Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

по высшей математике
для студентов-заочников
инженерно-технических специальностей

Минск 2010

УДК 51.(075:4)
ББК 22.1
М 54

С о с т а в и т е л и
А.Н. Андриянчик, А.В. Метельский, Н.А. Микулик,
Г.А. Романюк, В.И. Юринок

Р е ц е н з е н т ы:
В.И. Каскевич, А.П. Рябушко

Настоящие методические указания и контрольные работы предназначены для студентов первого курса заочного отделения инженерно-технических специальностей БНТУ.

Пособие содержит основные теоретические сведения из программного материала, типовые примеры и контрольные задания по темам курса высшей математики (20 вариантов).

Студент должен изучить теоретический материал, разобрать приведенные образцы решения типовых примеров и задач, решить задачи своего варианта, номер которого совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше двадцати, то следует отнять от номера шифра число, кратное 20, и полученная разность (две последние цифры) будет номером варианта.

Например:

Номер зачетной книжки	Номер варианта	Номер задач
301789/148	8	8, 28, 48 и т.д.
303700/194	14	14, 34, 54 и т.д.
300120/100	20	20, 40, 80 и т.д.

ПРОГРАММА

Тема 1. Неопределенный интеграл

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Метод рационализации. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование простейших иррациональностей.

Тема 2. Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона–Лейбница.

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы.

Приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Вычисление объемов и длин дуг. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

Тема 3. Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Область определения. Предел. Непрерывность. Частные производные.

Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал. Производные от сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Неявные функции и их дифференцирование.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными, однородных, линейных, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Свойства линейного дифференциального оператора. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Определитель Вронского.

Линейные однородные дифференциальные уравнения; условие линейной независимости их решений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Автономные системы. Геометрический смысл решения. Фазовое пространство. Задачи Коши для нормальной системы. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения для решения нормальных систем дифференциальных уравнений.

Системы линейных дифференциальных уравнений; свойства их решений. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Понятие о качественных методах исследования систем дифференциальных уравнений.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Понятие неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если во всех точках этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных $\{F(x) + C\}$, где C – произвольная постоянная, для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Нахождение для функции $f(x)$ всех ее первообразных $F(x) + C$ называется интегрированием. Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

Основные правила интегрирования

1) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C$;

$\int f(x)dx = d(F(x) + C) = f(x)dx$;

2) $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$;

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, (a = \mathrm{const})$;

4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, при условии, что a, b – постоянные числа, $a \neq 0$;

5) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int du = u + C$;

2) $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1$;

3) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;

5) $\int e^u du = e^u + C$;

6) $\int \sin u du = -\cos u + C$;

7) $\int \cos u du = \sin u + C$;

8) $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C$;

9) $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$;

10) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;

11) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

13) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;

14) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$;

15) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

16) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

17) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm \alpha^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm \alpha^2}\right| + C$.

В приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$ аргумента x.

1.2. Основные методы интегрирования

1.2.1. Непосредственное интегрирование функций и метод поднесения под знак дифференциала

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путем алгебраических тождественных преобразований (см. пример 1.4) подынтегральной функции или поднесением части ее множителей под знак дифференциала.

Поднесение функции под знак дифференциала состоит в том, что под знак дифференциала записывают функцию, дифференциал которой равен заданному выражению, то есть

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ где } t = \varphi(x).$$

Пример 1.1. $\dfrac{dx}{x} = (\ln x)'dx = d(\ln x)$.

Пример 1.2. $\cos 3x dx = \dfrac{1}{3} \cdot 3\cos 3x dx = \dfrac{1}{3} d(\sin 3x)$.

Пример 1.3. $\int \sin(5x+2)dx = \dfrac{1}{5}\int \sin(5x+2)d(5x+2) = -\dfrac{1}{5}\cos(5x+2) + C$.

Пример 1.4. Использование алгебраических преобразований.

$$\int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2\sin x - 3)dx = 3\int x dx - \int x^{5/7}dx + 2\int \sin x dx - 3\int dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^{12/7}}{12/7} - 2\cos x - 3x + C = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{12}x^{12/7} - 2\cos x - 3x + C.$$

Пример 1.5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{100x^2 - 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(10x)^2 - 1}} = \left| \begin{array}{l} \text{делаем поднесение} \\ \text{под знак дифференциала}: dx = \dfrac{1}{10}d(10x) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d(10x)}{\sqrt{(10x)^2 - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{таблица интегралов}: \\ u = 10x; \quad \alpha = 1 \end{array} \right] = \frac{1}{10}\ln\left|10x + \sqrt{(10x)^2 - 1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|10x + \sqrt{100x^2 - 1}\right| + C.$$

Пример 1.6.

$$\int \frac{\sqrt[3]{4+5\ln x}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{заметим, что} \\ \dfrac{dx}{x} = d(\ln x) = \dfrac{1}{5}d(5\ln x) = \\ = \dfrac{1}{5}d(4+5\ln x) - \\ \text{поднесение под знак} \\ \text{дифференциала} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}\int (4+5\ln x)^{\frac{1}{3}} d(4+5\ln x) = [\text{таблица интегралов}] =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{(4+5\ln x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{20}(4+5\ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

1.2.2. Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

Пусть $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке, причем $\varphi'(t) \neq 0$; тогда справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1.7. $\int 2x\sqrt{x^2-3}dx = \int \sqrt{x^2-3}d(x^2-3)$, так как $2xdx = d(x^2-3)$. Обозначим $x^2-3=u$; получим

$$\int \sqrt{x^2-3}\cdot 2xdx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 1.8. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{3+5\sin x}} = \left| \begin{array}{c} 3+5\sin x = t; \\ dt = 5\cos x dx; \\ \cos x dx = \dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{5\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C =$

$$= \frac{3}{10}\sqrt[3]{(3+5\sin x)^2} + C.$$

1.2.3. Интегрирование при помощи тригонометрических подстановок

Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx;\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx;\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx\ ,$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция от u и v, вычисляются соответственно при помощи тригонометрических подстановок

$$x=\frac{a}{\cos t},\ x=\frac{a}{\sin t},\ x=a\sin t,\ x=a\cos t,\ x=a\,\mathrm{tg}\,t\ .$$

Пример 1.9. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{c} x=\dfrac{1}{\cos t};\\ dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}t\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{tg}t}{\sec t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt=$

$$=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=\mathrm{tg}t-t+C=\mathrm{tg}(\arccos\frac{1}{x})-\arccos\frac{1}{x}+C\ .$$

Пример 1.10. $\displaystyle\int\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=2\sin t;\\ dx=2\cos t dt;\\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\end{array}\right|=\int 4\cos^2 t dt=2\int(1+\cos 2t)dt=$

$$=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+2\sin t\cos t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C\ .$$

1.2.4. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int u dv=uv-\int v du,$$

где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Классы функций, интегрируемых по частям

1. $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n \cos x dx$. За u принимается x^n ($u = x^n$).

2. $\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int x^n \operatorname{arctg} x dx$. За u в этом случае принимаются логарифмическая или обратная тригонометрическая функция.

3. $\int e^x \sin x dx$, $\int a^x \cos x dx$ и другие. Выбор u и dv равносилен. В этом случае вычисление интегралов сводится к двукратному применению формулы интегрирования по частям (см. пример 1.14).

Пример 1.11. $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; & du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dx = dv; & v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx =$

$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

***Пример** 1.12.*

$$\int \frac{\arcsin x dx}{x^2} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = u; & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ \dfrac{dx}{x^2} = dv; & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{-\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left[x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \right] = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}} = \frac{\arcsin x}{x} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln|t + \sqrt{t^2-1} + C = \frac{\arcsin x}{x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

***Пример** 1.13.* Вычислить интеграл $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$.

Решение. Обозначим интеграл

$$K = \int \sqrt{x^2+4}\,dx = \left[\begin{matrix} \text{полагаем}: \sqrt{x^2+4} = u; & dx = dv; \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x \cdot dx; & v = x \end{matrix} \right] = x \cdot \sqrt{x^2+4} - 2\int x \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x \cdot \sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx + 8\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2+4} - 2K + 8\ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) + C_1.$$

Из последнего равенства выразим искомый интеграл K:

$$K = \frac{1}{3}\left(x \cdot \sqrt{x^2 + 4} + 8\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \right) + C;$$

здесь C_1 и C – произвольные постоянные.

***Пример** 1.14.* Вычислить интеграл $\int e^x \cos x\, dx$.

Решение. Обозначим интеграл

$$K = \int e^x \cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x;\ dv = \cos x\, dx; \\ du = e^x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{второй раз интегрируем по частям:} \\ u = e^x; \quad dv = \sin x\, dx; \\ du = e^x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right] = e^x \sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e^x\, dx \right) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Значит, получено равенство $K = e^x \sin x + e^x \cos x - K$, откуда выражаем искомый интеграл K: $K = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ (C – произвольная постоянная).

1.2.5. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Интегралы вида

$$\int \frac{A\, dx}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{и} \qquad \int \frac{A\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

приводятся к табличным путем выделения полного квадрата в знаменателе дроби.

***Пример** 1.15.* $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 1} = \int \frac{d(x-3)}{1 + (x-3)^2} = \operatorname{arctg}(x-3) + C$.

Для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{и} \qquad \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

надо сначала в числителе дроби выделить дифференциал трехчлена ax^2+bx+c, то есть выражение $(2ax+b)dx$.

***Пример** 1.16.*

$$\int\frac{3x-7}{x^2+9}dx=\int\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x)-7}{x^2+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+9}-7\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{3}{2}\ln|x^2+9|-\frac{7}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C\,.$$

1.2.6. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n},$$

где m и n – целые положительные числа;

$b_i,\ a_j\in R,\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n}$.

Если $m<n$, то $R(x)$ называется правильной дробью, если $m\geq n$, – неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$, $Q_l(x)$, $P_n(x)$ – многочлены,

$\dfrac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ – правильная дробь, $l<n$.

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\qquad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k};\qquad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\qquad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k};$$

где A, a, M, N, p, q – постоянные числа;

$k\geq 2$; k – натуральное, $p^2-4q<0$.

Для интегрирования правильной дроби необходимо:

1) разложить знаменатель дроби на простые линейные и квадратичные множители;

2) представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами;

3) найти коэффициенты;

4) проинтегрировать простейшие дроби.

Пример 1.17. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Дробь неправильная, поэтому сначала разделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \cline{2-2} -\underline{x^5 - 4x^3} & x^2 + x + 4 \\ x^4 + 4x^3 - 8 & \\ -\underline{x^4 - 4x^2} & \\ 4x^3 + 4x^2 - 8 & \\ -\underline{4x^3 - 16x} & \\ 4x^2 + 16x - 8 = 4(x^2 + 4x - 2) & \end{array} \quad - \text{ остаток}.$$

Подынтегральная дробь запишется в виде:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4(x^2 + 4x - 2)}{x^3 - 4x}.$$

Разложим правильную дробь на три простейшие дроби:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Приравняв числители, получим тождество:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

При $x = 0$: $-2 = -4A$, $A = \frac{1}{2}$.

При $x = 2$: $10 = 8B$, $B = \frac{5}{4}$.

При $x=-2$: $-6=8C, C=-\frac{3}{4}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{x-2}-\frac{\frac{3}{4}}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}+C.$$

Пример 1.18. $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$.

В данном примере подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь:

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}=x-2+\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Правильную рациональную дробь $\frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}=\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}$ представим в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами: $\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$.

Приведя дроби к общему знаменателю и приравняв числители дробей в левой и правой частях записанного равенства, получим:

$2x^2+10x-5=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+(2A+C)x+5A$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B=2 \\ x & 2A+C=10; \\ x^0 & 5A=-5 \end{array}$$

откуда $A=-1$, $B = 3$, $C = 12$. В итоге получаем

$$\int \frac{x^4-3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx = \int (x-2)dx + \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5}\right)dx =$$

$$=\frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+5}dx =$$

$$=\frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 9\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$=\frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

1.2.7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx\,,$$

m, n – целые числа.

1. Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное и положительное, то интеграл находится с помощью подстановок: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ или $\cos x = t, \; -\sin x dx = dt$.

2. Если m и n – четные положительные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример 1.19.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = \begin{bmatrix} \cos x = t; \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int t^{\frac{3}{2}}dt = -2\sqrt{t} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = -\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C.$$

Пример 1.20.

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3. Если подынтегральные функции имеют вид

$$\sin mx \cos nx, \ \sin mx \sin nx, \ \cos mx \cos nx,$$

где $m \neq n$, то их преобразуют по формулам:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

4. Интегралы от функций, содержащих $\operatorname{tg}^n x$ и $\operatorname{ctg}^m x$, где m и n – целые, приводятся к табличным с учетом формул

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 1.21.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x dx = \int \operatorname{tg}^5 x(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^5 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^7 x d(\operatorname{tg} x) =$$

$= \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + C.$ Здесь $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

5. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(u,\ v)$ – рациональная функция от $u,\ v$, всегда сводится к интегралу от рациональной функции относительно нового аргумента t с помощью подстановки: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; тогда

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.22.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x} = \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t; & dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \end{matrix}\right| = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int tdt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C = -\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

6. Если подынтегральная функция содержит только функцию $\operatorname{tg} x$ или $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ (R – четная), то удобно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$; при этом

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\quad x = \operatorname{arctg} t,\ \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример 1.23.

$$\int\frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos x\sin x + \cos^2 x} = \int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 1} = \left[\begin{matrix} t = \operatorname{tg} x; \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix}\right] = \int\frac{dt}{3t^2 + 5t + 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{13}}{6}}\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{t+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{6\operatorname{tg} x + 5 - \sqrt{13}}{6\operatorname{tg} x + 5 + \sqrt{13}}\right| + C.$$

7. Если функция $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\sin x = t$.

Пример 1.24. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. Обозначим $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$; тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} \sin x dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}(-dt) = -\int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= +\frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

1.2.8. Интегрирование иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}) dx$ сводятся к интегралам от рациональной функции относительно z подстановкой $x = z^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

2. Интегралы вида $\int R\left[\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, x\right] dx$. Рационализирующая подстановка: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

1.2.9. Интегрирование дифференциальных биномов

Рассмотрим интеграл вида

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

1. Если p – целое число, то применяется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n.

2. Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3. Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то применяется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 1.25.

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \left| \begin{array}{c} x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^6(t^3+t^4)} = 6\int \frac{dt}{t^4(t+1)}.$$

Дробь $\dfrac{1}{t^4(t+1)}$ раскладываем на простейшие дроби:

$$\frac{1}{t^4(t+1)} = \frac{A}{t^4} + \frac{B}{t^3} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t} + \frac{E}{t+1};$$

$$A(t+1) + Bt(t+1) + Ct^2(t+1) + Dt^3(t+1) + Et^4 = 1;$$

$$\begin{array}{l|l} t=0 & A=1; \\ t=-1 & E=1; \\ t^4 & D+E=0; \quad D=-1; \\ t^3 & C+D=0; \quad C=1; \\ t^2 & B+E=0; \quad B=-1; \end{array}$$

$$6\int \frac{dt}{t^4(t+1)} = 6\int \frac{dt}{t^4} - 6\int \frac{dt}{t^3} + 6\int \frac{dt}{t^2} - 6\int \frac{dt}{t} + 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= -\frac{6}{3}t^{-3} + \frac{6}{2}t^{-2} - \frac{6}{t} - 6\ln|t| + 6\ln|t+1| + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - 6\ln|\sqrt[6]{x}| + 6\ln|1+\sqrt[6]{x}| + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \ln|x| + \ln|1+\sqrt[6]{x}| + C.$$

Пример 1.26. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx = \int x^{-5}(1-x^4)^{1/2}dx$.

Так как $m = -5$, $n = 4$, $p = 1/2$, то $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-5+1}{4} = -1$ – целое число. Имеем случай 2 интегрирования дифференциального бинома. Тогда

$$\left| \begin{array}{ll} 1-x^4 = t^2, & x^4 = 1-t^2 \\ -4x^3dx = 2tdt, & x^3dt = -\dfrac{t}{2}dt \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx = \int \frac{x^3\sqrt{1-x^4}}{x^8}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t\cdot tdt}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt\,.$$

Раскладываем дробь $\dfrac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}$ на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{1+t}\,.$$

Приведя дробь к общему знаменателю и приравняв числители, получим

$$A(1+t)^2 + B(1-t)(1+t)^2 + C(1-t)^2 + D(1+t)(1-t)^2 = t^2;$$

$$\begin{array}{l|ll}
t=-1 & 4C=1; & C=1/4; \\
t=1 & 4A=1; & A=1/4; \\
t^3 & -B+D=0; & B=D; \\
t^0 & A+B+C+D=0; &
\end{array}$$

$$1/4+2D+1/4=0;\quad 2D=-1/2;\quad D=-1/4;\quad B=-1/4;$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{1}{8(1-t)} - \frac{1}{8}\ln|1-t| + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{8}\ln|1+t| + C = \frac{-2t}{8(1-t^2)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + \frac{1}{8}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{1-\sqrt{1-x^4}} + C = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} + C\,.$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Вычисление площадей плоских фигур

2.1.1. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $F(x)$ – любая ее первообразная на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Пример 2.1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

2.1.2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $\varphi'(t) \neq 0$, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, то справедлива формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d (\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Пример 2.2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} \text{Положим} \quad x = 2\sin t. & \text{Если} \quad x = 0, \text{ то } \ t = 0, \\ dx = 2\cos t dt. & \text{Если} \quad x = 2, \text{ тт } \ t = \pi/2 \end{bmatrix} =$$

$$= 16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = 2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

2.1.3. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $[a, b]$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Пример 2.3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/6} x\sin 3x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/6} x\sin 3x dx = \begin{bmatrix} u = x; & dv = \sin 3x dx; \\ du = dx; & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} = -\frac{x}{3}\cos 3x\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/6}\cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{9}.$$

2.1.4. Площадь плоской фигуры

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, ($a < b$), осью Ox и непрерывной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx\ .$$

Пример 2.4. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = x^2+1$ и $y = 9 - x^2$.

Решение. Построим область (рис 2.1). Найдем абсциссы точек пересечения

A, B: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$, $x^2 + 1 = 9 - x^2$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Так как фигура симметрична относительно оси Oy, то

$$S = 2\int_0^2 [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]dx = 2\int_0^2 (8 - 2x^2)dx = 2(8x - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{64}{3}$$

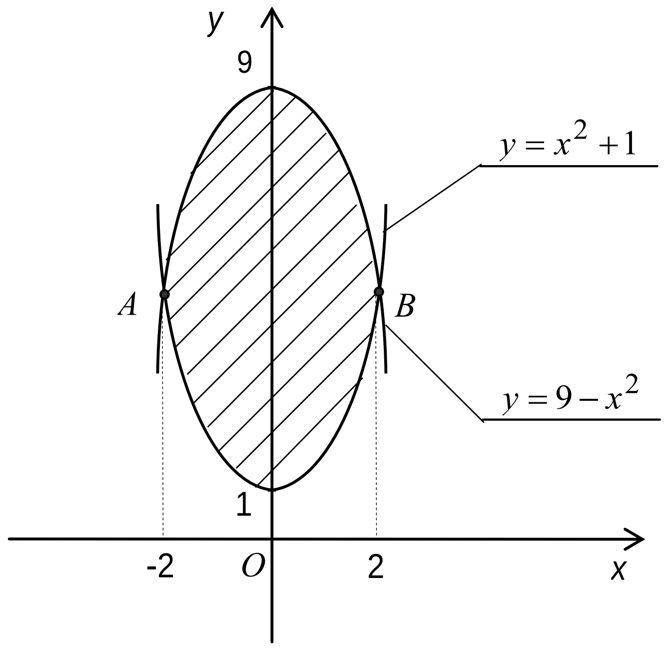

Рис. 2.1.

Пример 2.5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4x$, $2x + y - 3 = 0$, $x \geq 0$ (рис. 2.2).

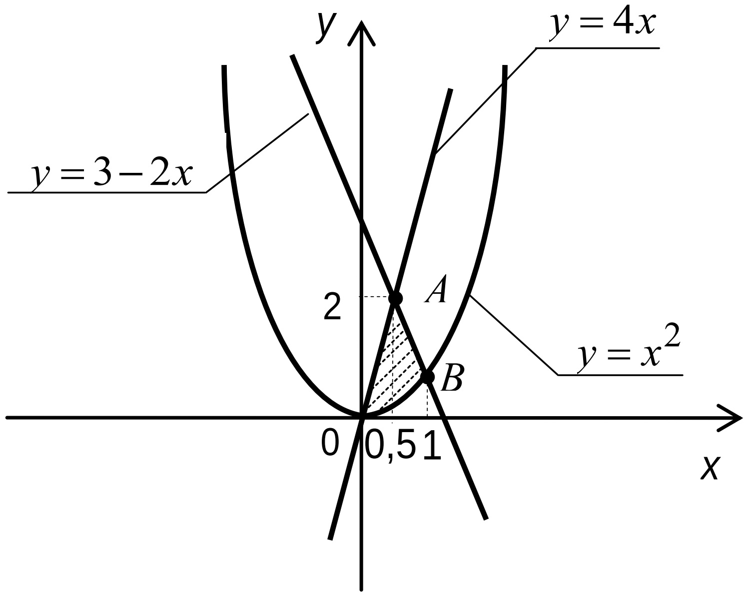

Рис. 2.2.

Решение. Находим абсциссы точек пересечения A и B.

$$S = \int_0^{0,5} (4x - x^2)dx + \int_{0,5}^1 (3 - 2x - x^2)dx = \frac{11}{12}.$$

2. Если фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$

где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, $y(t) \geq 0$.

Пример 2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной циклоидой $\begin{cases} x = a(t - \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и прямой $y = a$, $(a \geq 0)$.

Решение. Для нахождения пределов интегрирования по t решаем систему

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t); \\ y \geq a \end{cases} \Rightarrow \cos t \leq 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Площадь фигуры A_1ACBB_1 (рис. 2.3) выражается интегралом

$$S_1 = a^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left(4 + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Площадь прямоугольника AA_1B_1B равна $S_2 = S_{AA_1B_1B} = a^2(2+\pi)$, так как $A\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right);a\right)$, $B\left(a\left(\frac{3\pi}{2}+1\right);a\right)$.

Искомая площадь $S = S_1 - S_2 = a^2\left(4+\frac{3\pi}{2}\right) - a^2(2+\pi) = a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$.

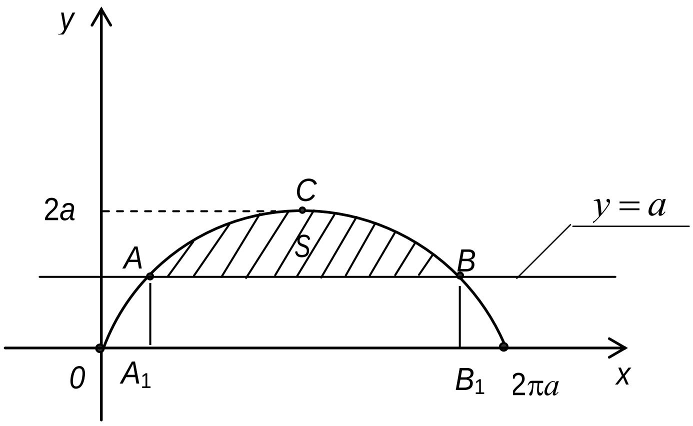

Рис. 2.3.

