

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПТИМИЗАЦИИ ФЕРМ ПО УСЛОВИЯМ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Введение. В сложившейся к настоящему времени практике расчетов строительных систем решение задач оптимизации выполняется с помощью методов математического программирования. Ограничения на прочность стержней фермы (и других конструкций) записываются в виде нелинейных функций. Численная реализация задач нелинейного математического программирования весьма трудоемка, особенно в реальном проектировании, хотя теоретических исследований прове-

дено достаточно много. Заранее определить какие ограничения в задаче оптимизации будут активными не всегда возможно. Поэтому, даже сформулировав задачу оптимизации в терминах математического программирования, получить ее решение затруднительно.

В настоящей работе внимание исследователей обращается на достоинства расчета и оптимизации конструкций с помощью

Борисевич Арсений Александрович, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского национального технического университета.

Беларусь, БНТУ, 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65.

общих уравнений строительной механики [1], позволяющих получить выражения для определения переменных состояния в символьном виде с целью использования их в системах компьютерной математики. Благодаря этому задача поиска рациональной, близкой к оптимальной конструкции сводится к решению системы уравнений или к применению методов математического программирования.

Именно с помощью общих уравнений матрицу внешней жесткости системы можно записать в символьном виде. С её помощью получают выражения для определения перемещений узлов или усилий в стержнях. Сложность решения зависит от числа типоразмеров сечений элементов системы и размера матрицы жесткости (числа неизвестных узловых перемещений).

Демонстрацию возможного способа решения задачи оптимизации выполним вначале на примере известных тестовых расчетных схем ферм. Для показанной на рисунке 1 расчетной схемы принята следующая исходная информация: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R = 200$ МПа, вектор нагрузки $F1 = [10; -20; 0; 0]^T$.

Принимая жесткости стержней 1-2 и 3-4 равными EA_1 , а остальных – EA_2 , найдем выражение для определения перемещения узла 2 по вертикали:

$$Z_2^{BEPT} = 174.883/EA_2 - (-1.18287 \cdot 10^{17} EA_1 - 8.19862 \cdot 10^{16} EA_2) / (1.33003 \cdot 10^{15} EA_1^2 + 9.10957 \cdot 10^{14} EA_1 EA_2 + 1. EA_2^2).$$

Контурный график (график равных высот) перемещения Z_2^{BEPT} показан на рисунке 2.

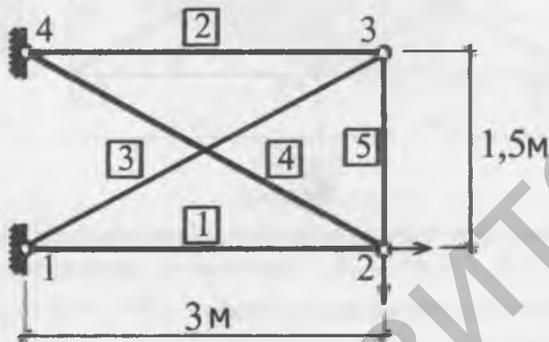


Рисунок 1

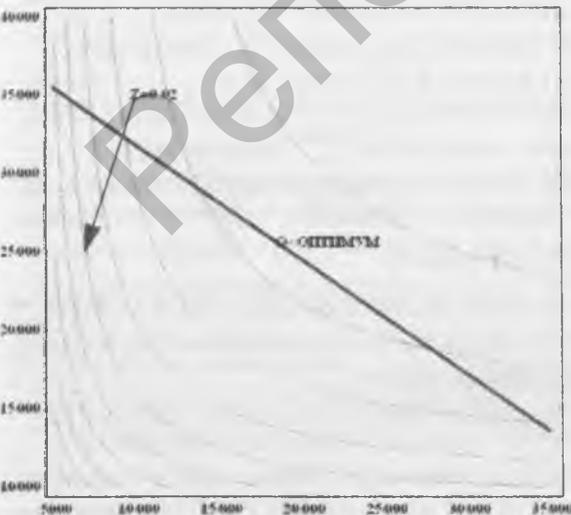


Рисунок 2

Предположим, что перемещение узла, равное $Z_2^{BEPT} = 0,02$ м, будет в этой задаче активным. Для активного ограничения Z_2^{BEPT} функциональная зависимость между жесткостями EA_1 и EA_2 описывается линией пересечения поверхности $Z_2^{BEPT} = f(EA_1, EA_2)$ и плоскости $Z_2^{BEPT} = 0.02$ м (рисунок 3).

