1}{2}(1+\cos 16x))dx +$$

$$+\frac{1}{128}\int \sin^4 4x d\sin 4x = \frac{3}{256}\int dx - \frac{1}{64}\int \cos 8x dx +$$

$$+\frac{1}{256}\int\cos 16x dx+\frac{1}{128}\int\sin^4 4x d\sin 4x=$$
$$=\frac{3}{256}x-\frac{1}{512}\sin 8x+\frac{1}{4096}\sin 16x+\frac{1}{640}\sin^5 4x+C.$$

Интегралы вида

$$\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\ \int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\ \int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$$

вычисляются непосредственно путем преобразования подынтегральной функции по формулам

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right].$$

Пример 6.6. Найти $\int\cos x\cdot\sin 3x dx$.

Решение

Учитывая, что $\sin 3x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\left[\sin 4x+\sin 2x\right]$, получим

$$\int\cos x\cdot\sin 3x dx=\int\frac{1}{2}\left[\sin 4x+\sin 2x\right]dx=\frac{1}{2}\int\sin 4x dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти:

6.1. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. 6.2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. 6.3. $\int \cos 2x \cos x \cos 3x dx$.

6.4. $\int \sin^6 x dx$. 6.5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$. 6.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

6.7. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$. 6.8. $\int \operatorname{tg}^5 2x dx$.

Ответы:

6.1. $-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C$.

6.2. $-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{8} + C$.

6.3. $\frac{1}{4}(x + \frac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 6x + C$.

6.4. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

6.5. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$.

6.6. $\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5 x}+2\mathrm{tg}x+C$.

6.7. $\ln|\mathrm{tg}x|-\frac{1}{2}\ln\left|1-\mathrm{tg}^2 x\right|+C$.

6.8. $\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{8}-\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{4}+\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$.

7. Тренировочное задание

7.1. Найти неопределенные интегралы с помощью таблицы интегралов и поднесения под знак дифференциала:

а) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{dx}{x^2-x^4}$;

г) $\int\frac{dx}{x+5}$; д) $\int 2^x\cdot e^x dx$; е) $\int\frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}dx$;

ж) $\int(2x-3)^{11}dx$; з) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$;

и) $\int\frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$; к) $\int\frac{dx}{1+9x^2}$; л) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$;

м) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; н) $\int\frac{dx}{1-3x^2}$; о) $\int\sin 5x dx$;

п) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$; р) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;

с) $\int x^3\sqrt{1+x^4}dx$; т) $\int\frac{xdx}{2-5x^2}$; у) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

7.2. Указать возможные подстановки для вычисления интегралов и найти эти интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; б) $\int e^{\cos^2 x} \sin x dx$; в) $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$;

г) $\int x^5 \sqrt[3]{1+4x^6} dx$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; е) $\int \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$;

ж) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$; з) $\int \frac{e^x dx}{5+e^x}$.

7.3. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int x^2 \cos x dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$; в) $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$;

г) $\int x \mathrm{ctg}^2 x dx$.

7.4. Найти интегралы, используя методы интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен:

а) $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2+3x} dx$; в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$;

г) $\int \sqrt{x^2+2x-3} dx$.

7.5. Найти интегралы, содержащие тригонометрические функции:

а) $\int \cos 5x \cos x dx$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \sin^6 x \cos x dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение примеров тренировочного задания

7.1.

а) $$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx = \int (2x^{1/2} + 3x^{-1/2})dx = 2\int x^{1/2}dx + 3\int x^{-1/2}dx =$$

$$= \left[\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \right] = 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{4}{3}x^{3/2} +$$

$$+ 6x^{1/2} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C\ ;$$

б) $$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + x^{-3/2} \right)dx = x + 6\sqrt{x} + 3\ln x + \frac{x^{-3/2+1}}{-1/2} + C =$$

$$= x + 6\sqrt{x} + 3\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C\ .$$

в) $$\int \frac{dx}{x^2 - x^4} = \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int \frac{1 - x^2 + x^2}{x^2(1-x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\ ;$$

г) $$\int 2^x \cdot e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C = \frac{2^x \cdot e^x}{\ln 2 + 1} + C\ ;$$

д) $$\int \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 2}{\cos^2 x}dx = \int (1 + \frac{3}{\cos x} - \frac{2}{\cos^2 x})dx =$$

$$= x + 3\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - 2\mathrm{tg}x + C\ ;$$

е) $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$;