3. Площадь сектора, ограниченного непрерывной кривой в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $(\alpha > \beta)$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

Пример 2.7. Найти площадь фигуры, ограниченной частью лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, лежащей внутри окружности $x^2+y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Решение. Уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах: $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; а окружности: $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (рис. 2.4).

Решаем систему: $\begin{cases} \rho^2 = a^2\cos 2\ ; \\ \rho = \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ Отсюда

$$\frac{a^2}{2} = a^2\cos 2\varphi,\ \cos 2\varphi = \frac{1}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{6}.\frac{1}{4}S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{a^2}{2}d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{a^2\pi}{24} + \frac{a^2}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right); S = a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

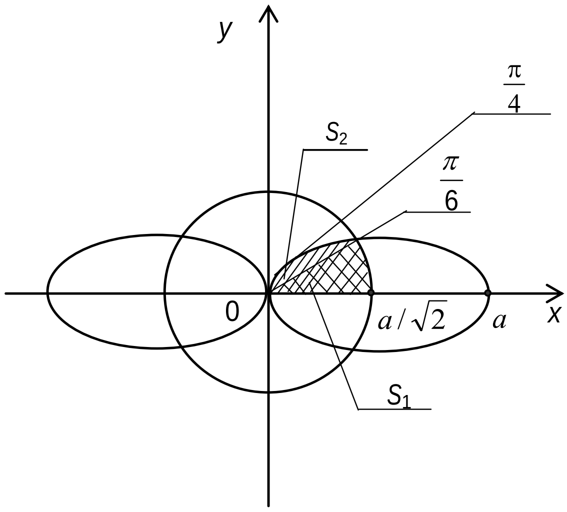

Рис. 2.4.

2.2. Вычисление длин дуг кривых. Вычисление объемов

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $a \le x \le b$, то длина l дуги этой кривой выражается интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx\,.$$

Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt\,.$

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, описанной параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt\,.$$

Если задано полярное уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi\,.$$

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,.$$

Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, ($f(x) \geq 0$), осью абсцисс и прямыми $x = a$ и
$x = b$ ($a < b$), выражается интегралом

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 2.8. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$ (рис. 2.5).

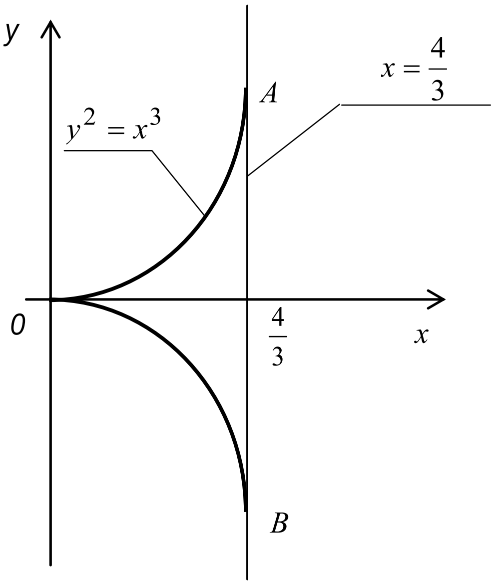

Рис. 2.5

Решение. Длина дуги AOB равна удвоенной длине дуги OA.

$y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\frac{1}{2}l = l_{OA} = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{4/3} = \frac{8}{27}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{56}{27};\ l = 2 \cdot \frac{56}{27} = \frac{112}{27}.$$

Пример 2.9. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

если t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Решение. Дифференцируя по t, получаем

$$x'_t = 2t\sin t + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$y'_t = -2t\cos t - (2-t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t,$$

откуда $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t} = \sqrt{t^4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = t^2$.

Следовательно, $l = \int\limits_0^{\pi} t^2 dt = \left.\dfrac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \dfrac{\pi^3}{3}$.

Пример 2.10. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $(a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ (рис. 2.6).

Решение. Здесь $\rho'_{\varphi} = -a\sin\varphi$, $\sqrt{(\rho'_{\varphi})^2 + \rho^2} = \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)} =$

$= \sqrt{4a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}} = 2a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$. В силу симметрии $l = 2\cdot 2a\int\limits_0^{\pi}\cos\dfrac{\varphi}{2}d\varphi = 8a$.

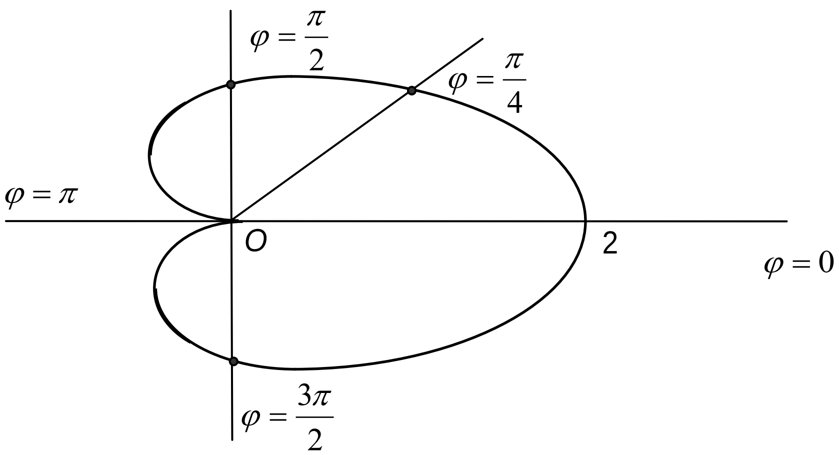

Рис. 2.6.

Замечание. Построение линии ведется в полярной системе координат по точкам, которые в достаточном количестве записываются в виде таблицы их координат.

Пример 2.11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$ (рис. 2.7).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения кривых:
$y=\dfrac{x^2}{2}$ и $y=\dfrac{3-2x}{2}=\dfrac{3}{2}-x$; $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{3}{2}-x;\ x^2+2x-3=0;\ x_1=-3,\ x_2=1$.

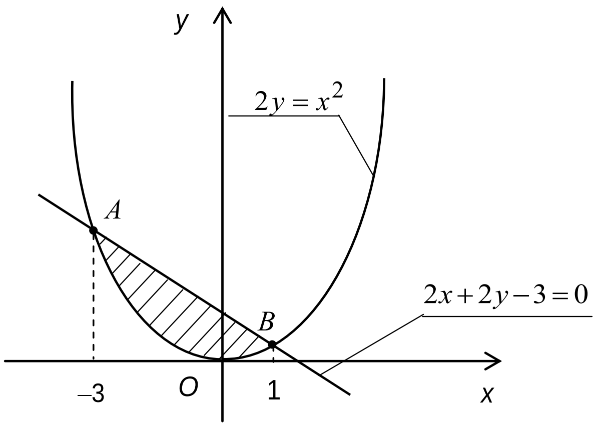

Рис. 2.7.

Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1 тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y=\dfrac{3}{2}-x$ $(-3\le x\le 1)$, и объема V_2 тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\dfrac{x^2}{2}$ $(-3\le x\le 1)$. Используя формулу $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, получаем

$$V_x=V_1-V_2=\pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2dx-\pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2dx=-\pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2d\left(\frac{3}{2}-x\right)-$$

$$-\pi\int\limits_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}dx=-\pi\frac{\left(\frac{3}{2}-x\right)^3}{3}\Bigg|_{-3}^{1}-\pi\frac{x^5}{20}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{272}{15}.$$

2.3. Несобственные интегралы

2.3.1. Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода)

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a\le x<+\infty$, то несобственным интегралом первого рода называется следующий предел:

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в правой части этой формулы, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же этот предел не существует или равен ∞, то расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где $c \in R$ – число.

Пример 2.12. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{b}\right) = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}(1-e^{3b}) = \frac{1}{3}.$$

Пример 2.13. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4}$ – непрерывная функция на $(-\infty;+\infty)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4+(x+1)^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{4+(x+1)^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится.

2.3.2. Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы второго рода)

Если $f(x)$ непрерывна при $a < x < b$ и в точке $x = b$ неограничена, то несобственным интегралом второго рода называется

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в правой части этой формулы, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же этот предел не существует или равен ∞, то–расходящимся.

Аналогично определяется интеграл и в случае $f(a)=\pm\infty$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

В случае, когда $f(c) = \pm\infty$, $c \in (a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Пример 2.14. Вычислить или установить расходимость $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ – непрерывна на (0, 1], $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$. Следовательно, $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ – несобственный интеграл второго рода. $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 = -1+\frac{1}{\varepsilon}$. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Понятие функции нескольких переменных

Пусть D – произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1, x_2,..., x_n)\in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(P) = f(x_1, x_2,.., x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция f от n переменных $x_1, x_2,.., x_n$. Множество

D называется областью определения, а множество $E = \{u \in R | u = f(P),\ P \in D\}$ – областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае, когда $n = 2$, функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x, y) \in D$ вычисляется значение функции $z = f(x, y)$. Тогда тройка чисел $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую точку P. Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ образует график функции $z = f(x, y)$, представляющий собой некоторую поверхность в пространстве R^3.

3.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Число A называется пределом функции $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ к точке $P_0(a_1, a_2, ..., a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $0 < \rho(P_1, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} < \delta$ следует $| f(x_1, x_2, ..., x_n) - A | < \varepsilon$. При этом пишут:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(p) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Функция $u = f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если:

1) функция $f(P)$ определена в точке P_0;

2) существует $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если $f(P)$ определена в некоторой окрестности точки P_0 и хотя бы одно из условий 1–3 нарушено, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т.д.

3.3. Дифференцирование функций нескольких переменных

3.3.1. Частное и полное приращения функции

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных и $D(f)$ – область ее определения. Выберем произвольную точку $P_0(x_0, y_0) \in D(f)$ и дадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизменным. При этом функция $f(x, y)$ получит приращение:

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

которое называется *частным приращением функции* $f(x, y)$ по x.

Аналогично, считая x_0 постоянной и давая y_0 приращение Δy, получим *частное приращение функции* $z = f(x, y)$ по y:

$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ называют приращение Δz, вызываемое одновременным приращением обеих независимых переменных x и y:

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Геометрически частные приращения и полное приращение функции $z(\Delta_x z,\ \Delta_y z,\ \Delta z)$ можно изобразить соответственно отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рис. 3.1).

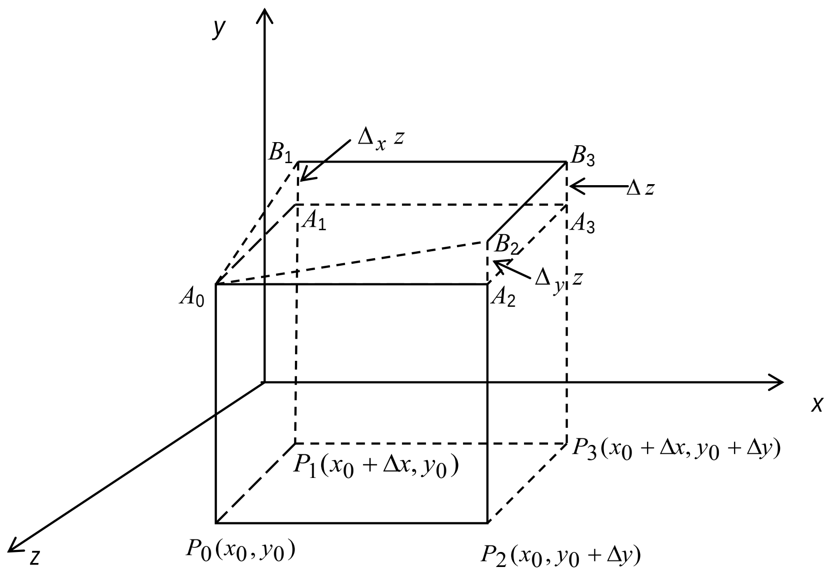

Рис. 3.1.