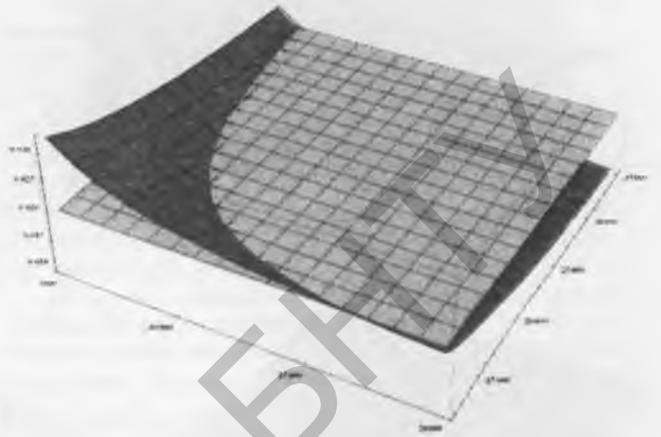


Рисунок 3

Для определения оптимальных значений жесткостей элементов (оптимальных значений площадей сечений, если материал для всех стержней один и тот же), в соответствии с физическим смыслом задачи оптимизации, можно записать систему из двух уравнений. Одним из них фиксируется максимальное перемещение Z_2^{BEPT} узла, предполагая, что это ограничение в оптимальном проекте наиболее активно. Второе уравнение – это уравнение прямой, соответствующей градиенту целевой функции $V = 6 \cdot A_1 + 8,2082 \cdot A_2$ (в этом примере $k_1 = dEA_2 / dEA_1 = -0.73098$, следовательно $k_2 = -1/k_1 = 1.36803$). Решив систему, получим: $EA_1 = 10864$ кН, $EA_2 = 14863$ кН. Площади сечений равны: $A_1 = 5.432 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, $A_2 = 7.4315 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Однако максимальное напряжение в некоторых стержнях фермы при этих площадях превышает расчетное.

Можно утверждать, что для систем с унифицированными (по площади сечений) стержнями такие особенности будут наблюдаться часто. При заданных малых значениях перемещений узлов (эти ограничения являются активными) показанный способ расчета, ориентированный на учет только ограничений по перемещениям, будет приводить к невыполнению условий прочности.

Если отслеживать ограничения по прочности, то надо иметь в виду следующее. Рассматриваемая расчетная схема фермы, при условии разделения жесткостей сечений стержней на две группы, имеет особенность: при одном и том же соотношении жесткостей усилия в системе остаются неизменными. Контурный график функции N_4 показан на рисунке 4. Усилие N_4 изменяется в интервале $23.5 < N_4 < 27.8$ (с точностью до 0.1). Подтверждением этому является график изменения напряжения в 4-м, наиболее напряженном, стержне (рисунок 5). На этом графике значения EA_1 изменяются в интервале [5000...20000], EA_2 – [12000...25000]. Горизонтальная плоскость соответствует напряжению $\sigma_{2-4} = 2 \cdot 10^5 \text{ кН/м}^2$.

