МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. И. Федорако

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2018

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
Ф33

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра «Высшая математика» Полоцкого государственного университета (заведующий кафедрой, кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Козлов*);
доцент кафедры «Общая математика и информатика» Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Самодуров*

Федорако, Е. И.
Ф33 Методы решения олимпиадных задач по высшей математике : пособие для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций» / Е. И. Федорако. – Минск: БНТУ, 2018. – 46 с.
ISBN 978-985-583-220-2.

Пособие предназначено для преподавателей, осуществляющих подготовку студентов к участию в предметных олимпиадах по высшей математике, а также для самостоятельной работы студентов, желающих изучать дисциплину «Математика» на повышенном уровне.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-220-2

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Решить системы уравнений $\left(a_i \in R\right)$:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} = n, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_n = n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + 2x_1 + \ldots + 9x_8 + 10x_9 = 55; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = a, \\ 4x + 5y + 6z = b, \\ 5x + 6y + 7z = c; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2xy + yz = 27, \\ 3yz - 2xz = 25, \\ xz - xy = 4. \end{cases}$

1.2. Найти все целочисленные решения систем:

а) $\begin{cases} x^2 - y^3 + 2z^2 = 18, \\ 6x^2 - 14y^3 + z^2 = 72, \\ 8x^2 - 16y^3 + 5z^2 = 108; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y^2 + 3z^2 = 8, \\ 3x - 2y^2 + z^2 = -4, \\ -3x + 7y^2 + 7z^2 = 32. \end{cases}$

1.3. Найти матрицу X, если

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Решить матричное уравнение $AXB + AX = E,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1999}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n}$.

1.6. Решить уравнение $X^{2015} = E,$ где $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$ E – единичная матрица размера 2×2.

1.7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos(\beta+\delta) & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos(\gamma+\delta) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$,

где α и β – корни уравнения $x^2 + px + q = 0.$

1.8. Построить график функции

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

1.9. Доказать, что:

а) $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x^2 \end{vmatrix} \le 0$ для всех $x \in R$. При каких x верно равенство?

в) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x-1 & x & x-1 \\ 3x & 2+x & x \end{vmatrix}^{1/2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. При каких x верно равенство?

1.10. Вычислить определители:

а) $$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & . \; . \; . & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & . \; . \; . & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & . \; . \; . & a_n \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ 1 & a_1 & a_2 & . \; . \; . & a_n+b_n \end{vmatrix};$$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 2014 & -1 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & 2014\alpha & 2014 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^n & 2014\alpha^{n-1} & 2014\alpha^{n-2} & \dots & 2014 \end{vmatrix}$.

1.11. Числа 53 295, 67 507, 88 825, 81 719 и 39 083 кратны 3553.

Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ делится на 3553.

1.12. Две квадратные матрицы A и B порядка $n \times n$ удовлетворяют следующим равенствам: $4A^2 - 12A + 9E = 0$; $9B^2 + 6B + E = 0$, где E – единичная.

а) Доказать, что матрицы A и B – невырождены.

б) Доказать, что матрица $6A^{-1}B^{-1} + 9A^{-1} - 2B^{-1} - 3E$ – невырождена.

1.13. Найти порядок определителя, при котором уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = 2011 \text{ имеет корень } x = 6.$$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Дан треугольник OAB. Описать геометрическое место концов векторов вида $\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$, где $\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \alpha+\beta=1.$

2.2. Дан треугольник ABC. Доказать, что

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AB}\right)<0.$$

2.3. Доказать, что если $ab+bc+ca=0,$ то

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

2.4. Найти x, y, z из уравнения $\sqrt{3\left(x+y+z\right)}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{x}.$

2.5. Найти x, y, z из системы

$$\begin{cases}\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha+\sqrt{z}=\sqrt{2\left(x+y+z\right)},\\ 5\left(x+y\right)+4\sqrt{z}=1,\end{cases}\quad \text{где } \alpha\in R.$$

2.6. Какой наименьший угол могут образовывать векторы $\vec{a}\left(1-5x;\ 1;3\right)$ и $\vec{b}\left(-1;\ 1+4x;\ 3-3x\right)$?

2.7. В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $BC^2+AC^2=5AB^2$. Доказать, что медианы, проведенные к сторонам AC и BC, перпендикулярны.

2.8. Точки $A\left(-4;\ -1;\ 2\right)$ и $B\left(3;\ 5;\ -16\right)$ – вершины ΔABC. Найти площадь треугольника, если середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина BC – в плоскости Oxz.

2.9. При каком α существует вектор $\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a}\left(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right)=3,\ \vec{a}\times\left(\vec{j}-\vec{i}+2\vec{k}\right)=\alpha\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Найти $\vec{a}$.

2.10. Известно, что $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=2,\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0.$

а) Доказать, что среди векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ нет ни одной пары коллинеарных.

б) Найти $A = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{c}, \vec{a}\right).$

2.11. Даны три попарно неколлинеарных вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ таких, что вектор $\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$. Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2.12. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 1 : 4$, на стороне DC взята точка K так, что $DK : KC = 3 : 4$. Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AK}$.

