МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

ИЗУЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Практикум для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические
приборы и аппараты»,
1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы»,
1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника»,
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,
1-38 02 02 «Биотехнические аппараты и системы»,
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения

Минск
БНТУ
2018

УДК 53.088(076.5)(075.8)
ББК 30.10я7
И39

С о с т а в и т е л и:
Д. С. Бобученко, Ю. А. Бумай, В. В. Черный

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (заведующий кафедрой физики, кандидат физико-математических наук *Г. Ф. Смирнова*);
профессор кафедры «Физика полупроводников и наноэлектроники», доктор физико-математических наук *М. Г. Лукашевич*

Изучение погрешностей измерений : практикум для студентов
И39 специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы», 1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника», 1-38 02 02 «Биотехнические аппараты и системы», 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / сост.: Д. С. Бобученко, Ю. А. Бумай, В. В. Черный. – Минск: БНТУ, 2018. – 24 с.
ISBN 978-985-550-997-5.

Практикум содержит сведения о погрешностях измерений физических величин и их характеристиках. В издании рассмотрены методы обработки данных эксперимента и методы определения погрешностей физических величин при прямых и косвенных измерениях. В качестве практического применения рассмотрено определение ускорения свободного падения по методу математического маятника.

Издание предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Механика и молекулярная физика» курса общей физики.

ISBN 978-985-550-997-5

ИЗУЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение

Физика – это количественная наука, которая опирается на физические эксперименты. Задача физического эксперимента – измерение физических величин. Поэтому целью физического практикума является выработка навыков правильного проведения измерений, умения оценивать погрешности.

Физические измерения и погрешности

Измерением называется сравнение интересующей нас физической величины с соответствующей однородной величиной, принятой за единицу, либо измерение – это совокупность операций по определению отношения измеряемой величины к другой однородной величине, принятой за единицу.

По характеру проведения измерений их делят на прямые и косвенные. Под *прямыми* измерениями понимают такие измерения, при которых непосредственно измеряется интересующая нас величина (например, измерение длины предмета линейкой, штангенциркулем или микрометром, силы тока – амперметром и т. д.). Измерения, при которых интересующая нас величина не измеряется непосредственно, а рассчитывается по некоторой формуле на основе результатов прямых измерений, называются *косвенными* измерениями (например, определение плотности тела). Известно, что плотность определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

где m – масса;

V – объем.

Измерение массы тела и его объема не представляет существенных трудностей, поэтому, измерив на опыте величины m

и V, можно подставить их в (1) и рассчитать интересующее нас значение ρ.

Абсолютная и относительная погрешности измерений

Истинное значение физической величины является идеализированной величиной (абсолютной истиной), к которой стремимся, повышая качество измерений. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений. Поэтому определить экспериментально истинное значение физической величины *абсолютно точно невозможно,* так как любая операция измерения связана с рядом ошибок или погрешностей. Причины погрешностей – различные. Их возникновение может быть связано с неточностями изготовления и регулировки измерительного прибора, обусловлено физическими особенностями исследуемого объекта (например, при измерении диаметра проволоки неоднородной толщины результат случайным образом зависит от выбора участка измерений) и другими причинами случайного характера.

Задача экспериментатора заключается в том, чтобы уменьшить их влияние на результат, а также указать, насколько полученный результат близок к истинному.

Существуют понятия абсолютной и относительной погрешности.

Под ***абсолютной погрешностью*** измерений понимается разница между результатом измерения и истинным значением измеряемой величины:

$$\Delta x_i = x_i - x_{\text{и}},$$

где Δx_i – абсолютная погрешность i-го измерения;

x_i – результат i-го измерения;

x_u – истинное значение измеряемой величины.

Абсолютная погрешность – величина размерная, она имеет ту же размерность, что и измеряемая величина. В качестве *истинного значения физической величины* принимают значение, наилучшим образом характеризующее совокупность измерений – *среднее арифметическое значение измеряемой величины* $\bar{x}$.

