Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

для проведения текущего и промежуточного контроля знаний по математике

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

для проведения текущего и промежуточного контроля знаний по математике
для студентов первого курса инженерно-технических специальностей вузов

Минск 2009

УДК 51 (075.8)
ББК 21.1я7

Составители:

А.Н. Андриянчик, О.Л. Зубко, Е.А. Герасимова

Рецензенты:

И.Н. Катковская, А.П. Рябушко

Данное издание содержит контрольные работы по высшей математике, которая излагается студентам первого курса инженерно-технических специальностей вузов. Может быть использовано для проведения контрольных работ на практических занятиях, для промежуточных экзаменов, коллоквиумов, итоговых контрольных работ.

Содержание

Контрольная работа
«Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»

Вариант 1

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

2. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1,\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

3. Привести к каноническому виду уравнение прямой $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(0;\ 0;\ 0)$, $A_2(3;\ -2;\ 1)$, $A_3(1;\ 4;\ 0)$, $A_4(5;\ 2;\ 3)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $x^2 + 8x + 2y + 20 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду.

Вариант 2

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_3 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

2. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если векторы $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n},\ \vec{b} = 3\vec{m} + 6\vec{n}$ ортогональны?

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 3)$ и точку пересечения прямых $2x - y - 1 = 0,\ 3x + y - 4 = 0$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3;\ 1;\ 0)$, $A_2(0;\ 7;\ 2)$, $A_3(-1;\ 0;\ -5)$, $A_4(4;\ 1;\ 5)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $3x^2 - 4y^2 = 18x + 15$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 3

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 - x_1 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$

2. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1,\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Привести к каноническому виду уравнение прямой $\begin{cases} x + 3y - 3z - 6 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\,(3;\,1;\,1)$, $A_2\,(1;\,4;\,1)$, $A_3\,(1;\,1;\,7)$, $A_4\,(3;\,4;\,-1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 4

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_3 + x_2 = -1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(0;\,3)$ и точку пересечения прямых $x - y - 1 = 0,\ -3x + y - 4 = 0$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\,(5;\,1;\,0)$, $A_2\,(7;\,1;\,0)$, $A_3\,(2;\,1;\,4)$, $A_4\,(5;\,5;\,3)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $x^2 + 8x + y + 15 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду.

Вариант 5

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_1 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

2. Зная, что $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении α взаимно перпендикулярны векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

3. Даны уравнения сторон треугольника $x + 2y - 1 = 0,\ 5x + 4y - 17 = 0,\ x - 4y + 11 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(0;\ 0;\ 0)$, $A_2(5;\ 2;\ 0)$, $A_3(2;\ 5;\ 0)$, $A_4(1;\ 2;\ 4)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 6

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

2. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$ коллинеарные?

3. На прямой $2x + y + 11 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 0)$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3;\ 1;\ 1)$, $A_2(1;\ 4;\ 1)$, $A_3(1;\ 1;\ 7)$, $A_4(3;\ 4;\ -1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $5x^2 + 18y - 30x + 9y^2 + 9 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 7

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

2. На векторах $\overrightarrow{AB}(4; -5; 0)$ и $\overrightarrow{AC}(0; 4; -2)$ построен треугольник ABC. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3. Найти проекцию точки P (3; 1; -1) на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3; 1; 0)$, $A_2(1; -2; 1)$, $A_3(0; 1; 7)$, $A_4(-3; 4; -1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $5x^2 + 18y - 30x - 9y^2 + 9 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 8

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

2. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OD} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Доказать, что диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

3. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-3; 1; 2)$, $A_2(1; -2; 1)$, $A_3(1; 1; 0)$, $A_4(2; 4; -1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $-5x^2 + 18y - 30x + 9y^2 + 9 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду, найти фокусы.

Вариант 9

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

2. Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Через прямую $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ провести плоскость, параллельную прямой $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{3}$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\,(3;\,1;\,1)$, $A_2\,(1;\,5;\,1)$, $A_3\,(1;\,1;\,-3)$, $A_4\,(-4;\,4;\,-1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $18y - 30x + 9y^2 + 9 = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду.

Вариант 10

1. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

а) методом Крамера $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$, $3x - y + 2z - 3 = 0$.

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\,(0;\,1;\,1)$, $A_2\,(-2;\,4;\,1)$, $A_3\,(1;\,1;\,-3)$, $A_4\,(3;\,5;\,-1)$. Требуется найти: 1) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды.