2.13. Точки $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ и $D(1; 3; -1)$ – вершины параллелограмма $ABCD$. Найти вектор, совпадающий с большей высотой, опущенной из вершины C.

2.14. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. Плоскость β отсекает от трех боковых ребер SA, SB и SC соответственно $1/3$, $1/4$ и $1/5$ (считая от вершины S). Какую часть она отсекает от ребра SD?

2.15. Дан тетраэдр. Известно, что две пары его непересекающихся ребер перпендикулярны. Доказать, что для третьей пары это также верно.

2.16. Дано: $\vec{a}_0 = \vec{i}$, $\vec{a}_1 = \vec{j}$, $\vec{a}_n = \vec{a}_{n-2} \times \vec{a}_{n-1}$ при $n = 2, 3, \ldots$ Найти $\left|\vec{a}_{10}\right|$.

2.17. При каком значении h векторы $\vec{a} = h\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + h\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + h\vec{k}$ компланарны, но не коллинеарны?

2.18. Средствами векторной алгебры доказать неравенства:

а) $\left(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right)^2 \le \left(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2\right)\left(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2\right)$ для любых $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$;

б) $\left|ma + nb + c\right| \le \sqrt{2}$, если $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

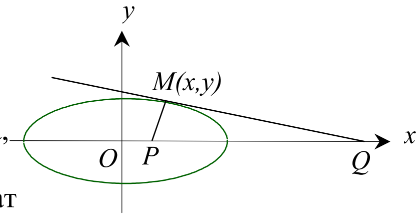
в) $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$.

2.19. Дан правильный треугольник ABC со стороной 1. Найти значение выражения $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Эллипс задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$



M – произвольная точка эллипса, MQ – касательная к эллипсу, MP – нормаль (точки P и Q лежат на оси Ox). Найти $|OP|\cdot|OQ|$.

3.2. Точки $A(-4;-1;\,2)$ и $B(2;\,5;\,-16)$ – вершины ΔABC; середина стороны AC лежит на прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{3}$, а середина стороны BC – на плоскости $3x-4y+z=-2$. Найти площадь ΔABC.

3.3. Треугольник ABC, где $A(1;\,-1;\,2)$, $B(0;\,0;\,-2)$, $C(4;\,-4;\,2)$ проектируется на некоторую плоскость в отрезок длины. Записать уравнение этой плоскости, зная, что она проходит через точку $M_0(1;\,1;\,1)$.

3.4. Дана окружность единичного радиуса, OA – фиксированный диаметр, B – произвольная точка окружности, $|BA|=|BM|$, точка M лежит на продолжении хорды OB за точку B. Написать уравнение геометрического места точек M, когда B пробегает верхнюю полуокружность.

3.5. Найдите координаты центра и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $3x-4y+12z-96=0$.

3.6. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь. Выразите эту площадь через полуоси гиперболы.

3.7. Доказать, что если точки $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$, $C(x_3;\,y_3)$ лежат на одной прямой, то $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0.$

3.8. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

3.9. Доказать, что на любой прямой, параллельной прямой $y=\sqrt{3}x$, не может лежать более одной точки с рациональными координатами.

3.10. Дана вершина $(3;5)$ равнобедренного треугольника, уравнение его основания $x-2y+12=0$ и его площадь $S=15$. Составить уравнения боковых сторон.

3.11. Составить уравнения сторон квадрата, если две из них проходят через вершину $O(0;0)$, а на двух других сторонах лежат точки $M(3;1)$ и $N(8;6)$.

3.12. Через точку $A(0;1)$ провести прямую так, чтобы отрезок ее между прямыми $x-3y+10=0$ и $2x+y-8=0$ делился пополам.

3.13. Дан треугольник с вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$, $C(0;6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

3.14. Точка $A(3;5)$ – вершина равнобедренного треугольника ABC, $x-2y+12=0$ – уравнение его основания и точка $M(-1;1)$ лежит на одной из боковых сторон. Составить уравнение окружности, описанной около ΔABC.

3.15. При каких значениях $a\in R$:

а) Точка $M(a;-1)$ лежит вне круга $x^2-2x+2y+y^2-a-3\le 0$?

б) Кратчайшее расстояние от точки M до окружности равно четырем ее радиусам? Чему равны координаты точки окружности, ближайшей к точке M?

3.16. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств:

а) $x^2+y^2\le 4x-4y-6$ и $x\ge 1$;

б) $x^2+y^2\le 4x-4y-6$ и $x+y\le 1$.

3.17. Вершина треугольника, имеющего неподвижное основание, перемещается по плоскости так, что его периметр остается постоянным. Найти траекторию вершины, если основание равно 24, а периметр – 50.

3.18. Отрезок *AB* длины 3 скользит своими концами по координатным осям (*A* – по *Oy*, *B* – по *Ox*). Какую траекторию при этом описывает точка *M*, находящаяся на отрезке на расстоянии 1 от точки *A*?

3.19. Изобразить на плоскости kOb геометрическое место точек $M(k, b)$ таких, что прямая $y = kx + b$ пересекает гиперболу $x^2 - y^2 + 4 = 0$ и не пересекает параболу $y^2 + 4x = 0$.