Абсолютная погрешность не полностью характеризует точность (качество) произведенных измерений. В самом деле, если измерить с одной и той же абсолютной ошибкой ±1 мм отрезки длиной 1 и 5 мм, то точности измерений будут сильно различаться. Поэтому, наряду с абсолютной погрешностью измерения рассматривается и относительная погрешность.

Относительной погрешностью измерений называется отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{\text{и}}}.$$

Относительная погрешность – величина безразмерная. Она выражается в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} \cdot 100\ \%.$$

В приведенном выше примере относительные ошибки равны 0,1 и 20 %. Таким образом, относительная ошибка дает информацию о степени неточности измерений.

Результат любых физических измерений принято записывать, *указывая доверительную вероятность* α, в виде

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x},$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины, наиболее близкое к истинному значению;

$\overline{\Delta x}$ – абсолютная ошибка измерений.

Доверительная вероятность α – это вероятность того, что истинное значение измеряемой величины лежит в интервале $\left[\bar{x}-\overline{\Delta x},\ \bar{x}+\overline{\Delta x}\right]$. Как доказано в теории ошибок, доверительная вероятность определяет собой долю средних значений x, полученных в аналогичных сериях измерений, попадающих в доверительный интервал, т. е. отличающихся от истинного значения не более, чем на $\overline{\Delta x}$.

Погрешности измерений

По характеру проявления и причинам появления погрешности можно условно разделить на следующие виды:

– приборные;
– систематические;
– случайные;
– промахи (грубые ошибки).

Промахи обусловлены либо неисправностью прибора, либо нарушением методики или условий эксперимента, либо имеют субъективный характер. Ими являются результаты измерений, резко отличающиеся от других. Для устранения их появления требуется соблюдать аккуратность и тщательность в работе с приборами. Результаты, содержащие промахи, необходимо исключать из рассмотрения (отбрасывать).

Приборные погрешности. Если измерительный прибор исправен и отрегулирован, то на нем можно провести измерения с ограниченной точностью, определяемой типом прибора. Она указывается в паспорте прибора. В случае, если она неизвестна, за приборную погрешность стрелочного прибора принимают половину наименьшего деления его шкалы, в приборах с цифровым отсчетом приборную ошибку приравнивают к единице наименьшего разряда шкалы прибора.

Систематические погрешности – это ошибки, величина и знак которых постоянны для всей серии измерений, проведенных одним и тем же методом и с помощью одних и тех же измерительных приборов.

При проведении измерений важен не только учет систематических ошибок, но необходимо также добиваться их исключения.

Систематические погрешности условно разделяются на три группы:

1) погрешности, природа которых известна и их величина может быть достаточно точно определена. Такой ошибкой является, например, изменение измеряемой массы в воздухе, которая зависит от температуры, влажности, давления воздуха и т. д.;

2) погрешности, природа которых известна, но неизвестна сама величина погрешности. К таким погрешностям относятся ошибки, обусловленные измерительным прибором: неисправность самого прибора, несоответствие шкалы нулевому значению, классу точности данного прибора;

3) погрешности, о существовании которых можно не подозревать, но величина их зачастую может быть значительной. Такие ошибки возникают чаще всего при сложных измерениях. Простым примером такой ошибки является измерение плотности некоторого образца, содержащего внутри полости.

Случайные погрешности – это ошибки, которые изменяются случайным образом по знаку и величине при идентичных условиях повторных измерений одной и той же величины. Они обусловлены большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и заранее не может быть учтено.

Случайные погрешности возникают, например, при сотрясениях фундамента здания, возникновении незначительного движения воздуха, искрении контактного провода трамвая, если глаз исследователя располагается не перпендикулярно шкале и под разными углами к ней и т. п.

Хотя исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, математическая теория случайных явлений позволяет уменьшить влияние этих погрешностей на окончательный результат измерений и установить разумное значение погрешностей. Для этого производится не одно, а несколько измерений. При усреднении результатов случайные ошибки разных знаков частично компенсируют друг друга. Чем больше проведено измерений, тем в большей степени происходит такая компенсация, а среднее значение становится все ближе к истинному значению.