ж). $\int (2x-3)^{11} dx =$ [1-й способ – поднесение под знак дифференциала:

$$d(2x-3) = (2x-3)' dx = 2dx, \Rightarrow dx = \frac{1}{2} d(2x-3)] =$$

$$= \int (2x-3)^{11} \cdot \frac{1}{2} d(2x-3) =$$

$$= \frac{1}{2} \int (2x-3)^{11} d(2x-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{12}}{12} + C = \frac{(2x-3)^{12}}{24} + C \text{ ;}$$

$\int (2x-3)^{11} dx =$ [2-й способ – замена переменной

$$2x-3 = t,\ x = \frac{t+3}{2},\ dx = \left(\frac{t+3}{2}\right)' dt, dx = \frac{1}{2} dt\ ]$$

$$= \int t^{11} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{11} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \frac{t^{12}}{24} + C = \frac{(2x-3)^{12}}{24} + C.$$

Прежде чем перейти к решению последующих примеров, выпишем полезные преобразования дифференциальных выражений:

1. $dx = d(x+C)$. Например, $dx = d(x+5), dx = d(x-20)$;

2. $dx = \frac{1}{k} d(kx), k \neq 0$. Например, $dx = \frac{1}{3} d(3x),\ dx = -d(-x)$, $dx = -\frac{1}{10} d(-10x)$;

3. $dx=\frac{1}{k}d(kx+b), k\neq 0.$ Например, $dx=\frac{1}{2}d(2x+5)$, $dx=\frac{1}{2}d(2x\pm 5)$, $dx=-\frac{1}{2}d(5-2x)$, $dx=-3d\left(2-\frac{x}{3}\right)$;

4. $x^a dx=\frac{1}{a+1}d\left(x^{a+1}\right), a\neq 0.$ Например, $xdx=\frac{1}{2}d\left(x^2\right)$, $x^3dx=\frac{1}{4}d\left(x^4\right)$, $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right)$;

5. $\sin xdx=-d(\cos x)$;

6. $\cos xdx=d(\sin x)$;

з) $$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(5-4x)}{\sqrt{5-4x}}=-\frac{1}{4}\int(5-4x)^{-1/2}d(5-4x)=$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(5-4x)^{1/2}}{1/2}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C;$$

и) $$\int\frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x}dx=\int\frac{(1-x)^{2/3}}{1-x}dx=\int(1-x)^{-1/3}dx=$$
$$=-\int(1-x)^{-1/3}d(1-x)=-\frac{(1-x)^{2/3}}{2/3}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}+C;$$

к) $$\int\frac{dx}{1+9x^2}=\int\frac{dx}{1+(3x)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{1+(3x)^2}=$$
$$=\left[\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C\right]=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(3x)+C;$$

л) $$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9\left(x^2-\frac{1}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}\right|+C_1.$$

Этот же интеграл можно вычислить иначе:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(x^2-\frac{1}{9}\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}\right| + C_1.$$

В том что ответы идентичны, можно убедиться, проверив правильность интегрирования дифференцированием. Действительно, в первом случае получим:

$$\left(\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right| + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot$$

$$\cdot\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot\left(3+\frac{18x}{2\sqrt{9x^2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\cdot\frac{3(\sqrt{9x^2-1}+3x}{\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}\ .$$

Во втором случае получим

$$\left(\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}\right| + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1/9}}}{x+\sqrt{x^2-1/9}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(\sqrt{x^2-1/9}+x}{(x+\sqrt{x^2-1/9})\sqrt{x^2-1/9}} = \frac{1}{\sqrt{9(x^2-1/9)}} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}\ .$$

Значит, в обоих случаях интегрирование выполнено верно.

м) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} =$

$$= \left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \right] = \frac{1}{3}\arcsin(3x) + C\,;$$

н) $\int \frac{dx}{1-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{1-(\sqrt{3}x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2-1} =$

$$= \left[\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \right] = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right| + C\,;$$

о) $\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C\,;$

п) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg} 3x + C\,;$

р) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-1/2} d(x^2+1) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{x^2+1} + C;$$

с) $\int x^3\sqrt{1+x^4}dx = \int (1+x^4)^{1/2}\frac{d(x^4)}{4} =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x^4)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{6}\sqrt{(1+x^4)^3} + C\,;$$

Второй способ:

$$\int x^3\sqrt{1+x^4}dx=[\sqrt{1+x^4}=t, 1+x^4=t^2, d(1+x^4)=d(t^2),$$

$$(1+x^4)'dx=(t^2)'dt, 4x^3dx=2tdt, x^3dx=\frac{tdt}{2}]=$$

$$=\int\frac{t^2\cdot dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}{6}+C;$$

т) $\int\frac{xdx}{2-5x^2}=\frac{1}{-10}\int\frac{d(2-5x^2)}{2-5x^2}=-\frac{1}{10}\ln\left|2-5x^2\right|+C$.