3.20. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие – на кривой $y = x - x^2$. Найдите площадь квадрата.

3.21. Найти координаты точки M_0 кривой $x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0$, ближайшей к прямой $3x - 4y + 23 = 0$, и кратчайшее расстояние от точки M_0 до этой прямой.

3.22. Эллипс с фокусами в точках (–3; 0) и (3; 0) касается прямой $x + y = 5$. Записать уравнение эллипса.

3.23. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ найти точку, ближайшую к плоскости $2x + 2y - z + 4 = 0$. Вычислить расстояние от этой точки до плоскости.

3.24. В кубе с ребром 1 найти:

а) угол между непересекающимися диагоналями смежных боковых граней;

б) расстояние между этими диагоналями;

в) уравнение общего перпендикуляра к диагоналям.

3.25. При каких $\lambda \in R$ три плоскости пересекаются по прямой:

а) $x - y + z = 0$; $3x - y - z + 2 = 0$; $4x - y + 2z + \lambda = 0$;

б) $x + \lambda y + z = 0$; $3x - y - z + 4 = 0$; $4x - y - 2z - 30\lambda = 0$.

3.26. Площадь сечения шара радиусом $R = 3$ плоскостью $z = x + y - 3$ равна 6π. Найти координаты центра шара, если он лежит:

а) на прямой $x = y = z$;

б) на оси *Ox*.

3.27. Кривая, заданная уравнением $y^2 - 2x = 0$, отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду длиной 3/4. Составить уравнение данной прямой.

3.28. Найти периметр четырехугольника, образованного асимптотами гиперболы, заданной уравнением $2x^2 - xy + y - x + 5 = 0$, и перпендикулярами, опущенными на асимптоты из точки касания касательной $4x + y + 5 = 0$ к этой гиперболе.

3.29. Найти уравнение параболы, которая касается эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ в двух точках $A(-1; -1)$ и $A(1; -1)$.

4. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

4.1. Найти действительные A и B, удовлетворяющие условию

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\operatorname{ctg} x - \left(1 + Ax^2\right) \big/ \left(x + Bx^3\right)\right)}{x^7} = 0.$$

4.2. При каких $\alpha \in R$ существует не равный нулю предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(e^{-x} + \cos x - 1\right) - \ln\left(e^{-x} - \cos x + 1\right)\right)x^{\alpha}$? Чему равен этот предел?

4.3. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1 + |x|^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$.

4.4. Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin^2 \dfrac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + 2n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(3/2)}{\sqrt{\ln 3} + \sqrt{\ln 2}} + \dfrac{\ln(4/3)}{\sqrt{\ln 4} + \sqrt{\ln 3}} + \ldots + \dfrac{\ln(n/(n-1))}{\sqrt{\ln n} + \sqrt{\ln(n-1)}}\right) \Big/ \sqrt{\ln(2n)}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 3}{4}$, $a_0 = 0$, $n \in N$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}\ldots\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right).$

4.5. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x-\sin x)}{\ln(x-\cos x)};$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)};$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos(\ln(x+1))-\cos(\ln x)\right);$

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\cos\left(e^{x}-e^{-x}\right)-\cos\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right);$

д) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sin\left(\pi\sqrt{x^{2}+2x+2}\big/2\right)-\cos(\pi x/2)\right);$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}};$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^{2}+1}{x}};$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right];$

и) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x};$

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left((1+x)(1+2x)^{1/2}(1+3x)^{1/3}\ldots(1+2011x)^{1/2011}-1\right).$

4.6. Найти n из уравнения

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+3x)\ \dots\ (1+(2n+1)x)-1}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\ \dots\ +\operatorname{tg}nx}=\frac{7}{3}.$$

4.7. Найти a и b, если:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\ln(e+bx)}{x^2}=1;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x\sin x)}{1-\sqrt[5]{1+5x^2}}.$

4.8. Найти x, если:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-(n-1)^x}{(n+1)^{x-1}+(n+2)^{x-1}}=2008;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\dots\left(1+x^{2n}\right)\right)=2010.$

4.9. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

а) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}\cos 2\pi x+x^2}{x^{2n}+1};$ б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2\cos x)^{2n}-1}{(2\cos x)^{2n}+1};$

в) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x^{-n}\ln x}{x^n+x^{-n}};$ г) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}\sin\pi x+x}{e^{nx}+x^2};$

д) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$

4.10. Принимает ли функция $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-\sin\pi x+3$ значение $2\dfrac{1}{3}$ внутри отрезка $[-2;\ 2]$?

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

5.1. Доказать, что функция $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ является константой при $x > 0$. Найти эту константу.

5.2. Найти число действительных корней уравнения $xe^{-x} + e^{-x} + {}$ $+ x^2/2 - 1 = 0.$

5.3. Составить уравнение касательной к графику четной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1,$ если известно, что для всех действительных x справедливо равенство $f\left(2x^3 - x\right) - 4x^2 \times$ $\times f\left(x^2 - x - 1\right) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$

5.4. Доказать, что:

а) $\cos^2 x \sin x > -0,(6)$ при $x \in [-\pi;\ \pi];$

б) $x > \ln(1 + x)$ при всех $x > 0;$

в) $1 + 2\ln x \le x^2$ при всех $x > 0;$

г) $e^x > 1 + (1 + x)\ln(1 + x)$ при всех $x > 0;$

д) $\arcsin x \arccos x \le \pi^2/16$ при $x \in [-1;\ 1].$

5.5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = (6x + 7)^{3/2} - 9x + 4,$ если известно, что на этой касательной нет ни одной точки с равными координатами.