5. Построить на плоскости кривую $5x^2 + 18y - 30x = 0$, приведя ее уравнение к каноническому виду.

Контрольная работа
«Предел функции. Непрерывность и дифференцируемость функции»

Вариант 1

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\dfrac{x}{2}-1}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-x^3}$; á) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ \dfrac{2}{x}, & 1<x\le 4, \\ x-2, & x>4. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; á) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; â) $y=(x+1)^{\frac{2}{x}}$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: а) $y=\cos^2 x$; á) $\begin{cases} x=t^2+2, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-1. \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{x+1}}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{1-x^2}{x^2}$.

Вариант 2

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$; á) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 3, \\ 3x-7, & 3<x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$; á) $x^4+y^4=x^2y^2$; â) $y=x^2e^{x^2}\sin 2x$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: а) $y=\operatorname{arctg} x^3$; á) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; á) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-\operatorname{arcctg} x)\ln x$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x}{(1+x)^3}$.

Вариант 3

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 2x}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; á) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le 0,\\ 1-x,\ 0<x\le 3,\\ x^2-5,\ x>3.\end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=e^x-\sin(e^x\cos^3(e^x))$; á) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ a\ge 0$; â) $y=x^2e^{x^2}\ln x$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^4}$; á) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Вариант 4

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2+1}{4x^6+6x^3-3}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$; á) $f(x)=\begin{cases}3,\ x\le 0,\\ x,\ 0<x\le\pi,\\ \sin x,\ x>\pi.\end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$; á) $y=(\ln x)^x$; â) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=e^{-x^2}$; á) $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=t^2-1.\end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 2x}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^3}}$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$.

Вариант 5

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$; á) $f(x)=\begin{cases} e^x, \ x\le 0, \\ 1+x, \ 0<x<1, \\ x, \ x\ge 1. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\cos^2 x$; á) $y=\dfrac{(x-2)^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; â) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=\operatorname{tg}x$; á) $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(t+1). \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{4x^2+1}{x}$.

Вариант 6

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6+5x^2-4}{4x^6-x+20}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$; á) $f(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0, \\ 1, \ 0<x<1, \\ 2-x, \ x\ge 1. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; á) $y=\dfrac{(x+1)^3\cdot\sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; â) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=x\ln x$; á) $\begin{cases} x=1+e^t, \\ y=1+e^{-t}. \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+1\right)^x$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3+2}{2x}$.

Вариант 7

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$; á) $f(x)=\begin{cases} x+3,\ x\le 0, \\ \dfrac{1}{x+1},\ 0<x\le 5, \\ x^2-1,\ x>5. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\ln\dfrac{x^2-2x}{x+1}$; á) $y=\dfrac{(x+1)^4\cdot\sqrt[3]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-5)^{-2}}}$; â) $\sin(2xy)+\cos(3xy)=0$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: а) $y=(x-1)\ln 2x$; á) $\begin{cases} x=2-e^{2t}, \\ y=1+e^{-3t}. \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{2x-4}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^x+1\right)^{\frac{1}{x}}$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^2-4}{2x}$.

Вариант 8

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; á) $f(x)=\begin{cases} 2^x,\ -1\le x<1, \\ x-1,\ 1<x\le 4, \\ 1,\ x>4. \end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=e^{2x}\cos^2 3x$; á) $y=(\sin x)^{\cos x}$; â) $y^2-5^{\cos^2 x}+\operatorname{tg} y=0$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=\ln\operatorname{ctg}4x$; á) $\begin{cases} x=t-\dfrac{1}{2}\sin^2 t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^2-9}{2x}$.

Вариант 9

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$; á) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tgx}, \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2}, \ 0<x\le 2,\\ 1, \ x>2.\end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$; á) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x^2}$; â) $\ln y-xy=a$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; á) $\begin{cases}x=t-\ln\sin t,\\ y=t+\ln\cos t.\end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; á) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{-x^2+9}{2x}$.

Вариант 10

1. Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

2. Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; á) $f(x)=\begin{cases}\ln x, \ 0<x\le 1,\\ x-1, 1<x\le 3,\\ 3, \ x>3.\end{cases}$

3. Найти производные функций:

а) $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; á) $y=(\mathrm{arctg}x)^{\ln x}$; â) $2^x+2^y=2^{x+y}$.

4. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=\sqrt[5]{(4-x)^2}$; á) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\mathrm{arctg}t.\end{cases}$

5. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{tg2x}$; á) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\mathrm{ctg}x\right)$.

6. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{-x^2+4}{2x}$.

Контрольная работа
«Неопределенный и определенный интеграл»

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{4^x dx}{1+4^x}$;

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $\int x^2 2^{2x} dx$;

г) $\int \frac{5x+4}{\left(x^2+1\right)(x-2)^2} dx$;

д) $\int \sin^3 2x \cos^3 2x dx$;

е) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x dx$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x=4\cos t$, $y=9\sin t$.

3. Найти длину кривой $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

а) $\int (3x+1)^5 dx$;

б) $\int \frac{dx}{2^x+3}$;

в) $\int (3x+2)e^{2x} dx$;

г) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;

д) $\int \frac{x^5-x^2}{x^6-1} dx$;

е) $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x dx$;

ж) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(x^2-1\right)^3}}$.

2. Найти длину кривой $y=\ln\sin x$, $\left(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $y=x$, $x=1$.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int \frac{2\sin 2x dx}{2+\cos^2 2x}$;

в) $\int \frac{\ln 2x}{x^3} dx$;

г) $\int \frac{dx}{4+5\sin 2x}$;

д) $\int \frac{1+\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}} dx$;

е) $\int\limits_1^{e/2} \ln 2x dx$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=9$, $y=x$, $x=5$.

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$, $x=4$.

Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

б) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}$;

в) $\int \frac{1}{x^2+3x+5} dx$;

г) $\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x} dx$;

д) $\int \frac{2x+\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[6]{x}}{3x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$;

е) $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$;

ж) $\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4-3x^2$.

3. Найти длину кривой $\rho=5(1+\cos\varphi)$.

Вариант 5

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \sin 2x \cos 4x dx$;

б) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$;

в) $\int \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} dx$;

г) $\int x\cos^2 x dx$;

д) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+3\right)\sqrt{x}}$;

е) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x} dx$;

ж) $\int_0^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=3\cos\varphi$.

3. Найти длину кривой $y=e^{-x}$ от точки $(0;1)$ до точки $\left(5;\,e^{-5}\right)$.

Вариант 6

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\left(\ln^2 x-3\right)dx}{x}$;

б) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

в) $\int \frac{5x-2}{x^2(x-1)(x+1)} dx$;

г) $\int \cos 4x \sin 6x dx$;

д) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[6]{x}}{2x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$;

е) $\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$;

ж) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=4\cos 3\varphi$.

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$ $(x>0)$.

Вариант 7

1. Вычислить интегралы:

а) $\int x^2 \sin\left(2x^3+1\right)dx$;

б) $\int \frac{3^{1/x^2}dx}{x^3}$;

в) $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int \sin 2x \sin 4x dx$;

д) $\int \frac{x+\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{2+x}}dx$;

е) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+5\cos x}$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ y=1,\ y=4,\ x=0$.

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=2x,\ y=x,\ x=3$.

Вариант 8

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{4x^3+2x^2-3}{x^3}dx$;

б) $\int e^{-2x}\cos x dx$;

в) $\int \frac{2x^2-6x+3}{x^3-8}dx$;

г) $\int \sin^3 3x \cos^5 3x dx$;

д) $\int \frac{\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{x}}}{2\sqrt{x}}dx$;

е) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^5 x dx$;

ж) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} x dx$.

2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=0\ (0\le x\le \pi)$.

3. Найти длину кривой $x=8\sin t+6\cos t,\ y=6\sin t-8\cos t\ (0\le t\le \pi/2)$.

Вариант 9

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$;

б) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int (x+1)\sin x dx$;

г) $\int \frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}dx$;

д) $\int \cos^5 x dx$;

е) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x dx$;

ж) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{xdx}{x^2-1}$.

2. Найти длину кривой $y^2=(x-1)^3$ от точки $(0;1)$ до точки $\left(6;\sqrt{125}\right)$.

3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-x,\ y=0$.

Вариант 10

1. Вычислить интегралы:

а). $\int 2\sqrt{x}\left(x+1\right)dx$;

б) $\int \frac{3x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \arcsin x dx$;

г) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{3+x}}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin^3 2x dx$;

ж) $\int\limits_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3-1}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x,\ y=3x$;

3. Вычислить длину кривой $x=5\cos^2 t,\ y=5\sin^2 t\ \ (0\le t\le \pi/2)$.