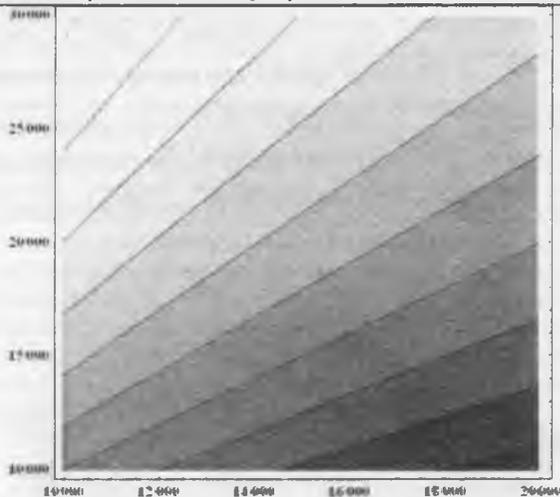


Рисунок 4

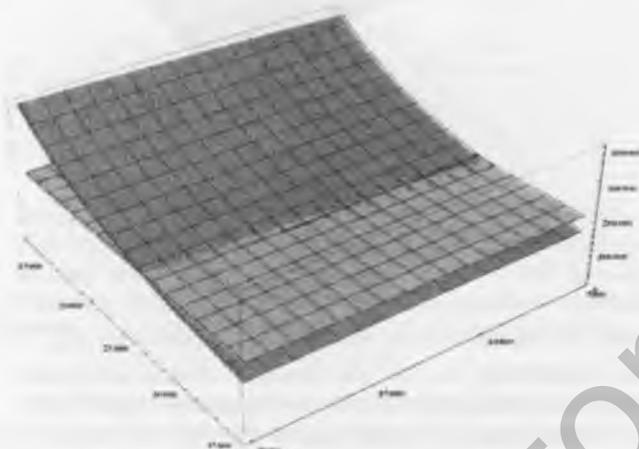


Рисунок 5

Принимая $dA_2 / dA_1 = 1,36803$ (угловой коэффициент прямой, соответствующий градиенту целевой функции) и напряжение в 4-м стержне равным расчетному сопротивлению $R = 2 \cdot 10^5$ кН/м², получим из решения системы уравнений значения жесткостей стержней: $EA_1 = 18683$ кН, $EA_2 = 25559$ кН. Соответствующие площади сечений равны: $A_1 = 9,3415 \cdot 10^{-5}$ м², $A_2 = 12,7795 \cdot 10^{-5}$ м². Объем материала $V = 16,0946 \cdot 10^{-4}$ м³. При этих значениях перемещение узла 4 по вертикали равно 0,012855 м. Напряжения в стержнях будут равны или меньше расчетных значений.

Рассмотрим особенности поиска оптимального проекта рассматриваемой системы в случае трех переменных. В первую группу включим стержни 1-2 и 3-4, во вторую – стержни 1-3 и 2-4, в третью – стержень 2-4. Направляющим вектором гиперплоскости, которой в рассматриваемом примере является плоскость, порождаемая функцией цели, является вектор $\vec{V} = [6,0; 6,7082; 1,5]^T$. Найдя выражения для определения перемещений узлов и усилий в стержнях, перейдем к определению оптимальных параметров исследуемой системы. Если ограничение на прочность по одному из стержней, например стержню 4, будет активным, то из решения системы трех уравнений (два других определяют направления градиента (или антиградиента) целевой функции) найдем площади сечений стержней и соответствующие им жесткости:

$$A_1 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_2 = 1,3416 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ A_3 = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$EA_1 = 24000 \text{ кН}, EA_2 = 26832 \text{ кН}, \\ EA_3 = 6000 \text{ кН}.$$

$$\text{Объем материала } V = 16,6497 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Напряжение в стержне 4 равно $\sigma_{2,4} = 200$ МПа, перемещение узла 2 по вертикали $Z_2^{BEPT} = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м.

Если активным будет ограничение на перемещение узла 2 ($Z_2^{BEPT} = 0,02$ м), то из решения системы трех уравнений получим

$$A_1 = 0,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_2 = 0,7379 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ A_3 = 0,165 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ EA_1 = 13200 \text{ кН}, EA_2 = 14758 \text{ кН}, \\ EA_3 = 3300 \text{ кН}.$$

Однако напряжения в стержнях окажутся значительно больше расчетных значений.

Рассмотрим решение задачи о поиске оптимального решения для расчетной схемы фермы (известный тестовый пример [2]), показанной на рисунке 6. Переменные проектирования (площади сечений стержней) объединим в две группы: в первую группу включим стержни 1, 2, 3, 4; во вторую – все остальные. Примем модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление на растяжение/сжатие $R = 200$ МПа. Вектор нагрузки $F = [0; -20; 0; -20; 0; 0; 0; 0]^T$ кН.