5.6. Функция $f(x)$ имеет производную в точке a. Найти предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) \Big/ f(a)\right)^n;$

б) $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$

5.7. Доказать, что касательная к графику функции $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

5.8. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2012)$.

5.9. Найти производную функции $y = x^{x^b} + x^{b^x} + b^{x^x}$.

5.10. Найти $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$, если $f\left(\dfrac{x}{x+2}\right) = x$.

5.11. Получить рекуррентную формулу для производной n-го порядка функции:

а) $y = \ln x$; б) $y = 2^x$;

в) $y = xe^{3x}$; г) $y = \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x + 5}$.

5.12. Доказать, что $4\mathrm{tg}x + \sin x > 3x$ при всех $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.13. Фигура ограничена линиями $y = x^3 + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$. В какой точке (x_0, y_0) графика функции $y = x^3 + 1$ необходимо провести к нему касательную так, чтобы она отсекла от фигуры трапецию наибольшей площади? Найдите эту площадь.

5.14. Под каким углом кривая $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{2ax + b}$ может пересекать ось Ox?

5.15. Показать, что все точки перегиба функции $y = x\sin x$ лежат на кривой $y^2\left(4 + x^2\right) = 4x^2$.

5.16. Найти $f'(0)$, если:

а) $f(x) = (3x+2)\, f\left(x^2\right) + 2$;

б) $f(x) = \Big(\big(1+\exp(a_1 x)\big)\big(1+\exp(a_2 x)\big)...\big(1+\exp(a_n x)\big)\Big)^{1/n}$.

5.17. Доказать, что кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекается с прямой $y = 2x - 1$, и найти расстояние между их ближайшими точками.

5.18. Найти кратчайшее расстояние между линиями:

а) $3x^2 + y^2 = 3$ и $x + y = 5$;

б) $x^2 + y^2 = 1$ и $y = \ln x - 1$.

5.19. При каких $a \in R$ функция $f(x) = \left(a + a^2 x + x^2/2 + x^3/6\right)e^{-x}$ имеет экстремум при $x = 0$? Это будет максимум или минимум?

5.20. Показать, что кривая $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

5.21. Для осушения болота надо вырыть открытый канал, поперечное сечение которого – равнобедренная трапеция. Канал должен быть устроен так, чтобы при движении воды потери на трение были наименьшими. Определить величину угла откоса α, при котором эти потери будут наименьшими, если площадь поперечного сечения канала S, а глубина – h.

5.22. Сечение шлюзового канала имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 45 м. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь?

5.23. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5.24. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ч, а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. В какой точке эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

6.2. Доказать, что для любых $x,\ y>0$ выполняется неравенство $x^y+y^x>1$.

6.3. Найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

а) $\dfrac{\partial U}{\partial y}=-4y+xy^2,\ U(y,\ y)=\dfrac{y^4}{3}-y^2;$

б) $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\sin(x+2y)+2xy,\ U(x,\ 2x)=2x^3;$

в) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\sin(x+y),\ U(0,\ y)=y^2,\ U(x,\ 0)=-\sin x.$

6.4. Найти кратчайшее расстояние между поверхностью $4z=x^2+y^2$ и плоскостью $2x-y+2z+3=0$.

6.5. К поверхности $xyz=1$ в некоторой ее точке провели касательную плоскость. Каким может оказаться объем тетраэдра, образованного этой плоскостью и координатными плоскостями?

6.6. Касательная плоскость к поверхности $x^2/3+y^2-z^2=-1$ проходит через точки $A(1;\ 0;\ 0)$ и $B(1;\ 1;\ 0)$. Записать уравнение этой плоскости.

6.7. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-9xy$.

6.8. Доказать, что если верно равенство $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}=1,$ то выражение $\varphi\mathrm{d}u-y\mathrm{d}x$ является полным дифференциалом.

6.9. Доказать, что функция $f(x,y)=x^2+\sin y$ имеет бесконечное число минимумов и ни одного максимума.

6.10. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1;\,0;\,2)$ до поверхности $z=x^2+2y^2$.

7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1. Найти интегралы:

а) $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$; б) $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$;

в) $\int\frac{x^2}{(3-x)^7}\mathrm{d}x$; г) $\int\sqrt[3]{x^{13}-x^9}\,\mathrm{d}x$;

д) $\int x^3\left(x^2-10\right)^{500}\mathrm{d}x$; е) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^7+1\right)}$;

ж) $\int\frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$; з) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$.

7.2. Вычислить пределы, рассмотрев их как пределы интегральных сумм:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2}{n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\pi\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)$. При каких k предел существует?

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\dfrac{4}{n^2}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dfrac{6}{n^2}e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\ldots+\dfrac{2n}{n^2}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{8}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{8\cdot 2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\dfrac{8n}{n}}\right)^2$.