Пример 3.1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $P_0(1;\,2)$, если $\Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = 0{,}2$.

Решение. Вычислим значения

$$\Delta_x z = f(1{,}1;\ 2{,}0) - f(1;\,2) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = \Delta x y_0^2 = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4;$$

$$\Delta_y z = f(1{,}0;\ 2{,}2) - f(1;\,2) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 = 2x_0 y_0 \Delta y + \Delta y^2 =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}84;$$

$$\Delta z = f(1{,}1;\ 2{,}2) - f(1;2) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

Если $u = f(x, y, z)$, то для нее рассматриваются частные приращения $\Delta_x u,\ \Delta_y u,\ \Delta_z u$ и полное приращение Δu.

3.3.2. Частные производные

Определение. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частную производную функции $z = f(x, y)$ по переменной x обозначают символами

$$\frac{\partial z}{\partial x};\ z'_x;\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\ f'_x(x, y).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta x}.$$

Определение. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной y называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ к приращению аргумента Δy, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Применяются также обозначения $z'_y,\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y},\ f'_y(x, y)$.

Частные приращения и частные производные функции n переменных при $n > 2$ определяются и обозначаются аналогично. Так, например, пусть точка $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ – произвольная фиксированная точка из области определения функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Придавая значению переменной $x_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ приращение Δx_k, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Этот предел называется частной производной (1-го порядка) данной функции по переменной x_k в точке $(x_1, x_2,...,x_n)$ и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ или } f'_{x_k}(x_1, x_2,...,x_n).$$

Пример 3.2. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, где $u = x^2yz^3 + x + y^2$.

Решение. Для нахождения $\frac{\partial u}{\partial x}$ считаем y, z константами, а функцию $u = x^2yz^3 + x + y^2$ – функцией одной переменной x. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2yz^3 + x + y^2)'_x = (x^2yz^3)'_x + (x)'_x + (y^2)'_x =$$
$$= 2xyz^3 + 1 = 0 = 2xyz^3 + 1.$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^3 + 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2x^2y$.

Частными производными 2-го порядка функции $u = f(x_1, x_2,...,x_n)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2,...,x_n);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f''_{x_i x_k}(x_1, x_2,...,x_n) \quad \text{и т.д.}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Пример 3.3. Найти частные производные второго порядка для функции $z = \frac{x}{y^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2}; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{y^2}\right)_x = 0; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{2x}{y^3}\right)_x = -\frac{2}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{y^2}\right)_y = -\frac{2}{y^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{2x}{y^3}\right)_y = \frac{6x}{y^4}.$$

3.3.3. Полный дифференциал функции

Полным приращением функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, называется разность $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Функция $u = f(P)$ называется дифференцируемой в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$; $A_1, A_2, ..., A_n$ – числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.

Полным дифференциалом du 1-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется главная часть полного приращения этой функции в рассматриваемой точке, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, то есть

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращениям:

$$dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, ..., dx_n = \Delta x_n.$$

Для полного дифференциала функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Пример 3.4. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dz=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Полный дифференциал используется для приближенных вычислений значений функции. Так, например, для функции двух переменных $z=f(x,y)$, заменив $\Delta z\approx dz$, получим

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0).$$

Пример 3.5. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)$. Применив вышеуказанную формулу к этой функции, получим

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x\cdot\Delta x+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-1\right)'_y\cdot\Delta y$$

или, после соответствующих преобразований,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)+\frac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x-\frac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y.$$

Положим теперь $x=2$, $y=1$, $\Delta x=-0{,}03$, $\Delta y=0{,}02$. Тогда

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-0{,}03}{1+0{,}02}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}-1\right)+\frac{1(-0{,}03)}{1^2+(2-1)^2}-\frac{2}{1^2+(2-1)^2}\cdot 0{,}02=$$

$$=\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}03-0{,}02=\frac{\pi}{4}-0{,}015-0{,}02\approx 0{,}75.$$

3.3.4. Дифференцирование сложных и неявных функций

Функция $z=f(u,v)$, где $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, называется сложной функцией переменных x и y. Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

В случае, когда $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, будет: $z = f(\varphi(x),\ \psi(x))$ – функция одной переменной и, соответственно,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Пример 3.6. Найти частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, где $u = x + y$, $v = x - y$.

Решение. По формуле $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{u}{v^2}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1=\frac{-u+v}{u^2+v^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{u}{v^2}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot(-1)=\frac{u+v}{u^2+v^2}.$$

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в неявном виде и $F'_y(x,y)\neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Если уравнение $F(x,y,z)$ задает функцию двух переменных $z(x,y)$ в неявном виде и $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Пример 3.7. Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2} = \frac{3x^2 + yz}{3z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2} = \frac{xz - 3y^2}{3z^2 - xy}.$$

3.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а каноническое уравнение нормали, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, таково:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

В случае, когда уравнение поверхности задано в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$, уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример 3.8. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ в точке $P_0(2; -1; 1)$.

Решение.

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = 2x\Big|_{P_0} = 4;$$

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = 4y\Big|_{P_0} = -4;$$

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = -2z\Big|_{P_0} = -2.$$

Поэтому уравнение касательной плоскости к данной поверхности запишется в виде $4(x-2)-4(y+1)-2(z-1)=0$ или $2x-2y-z-5=0$, а уравнение нормали в виде

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{-2} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}.$$

3.5. Экстремум функции нескольких переменных

Функция $u=f(p)$ имеет максимум (минимум) в точке $P_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ которой, отличных от точки P_0, выполняется неравенство $f(P_0)>f(P)$ (соответственно $f(P_0)<f(P)$).

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $f(P)$ достигает экстремума в точке P_0, то в этой точке все частные производные 1-го порядка $f'_{x_k}(P_0)=0$, $k=1,2,\ldots,n$.

Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными точками функции $u=f(P)$.

Достаточные условия экстремума. В случае функции двух переменных достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом. Пусть $P_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка функции $z=f(x,y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Обозначим

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\ B=f''_{xy}(x_0,y_0),\ C=f''_{yy}(x_0,y_0),\ D=AC-B^2.$$

Тогда:

1) если $D>0$, то в точке $P_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $A<0$ ($C<0$) и минимум при $A>0$ ($C>0$);

2) если $D<0$, то экстремум в точке $P_0(x_0,y_0)$ отсутствует;

3) если $D=0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 3.9. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка и приравняем их нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-y)=0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-x)=0.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2-y=0; \\ y^2-x=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем две стационарные точки $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$. Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Затем составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки P_1: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0$; $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = -3$; $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0$; $D = -9 < 0$. Следовательно, экстремума в точке P_1 нет.

Для точки P_2: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6$; $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = -3$; $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 6$; $D = 36 - 9 > 0$; $A > 0$. Следовательно, в точке P_2 функция имеет минимум, равный $z_{\min} = z\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 1 + 1 - 3 = -1$.

3.6. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области

Функция $z = f(x, y)$, определенная и непрерывная в замкнутой области D с границей G и дифференцируемая в открытой области D, достигает своего наибольшего и наименьшего значений (глобальных экстремумов).

Точки глобального экстремума следует искать среди стационарных точек функции f в открытой области D и среди точек границы G.

Пример 3.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{x^3+3x^2+6y^2}$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Граница области D $x^2 + y^2 = 1$ – окружность радиуса 1. Сделаем чертеж (рис. 3.2).

Окружность разбивает плоскость на две части. Координаты точек круга удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \le 1$. Найдем стационарные точки функции z в круге.

$$\begin{cases} z'_x = (3x^2 + 6x)e^{x^3+3x^2+6y^2} = 0; \\ z'_y = 12ye^{x^3+3x^2+6y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

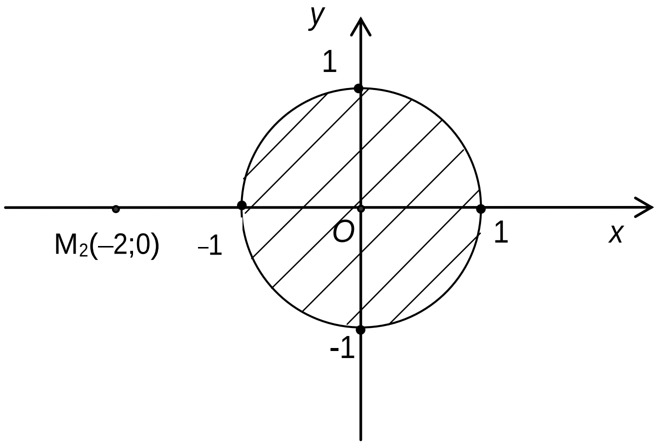

Рис. 3.2.

Решая эту систему, находим для функции z две стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-2;0)$. Кругу принадлежит точка $M_1(0;0)$; $z(M_1)=e^0=1$.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции z на окружности $x^2+y^2=1$. На ней $y^2=1-x^2$; $x\in[-1;1]$; $z=z(x)=e^{x^3-3x^2+6}$. Имеем $z(-1)=e^2$; $z(1)=e^4$. Далее, решая уравнение $z'(x)=(3x^2-6x)e^{x^3-3x^2+6}=0$, находим стационарную точку: $x_1=0\in(-1;1)$; $z(x_1)=z(0)=e^6$.

Итак, получим следующие значения функции z: $z(M_1)=1$; $z(-1;0)=e^2$; $z(1;0)=e^4$; $z(0;1)=e^6$. Отсюда видно, что $z_{\text{наиб}}=z(0;1)=e^6$, $z_{\text{наим}}=z(0;0)=1$.

Если граница G состоит из нескольких частей, то наименьшее и наибольшее значение функции z на границе G следует искать среди наибольших и наименьших значений функции на каждой из частей границы.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x,y,y')=0$$

или, если разрешить его относительно y', в нормальной форме

$$y'=f(x,y).$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Общим решением уравнения первого порядка называется функция $y = \ (x, C)$, которая при любом значении постоянной C является решением данного уравнения.

Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в области D, содержащей точку $M(x_0, y_0)$, то найдется интервал $(x_0 - \delta; \ \ x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Пару чисел (x_0, y_0) называют начальными условиями. Решения, которые получаются из общего решения $y = \ (x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называются частными.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, называется задачей Коши.

4.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Его общим интегралом будет $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$, где C – произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнениям такого вида, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными.

Разделение переменных в этих уравнениях выполняется следующим образом: если $N_1(x) \neq 0, M_2(y) \neq 0$, то разделим обе части уравнения первого вида на $N_1(x)M_2(y)$. Если $f_2(y) \neq 0$, то умножим обе части уравнения второго вида на dx и разделим на $f_2(y)$. В результате получим уравнения с разделенными переменными вида:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0;$$

$$f_1(x)dx = \frac{dy}{f_2(y)}.$$

Для нахождения всех решений полученных уравнений нужно проинтегрировать обе части полученных соотношений.

Пример 4.1. Решить уравнение $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Разделив переменные и интегрируя, получим

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)}; \quad \int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} + C.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2}, \quad A = 1, \quad B = -1, \quad D = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|C|;$$

$$\ln|(1+x^2)(1+y^2)| = 2\ln|Cx|.$$

$(1+x^2)(1+y^2) = C^2x^2$ – общий интеграл уравнения. Выразив из него y, имеем общее решение уравнения

$$y = \pm\sqrt{\frac{C^2x^2}{1+x^2} - 1}.$$

4.2. Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных x и y, если при любом t справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например: $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$ – однородная функция третьего измерения относительно переменных x и y, так как

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y).$$

Функция $\varphi(x,y)=\dfrac{x-y}{x+2y}$ является однородной функцией нулевого измерения, так как $\varphi(tx,ty)=t^0\varphi(x,y)=\varphi(x,y)$. Функция x^3+3x^2y-x однородной не является, так как для нее условие $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ не выполняется ни при каком n.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме $y'=\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка относительно переменных x и y, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения. При помощи подстановки $y=ux$, где $u(x)$ – неизвестная функция, однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 4.2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{y^2}{x^2}-2.$$

Решение. Это – однородное уравнение, так как $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}-2$ – однородная функция нулевого измерения. Положим $y=ux$, $\quad y'=u'x+u$.