Вариант 11

1. Вычислить интегралы:

а). $\int 2\sqrt{3x}\left(x-4\right)dx$;

б) $\int \frac{3x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

в) $\int x\arcsin x dx$;

г) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+x+3}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{5-x}}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin^3 4x dx$;

ж) $\int\limits_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3+5}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x,\ y=-3x$;

3. Вычислить длину кривой $x=10\cos^2 t,\ y=10\sin^2 t\ \ (0\le t\le \pi)$.

Вариант 12

1. Вычислить интегралы:

а). $\int 2\sqrt[3]{x^4}\left(x-6\right)dx$;

б) $\int \frac{7x-2\arcsin x}{3\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int (x+2)\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{2x^2+4x+2}}dx$;

д) $\int \frac{5dx}{(2-x)\sqrt{4+x}}$;

е) $\int\limits_0^{\pi/6} \cos^3 2x dx$;

ж) $\int\limits_1^2 \frac{3x^2 dx}{5x^3+3}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x,\ y=-2x$;

3. Вычислить длину кривой $x=4\sin t+3\cos t,\ y=3\sin t-4\cos t\ (0\le t\le \pi/2)$.

Контрольная работа
«Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Вариант 1

1. а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+y}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = uv$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 4 + x^2 + 2y^2$ в точке M (1; 0; 5).

4. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Вариант 2

1. а) $z = \sqrt{\dfrac{x}{y + 2xy + x}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$;

в) $\dfrac{xy}{z} + zxy + \dfrac{z}{y^2} = 1$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z = e^{xy}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x\ln y + y\ln x$ в точке M (e; e; $2e$).

4. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x^2\sin z - y^3\cos z$ в начале координат?

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

Вариант 3

1. а) $z=(x-1)^{\cos y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z=\sqrt{2x^2-xy+y^2}$, $x=2t^2$, $y=3t^3$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$;

в) $z+e^{xyz}=x\cos z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=\frac{\cos xy}{y}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке M (1; 1; 1).

4. Найти производную функции $z=xy\sqrt{x^2+y^2}$ в начале координат в направлении, составляющем с осью Oy угол 60°.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

Вариант 4

1. а) $z=\sqrt{\frac{y-x^2}{x-y^2}}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z=tx^2-y^2x+1$, $x=\operatorname{arctg} t$, $y=\ln(1+t^2)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$;

в) $\ln(x+xyz+y)=e^{z^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=\frac{1}{xy}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x\ln y-y\ln x$ в точке M (e; e; 0).

4. Найти производную функции $z=xy\sqrt{x^2+y^2}$ в точке M (1; 2) в направлении, составляющем с осью Oy угол 30°.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=x+2y$ при условии $x^2+y^2=5$.

Вариант 5

1. а) $z=(x+2y)\cos^2\frac{x}{y^2}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z=x^2\ln y,\ x=\sqrt{t^2+1},\ y=\arcsin t$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$;

в) $z\,\mathrm{arctg}\,xy+\frac{z^2}{1+x^2y^2}=1$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=2x^2-4y^2$ в точке M (2; 1; 4).

4. Найти производную функции $z=\ln(x+y)$ в точке (1; 2), принадлежащей параболе $y^2=4x$, по направлению этой параболы.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

Вариант 6

1. а) $z=\ln\mathrm{tg}\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $u=\ln(x^2+y^2+z^2),\ x=t^3,\ y=t^2,\ z=e^t$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$;

в) $y\sin(x+2z)+z\cos(x+2y)=e^z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=\frac{1}{2x-3y}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=xy$ в точке M (1; 1; 1).

4. Найти производную функции $z=\ln(x-y)$ в точке (1; –2), принадлежащей параболе $y^2=4x$, по направлению этой параболы.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии $x+y=2$.

Вариант 7

1. а) $z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z=x^{\cos y}$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=uv$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$;

в) $z^{xy}+\cos z=0$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=\dfrac{x}{y}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точке M (3; 4; –7).

4. Дана функция $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$. Найти градиент этой функции в точке (2; 1).

5. Исследовать на экстремум функцию $z=\dfrac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ при условии $x^2+y^2=1$.

Вариант 8

1. а) $z=\sin(xy)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z=x\sin y+y\cos x$, $x=t^2$, $y=t^3$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$;

в) $ze^{xy}+zxy^2=a^2$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z=e^{x\sin y}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M(1; 1; \dfrac{\pi}{4})$.

4. Даны функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (3; 4).