7.3. Цилиндрический стакан наполнили водой, а затем наклоняли до тех пор, пока не обнажилась половина дна. Какая часть воды осталась в стакане?

7.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctgx})^{2n}\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{2n+2}\,\mathrm{d}x$ при $n=2016$.

7.5. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\dfrac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\dfrac{x+\mathrm{tg}^2 x}{\left(2\cos^2(x/2)-1\right)^2}\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_{0}^{1/2}\arcsin x\arccos x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{-1/2}^{1/2}(x+\cos x)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$;

е) $\int\limits_{0}^{\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$.

7.6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2x^2}\mathrm{d}x}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \mathrm{arctg}^3 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$.

7.7. Доказать, что:

а) $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = e$;

б) $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$.

7.8. Вычислить полную массу атмосферы сферической планеты радиуса R, если ее плотность на высоте h равна $\gamma_0 e^{-kh}$, где γ_0 – плотность атмосферы на поверхности планеты, $k > 0$.

7.9. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x + 2007x^{2007}}$.

7.10. Решить уравнения:

а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{\pi}{12}$;

б) $\int\limits_{\ln 2}^{x} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x - 1}} = \dfrac{\pi}{6}$.

7.11. Пусть $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^n x\,\mathrm{d}x \;\; (n > 1,\; n - \text{целое})$. Доказать равенство: $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$.

7.12. Вычислить площадь криволинейной трапеции или фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$, $x \in (3;\, 5)$; б) $y = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $x \in [0;\, 1)$;

в) $y = xe^{-x^2/2}$, $x \in [0;\, +\infty)$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$, $x \in [1;\, +\infty)$;

д) $xy^2 = 8 - 4x$ и ее асимптотой.

7.13. Неотрицательная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \le \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$.

7.14. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = Ax + B$. Найдите значения A и B, при которых выражение $\int\limits_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ принимает наименьшее значение.

7.15. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0; 1]$. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\dfrac{1}{n}\right) f\left(\dfrac{2}{n}\right) \ldots f\left(\dfrac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Линейная алгебра

1.1. **а)** Сложив все уравнения системы, получим $(n-1) \times$ $\times \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{n}$, отсюда $x_1 + x_2 + \ldots + x_n =$ $= \dfrac{n(n+1)}{n(n-1)}$. Вычитая из последнего равенства поочередно все уравнения системы, найдем: $x_k = \dfrac{n(n+1)}{2(n-1)} - k$, $k = 1, 2, \ldots n$; **б)** $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 10$, вычтем из 2-го уравнения 1-е: $9x_1 - x_2 - \ldots - x_{10} = 0$. Сложив эти равенства, найдем $x_1 = 1$. Аналогично найдем $x_2 = x_3 = \ldots = x_{10} = 1$; **в)** Система совместна, если

$b=(a+c)/2$, тогда $x=t-5a+4b$, $y=4a-3b-2t$, $z=t$, $t\in R$;
г) $(2;3;5)$, $(-2;-3;-5)$.

1.2. **а)** Пусть $x^2=x_1$, $y^3=y_1$, $z^2=z_1$, решим систему методом Гаусса: $\left(\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 6 & -14 & 1\\ 8 & -16 & 5\end{matrix}\left|\begin{matrix}18\\72\\108\end{matrix}\right.\right)\sim\left(\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -8 & -11\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}18\\-36\\0\end{matrix}\right.\right)$. Получим: $z_1=\dfrac{4(9-2y_1)}{11}$, $x_1=\dfrac{9(3y_1+14)}{11}$, $y_1\in R$. Таким образом $z^2=\dfrac{4(9-2y^3)}{11}$, $x^2=\dfrac{9(3y^3+14)}{11}$, значит должны выполняться неравенства: $y^3\ge-\dfrac{14}{3}$, $y^3\le\dfrac{9}{2}$, которым удовлетворяют целые значения $y=-1$, $y=0$, $y=1$. При $y=-1$ получим целые значения x и z: $x=\pm3$, $z=\pm2$.

б) $(1,2,1),(1,-2,1),(1,2,-1),(1,-2,-1)$.

1.3. Запишем уравнение в виде $AX=B$. Так как $A^2=B$, то $X=A$.

1.4. $X=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

1.5. **а)** $A^2=-E$, $A^{1999}=A\left(A^2\right)^{999}=A(-E)=-A$;

б) $\begin{pmatrix}2^{100} & 2^{100}-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{100}\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$.

1.6. Из условия следует, что $\det X=1$, значит верно равенство $a^2+b^2=1$. Пусть $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$. Можно доказать методом математической индукции, что $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & \sin n\varphi\\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$, т. е. уравнение имеет вид $\begin{pmatrix} \cos 2015\varphi & \sin 2015\varphi \\ -\sin 2015\varphi & \cos 2015\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, что верно при условии $2015\varphi = 2\pi n, \Rightarrow \varphi = \dfrac{2\pi n}{2015}, n \in Z$ и искомая матрица $X = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi n}{2015} & \sin\dfrac{2\pi n}{2015} \\ -\sin\dfrac{2\pi n}{2015} & \cos\dfrac{2\pi n}{2015} \end{pmatrix}, n \in Z.$

1.7. а) 0; **б)** $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$; **в)** $1-p^3+3pq-3q$.