Тогда $u'x+u=u^2-2$, $\quad u'x=u^2-u-2$.

$\dfrac{du}{dx}x=u^2-u-2$, $\quad \dfrac{du}{u^2-u-2}=\dfrac{dx}{x}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получим

$$\int\frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}=\int\frac{dx}{x},\quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\left|\frac{u-2}{u+1}\right|=C^3x^3,\qquad \frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}+1}=Cx^3,$$

$y-2x=Cx^3(y+x)$ – общий интеграл данного уравнения. Разрешив последнее равенство относительно y, получим общее решение $y=\dfrac{x(2+Cx^3)}{1-Cx^3}$.

Пример 4.3. Найти частное решение уравнения $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=1$.

Решение. $M(x,y)=2xy$, $N(x,y)=y^2-3x^2$ – однородные функции второго измерения. Подстановка $y=ux$, $y'=u'x+u$ приводит уравнение к виду

$$\frac{(u^2-3)du}{u(1-u^2)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int\frac{(u^2-3)du}{u(1-u)(1+u)}=\int\frac{dx}{x};\quad \frac{u^2-3}{u(1-u)(1+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{1-u}+\frac{D}{1+u};$$

$$A=-3,\quad B=-1;\quad D=1;$$

$$-3\ln|u|+\ln|1-u|+\ln|1+u|=\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\left|\frac{1-u^2}{u^3}\right|=|Cx|;\quad \frac{1-\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{y^3}{x^3}}=Cx,\quad C=\ln C_1.$$

$x^2-y^2=Cy^3$ – общий интеграл данного уравнения. Найдем частный интеграл, удовлетворяющий условию

$$y\big|_{x=0}=1;\quad 0-1=C;\quad C=-1;$$

$y^3=y^2-x^2$ – частное решение уравнения.

4.3. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка в общем виде можно записать соотношением

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ заданные непрерывные функции.

Линейное уравнение можно решать с помощью замены

$$y = u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции.

Тогда $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ и уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ примет вид

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x) \tag{4.1}$$

Функцию $v(x)$ подбираем так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, то есть в качестве $v(x)$ возьмем одно из частных решений уравнения

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Подставив выражение $v = v(x)$ в уравнение (4.1), получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Найдя общее решение этого уравнения в виде $u = u(x, C)$, получим общее решение первого уравнения из подпункта 4.1 $y = u(x, C)v(x)$.

Пример 4.4. Найти общее решение уравнения

$$y' - y\,\mathrm{ctgx} = \frac{1}{\sin x}.$$

Полагаем $y = u(x)v(x)$, тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение примет вид

$$u'v + v'u - uv\,\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x};$$

$$u'v + u(v' - v\,\mathrm{ctg}x) = \frac{1}{\sin x}. \tag{4.2}$$

Решая уравнение $v' - v\,\mathrm{ctg}x = 0$, найдем одно из его частных решений

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{ctg}\,x, \frac{dv}{v} = \mathrm{ctg}\,x dx;$$
$$\ln|v| = \ln|\sin x| \Rightarrow v = \sin x.$$

Подставляя v в уравнение (4.2), получим

$$u'\sin x = \frac{1}{\sin x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x};$$
$$du = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow u = -\mathrm{ctg}\,x + C.$$

Общее решение исходного уравнения таково:

$$y = uv = (-\mathrm{ctg}\,x + C)\sin x = -\cos x + C\sin x.$$

4.4. Уравнения Бернулли

Уравнения Бернулли имеют вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

где $m \neq 0, \quad m \neq 1$.

Такие уравнения можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ или свести к линейным уравнениям с помощью замены $z = y^{1-m}$.

Пример 4.5. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$.

Полагая $y = uv$, приводим уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \qquad (4.3)$$

Уравнение $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$ имеет частное решение $u = x$.

Подставляя u в уравнение (4.3), получаем уравнение

$$\frac{dv}{dx}x - \frac{x^2}{xv} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}.$$

Его общее решение $v = \pm\sqrt{2x + C}$. Общее решение исходного уравнения:

$$y = x(\pm\sqrt{2x + C}).$$

Пример 4.6. Решить уравнение Бернулли относительно $x = x(y)$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}.$$

Полагая $x = uv$, получим

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u + \frac{1}{2uv}\right) = 0. \qquad (4.4)$$

Уравнение $\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0$ имеет частное решение $u = \sqrt{y}$. Подставляя значение u в уравнение (4.4), перейдем к уравнению

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2v\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow v^2 = \ln\left|\frac{C}{y}\right|.$$

Отсюда $x = \sqrt{y}\ln^{1/2}\left|\frac{C}{y}\right|, \quad x^2 = y\ln\left|\frac{C}{y}\right|.$

4.5. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (4.5)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то есть

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по y и x соответственно в односвязной области D.

Теорема. Для того, чтобы уравнение (4.5) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Решение уравнения (4.5) в полных дифференциалах можно записать в виде

$$u(x, y) = C.$$

Функция $u(x, y)$ может быть найдена из системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{4.6}$$

Общий интеграл уравнения (4.5) можно представить в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C,$$

где $(x_0, y_0) \in D$.

Пример 4.7. Решить уравнение

$$e^x(x\sin y + y\cos)dx + e^x(x\cos y - y\sin y)dy = 0.$$

Имеем $\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$.

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x, y)$. Система (4.6) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y).$$

Из первого уравнения этой системы находим

$$u(x, y) = \int e^x(x\sin y + y\cos y)dx + \varphi(y) = e^x x\sin y - e^x \sin y + e^x y\cos y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Подставляя $u(x, y)$ во второе уравнение системы, имеем

$$e^x x\cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - e^x y\sin y + \varphi'(y) =$$

$$= e^x x\cos y - e^x y\sin y \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

Следовательно, $u(x, y) = e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) + C$.

Общий интеграл уравнения имеет вид:

$$e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) + C = 0.$$

4.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или, если оно разрешено относительно $y^{(n)}$, то $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, y'\Big|_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. После n-кратного интегрирования получается общее решение.

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k-1)$ включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $y^{(k)}(x) = P(x)$. Уравнение примет вид

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из последнего уравнения, если это возможно, определяем $p = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а затем находим y из уравнения $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ k-кратным интегрированием.

3. Уравнение не содержит независимой переменной:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Подстановка $y' = z(y)$ позволяет понизить порядок уравнения на 1.

Все производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ выражаются через производные от новой неизвестной функции $z(y)$ по y:

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z; \quad y''' = \frac{d^2 z}{dy^2} \cdot z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \cdot z \quad \text{и т. д.}$$

Подставив эти выражения в уравнение вместо $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка.

Замечание. При решении задачи Коши во многих случаях нецелесообразно находить общее решение уравнения; начальные условия лучше использовать непосредственно в процессе решения.

Пример 4.8. Решить задачу Коши

$$yy'' = y^4 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение. Данное уравнение не содержит независимую переменную, поэтому полагаем $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z \cdot \dfrac{dz}{dy}$ и уравнение принимает вид

$$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = y^4.$$

Пусть $yz \neq 0$, тогда мы получаем уравнение Бернулли относительно $z = z(y)$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} = \frac{y^3}{z}.$$

Решая его, находим $z = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}$. Из условия $y' = z = 0$ при $y = 1$ имеем $C_1 = -1$, следовательно, $z = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$. Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем $\arccos\dfrac{1}{y} \pm x = C_2$. Полагая $y = 1$ и $x = 0$, получим $C_2 = 0$, откуда $\dfrac{1}{y} = \cos x$ или $y = \sec x$.

Осталось заметить, что случай $yz = 0$ не дает решений поставленной задачи Коши.

5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{5.1}$$

где $a_i = \text{const}, \quad a_i \in R$.

Для нахождения общего решения уравнения (5.1) составляется характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{5.2}$$

и находятся его корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Возможны следующие случаи

1. Все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения (5.2) действительны и различны. Общее решение уравнения (5.1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \tag{5.3}$$

2. Характеристическое уравнение имеет пару однократных комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. В формуле (5.3) соответствующая пара членов $C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ заменяется слагаемым

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

3. Действительный корень k_1 уравнения (5.2) имеет кратность $r (k_1 = k_2 = \ldots = k_r)$. Тогда соответствующие r членов $C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_r e^{k_r x}$ в формуле (5.3) заменяются слагаемым

$$e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_r x^{r-1}).$$

4. Пара комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ уравнения (5.2) имеет кратность r. В этом случае соответствующие r пар членов $C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_{2r} e^{k_{2r} x}$ в формуле (5.3) заменяются слагаемым

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1})\cos\beta x + (C_{r+1} + C_{r+2} x + \ldots + C_{2n} x^{r-1})\sin\beta x].$$

Пример 5.1. Решить уравнение $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение $k^4 - 5k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm 2$. Общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Пример 5.2. Решить уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. Общее решение имеет вид

$$y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Пример 5.3. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет двукратный корень $k_{1,2} = 1$, поэтому общее решение имеет вид

$$y = e^{x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 5.4. Решить уравнение $y^{IV}+8y'''+16y'=0$. Характеристическое уравнение $k^5+8k^3+16k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_{2,3}=2i$, $k_{4,5}=-2i$. Общее решение уравнения таково

$$y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+C_4x\cos 2x+C_5x\sin 2x.$$

5.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{5.4}$$

где $a_i\in R$, $f(x)$ – непрерывная функция.

Пусть уравнение

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \tag{5.5}$$

будет общим решением однородного уравнения (5.1), соответствующего уравнению (5.4). Метод вариации произвольных постоянных состоит в том, что общее решение уравнения (5.4) ищется в виде

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n,$$

где $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ – неизвестные функции. Эти функции определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0;\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0;\\ \ldots\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x),\end{cases}$$

где $C_i'=\dfrac{dC_i(x)}{dx}$ – производные функций $C_i(x)$. Для уравнения второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ данная система имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0;\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x).\end{cases}$$

Пример 5.5. Решить уравнение $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Поэтому общее решение однородного уравнения будет таким: $y = C_1 + C_2 e^x$. Положим $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$. Запишем систему для определения $C_1' = C_1'(x)$ и $C_2' = C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) e^x = 0; \\ C_2'(x) e^x = \dfrac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}, \quad C_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x},$$

откуда

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = -\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} = \ln|e^{-x}+1| + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^{-x}(1+e^x)} = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{(e^{-x})^2}{e^{-x}+1} dx + \int \frac{dx}{e^{-x}+1} =$$

$$= \int (e^{-x}-1) dx + \int \frac{dx}{e^{-x}+1} = -e^{-x} - x + \int \frac{e^x dx}{1+e^x} =$$

$$= -e^{-x} - x + \ln|e^x+1| + \tilde{C}_2,$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ – произвольные постоянные.

Общее решение запишется так:

$$y = \ln(e^{-x}+1) + \tilde{C}_1 + e^x(-e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + \tilde{C}_2).$$

6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{6.1}$$

где $a_i \in R$, $f(x)$ – непрерывная функция. Соответствующим однородным уравнением будет

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{6.2}$$

Пусть

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{6.3}$$

будет характеристическим уравнением для уравнения (6.2). Общее решение y уравнения (6.1) равно сумме общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (6.2) и какого-либо частного решения y^* неоднородного уравнения (6.1), то есть

$$y = \bar{y} + y^*.$$

1. Если правая часть уравнения (6.1) имеет вид: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$,где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то частное решение уравнения (6.1) может быть найдено в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q(x),$$

где $Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ – некоторый многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз α является корнем характеристического уравнения.