Элементарные основы теории погрешностей

Измеряемая величина, представляющая собой результат опыта, является, как правило, случайной величиной, т. е. меняется от опыта к опыту. В основе теории случайных погрешностей лежат два предположения, подтверждаемые опытом при проведении большого числа измерений:

1) большие по абсолютной величине погрешности встречаются реже, чем малые, т. е. вероятность появления погрешности уменьшается с ее ростом;

2) погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто, т. е. с равной вероятностью.

Проведя опыт бесконечно большое число раз, получим *генеральную совокупность* – полный набор всех значений, которые может принимать случайная величина x. В реальных условиях опыт проводится конечное число раз, и таким образом получаем выборку, состоящую из конечного числа значений случайной величины. Это число называется *объемом выборки*. Генеральная совокупность – предельный случай выборки с бесконечно большим объемом.

Между параметрами выборки и параметрами генеральной совокупности имеется принципиальное различие. Если взять несколько выборок одного и того же объема n, т. е. произвести несколько серий измерений по n опытов в каждой серии, то, в силу случайного характера измеряемых величин, параметры выборок будут отличаться друг от друга. Другими словами, параметры серий измерений (например, средние значения результатов измерений $\bar{x}$ в серии) являются случайными даже при неизменных условиях опыта. Параметры же генеральной совокупности при заданных условиях опыта неизменны.

Рассмотрим параметры генеральной совокупности. Важнейшим параметром генеральной совокупности является среднее значение $\langle x \rangle$ (или математическое ожидание):

$$\langle x \rangle = \lim_{n->\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где x_i – результат i-го измерения.

Исходя из определения приведенного выше второго предположения теории случайных погрешностей, легко доказать, что сумма отклонений результатов измерения от среднего значения равна нулю, т. е.

$$\lim_{n->\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle) = 0.$$

Также можно доказать, что сумма квадратов отклонений результатов измерения от среднего значения будет минимальной. Поэтому, среднее значение является наилучшим значением, характеризующим всю совокупность результатов измерений. Среднее значение, соответствующее бесконечному числу измерений, будем обозначать $\langle x \rangle$, чтобы отличить его от $\bar{x}$, соответствующей серии из n измерений. В отсутствие систематических и приборных ошибок $\langle x \rangle$ совпадает с истинным значением измеряемой величины.

Следующим важным параметром является ***среднеквадратичное (стандартное) отклонение*** σ_x, характеризующее разброс случайных величин:

$$\sigma_x = \sqrt{\lim_{n->\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}.$$

Величину σ_x называют также ***среднеквадратичной погрешностью***.

Дисперсией называется средний квадрат отклонения случайной величины от среднего значения:

$$D_x \equiv \sigma_x = \lim_{n->\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2.$$

В математической статистике доказывается закон сложения дисперсий, который широко используется при обработке результатов эксперимента, когда нужно определить погрешность результата, обусловленную совокупностью различных независимых величин (например, в случае косвенных измерений). Если имеются две независимые величины (x и y), для них можно записать

$$D_{x+y} = D_x + D_y$$

и, следовательно,

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

В связи с этим, например, результирующая погрешность, учитывающая случайные и приборные погрешности, рассчитанные для одной и той же доверительной вероятности, определяется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2}.$$

В эксперименте получаем не генеральные совокупности, а выборки конечного объема n. Основными параметрами совокупности результатов при конечном числе измерений, т. е. выборки, являются:

– среднее значение

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

– среднеквадратичная ошибка среднего

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Это соотношение является фундаментальным в теории погрешностей; распределение средних значений является значительно более узким по сравнению с распределением отдельных измерений.

Обработка результатов прямого измерения

Алгоритм обработки результатов прямых измерений, строгий с точки зрения теории погрешностей

Пусть измерили и получили несколько $i = 1, 2, \ldots, m$ значений случайной величины x_i.

1. Исключить промахи, т. е. значения, резко отличающиеся от других. По оставшимся n значениям выполнить следующие пункты.