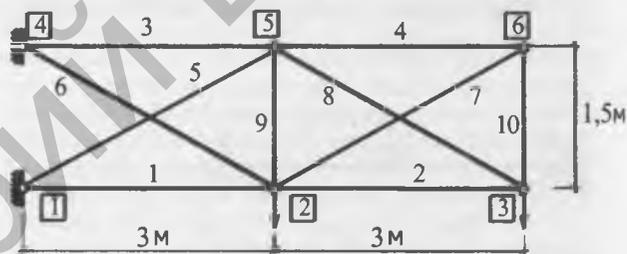


Рисунок 6

Функция цели (объем материала на изготовление фермы) имеет вид: $V = 12 \cdot A_1 + 16,4164 \cdot A_2$. Ограничение на перемещение узла 3 по вертикали примем равным (по модулю) $Z_3^{eepm} = 0,01$ м. Далее будет показано, что именно это ограничение в данной задаче будет активным.

Выражение для определения перемещения Z_3^{eepm} в случае двух переменных имеет вид:

$$Z_3^{eepm} = -(510,01/EA_2) + (8,507 \cdot 10^{17} EA_1 + 3 + 1,143 \cdot 10^{18} EA_2 + 3,833 \cdot 10^{17} EA_1 EA_2 + 501,121 EA_2^3) / (-5,452 \cdot 10^{14} EA_1^2 - 7,328 \cdot 10^{14} EA_1 EA_2 - 2,457 \cdot 10^{14} EA_2^2 + 1, EA_2^3).$$

Контурный график функции Z_3^{eepm} показан на рисунке 7.

Граница области допустимых решений (ОДР) показана в виде линии пересечения поверхности Z_3^{eepm} и плоскости $Z_3^{eepm} = 0,01$ м (рисунок 8).

Эта же линия в виде зависимости $EA_2 = f(EA_1)$ показана на рисунке 9. С помощью аппроксимирующей функции $EA_2 = f(EA_1)$ получено оптимальное решение.

В точке оптимума производная неявно заданной функции $Z_3^{eepm}(EA_1, EA_2)$ равна $dEA_2 / dEA_1 = -0,0924616$.

Оптимальному решению соответствует точка с координатами $A_1 = 17,7276 \cdot 10^{-4}$ м², $A_2 = 4,55435 \cdot 10^{-4}$ м². Объем материала $V = 28,7497 \cdot 10^{-3}$ м³.



Рисунок 7

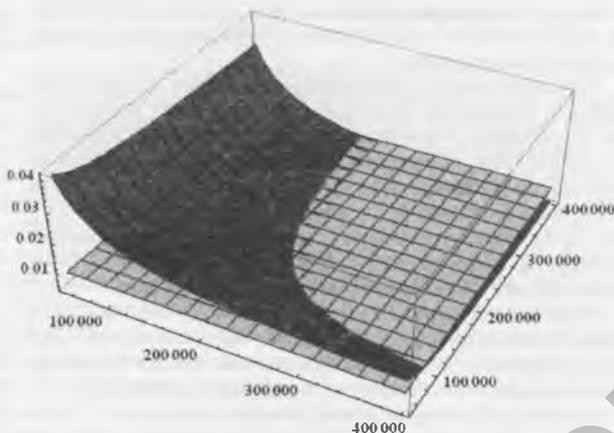


Рисунок 8

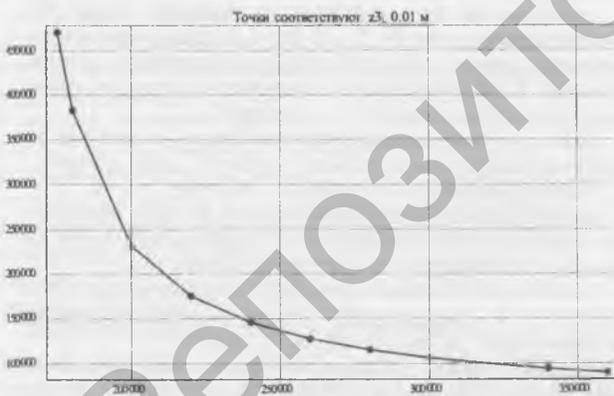


Рисунок 9

Нормальное напряжение в наиболее нагруженном стержне первой группы равно $\sigma_{1-2} = -45.51$ МПа, в наиболее нагруженном стержне второй группы – $\sigma_{2-4} = 99.86$ МПа. Здесь и далее записаны значения напряжений, вычисленные без учета коэффициента продольного изгиба, коэффициента условий работы и др. (коэффициенты не влияют принципиально на методику исследования).