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-4x+8y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

Вариант 9

1. а) $z = x\cos(xy)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $z = x\sin y - 2y\cos x,\ x = 5t^2,\ y = 4t^3$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$;

в) $z^2 e^{xy} - 3zxy^2 = 2a^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z = e^{-2x\sin y}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x}$ в точке $M(1;\ 1;\ 0)$.

4. Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (–3; –4).

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3xy - 4x - 8y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0,\ y = 0,\ x = 3,\ y = 4$.

Вариант 10

1. а) $z = \ln \operatorname{ctg}\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) $u = \ln(x^3 + y^3 - z^2),\ x = 3t^3,\ y = -2t^2,\ z = e^{-t}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$;

в) $y\sin(x - 2z) + z\cos(x - 2y) = e^{-2z}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Найти частные производные второго порядка $z = \frac{8}{2x - 3y^2}$.

3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy^2$ в точке M (1; –1; 1).

4. Найти производную функции $z = 2\ln(x - y) + x$ в точке (4; –4), принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{1}{2x} - \frac{1}{y}$ при условии $x - 2y = 3$.

Контрольная работа
«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»

Вариант 1

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = a\sqrt{3}\sin\varphi$; $r = a\sin\varphi$.

2. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L y^2 dl$, где L – дуга кривой $x = \ln y$ между точками A (0; 1) и B (1; e).

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint y^2 dx + (x + y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами A (a; 0), B (a; a), C (0; a).

5. Используя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + z = 1$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ по окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Вариант 2

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L x^2 dl$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Выяснить, будет ли интеграл $\int\limits_{AB} (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$ зависеть от пути интегрирования и вычислить его по линии AB, соединяющей точки A (0; 0), B (2; 2).

5. Вычислить $\iint\limits_S zdxdy + xdxdz + ydydz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями.

6. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a} = (3x^2y^2z + 3x^2)\vec{i} + 2x^3yz\vec{j} + (x^3y^3 + 3z^2)\vec{k}$.

Вариант 3

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде двойного интеграла $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy + \int_1^4 dx \int_0^{1/3(4-x)} dy$. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ $(\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{2})$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

4. Вычислить $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. Пользуясь формулой Остроградского, вычислить $\iint_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где S – внешняя сторона поверхности, образуемая плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0,$ $x + y + 2z = 1$.

6. Найти дивергенцию градиента функции $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y^2z^2$.

Вариант 4

1. Найти массу половины круга R с центром в начале координат, лежащей в области $y \ge 0$, если плотность равна квадрату полярного радиуса.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $z = 0$.

3. Вычислить $\int_L (3x - 5y + z + 2)dl$, где L – отрезок прямой между точками A (4; 1; 6) и B (5; 3; 8).

4. Поле образовано силой $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному осями координат и эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, лежащим в первой четверти.

5. Найти работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x - 3y)\vec{j}$ при перемещении массы m из точки A (0; 4) в точку B (2; 0) по параболе $y = (x - 2)^2$.

6. Найти $\operatorname{div}\left[\vec{u}; \vec{v}\right]$, где $\vec{u} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $\vec{v} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$.

Вариант 5

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде двойного интеграла $\int_0^1 dy \int_0^y dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dx$. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 + z = 1,\ z = 0$.

3. Найти массу дуги кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точке.

4. Вычислить $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ координатными плоскостями в первом октанте.

Вариант 6

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ay = x^2 - 2ax,\ y = x$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = x^2 + y^2,\ y = b$, если плотность в каждой точке пропорциональна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int_L xyzdl$, где L – дуга кривой $x = \frac{1}{2}t^2,\ y = t,\ z = \frac{8}{3}\sqrt{t^3}\ \ (0 \le t \le 1)$.

4. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при перемещении массы m из начала координат в точку A (1; 1) по параболе $y = x^2$.

5. С помощью формулы Стокса показать, что интеграл $\oint_C yzdz + xzdy + xydz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив данный интеграл по контуру треугольника с вершинами O (0; 0; 0); A (1; 1; 0) и B (1; 1; 1).

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 7

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4,\ y^2=4(1-x)$ (вне параболы).

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z$, если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой $y=\frac{1}{2}x-2$ от точки A (0; –2) до точки B (4; 0).

4. Вычислить $\int\limits_L xydx$ по дуге синусоиды $y=\sin x$ от точки $x=\pi$ до $x=0$.

5. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями $x^2=1-y,\ x+y+z=3,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$

6. Вычислить поток вектора $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Вариант 8

1. Найти массу фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\ x+y=2$, если плотность ее в каждой точке равна ординате этой точки.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}$ и расположенного в первом октанте.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – кривая $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$.