Пример 6.1. Найти общее решение уравнения $y'' - y = xe^{2x}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ для соответствующего однородного уравнения. Его корни $k_1 = 1, k_2 = -1$. Так как число $\alpha = 2$ корнем характеристического уравнения не является, то $r = 0$. Степень многочлена в правой части равна единице. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = (ax + b)e^{2x}$$

Находим $y' = (2ax + 2b + a)e^{2x}$, $y'' = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$ и, подставляя y'', y' и y в уравнение, получим (после сокращения на e^{2x})

$$4a + 4ax + 4b - ax - b = x.$$

Откуда находим

$$\begin{array}{c|ll} x & 3a = 1, & a = 1/3; \\ x^0 & 4a + 3b = 0, & b = -4/9. \end{array}$$

Искомое частное решение имеет вид

$$y^* = \frac{1}{9}(3x - 4)e^{2x},$$

а общее решение уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{9}(3x - 4)e^{2x}.$$

2. Если правая часть уравнения (6.1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \tag{6.4}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n-й и m-й степени соответственно, тогда:

а) если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения (6.3), то частное решение уравнения (6.1) ищется в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x),, \tag{6.5}$$

где u_s и v_s – многочлены степени s с неопределенными коэффициентами и $s = \max\{n, m\}$;

б) если числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности r характеристического уравнения (6.3), то частное решение уравнения (6.1) ищется в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(u_s(x)\cos\beta x + \nu_s(x)\sin\beta x), \tag{6.6}$$

где u_s и v_s – многочлены степени s с неопределенными коэффициентами и $s = \max\{n, m\}$.

Замечания.

1. Если в (6.4) $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$, то частное решение y^* также ищется в виде (6.5), (6.6), где $s = m$ (или $s = n$).

2. Если уравнение (6.1) имеет вид $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение y^* такого уравнения можно искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* – частное решение уравнения $L(y) = f_1(x)$, а y_2^* – частное решение уравнения $L(y) = f_2(x)$.

Пример 6.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' - y' = 0,$$

характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$ имеет корни $k_1 = 0,\quad k_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения:

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^x.$$

Правая часть данного уравнения есть сумма

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = e^x + e^{2x} + x.$$

Поэтому находим частные решения для каждого из трех уравнений:

$$y'' - y' = e^x; \quad y'' - y' = e^{2x}; \quad y'' - y' = x.$$

Частное решение первого уравнения ищем в виде $y_1^* = Axe^x$, так как $\alpha = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения и $P_n(x) = 1$ – многочлен нулевой степени. Поскольку

$$y_1^{*\prime} = Ae^x + Axe^x; \quad y_1^{*\prime\prime} = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x,$$

то, подставляя эти выражения в первое уравнение, имеем

$$2Ae^x + Axe^x - Ae^x - Axe^x = e^x \text{ или } Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1 \text{ и } y_1^* = xe^x.$$

Частное решение второго уравнения будем искать в виде $y_2^* = Ae^{2x}$, так как в правой части второго уравнения $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения и $P_n(x) = 1$ – многочлен нулевой степени.

Определяя, как и выше, постоянную A, получим $y_2^* = \frac{1}{2}e^{2x}$. Частное решение третьего уравнения будем искать в виде $y_3^* = x(Ax+B)$, так как в правой части третьего уравнения $\alpha = 0$ является однократным корнем характеристического уравнения и $P_n(x) = x$ – многочлен первой степени. Поскольку $y_3^{*'} = 2Ax + B$, $y_3^{*''} = 2A$, то, подставляя эти выражения в третье уравнение, имеем $2A - 2Ax - B - B = x$. Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены в левой и правой частях равенства, получаем систему – $-2A = 1, \quad BA - B = 0$, откуда находим $A = -\frac{1}{2}, \quad B = -1$.

Следовательно, $y_3^* = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

Суммируя частные решения, получаем частное решение y^* исходного уравнения $y^* = y_1^* + y_3^* = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$. Тогда общее решение данного неоднородного уравнения будет следующим:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) =$$

$$= C_1 + (C_2 + x)e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Пример 6.3. Найти частное решение уравнения $y'' + y = 4x\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i, \quad k_2 = -i$. Поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ будет $\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$. Для первой части данного уравнения $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P_n(x) = 4x$ – многочлен первой степени; $(n = 1)$, $Q_m(x) = 0$ – многочлен нулевой степени $(m = 0)$; $s = \max\{1, 0\} = 1$, $\alpha + i\beta = i$ являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$ или $y^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$.

Находим

$$y^{*'} = (2Ax + B)\cos x + (2Cx + D)\sin x -$$

$$-(Ax^2 + Bx)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x =$$

$$= (2Ax + B + C^2 + Dx)\cos x + (2Cx + D - Ax^2 - Bx)\sin x;$$

$$y^{*''} = (2A + 2Cx + D)\cos x - (2Ax + B + Cx^2 + Dx)\sin x +$$
$$+ (2C - 2Ax - B)\sin x + (2Cx + D - Ax^2 - Bx)\cos x =$$
$$= (2A + 4Cx + 2D - Ax^2 - Bx)\cos x + (2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx)\sin x.$$

Подставляя в данное уравнение, имеем

$$(2A + 2ACx + 2D - Ax^2 - Bx)\cos x + (2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx) \times$$
$$\times \sin x + (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x = 4x\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$ в обеих частях равенства, получаем систему

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 2A + 2D = 0; \\ \sin^0 x & 2C - 2B = 0; \\ x\cos x & 4C - B + B = 4; \\ x\sin x & -4A - D + D = 0. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$. Тогда

$$y^* = x\cos x + x^2 \sin x.$$

Общее решение будет $y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x + x^2 \sin x$. Находим $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \cos x - x\sin x + 2x\sin x + x^2 \cos x$. Так как $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, то $0 = C_1, C = C_2 + 1$. Таким образом, $C_1 = 0, C_2 = 0$. Подставляя значения $C_1 = 0, C_2 = 0$ в общее решение, получим частное решение $y = x\cos x + x^2 \sin x$.

Пример 6.4. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни $k_1 = 3 - 2i$, $k_2 = 3 + 2i$ его характеристического уравнения и его правая часть

$$f(x) = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x).$$

Решение. В правой части $\alpha = 3, \beta = 2, P_n(x) = 1, Q_m(x) = 1$ – многочлены нулевой степени, $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение будет иметь вид

$$y^* = xe^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

7. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ. МЕТОД ЭЙЛЕРА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

7.1. Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений

Нормальная система n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

где t – независимая переменная; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные функции от t; $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n$ – заданные функции.

Метод исключения неизвестных состоит в том, что данная система приводится к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией (или к нескольким уравнениям, сумма порядков которых равна n). Для этого последовательно дифференцируют одно из уравнений системы и исключают все неизвестные функции, кроме одной.

Пример 7.1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y(x + 2y - 1)}{t(x - 1)}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(1) = -1; \quad y(1) = 4$.

Решение. Дифференцируем первое уравнение по t: $x'' = \dfrac{y't - y}{t^2}$. Заменяя здесь y' ее значением из второго уравнения системы и подставляя $y = x't$, найденное из первого уравнения, получим после упрощения уравнение второго порядка $x'' = \dfrac{2(x')^2}{x - 1}$.

Интегрируем это уравнение, предварительно понижая порядок:

$$x' = p; \quad p = p(x); \quad x'' = \frac{dp}{dx}p; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{2p}{x-1}; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{2dx}{x-1};$$

$$p = C_1(x-1)^2; \quad \frac{dx}{dt} = C_1(x-1)^2; \quad -\frac{1}{x-1} = C_1 t + C_2; \quad x = \frac{C_1 t + C_2 - 1}{C_1 t + C_2}.$$

Дифференцируя эту функцию и подставляя в выражение $y = x't$, получим

$$y = \frac{C_1 t}{(C_1 t + C_2)^2}.$$

Общим решением данной системы дифференциальных уравнений будет

$$x = \frac{C_1 t + C_2 - 1}{C_1 t + C_2}, \quad y = \frac{C_1 t}{(C_1 t + C_2)^2}.$$

Для нахождения частного решения подставим начальные условия $x(1) = -1, \quad y(1) = 4$. Получим $-1 = \frac{C_1 + C_2 - 1}{C_1 + C_2}; \quad 4 = \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}$, откуда $C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, искомым частным решением системы будет пара функций:

$$x = \frac{2t-3}{2t-1}, \quad y = \frac{4t}{(2t-1^2}.$$

Пример 7.2. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x - 6y - e^{-2t}.$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение: $x'' = 2y' - 5x' + e^t$. Заменяем y' ее значением из второго уравнения и подставляем затем $y = \frac{1}{2}(x' + 5x - e^t)$. Получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' + 11x' + 28x = 2e^{-2t} + 7e^t.$$

Его общее решение

$$x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t$$

(получено как сумма общего решения $\bar{x} = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $x^* = \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^{t}$ неоднородного уравнения).

Подставляя x и x' в выражение для y, получим

$$y = \frac{1}{2}(x' + 5x - e^{t}) = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^{t}.$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^{t};$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^{t}.$$

7.2. Линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} = \text{const}$; $a_{ij} \in R$, x_i – неизвестные функции от t.

Данную систему можно записать в матричной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

При решении линейной системы дифференциальных уравнений методом Эйлера частные решения системы ищутся в виде $X = Ve^{kt}$, где $V \neq 0$ – матрица-столбец, k_j – число.

Если корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения $\det(A - kE) = 0$ действительны и различны, общее решение системы имеет вид

$$X = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n V_n e^{k_n t},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, V_j – собственный вектор-столбец матрицы A, соответствующий числу k, то есть $(A - k_j E)V_j = 0$, где E – единичная матрица.

Замечание. Если $k_m, \bar{k}_m$ – пара простых комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения, то им соответствуют два действительных частных решения $\mathrm{Re}(V_m e^{k_m t})$; $\mathrm{Im}(V_m e^{k_m t})$, где $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ – действительные и мнимые части z.

Пример 7.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y - 2z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 5y - 3z, \end{cases}$$

и частное решение, удовлетворяющее условиям $x(0) = 1$, $y(0) = -2$, $z(0) = 0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & 2 \\ 1 & 4-k & -2 \\ 1 & 5 & -3k \end{vmatrix} = 0, \quad (k^2 - k - 2)(1-k) = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2.$$

Находим собственный вектор V_1, соответствующий корню $k_1 = -1$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -(-1) & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -(-1) & -2 \\ 1 & 5 & -3 & (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0; \\ v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 0; \\ v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1; \\ v_3 = -2v_1; \\ v_1 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим собственные векторы

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

соответствующие $k_2 = 1, \quad k_3 = 2$.