1.8. $y = 4x(x+1)$.

1.10. а) $\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\big/(\alpha-\beta)$; **б)** $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$; **в)** $n!$; **г)** $\Delta_n = (\alpha + 2014)\Delta_{n-1} = (\alpha+2014)^2\Delta_{n-2} = \ldots = (\alpha+2014)^{n-2}\Delta_2 = (\alpha+2014)^{n-1}$.

1.11. Прибавим к последнему столбцу определителя первый, умноженный на 10 000, второй, умноженный на 1000, третий, умноженный на 100, и четвертый, умноженный на 10. Тогда

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 & 53295 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 67507 \\ 8 & 8 & 8 & 2 & 88825 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 81719 \\ 3 & 9 & 0 & 8 & 39083 \end{vmatrix}.$$

Число 3553 является общим множителем элементов последнего столбца и его можно вынести за знак определителя, значит определитель делится на 3553.

1.12. Из первого равенства следует, что $4\mathrm{A}(\mathrm{A}-3\mathrm{E}) = -9\mathrm{E}$. Следовательно, $\det(4\mathrm{A}(\mathrm{A}-3\mathrm{E})) = 4^n \det\mathrm{A} \det(\mathrm{A}-3\mathrm{E}) = (-9)^n$, значит матрицы A и (A – 3E) – невырожденные. Аналогично, из второго равенства $3\mathrm{B}(3\mathrm{B}+2\mathrm{E}) = -\mathrm{E}$ и, значит, матрицы B и (3B + 2E) также невырожденные. Тогда невырожденной является и матрица $(\mathrm{A}-3\mathrm{E}) \times$

$\times\left(3B+2E\right)=3AB+2A-9B-6E=-A\left(6A^{-1}B^{-1}+9A^{-1}-2B^{-1}-3E\right)B,$

откуда следует невырожденность матрицы $6A^{-1}B^{-1}+9A^{-1}-2B^{-1}-3E$.

1.13. Разложим данный определитель Δ_n по первой строке:

$$\Delta_n=2\cdot\begin{vmatrix}2&1&0&...&0&0\\1&2&1&...&0&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&...&2&1\\0&0&0&...&1&x\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&1&0&...&0&0\\0&2&1&...&0&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&...&2&1\\0&0&0&...&1&x\end{vmatrix}=2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$$

(2-й определитель разложили по 1-му столбцу). Вычислим: $\Delta_1=6,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&6\end{vmatrix}=11,\quad \Delta_3=2\cdot 11-6=16.$ Докажем методом математической индукции, что $\Delta_n=5n+1$. Предположим, что $\Delta_k=5k+1,\ \Delta_{k-1}=5k-4.$ Тогда $\Delta_{k+1}=2\Delta_k-\Delta_{k-1}=2\left(5k+1\right)-\left(5k-4\right)=5k+6=5\left(k+1\right)+1.$ Таким образом $\Delta_n=5n+1,$ значит $5n+1=2011\ \Rightarrow n=402.$

2. Векторная алгебра

2.1. $\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\left(1-\alpha\right)\cdot\overrightarrow{OB}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}=\alpha\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$, где точка $M\in BA$.

2.2. Обозначим $\overrightarrow{AB}=\vec a,\ \overrightarrow{BC}=\vec b,\ \overrightarrow{CA}=\vec c,\ \ \vec a+\vec b+\vec c=0.$ Возведем в квадрат, получим $2\left(\vec a,\vec b\right)+2\left(\vec b,\vec c\right)+2\left(\vec c,\vec a\right)=-\left(\left|\vec a\right|^2+\left|\vec b\right|^2+\left|\vec c\right|^2\right)<0.$

2.3. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{s_1}=\left(a,b,c\right),\ \overrightarrow{s_2}=\left(b,c,a\right),\ \overrightarrow{s_3}=\left(c,a,b\right).$ Так как $ab+bc+ca=0,$ то $\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2},\ \overrightarrow{s_2}\perp\overrightarrow{s_3}$ и $\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_3}$. Тогда искомый определитель численно равен $\pm V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ и $\overrightarrow{s_3}$. В силу попарной ортогональности тройки векторов $\operatorname{mod}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = |\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2| \cdot |\vec{s}_3| = \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^3$.

2.4. $\sqrt{3(x+y+z)} = \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$. Пусть $\vec{a} = \left(\sqrt{x}, -\sqrt{y}, -\sqrt{z}\right)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$, тогда $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|$, значит $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\sqrt{x}/1 = -\sqrt{y}/1 = -\sqrt{z}/1$, что верно при $x = y = z = 0$.

2.5. $x = \sin^2\alpha/25$, $y = \cos^2\alpha/25$, $z = 1/25$.

2.6. $\arccos(9/10)$.

2.8. $\sqrt{1778}$.

2.9. $\alpha = 3$, $\vec{a} = (0; 1; -1)$.

2.10. $A = -6$.

2.11. 0.

2.12. $\overrightarrow{AC} = 5/8\overrightarrow{AM} + 7/8\overrightarrow{AK}$.