5. Вычислить (непосредственно и с помощью формулы Остроградского) интеграл $\iint\limits_S zdxdy+xdydz+ydxdz$, где S – внешняя сторона куба, ограниченного плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4,\ y=4,\ z=4$.

6. Найти $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u)$, где $u=\sin(x+y+z)$.

Вариант 9

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1/2(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Изменить порядок интегрирования.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=0,\ z=h,\ z\ge 0$.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{\cos^2 x dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, где L – дуга кривой $y=\sin x,\ 0\le x\le \pi$.

4. Доказать, что выражение $3x^2e^y dx+(x^3e^y+1)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции. Найти эту функцию.

5. Вычислить $\iint\limits_S (x^2+z^2)dzdy$, где S – внешняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0,\ z=2.$

6. Найти $\mathrm{rot}\left[\vec{r},\vec{a}\right]$, где $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ \vec{r}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$.

Вариант 10

1. Найти массу фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и осью Ox, если плотность $\rho(x,y)=x^2y^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=2x$.

3. Вычислить $\int\limits_L xdl$, где L – кривая $y=x^2$ от точки (1; 1) до точки (2; 4).

4. Вычислить $\oint\limits_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, применяя формулу Грина, где C – контур треугольника с вершинами в точках A (1; 1), B (2; 2), C (1; 3), пробегаемый против часовой стрелки.

5. Вычислить $\iiint\limits_V (x+yz^2)dxdydz$, где V – часть конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостями $z=h,\ z=0$.

6. Найти $\mathrm{rot}\,\vec{F}$, если $\vec{F}=y^2\vec{i}-y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

Контрольная работа
«Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'\sin x = y\ln y$;

б) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;

в) $y^{IV} + 2y''' + y' = 0$;

г) $y'' - 2y' = (2x+3)e^{2x}$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$;

б) $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 0$;

в) $2yy'' = 3\left(y'\right)^2 + 4y^2$;

г) $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2y - x + 1, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$;

б) $\left(5x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy = 0$;

в) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$;

г) $y'' + y' = x^2 + 1$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

б) $x^2 y' + xy + 1 = 0$;

в) $e^x\left(y''e^x\right) = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

г) $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4\sin x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение
$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x + y - 36t, \\ y' = y - 2x - 2e^t. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$;

б) $ydy = (2y - x)dx$;

в) $y''' + 2y'' - 3y' = 0$;

г) $4y'' + 4y' + y = 3\cos 2x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t, \\ y' = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $3e^x \sin y dx + \left(1 + e^x\right)\cos y dy = 0$;

б) $\dfrac{dx}{xy - x^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$;

в) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x\cos x,\ y(\pi) = \pi + 1,\ y'(\pi) = 2\pi$;

г) $y'' + 9y = 4\cos 3x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, \\ y' = 2x - y + 2\cos t. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $xy' = y + y\ln\frac{y}{x}$;

б) $\left(1+e^{3y}\right)xdx = e^{3y}dy$;

в) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0$;

г) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + \cos x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(x + 2xy)dx + \left(1 + x^2\right)dy$;

б) $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = 0$;

в) $x(y'' + 1) + y' = 2,\ \ y(1) = \frac{1}{2},\ \ y'(1) = \frac{5}{2}$;

г) $y'' + 10y' + 26 = (2x - 1)e^x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

б) $xy' = x\cos\frac{x}{y} + y$;

в) $y'' + y' = 1,\ \ y(0) = 0,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

г) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + y' = \frac{2}{\sin^3 x}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -y + x, \\ y' = 3x - 4y. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' = \frac{\ln x}{x}$;

б) $(2x - y + 1)dx + (2y - x + 1)dy = 0$;

в) $2yy'' = 1 + (y')^2$;

г) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$.

2. Решить методом Лагранжа дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t. \end{cases}$

Учебное издание

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

для проведения текущего и промежуточного контроля знаний по математике
для студентов первого курса инженерно-технических специальностей вузов

Составители:
АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич
ЗУБКО Ольга Леонидовна
ГЕРАСИМОВА Екатерина Александровна

Ответственный за выпуск Т.А. Подолякова
Компьютерная верстка О.Л. Зубко

Подписано в печать 27.02.2009.
Формат $60 \times 84^{1}/_{8}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,60. Уч.-изд. л. 1,41. Тираж 200. Заказ 998.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65, 220013, Минск.