Общее решение системы таково:

$$X = C_1 V_1 e^{k_1 t} + C_2 V_2 e^{k_2 t} + C_3 V_3 e^{k_3 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t};$$

или

$$\begin{aligned} &x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}; \\ &y = -C_1 e^{-t} - C_2 e^{t} + C_3 e^{2t}; \\ &z = -2C_1 e^{-t} - C_2 e^{t} + C_3 e^{2t}. \end{aligned}$$

Для нахождения частного решения подставим в общее решение $t = 0$, $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$ и определим C_1, C_2, C_3 из полученной системы:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2; \\ -2 = -C_1 - C_2 + C_3; \\ C = -2C_1 - C_2 + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2; \\ C_2 = 3; \\ C_3 = -1. \end{cases}$$

Искомое частное решение

$$x = -2e^{-t} + 3e^{t};\ y = 2e^{-t} - 3e^{t} - e^{2t};\ z = 4e^{-t} - 3e^{t} - e^{2t}.$$

Пример 7.4. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & -3 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 - 4k + 13 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2+3i, k_2 = 2-3i$. Находим собственный вектор $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, соответствующий корню $k_1 = 2+3i$ из системы: $\begin{cases} -3iv_1 - 3v_2 = 0, \\ 3v_1 - 3iv_2 = 0. \end{cases}$ Считая $v_1 = 1$, получим $v_2 = -i \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Составим выражение

$$V_1 e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t) \\ e^{2t}(\sin 3t - i\cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Здесь использована формула $e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$. Согласно замечанию, два частных решения исходной системы имеют вид

$$\operatorname{Re}(V_1 e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 3t \\ e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}(V_1 e^{k_1 t}) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 3t \\ -e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Общим решением системы будет

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \operatorname{Re}(V_1 e^{k_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(V_1 e^{k_1 t}) = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 3t \\ e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 3t \\ -e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t}\cos 3t + C_2 e^{2t}\sin 3t; \\ y = C_1 e^{2t}\sin 3t - C_2 e^{2t}\cos 3t. \end{cases}$$

7.3. Задачи динамики, приводящие к решению дифференциальных уравнений

К задаче динамики точки, приводящей к решению дифференциальных уравнений, относятся те задачи, в которых определяется движение точки по заданным силам. Силы, действующие на точку, могут быть как постоянными, так и заданными функциями времени, координат, скорости, то есть

$$F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Решение таких задач сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения точки в координатной форме

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x; \\ m\ddot{y} = F_y; \\ m\ddot{z} = F_z, \end{cases} \qquad (7.1)$$

или в естественной форме

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_t; \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_h; \\ O = F_b. \end{cases} \qquad (7.2)$$

В этих уравнениях под F понимается равнодействующая всех сил, в том числе и реакций связей, если точка не свободна. При интегрировании системы уравнений (7.1) в общем случае появляется шесть произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям. Под начальными условиями движения точки понимаются значения координат и проекций скорости точки в начальный момент движения, то есть при $t = 0$

$$x = x_0; \quad v_x = \dot{x}_0;$$
$$y = y_0; \quad v_y = \dot{y}_0;$$
$$z = z_0; \quad v_z = \dot{z}_0.$$

Если движение точки происходит на плоскости, то число уравнений (7.1) сокращается до двух, а число начальных условий – до четырех. При движении точки по прямой будем иметь одно дифференциальное уравнение и два начальных условия.

При решении задач полезно придерживаться следующей последовательности.

1. Составить дифференциальное уравнение движения:

а) выбрать координатные оси, поместив их начало в начальное положение точки; если движение точки является прямолинейным, то одну из координатных осей следует проводить вдоль линии движения точки; б) изобразить движущуюся точку в произвольный текущий момент t и показать на рисунке все действующие на нее силы, в том числе и реакции связей, при наличии сил, зависящих от скорости, вектор скорости направить предположительно так, чтобы все его проекции на выбранные оси были положительными; в) найти сумму проекций всех сил на выбранные оси и подставить эту сумму в правые части уравнений (7.1).

2. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения. Интегрирование производится соответствующими методами, зависящими от вида полученных уравнений.

3. Установить начальные условия движения материальной точки и по ним определить произвольные постоянные интегрирования.

4. Из полученных в результате интегрирования уравнений определить искомые величины.

Замечание 1. При интегрировании дифференциальных уравнений иногда целесообразно определить значения произвольных постоянных по мере их появления.

Пример 7.5. Автомобиль массы m движется прямолинейно из состояния покоя и имеет двигатель, который развивает постоянную тягу F, направленную в сторону движения, до полного сгорания горючего в момент времени T, после чего автомобиль движется по инерции до остановки. Найти пройденный путь. Силу сопротивления считать постоянной и равной R. Изменением массы автомобиля пренебречь.

Решение. Весь путь S складывается из $S_1 = |AC|$, на котором действует сила F до полного сгорания горючего и $S_2 = |CB|$, который автомобиль идет по инерции. На пути AC:

$$m\ddot{x} = F - R; \tag{7.3}$$

на пути CB:

$$m\ddot{x} = -R. \tag{7.4}$$

Решим дифференциальное уравнение (7.3): $\int m d\dot{x} = \int (F - R)dt$;
$m\dot{x} = (F - R)t + C_1$; при $t = 0$ будет $\dot{x} = 0$, откуда

$$C_1 = 0 \Rightarrow m\dot{x} = (F - R)t. \tag{7.5}$$

Интегрируя, получим $mx = \dfrac{(F - R)t^2}{2} + C_2$; при $t = 0$ будет $x = 0$, откуда $C_2 = 0$; $x = \dfrac{(F - R)t^2}{2m}$. Определим путь S_1, который пройдет автомобиль до полного сгорания горючего в момент $t = T$: $S_1 = x = \dfrac{(F - R)t^2}{2m}$. Решим уравнение (7.4): $m\ddot{x} = -R \int m d\dot{x} = -\int R dt; m\dot{x} = -Rt + C_3$. При $t = 0$ скорость x

будет равна скорости, которую имеет автомобиль в момент T сгорания горючего и которая из формулы (7.5) равна $m\dot{x} = (F-R)T$; $\dot{x} = \frac{(F-R)T}{m}$. Используя эти начальные условия, найдем C_3:

$$m = \frac{(F-R)T}{m} = R\cdot 0 + C_3, C_3 = (F-R)T\ .$$

Подставляя C_3, имеем

$$m\dot{x} = -Rt_0 + (F-R)T\ ; \tag{7.6}$$

$$mx = -\frac{Rt^2}{2} + (F-R)Tt + C_4 \text{ при } t = 0, x = 0.$$

Поэтому $C_4 = 0$; $x = \frac{1}{m}\left[-\frac{Rt^2}{2} + (F-R)Tt\right]$.

Чтобы найти путь S_2, надо знать время t движения автомобиля по инерции до остановки ($\dot{x} = 0$).

Из (7.6) получим

$$0 = -Rt + (F-R)T,\ t = \frac{(F-R)}{R}T$$

$$S_2 = x = \frac{1}{m}\left[\frac{-R + (F-R)^2T^2}{2\bar{R}^2} + \frac{(F-R)^2T^2}{\bar{R}}\right] = \frac{T^2(F-R)^2}{2Rm}$$ – путь, пройденный по инерции;

$$S = S_1 + S_2 = \frac{(F-R)T^2}{2m} + \frac{(F-R)^2T^2}{2Rm} = \frac{T^2(F-R)^2F}{2Rm}$$ – искомый путь.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Какая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$? Привести несколько примеров.
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Каковы основные свойства неопределенного интеграла? Знать их и уметь доказывать.
4. Таблица основных интегралов. Как с помощью производной проверить справедливость табличных формул?
5. Привести примеры «неберущихся интегралов», т.е. интегралов, не выражающихся через элементарные функции.
6. В чем состоит метод поднесения под знак дифференциала для поиска неопределенного интеграла? Привести примеры.
7. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Привести примеры.
8. Формула интегрирования по частям. Привести примеры использования формулы для вычисления неопределенных интегралов.
9. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+C}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+C}}; \quad \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+C}dx; \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+C}}dx;$$

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+C}}; \quad \int \sqrt{ax^2+bx+C}\,dx.$$

10. Интегрирование выражений, содержащих радикалы (иррациональности) от линейных или дробно-линейных функций.
11. Интегрирование тригонометрических функций.
12. Применение тригонометрических подстановок при интегрировании некоторых иррациональных функций. Привести примеры.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Что называется разбиением отрезка $[a;b]$ в интегральном исчислении?
2. Дать определение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ как предела интегральных сумм.
3. Сформулировать и уметь обосновывать геометрический и механический смысл определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

4. Сформулировать условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Перечислить классы интегрируемых функций.
5. Основные свойства определенного интеграла.
6. Теорема о среднем для определенного интеграла.
7. Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом? Теорема о производной от этого интеграла по верхнему пределу.
8. Формула Ньютона–Лейбница. Привести примеры.
9. Замена переменной в определенном интеграле; в чем отличие этой замены от замены переменной в неопределенном интеграле?
10. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
11. Особенность вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по симметричному относительно точки O отрезку $[a; b]$ для случая:

    а) нечетной функции $f(x)$, $x \in [a; b]$;

    б) четной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.
12. Применение определенного интеграла для вычисления:

    а) площади плоской фигуры при различных способах задания линии границы фигуры;

    б) объема тела с известной площадью $S(x)$ его поперечного сечения и тел вращения;

    в) длины дуги плоской кривой при различных способах описания дуги (явное ее задание; параметрическое описание и задание в полярной системе координат).
13. Что называется несобственным интегралом функции $f(x)$:

    а) по промежутку $[a; +\infty)$;

    б) по промежутку $(-\infty; a]$;

    в) по промежутку $(-\infty; +\infty)$?
14. Дать определение несобственного интеграла от неограниченной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$.
15. Дать определение сходящихся и расходящихся несобственных интегралов. Привести примеры.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Дать определение функции нескольких переменных. Привести примеры для случая двух, трех и более переменных.
2. Что называется областью определения и областью значений функции нескольких переменных?
3. Что называется графиком функции нескольких переменных?
4. Дать определение предела функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

5. Сформулировать арифметические свойства пределов функций двух переменных.
6. Дать определение непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.
7. Дать определение частных производных первого порядка по x и по y для функции $z = f(x, y)$; знать различные виды обозначений частных производных.
8. Что такое полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$? Привести примеры.
9. Дать определение и сформулировать достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.
10. Дать определение полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$. Привести инвариантную форму полного дифференциала.
11. Формула приближенного вычисления значения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ с помощью полного дифференциала.
12. Дать определение частных производных второго, третьего и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$. Сформулировать теорему о равенстве вторых смешанных производных.
13. Дать определение минимума и максимума $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.
14. Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных.
15. Достаточные условия экстремума функции $z = f(x, y)$.
16. Дифференцирование сложных и неявных функций нескольких переменных: привести соответствующие формулы.
17. Записать уравнения: а) касательной плоскости и б) нормали к поверхности при явном и при неявном задании поверхности.
18. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области D с границей G: сформулировать алгоритм поиска.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка?
2. Записать общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
3. Дать определение задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Сформулировать достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.
4. Дать определения общего и частного решений, общего и частного интегралов обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Особое решение и особый интеграл.
5. ДУ с разделяющимися переменными: дать определение и описать алгоритм решения.

6. Однородное ДУ 1-го порядка: дать его определение; описать порядок поиска типа ДУ и изложить алгоритм решения.
7. Линейное ДУ 1-го порядка и ДУ Бернулли: дать их определения; изложить метод решения.
8. ДУ в полных дифференциалах: его определение, метод распознания типа ДУ и алгоритм решения.
9. Дать определение общего решения и частного решения обыкновенного ДУ n-го порядка. Сформулировать задачу Коши для него.
10. Перечислить некоторые ДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка; изложить алгоритм решения каждого такого ДУ.
11. Линейное однородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: изложить алгоритм метода Эйлера его решения. Что такое характеристическое уравнение для такого ДУ?
12. Изложить метод вариации произвольных постоянных для решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.
13. Изложить алгоритм решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
14. Дать определение нормальной системы n-го порядка обыкновенных ДУ. Описать метод исключения неизвестных для ее решения.
15. Изложить метод Эйлера решения линейной однородной системы ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.
16. Задачи динамики, приводящие к дифференциальным уравнениям. Привести примеры.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1–20. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \sin 2x e^{\cos 2x} dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$; в) $\int \frac{14dx}{(x^2 - x + 1)(x + 2)}$; г) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

2. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{60dx}{(x^2 + 4)(x + 4)^2}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

3. а) $\int x^2 e^{-x^3} dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \frac{11x + 16}{(x - 1)(x^2 + 4x + 4)} dx$;

г) $\int (x^2 - 4)\sin 5x dx$.

4. а) $\int \cos x e^{-\sin x} dx$; б) $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$; в) $\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} dx$;

г) $\int \arccos 2x dx$.

5. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$; г) $\int x \ln(x^2 + 4) dx$.

6. а) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^3 e^{x^3} dx$; в) $\int \frac{10dx}{(x^2 + 1)(x - 2)(x - 1)}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x + 1)^2 - \sqrt{2x + 1}}}$.

7. а) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 x} dx$; б) $\int (x^2 + 2x - 3)e^{-x} dx$; в) $\int \frac{5dx}{(x^2 + 4)(x - 1)}$; г) $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$.

8. а) $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$; в) $\int \frac{4dx}{(x + 1)^2 (x + 3)}$; г) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

9. а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1 + 9x^2} dx$; б) $\int (x^2 - 3x)\ln(x + 2) dx$; в) $\int \frac{5x^2 - 28x + 44}{(x - 2)^2 (x - 4)^2} dx$;

г) $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx$.

10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1 + 4x^2} dx$; б) $\int x \cos^2 3x dx$; в) $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; г) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$.

11. а) $\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$; б) $\int x^2 e^{-3x} dx$; в) $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 4}{(x - 1)(x + 2)} dx$; г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.

12. а) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 3x}{\cos^2 3x} dx$; б) $\int x^2 \sin 2x dx$; в) $\int \frac{2x^2 + 10x - 4}{(x - 1)^2 (x + 3)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$.

13. а) $\int \frac{6x^5}{x^6+x+1}dx$; б) $\int x\ln(x^2+2)dx$; в) $\int \frac{2x^2-x-18}{(x^2+4)(x+2)(x+1)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 16\sin x\cos x}$.

14. а) $\int \frac{x^2}{\sin^2(2+x^3)}dx$; б) $\int x^2e^{3x}dx$; в) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x+1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$.

15. а) $\int \frac{xdx}{\cos x^2}$; б) $\int x\ln(x^2-2x+3)dx$; в) $\int \frac{-x^2-5x}{(x^2+x+1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

16. а) $\int x\sin(1-3x^2)dx$; б) $\int 2xe^{-x}dx$; в) $\int \frac{5x^4+1}{x^3+x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x}$.

17. а) $\int x\cos(3x^2+2)dx$; б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2xdx$; в) $\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$;

г) $\int \sin 5x\cos 4xdx$.

18. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}dx$; б) $\int x\ln xdx$; в) $\int \frac{x^3+5x+2}{x(x+2)}dx$; г) $\int \cos^2 3xdx$.

19. а) $\int \frac{x^6dx}{4+x^7}$; б) $\int x\sin^2 2xdx$; в) $\int \frac{3x+2}{x^2(x+4)}dx$; г) $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 xdx$.

20. а) $\int x^2\sqrt{3-4x^3}dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$; г) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

21–40. Приложения определенного интеграла.

21–26. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

21. $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{3}{2}\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $y=1$. 22. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

23. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=2$. 24. $\begin{cases} y=2\sin t+1; \\ x=3\cos t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=t^3; \\ y=t^2. \end{cases}$ $t\in[-1;1]$; $y=0$. 26. $\rho=2\sin 2\varphi$.

27–33. Найти длину дуги кривой:

27. $y=\ln\cos x$, $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$. 28. $\begin{cases} x=t^2; \\ y=t^3, \end{cases}$ $t\in[0;\ 1]$.

29. $\begin{cases} x=\cos^3 t; \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$ $t\in[0;\ 2\pi]$. 30. $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1+\cos t. \end{cases}$ $t\in[0;\ 2\pi]$. 31. $\begin{cases} \rho=1+\sin\varphi; \\ \varphi\in[0;\pi]. \end{cases}$

32. $\rho = 3(1-\cos\varphi), \quad \varphi \in [0;\ \pi]$. 33. $\rho = e^{2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

34–40. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

34. $y = \sin x, \quad x \in [0;\ \pi]$. 35. $y = -x^2 + 5,\ y = 1$. 36. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$.

37. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$. 38. $y = \ln x, \quad x = 4, \quad y = 0$.

39. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ 40. $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t; \\ y = 1 + \cos t. \end{cases} \quad t \in [0;\ \pi]$.

41–60. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = z(x, y)$.

41. $z = e^{\frac{y^2}{x}}$. 42. $z = \dfrac{y}{x} - 2\sin 2x$. 43. $z = \dfrac{y^2}{x} + \mathrm{tg}^2 y$. 44. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

45. $z = e^{\frac{x^2}{y}}$. 46. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$. 47. $z = xe^{\frac{x}{y}}$. 48. $z = ye^{\frac{x}{y}}$. 49. $z = xe^{\frac{x^2}{y}}$.

50. $z = \cos^2(x + y)$. 51. $z = \sin^2(x + y)$. 52. $z = \ln(x^3 - 2y)$.

53. $z = \ln(x^3 - 3y^3)$. 54. $z = \dfrac{x}{y^2} + y^3$. 55. $z = \dfrac{x^2}{y} + y$. 56. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + x^3 - y$.

57. $z = \dfrac{1}{x} + 2x^2 y$. 58. $z = \cos(x + y^2)$. 59. $z = \sin(y + x^2)$.

60. $z = \cos(x^2 + y)$.

61–80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в заданной замкнутой области $\overline{D}$.

61. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad \overline{D}: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6$.

62. $z = x^2 - y^2, \quad \overline{D}: x^2 + y^2 \le 1$.

63. $z = 2x^2 - 2y^2, \quad \overline{D}: x^2 + y^2 \le 9$.

64. $z = 1 - x + x^2 + 2y, \quad \overline{D}: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1$.

65. $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2, \quad \overline{D}: x \ge 0, \quad y \le 2, \quad y \ge \frac{1}{2}x^2$.

66. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \quad \overline{D}: y \ge x^2,\ 0 \le y \le 4$.

67. $z = x^2 - y^2 + 8, \quad \overline{D}: x^2 + y^2 \le 4$.

68. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27, \quad \overline{D}: 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$.

69. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y, \quad \overline{D}: x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 \le x + y \le 4$.

70. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5, \quad \overline{D}: x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 \le x + y \le 3$.

71. $z = x^2 + xy - 3x - y, \quad \overline{D}: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$.

72. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y+3,\quad \overline{D}: x\le 2,\quad y\ge 0,\quad y\le x+2$.

73. $z=x^2+y^2-6x+4y+2,\quad \overline{D}: 0\le x\le 4,\quad -3\le y\le 2$.

74. $z=x^2-2xy+3,\quad \overline{D}: 0\le y\le 4-x^2$.

75. $z=5x^2-3xy+y^2+4,\quad \overline{D}: -1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$.

76. $z=x^2-y^2+2xy+4x,\quad \overline{D}: x\le 0,\quad y\le 0,\quad y\ge -x-2$.

77. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y,\quad \overline{D}: x\le 2,\quad y\ge 0,\quad y\le x+2$.

78. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y,\quad \overline{D}: 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$.

79. $z=xy-3x-2y,\quad \overline{D}: 0\le x\le 4,\quad 0\le y\le 4$.

80. $z=3x^2+3y^2-2x-2y-2,\quad \overline{D}: X\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x+y\le 1$.

81–100. Проинтегрировать дифференциальное уравнение. При заданном начальном условии найти соответствующий частный интеграл или частное решение.

81. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0$.

82. $\sin x\sin y\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$.

83. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

84. $(1+y^2)dx=xydy;\quad y\big|_{x=2}=1$.

85. $y'=\dfrac{2y}{x}-x^3$.

86. $(x+e^{x/y})dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$.

87. $y'+\dfrac{4y}{x}+x=0$.

88. $y'-7y=8e^{3x}$.

89. $3e^y\cos x dy-\sin(9+e^y)dx=0;\quad y\big|_{x=0}=0$.

90. $\operatorname{ctg}x\cos^2 y\,dx+\sin^2 x\operatorname{tg}y\,dy=0$.

91. $\sin x y'=y\cos x+2\cos x$.

92. $\sin x\operatorname{tg}y\,dx-\dfrac{dy}{\sin y}=0$.

93. $e^x\operatorname{tg}y\,dx=(1-e^x)\sec^2 y\,dy$.

94. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3}{x}y=-x^3y^2$.

95. $(x^2-2xy)y'=xy-y^2$.

96. $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x;\quad y(0)=0$.

97. $x^2y'+xy+1=0;\quad y(1)=0$.

98. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$.

99. $y'-y+y^2\cos x=0$.

100. $xy'=\dfrac{y}{\ln x};\quad y\big|_{x=e}=1$.

101–120. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

101. $2yy''=3(y')^2+4y^2;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.

102. $3y'y''=2y;\quad y(0)=y'(0)=1$

103. $y''y^3=1;\quad y(0{,}5)=y'(0{,}5)=1$.

104.. $y''(1+\ln x)+\dfrac{y'}{x}=2+\ln x,\ y(1)=0{,}5;\ y'(1)=1$

105. $y'y''+(y')^2=1;\quad y(0)=y'(0)=1$.

106. $y'' = \frac{y'}{x}(1 + \ln\frac{y'}{x})$; $y(1) = 0{,}5$; $y'(1) = 1$.

107. $2yy'' + y^2 = (y')^2$; $y(0) = y'(0) = 1$.

108. $2yy'' = (y')^2 + y^2$; $y(0) = y'(0) = 1$.

109. $e^y(y'' + (y')^2) = 2$; $y(1) = 0$, $y''(0) = 2$.

110. $2y' = (x + \frac{1}{x})y''$; $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$.

111. $xy'' = y'\ln y'$; $y(1) = e$, $y'(1) = e$.

112. $x^2y'' + xy' = 1$.

113. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

114. $x(y'' - x) = y'$; $y(1) = y'(1) = 1$.

115. $y'' + y = (y')^2$; $y(1) = -0{,}25$, $y'(1) = 0{,}5$.

116. $1 - yy'' = (y')^2$; $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$

117. $y''x\ln x = 2y'$.

118. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

119. $x(y'' + y') = y'$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

120. $x(y'' + 1) + y' = 2$; $y(1) = \frac{7}{4}$, $y'(1) = \frac{5}{2}$.

121–140. Найти общие решения уравнений.

121. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

122. $y'' + 8y' = 8x$.

123. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

124. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

125. $7y'' - y' = 14x$.

126. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

127. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

128. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.

129. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

130. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$.

131. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

132. $y'' - 2y' + y = x^3$.

133. $y'' - 4y' - 5y = (27x - 39)e^{-4x}$.

134. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$.

135. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$.

136. $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$.

137. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

138. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.

139. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

140. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика: сборник заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов: в 2 ч. / А. Н. Андриянчик [и др.]. – Минск: БНТУ, 2005. – Ч. 1.
2. Герасимович, А.И. Математический анализ. / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1, 2
3. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2 т. / А.А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1978, 1983. – Т. 1, 2.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч. 1, 2.
5. Жевняк, Р.М. Высшая математика: в 2 ч. / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1985. – Ч. 1, 2.
6. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1989.
7. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 3 т. / Н.С. Пискунов– М.: Наука: 1985. – Т. 1–3.
8. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: учебное пособие: в 2 ч. / Т.А. Сухая. – Минск: Вышэйшая школа, 1993.
9. Высшая математика для инженеров / С.А. Минюк [и др.]; под ред. Н.А. Микулика. – Минск: Элайда, 2007. – Т. 1, 2.
10. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. / под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2004.
11. Щипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высшая школа, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

по высшей математике
для студентов-заочников
инженерно-технических специальностей

С о с т а в и т е л и:
АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич
МЕТЕЛЬСКИЙ Анатолий Владимирович
МИКУЛИК Николай Александрович и др.

Редактор Т.А. Подолякова
Компьютерная верстка С.В. Бондаренко

Подписано в печать 27.02.2010.
Формат $60\times84^{1}/_{8}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 500. Заказ 999.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65, 220013, Минск.