2.13. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} - 4/5\overrightarrow{AD} = (4;\ 9/5;\ 12/5)$.

2.14. Пусть $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. $\overrightarrow{SA_1} = 1/3\,\vec{a}$, $\overrightarrow{SB_1} = 1/4\,\vec{b}$, $\overrightarrow{SC_1} = 1/5\,\vec{c}$, $\overrightarrow{SD_1} = \alpha\vec{d}$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$. $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}/4 - \vec{a}/3$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{c}/5 - \vec{b}/4$, $\overrightarrow{C_1D_1} = \alpha\vec{d} - \vec{c}/5 = \alpha\left(\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}\right) - \vec{c}/5$. Так как $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ – компланарны, то $(1/60)(4\alpha - 1)\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$. В силу некомпланарности $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, $\alpha = 1/4$.

2.16. 2^{55}.

2.17. $h = -2$.

2.19. $-1{,}5$.

3. Аналитическая геометрия

3.1. Параметрические уравнения эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $\vec{\tau} = (-a\sin t;\ b\cos t)$ – вектор касательной, уравнение касательной $\dfrac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \dfrac{y - b\sin t}{b\cos t}$. При $y = 0$: $x = a\cos t + \dfrac{a\sin^2 t}{\cos t} = \dfrac{a}{\cos t}$, т. е. $Q\left(\dfrac{a}{\cos t};\ 0\right)$. Вектор нормали $\vec{n} = (b\cos t;\ a\sin t)$, уравнение нормали $\dfrac{x - a\cos t}{b\cos t} = \dfrac{y - b\sin t}{a\sin t}$. При $y = 0$: $x = a\cos t - \dfrac{b^2}{a}\cos t =$ $= \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos t$, т. е. $P\left(\dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos t;\ 0\right)$. Тогда $|OP| \cdot |OQ| = a^2 - b^2$.

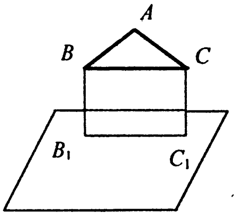
3.2. Точки $A(-4;\ -1;\ 2)$ и $B(2;\ 5;\ -16)$ – вершины ΔABC; середина стороны AC лежит на прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{3}$, а середина стороны BC – на плоскости $3x - 4y + z = -2$ Найти площадь ΔABC.

Пусть вершина C ΔABC имеет координаты $\left(x^0;\ y^0;\ z^0\right)$.

Тогда координаты середины стороны AC удовлетворяют системе $\dfrac{-4 + x^0}{2} = 2t$, $\dfrac{-1 + y^0}{2} = 0$, $\dfrac{2 + z^0}{2} = 1 + 3t$ (использовали параметрические уравнения прямой и формулу координат середины отрезка). Из данной системы имеем соотношения: $x^0 = 4t + 4$, $y^0 = 1$, $z^0 = 6t$ (*). Координаты середины стороны BC равны $\left(\dfrac{2 + x^0}{2};\ 3;\ \dfrac{-16 + z^0}{2}\right)$. Подставим эти координаты в уравнение плоскости, получим уравнение $\dfrac{3}{2}\left(x^0 + 2\right) - 12 + \dfrac{z^0}{2} - 8 = -2$, откуда $3x^0 + z^0 = 30$. Подставив соотношения (*) в последнее уравнение, получим значение $t = 1$.

Таким образом координаты точки $C(8;1;6)$. Тогда площадь ΔABC найдем по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = 90\sqrt{2}$.

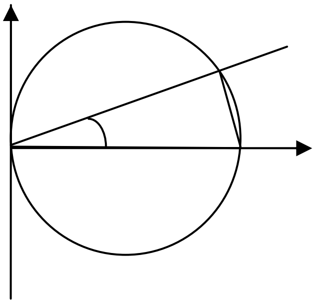
3.3. Длины сторон треугольника $AB = AC = 3\sqrt{2} < BC = 4\sqrt{3}$,



следовательно, плоскость треугольника перпендикулярна искомой плоскости и параллельна прямой BC. Тогда в качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор $\vec{AH} = (1;-1;-2)$, где точка $H(2;-2;0)$ – основание высоты AH треугольника.

И уравнение искомой плоскости имеет вид $1(x-1)-1(y-1)-$ $-2(z-1)=0$, $x-y-2z+2=0$.

3.4. Пусть $M(r,\varphi)$ – полярные координаты точки M, тогда



$r = |OB|+|BM| = |OB|+|AB| = 2\cos\varphi + 2\sin\varphi$. т. е. $r = 2(\cos\varphi+\sin\varphi)$ – уравнение кривой в полярных координатах, $r^2 = 2(r\cos\varphi +$ $+ r\sin\varphi)$. Переходя к декартовым координатам, получаем $x^2+y^2 = 2(x+y)$ или $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$.

Ответ: 3/4 части окружности с центром в точке (1, 1) радиуса $\sqrt{2}$ между точками O и A.

3.5. Точка $O(x, y, z)$ – центр вписанного в тетраэдр шара, равноудалена от каждой из координатных плоскостей и плоскости $3x-4y+12z-96=0$. Значит, $|x|=|y|=|z|=\frac{|3x-4y+12z-96|}{\sqrt{9+16+144}}$.