2. Определить наилучшее (наиболее близкое к истинному) значение измеряемой величины x, как среднее арифметическое из n результатов измерений: $x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

3. Вычислить величину отклонения результата i-го измерения от среднего значения:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}.$$

4. Определить среднеквадратичную погрешность среднего значения:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}.$$

По выбранной (или заданной) доверительной вероятности α и выполненному числу измерений n по таблице коэффициентов Стьюдента (приложение) определить коэффициент Стьюдента $\gamma(\alpha, n)$.

Вычислить величину случайной погрешности

$$\Delta x_{\text{сл}} = \gamma(\alpha, n)\sigma_{\bar{x}}.$$

5. Определить приборную погрешность, используя паспортные данные прибора или, при их отсутствии, принять за погрешность половину наименьшего деления шкалы стрелочного прибора или единицу наименьшего разряда цифрового прибора $\Delta x_{\text{пр}}$.

6. Вычислить полную погрешность:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2}.$$

Если приборная и случайная погрешности намного отличаются друг от друга (обычно более чем в три раза), можно выбрать большую из них, приняв ее за полную погрешность результатов измерения.

Расчет погрешностей по данной методике требует много времени, и, поскольку главной целью практикума является изучение физических явлений и законов, то при выполнении лабораторных работ для экономии времени часто будем пользоваться приближенной методикой) более простой и менее затратной по времени). Она позволяет оценить погрешность со значительно меньшей доверительной вероятностью.

Упрощенный алгоритм оценки погрешностей прямых измерений

Пусть измерили и получили несколько $i = 1, 2, \ldots, m$ значений случайной величины x_i.

1. Исключить промахи, т. е. значения, резко отличающиеся от других. По оставшимся n значениям выполнить следующие пункты.

2. Определить наилучшее (наиболее близкое к истинному) значение измеряемой величины x, как среднее арифметическое из n результатов измерений: $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n$ по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3. Вычислить величину отклонения результата i-го измерения от среднего значения:

$$\Delta x_i = | x_i - \bar{x} | .$$

4. Определить среднюю абсолютную погрешность среднего значения:

$$\Delta x_{\text{сл}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

5. Определить приборную погрешность, используя паспортные данные прибора или, при их отсутствии, принять за погрешность половину наименьшего деления шкалы стрелочного прибора или единицу наименьшего разряда цифрового прибора $\Delta x_{\text{пр}}$.

6. Сравнить приборную и среднюю абсолютную погрешность, выбрать большую из них, приняв за полную погрешность результаты измерения.

Обработка результатов косвенных измерений

Пусть интересующая нас величина y является некоторой функцией других величин a, b, c и далее, так что

$$Y = f(a, b, c, ...), \tag{2}$$

причем величины a, b, c и далее можем измерять путем прямых измерений. В этом случае для определения величин $\overline{Y}$ и ΔY сначала измеряем все величины, от которых зависит Y (a, b, c, ...) по методике, изложенной в предыдущем параграфе. В результате чего определяем $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...,$ а также полные погрешности этих величин, которые обозначим как Δa, Δb, Δc, … *Среднее (наилучшее) значение косвенно определяемой величины Y находится при подстановке в (2) средних (наилучших) значений* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...,$ *полученных в результате прямых измерений:*

$$\overline{Y} = f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...).$$

Для определения полной абсолютной погрешности ΔY косвенно определяемой величины Y сначала рассмотрим, что пусть она зависит от одной прямо измеряемой величины:

$$Y = f(a).$$

Тогда, согласно определению производной, запишем

$$\frac{df}{da} = \lim_{\Delta a -> 0} \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} \approx \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} = \frac{\Delta Y}{\Delta a}.$$

То есть производная приблизительно равна отношению приращения функции к самому приращению аргумента при малых значениях Δa. Таким образом, отсюда можно получить

$$\Delta Y \approx \frac{df}{da} \Delta a.$$

Если физическая величина является функцией нескольких непосредственно измеряемых величин *a*, *b*, *c* и далее (2), то, проводя аналогичные рассуждения для каждого аргумента, получим

$$\Delta Y \approx \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c + ..., \qquad (3)$$