Второй способ:

$$\int\frac{xdx}{2-5x^2}=[2-5x^2=t,\ d(2-5x^2)=dt,\ -10xdx=dt;$$

$$xdx=-\frac{dt}{10}]=-\int\frac{dt}{10t}=-\frac{1}{10}\ln|t|+C=-\frac{1}{10}\ln\left|2-5x^2\right|+C;$$

у) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\sqrt{(x^3)^2-1}}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C$.

7.2.

а) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=[t=\sqrt{1+\ln x},\ t^2=1+\ln x,\ d(t^2)=d(1+\ln x);$

$$2tdt=\frac{dx}{x}]=\int t\cdot 2tdt=2\int t^2dt=2\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C;$$

б) $\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=t=\cos^2 x, dt=(\cos^2 x)'dx,$

$$dt=2\cos x(-\sin x)dx, dt=-\sin 2xdx]=\int e^t(-dt)=$$

$$=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\cos^2 x}+C;$$

в) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \left[t = \operatorname{arctg} x,\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \right] =$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

г) $\int x^5 \sqrt[3]{1+4x^6}\,dx = [t = \sqrt[3]{1+4x^6},\ t^3 = 1+4x^6,\ d(t^3) = d(1+4x^6),$

$$3t^2 dt = 24x^5 dx,\ x^5 dx = \frac{t^2}{8}dt] = \int \frac{t \cdot t^2 dt}{8} = \frac{1}{8}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{32}\sqrt[3]{(1+4x^6)^4} + C;$$

д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = [t = \sqrt{x+1},\ t^2 = x+1,\ d(t^2) =$

$$= d(x+1),\ 2tdt = dx,\ x = t^2 - 1] = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C;$$

е) $\int \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \left[t = \frac{1}{x},\ dt = \frac{-dx}{x^2} \right] =$

$$= -\int \cos t dt = -\sin t + C = -\sin\frac{1}{x} + C;$$

ж) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}} = [\cos x = t,\ \sin x dx = -dt] = -$

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}} = -\ln(t + \sqrt{4+t^2}) + C = -\ln(\cos x + \sqrt{4+\cos^2 x}) + C;$$

з) $\int \frac{e^x dx}{5+e^x} = \left[t = 5+e^x, dt = e^x dx \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$$= \ln(5+e^x) + C .$$

7.3. Поскольку $\int u dv = uv - \int v du$, то получим

а) $\int x^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2xdx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x -$

$$- \int \sin x \cdot 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x \sin xdx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin xdx, v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 \sin x - 2(x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx) = x^2 \sin x + 2x\cos x -$$

$$- 2\int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C ;$$

б) $\int x^2 \ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} -$

$$- \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C ;$$

в) $\int \frac{x \sin xdx}{\cos^3 x} = \begin{bmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \frac{\sin xdx}{\cos^3 x}, v = \int \frac{\sin dx}{\cos^3 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{bmatrix} =$

$$= \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\mathrm{tg} x + C ;$$

г) $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \mathrm{ctg}^2 x\,dx, v = \int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \\ -\mathrm{ctg}x - x \end{array}\right] = -x\,\mathrm{ctg}x - x^2 + \int(\mathrm{ctg}x + x)dx = -x\,\mathrm{ctg}x - x^2 +$

$$+\ln|\sin x| + \frac{x^2}{2} + C = -x\,\mathrm{ctg}x - \frac{x^2}{2} + \ln|\sin x| + C;$$

7.4.

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+8x+7} = \int\frac{dx}{x^2+8x+16-9} = \int\frac{dx}{(x+4)^2-9} =$

$$= \int\frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C\ ;$$

б) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x^2+3x}dx = \int\frac{2x+3-6}{x^2+3x}dx = \int\frac{2x+3}{x^2+3x}dx -$

$$-6\int\frac{dx}{x^2+3x} = \int\frac{d(x^2+3x)}{x^2+3x} - 6\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}} =$$

$$= \int\frac{d(x^2+3x)}{x^2+3x} - 6\int\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}} = \ln\left|x^2+3x\right| - 6\int\frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2} =$$

$$= \ln\left|x^2+3x\right| - 6\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C = \ln\left|x^2+3x\right| - 2\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x^2+3x\right| - \ln\left|\frac{x}{x+3}^2\right| + C = \ln\left|\frac{(x^2+3x)(x+3)^2}{x^2}\right| + C = \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x}\right| + C\ ;$$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x-x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{-(x^2+4x-1)}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{-(x^2+4x+4-5)}} =$

$$= \int \frac{xdx}{\sqrt{5-(x+2)}} = \begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2, dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{(t-2)dt}{\sqrt{5-t^2}} =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{5-t^2}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-t^2)}{\sqrt{5-t^2}} - 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= -\sqrt{5-t^2} - 2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}} + C = -\sqrt{1-4x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C;$$