Рассмотрим решение задачи о поиске оптимального решения для той же расчетной схемы фермы (рисунок 6) в случае объединения переменных проектирования (площади сечений стержней) в три группы: в первую группу включим стержни 1 и 2; во вторую – стержни 5 и 6; в третью – все остальные. Примем модуль упругости

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление $R = 200$ МПа. Вектор нагрузки $F = [0; -20; 0; -20; 0; 0; 0; 0]^T$ кН.

Функция цели (объем материала на изготовление фермы) имеет вид: $V = 6 \cdot A_1 + 6.7082 \cdot A_2 + 15.7082 \cdot A_3$. Ограничение на перемещение узла 3 по вертикали примем равным (по модулю) $Z_3^{верт} = 0.01$ м. Далее будет показано, что именно это ограничение в данной задаче будет активным.

В случае трех переменных перемещение определяется по выражению:

$$Z_3^{верт} = (EA32 (1.148 \cdot 10^{17} EA22 - 66.080 EA2 EA3 - 185.754 EA32) + EA1 EA3 (3.050 \cdot 10^{16} EA22 + 1.872 \cdot 10^{17} EA2 EA3 + 106.833 EA32) + EA12 (1.434 \cdot 10^{15} EA22 + 3.448 \cdot 10^{16} EA2 EA3 + 3.737 \cdot 10^{16} EA32)) / (EA3 (EA1 EA3 (-7.972 \cdot 10^{13} EA22 - 1.244 EA2 EA3 - 7.884 EA32) + EA12 (-4.859 \cdot 10^{12} EA22 - 1.114 \cdot 10^{14} EA2 EA3 - 0.579 EA32) + EA32 (1.501 EA22 + 2.744 EA2 EA3 + 1. EA32)))$$

Рассмотрим движение поисковой точки вдоль вектора градиента целевой функции до пересечения с границей ОДР. С этой целью запишем и решим систему из трех уравнений, в которой одно уравнение будет соответствовать равенству $Z_3^{верт} = 0.01$ м, а два других будут определять соотношения компонент переменных проектирования по направлению вектора градиента функции цели. Решив систему уравнений (нелинейных), получим $A_1 = 9.2631 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $A_2 = 10.3564 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $A_3 = 24.2511 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Движение точки вдоль границы ОДР с целью уменьшения значения целевой функции можно осуществить различными способами.

В настоящей работе изменение координат точки производится в соответствии с «весами» компонент целевой функции при поддержании условия $Z_3^{верт} \leq 0.01$ м. Процесс является итерационным. На конечной стадии вычислений надо получить такие значения ПП, при которых бы незначительные изменения переменных, влекущие уменьшение значения функции цели, не приводили бы к нарушению условия $Z_3^{верт} \leq 0.01$ м. В данной задаче оптимум соответствуют следующие значения переменных:

$A_1 = 11.25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $A_2 = 11.3385 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $A_3 = 6.9955 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Объем материала $V = 25.3448 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Напряжение в наиболее нагруженном стержне первой группы равно $\sigma_{1-2} = -71.8$ МПа, в наиболее нагруженном стержне второй группы – $\sigma_{2-4} = 40.2$ МПа, в наиболее нагруженном стержне третьей группы – $\sigma_{3-5} = 33.5$ МПа.

Изложенный в статье подход к поиску оптимальных параметров фермы может быть распространен и на конструкции других типов. Современные компьютерные технологии позволяют преодолеть возникающие вычислительные трудности.

Заключение. Использование в расчетах конструкций общих уравнений строительной механики в сочетании с системами компьютерной математики позволяет получить в символическом виде выражения для отдельных переменных состояния, что существенно облегчает поиск оптимального проекта конструкции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
2. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование : Механические системы и конструкции: пер. с англ. – Москва: Мир, 1983. – 478 с.

Материал поступил в редакцию 29.03.2017