где $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ – обозначают частные производные от функции *f* по соответствующим переменным. Частной производной, согласно определению, является величина, например для переменной *b*, равная

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \lim_{\Delta b -> 0} \frac{f(a, b + \Delta b, c) - f(a, b, c)}{\Delta b}.$$

Каждое слагаемое в формуле (3) дает значение погрешности, вносимое погрешностью Δ соответствующей величины (*a*, *b*, *c* или других) в результирующую погрешность. Поскольку отдельные погрешности, вносимые определенной величиной, должны складываться, они независимы и не могут компенсировать друг друга, то частные производные $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ необходимо брать по модулю (всегда положительными) и можно записать

$$\Delta Y \approx \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \Delta c + \ldots \qquad (4)$$

Если учесть закон сложения дисперсий независимых величин, получим более точную формулу:

$$\Delta Y \approx \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a)^2 + (\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b)^2 + (\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c)^2 + \ldots} \qquad (5)$$

Выражение (3) также можно получить другим способом – с помощью полного дифференциала. Запишем полный дифференциал функции (2), как функции многих переменных, в виде

$$dY \approx \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \ldots \qquad (6)$$

Если от бесконечно малых изменений величин dY, da, db, dc, ... в (6) перейти к конечным значениям их изменений (погрешностям) Δy, Δa, Δb, Δc, ..., то получим формулу (3).

После вычисления абсолютной ошибки ΔY по формуле (5 или 4) находят относительную ошибку как

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{\overline{Y}}.$$

Если в явном виде функция $Y = f(a, b, c, \ldots)$ содержит произведения и/или частные от деления, возведение в степень, то предпочтителен другой способ, использующий логарифмирование. Он основан на том факте, что дифференциал от натурального логарифма дает величину, близкую к относительной ошибке измерений:

$$d(\ln(x)) = \frac{dx}{x} \approx \frac{\Delta x}{x},$$

и свойствам натурального логарифма

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y);\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y);\ \ln(x^k) = k\ln(x).$$

Например, получим формулу для расчета погрешности для следующей рабочей формулы:

$$Y = \frac{ab^k}{c^m}.$$

Прологарифмируем ее:

$$\ln(Y) = \ln(a) + k\ln(b) - m\ln(c).$$

Затем, продифференцируем

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + k\frac{\mathrm{d}b}{b} - m\frac{\mathrm{d}c}{c}.$$

Теперь заменим дифференциалы на абсолютные погрешности и знак (–) на знак (+), чтобы все погрешности складывались. Таким образом, получим формулу для относительной погрешности:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta a}{a} + k\frac{\Delta b}{b} + m\frac{\Delta c}{c}.$$

Более точной формулой согласно теории погрешностей измерений будет

$$\varepsilon = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(k\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta c}{c}\right)^2}.$$

Рассчитав относительную погрешность, можно определить абсолютную ошибку:

$$\Delta Y = \varepsilon \overline{Y}.$$

Графическое изображение результатов измерений

Перед построением графика нужно определить, какая из двух величин является независимой переменной, т. е. величиной, значение которой задает сам экспериментатор, и ту величину, которая некоторым образом зависит от первой. Независимую переменную откладывают по горизонтальной оси (*X*), а ту величину, которую экспериментатор сам определяет – по вертикальной оси (*У*).

Графики строятся на миллиметровой бумаге или бумаге в клеточку, допускающую возможность равномерной оцифровки осей. Начинать построение нужно с выбора масштаба. При этом нужно исходить из следующих соображений:

1. Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом, как на рис. 1*а*.