г) $\sqrt{x^2+2x-3dx} = \int\sqrt{x^2+2x+1-4dx} = \int\sqrt{(x+1)^2-4dx} =$

$$= \left[x+1=t,\ x=t-1,\ dx=dt\right] =$$

$$= \int\sqrt{t^2-4dt} = \begin{bmatrix} u=\sqrt{t^2-4},\ du=\frac{1}{2\sqrt{t^2-4}}\cdot 2tdt=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-4}} \\ dv=dt,\ v=t \end{bmatrix} =$$

$$= t\sqrt{t^2-4} - \int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2-4}} = t\sqrt{t^2-4} - \int\frac{(t^2-4+4)dt}{\sqrt{t^2-4}} = t\sqrt{t^2-4} -$$

$$- \int\sqrt{t^2-4dt} - \int\frac{4dt}{\sqrt{t^2-4}} = t\sqrt{t^4-4} - 4\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right| - \int\sqrt{t^2-4dt}.$$

Значит, из последних соотношений получаем уравнение относительно искомого интеграла:

$$2\int\sqrt{t^2-4dt} = t\sqrt{t^2-4} - 4\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|, \int\sqrt{t^2-4dt} = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4} -$$

$$-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right| \text{ или}$$

$$\int\sqrt{x^2+2x-3dx} = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3} - 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C.$$

7.5.

а) $\int \cos 5x \cos x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(5x + x) + \cos(5x - x)\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 6x x dx +$
$+\frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{16\sin 4x} + C.$

Здесь была использована формула

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg}^2 x d(\mathrm{tg} x) = \frac{tg^3 x}{3} + C$;

в) $\int \sin^6 x \cos x dx = \int \sin^6 x d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7} + C$;

г) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$.

Контрольная работа № 1

Найти интегралы:

Вариант 1

1. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$;   2. $\int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$;   3. $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4}dx$.

Вариант 2

1. $\int \frac{\sin 6x}{\sin^4 3x + 9} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt[5]{2x+7}+1}{\sqrt[5]{2x+7}-\sqrt[3]{2x+7}} dx$;

3. $\int \frac{2x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$.

Вариант 3

1. $\int \frac{\mathrm{ctg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}} dx$;

3. $\int \frac{3x+26}{(x+7)(x^2+8x+12)} dx$.

Вариант 4

1. $\int \frac{2dx}{2+\sin^2 x}$; 2. $\int \frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt{x+1}} dx$; 3. $\int \frac{2x^6+4}{x^4-x^2} dx$.

Вариант 5

1. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$; 2. $\int \frac{dx}{(\sqrt[5]{x+1})^2 \sqrt{x}}$; 3. $\int \frac{x^4-8}{(x-2)^3} dx$.

Вариант 6

1. $\int \frac{dx}{3\sin x + 1}$; 2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}} dx$; 3. $\int \frac{x^5-2x^3+x^2}{1-x^3} dx$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$; 2. $\int \frac{3xdx}{4x^2+3}dx$; 3. $\int e^{x^3+1}x^2dx$;

4. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$; 5. $\int \frac{\ln(\ln x)dx}{x}$.

Вариант 2

1. $\int \sqrt[5]{1+3x}dx$; 2. $\int e^{\cos x}\sin xdx$; 3. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; 5. $\int x\ln(x+1)dx$.

Вариант 3

1. $\int \frac{dx}{7-3x}$; 2. $\int \frac{2dx}{4+3x^2}dx$; 3. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}7x}}{\sin^2 7x}dx$;

4. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$; 5. $\int \sin(\ln x)dx$.

Вариант 4

1. $\int \frac{dx}{5+4x}$; 2. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$; 3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$; 5. $\int x^2\ln xdx$.

Вариант 5

1. $\int \cos(3x+5)dx$;   2. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$;   3. $\int \frac{\cos x dx}{3-\sin x}$;

4. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$;   5. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Вариант 6

1. $\int \cos(5-2x)dx$;   2. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^2(1-x)}}$;   3. $\int \frac{\arccos^3 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$;   5. $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.

Учебное издание

АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич
ГАБАСОВА Ольга Рафаиловна
ПРИМИЧЕВА Зоя Николаевна

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ
ИНТЕГРАЛ

Методическое пособие
для самостоятельной работы
и самоконтроля знаний

Редактор Т.Н. Микулик
Компьютерная верстка Д.К. Измайлович

Подписано в печать 20.04.2009.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 1,7. Тираж 300. Заказ 1102.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.