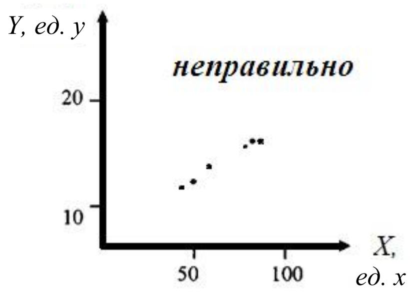

Рис. 1*а*

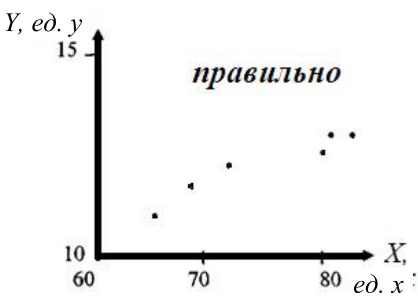

Рис. 1*б*

Чтобы избежать слияния точек, нужно увеличить цену деления масштаба, при этом за начало координат необязательно принимать нулевые значения измеренных величин, как на рис. 1*б*.

2. Масштаб должен быть простым, т. е. одному делению масштаба оси должно соответствовать число единиц измеренной величины, кратное 10, 100, 0, 1 и т. д. Можно выбирать масштаб, чтобы делению масштаба соответствовало две и пять единиц. Других масштабов следует избегать, потому что при нанесении точек придется производить вычисления.

3. Масштаб наносится по всей длине обеих осей.

4. На осях отмечаются величины, которые на них наносятся, и единицы их измерений.

После нанесения масштаба можно приступать к построению графика, пользуясь нижеприведенными указаниями.

5. Экспериментальные точки следует отмечать жирными, хорошо заметными точками или фигурами (кругами, треугольниками, квадратами и т. п.).

6. Не нужно на осях отмечать цифры, соответствующие координатам наносимых точек.

7. Не следует соединять экспериментальные точки ломаной линией, как изображено на рис. 2*а*, скорее всего зависимость изображается некоторой плавной кривой, как на рис. 2*б*, которая проводится как бы по усредненным значениям экспериментальных данных.

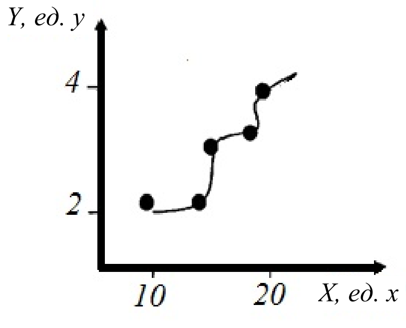

Рис. 2*а*

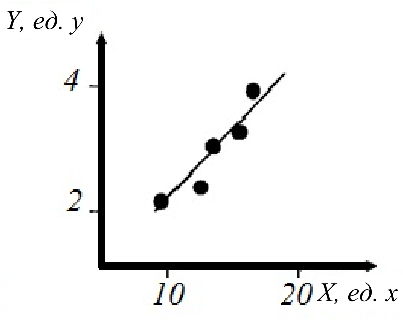

Рис. 2*б*

Проведение приближенных вычислений

При обработке результатов опыта, как уже было показано, имеем дело с приближенными величинами, т. е. величинами, значения которых определены с точностью до некоторого десятичного знака. Эта точность может быть обусловлена ограниченной точностью прибора или метода измерений, физическими особенностями измеряемого объекта или достаточным необходимым уровнем точности (например, никому не нужно знать вес автомобиля с точностью до грамма или высоту шкафа с точностью до миллиметра).

Поэтому при проведении обработки результатов прямых измерений и при вычислении на их основе косвенно определяемых величин вычисления следует проводить не точнее, чем это необходимо в данном конкретном случае. Следует иметь в виду, что при проведении арифметических действий над приближенными числами нет смысла оставлять в результате вычисления больше значащих цифр, чем их было в исходных значениях, над которыми выполнялись действия. Существует общее правило, согласно которому все промежуточные вычисления проводятся с сохранением такого числа значащих цифр, которое на единицы превосходит наименьшее число значащих цифр в исходных значениях. При этом последняя значащая цифра является не вполне точной и при записи окончательного результата значение округляется до того наименьшего числа значащих цифр, которое было в исходных значениях. Например:

$$1{,}234 + 1{,}3 \sim 2{,}5.$$

При округлении руководствуются нижеприведенными правилами.

Если за последней сохраняемой цифрой следует цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то никаких изменений в приближенное значение числа, представленного последовательностью предшествующих цифр, не вносится.

Если за последней сохраняемой цифрой следует 5, 6, 7, 8 или 9, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Например:

$$3{,}462 \approx 3{,}5$$

$$3{,}441 \approx 3{,}4.$$

Правила записи окончательного результата измерения

При записи окончательных результатов измерений для большей наглядности и удобства работы с полученными результатами рекомендуется придерживаться следующих правил.

1. Абсолютную погрешность всегда выражают в тех же единицах, что и саму измеряемую величину.

2. Вначале округляют абсолютную погрешность до первой значащей цифры. Если первая значащая цифра 1 или 2, то округление производят до второй значащей цифры.

Пример: Δt = 0,383 °С записывают как Δt = 0,4 °С, а Δt = = 0,283 °С – как Δt = 0,28 °С.

3. Среднее значение измеряемой величины округляют до числа значащих цифр после запятой, что и в абсолютной ошибке (т. е. необходимо, чтобы их последние цифры принадлежали одному и тому же десятичному разряду). Абсолютную погрешность всегда указывают вместе с найденным значением измеряемой величины, причем приводят также относительную погрешность.

Пример: v = (2,75 ± 0,03) м/с; запись неправильна: v = (2,753 ± 0,03) м/с или v = (2,8 ± 0,03) м/с.

Следует отметить, что нуль в конце цифры является значащей цифрой и его также надо писать.

Пример: (17,70 ± 0,04) м; запись неправильна: (15,7 ± 0,04) м.

Задание

1. Измерить период колебаний математического маятника T_1 для данной его длины l_1. Измерение периода провести пять раз. Измерить периоды колебаний T_2, T_3, T_4 для различных длин маятника l_2, l_3, l_4.
2. Определить средние случайные, приборные и полные погрешности измерений.
3. Из формулы для периода математического маятника определить g:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

4. Вывести из данной формулы формулу для расчета погрешностей.
5. Рассчитать погрешность измерений ускорения свободного падения.
6. Сравнить относительные погрешности, связанные с измерениями l и T. Оценить погрешность, вносимую в результат приближенным значением числа π.
7. Построить графики зависимости $T(l)$, полученной на опыте, и теоретической $T(l)$, рассчитанной по формуле для периода математического маятника.
8. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Физические измерения. Прямые и косвенные измерения.
2. Абсолютные и относительные ошибки. Их размерности.
3. Виды ошибок.
4. Элементарные основы теории погрешностей.
5. Методика расчета ошибок прямых измерений.
6. Методика расчета ошибок косвенных измерений.
7. Правила записи окончательных измерений.

Список литературы

1. Сквайрс, Дж. Практическая физика / Дж. Сквайрс. – Москва: Мир, 1971. – 242 с.

2. Физический практикум. Механика и молекулярная физика / под ред. В. И. Ивероновой. – Москва: Наука, 1967. – 280 с.

3. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. – Москва: Мир. 1985. – 272 с.

4. Светозаров, В. В. Основы статистической обработки результатов измерений : учебное пособие / В. В. Светозаров. – Москва: МИФИ, 2005. – 40 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица коэффициентов Стьюдента

n / α	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7
3	1,89	2,92	4,3	6,96	9,92
4	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	1,53	2,13	2,77	3,75	4,6
6	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
7	1,44	1,94	2,45	3,14	4,71
8	1,42	1,9	2,36	3	3,5
9	1,4	1,86	2,31	2,9	3,36
10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
11	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
12	1,363	1,8	2,2	2,72	3,11
13	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06
14	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
15	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
16	1,34	1,75	2,13	2,6	2,95,
17	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
18	1,33	1,74	2,11	2,57	2,9
19	1,33	1,73	2,1	2,55	2,88

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Практикум для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты»,
1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы»,
1-38 01 04 «Микро- и наносистемная техника»,
1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»,
1-38 02 02 «Биотехнические аппараты и системы»,
1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»

Составители:
БОБУЧЕНКО Дмитрий Степанович
БУМАЙ Юрий Александрович
ЧЕРНЫЙ Владимир Владимирович

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 20.08.2018. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 100. Заказ 247.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.