Так как оординаты точки O, очевидно, удовлетворяют условиям $x\ge 0$, $y\le 0$, $z\ge 0$, $3x-4y+12z-96\le 0$, получим систему

$\begin{cases} -3x+4y-12z+96=x, \\ -3x+4y-12z+96=-y, \\ -3x+4y-12z+96=z \end{cases}$ решением которой является тройка $x=3,\ y=-3,\ z=3.$ Радиус шара равен $|x|=3.$ $O(3;\,-3;\,3),\ R=3.$

3.6. $ab.$

3.8. $9x+11y+5=0.$

3.10. $x-y+2=0,\ x-7y+32=0.$

3.11. $y=9x/7,\ y=-7x/9,\ 9x-7y-20=0,\ 7x+9y-110=0.$

3.12. $x+4y-4=0.$

3.13. $\sqrt{10}.$

3.14. $(x+2)^2+(y-15)^2=125.$

3.15. а) $-5\le a<-1;$ **б)** $a=-4,\ M(0;\,-1).$

3.16. а) $3\pi/2+1;$ **б)** $3\pi/2+1.$

3.17. $(x/13)^2+(y/5)^2=1.$

3.18. $x^2+(y/2)^2=1.$

3.19. Множество точек плоскости $kOb,$ удовлетворяющих условиям: $\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{k^2}{1}\ge 1,\ kb+1<0.$

3.20. $9-4\sqrt{5}.$

3.21. $M_0(-2;\,4),\ d=0,2.$

3.22. $x^2/17+y^2/8=1.$

3.23. $M_0(1/3;\,-2/3;\,1/3),\ d=1.$

3.24. а) $\pi/3;$ **б)** $1/\sqrt{3};$ **в)** $x=-(y-1/3)=z-1/3.$

3.25. а) ни при каких $\lambda;$ **б)** $\lambda=-0,4.$

3.26. а) $C(0;\,0;\,0)$ или $C(6;\,6;\,6);$ **б)** $C(0;\,0;\,0)$ или $C(6;\,0;\,0).$

3.27. $y=\pm 2\sqrt{2}x.$

3.28. Найдем асимптоты гиперболы. Выразим y из уравнения $2x^2 - xy + y - x + 5 = 0$: $y = \dfrac{2x^2 - x + 5}{x-1}$; $y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x-1}$.

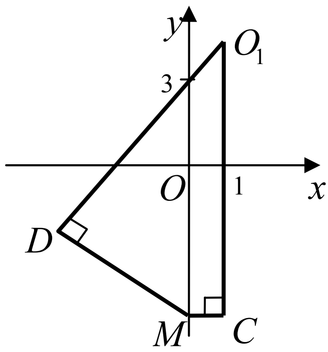
Значит, прямые $y = 2x + 1$ и $x = 1$ − асимптоты гиперболы. Они пересекаются в точке $O_1(1;\,3)$.

Координаты точки касания гиперболы и заданной прямой $4x + y + 5 = 0$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x-1}; \\ 4x + y + 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -5.$$

Значит, $M(0;\,-5)$ – точка касания гиперболы и заданной прямой $4x + y + 5 = 0$.

На рисунке прямые O_1D и O_1C − асимптоты гиперболы; MD и MC − перпендикуляры, опущенные из $M(0;\,-5)$ – точки касания гиперболы и прямой $4x + y + 5 = 0$.



$P = |O_1D| + |MD| + |MC| + |O_1C|$ − периметр четырехугольника O_1DMC. Определим координаты точки D, образованной в результате пересечения прямых O_1D $(y = 2x + 1)$ и MD.

Уравнение прямой MD перпендикулярной прямой $O_1D(2x - y + 1 = 0)$ имеет вид $x = -2y - 10$. Из системы уравнений $\begin{cases} y = 2x + 1; \\ x = -2y - 10, \end{cases}$ $x = -\dfrac{12}{5}$, $y = -\dfrac{19}{5} \Rightarrow D\left(-\dfrac{12}{5};\,-\dfrac{19}{5}\right)$. $|O_1D| = \dfrac{17\sqrt{5}}{5}$, $|MD| = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, $|MC| = 1$, $|O_1C| = 8$. Тогда периметр четырехугольника O_1DMC будет равен $P = \dfrac{23\sqrt{5} + 45}{5}$.

3.29. Полуоси эллипса: $a=\sqrt{5}/2$, $b=\sqrt{5}$. Парабола будет симметрична относительно оси *Oy*, ветви направлены вверх, ее уравнение $y+c=ax^2$, где $a>0$, $c>0$. В точках *A* и *B* эллипс и парабола имеют общие касательные. Рассмотрим точку *B*. Из уравнения параболы $y'=2ax\big|_{x=1}=2a$. Продифференцируем уравнение эллипса $8x+2yy'=0$, откуда $y'=-\dfrac{4x}{y}\Big|_{(1;-1)}=4$. Таким образом $2a=4 \Rightarrow a=2$. Тогда уравнение параболы имеет вид $y=-c+2x^2$. Подставим сюда координаты точки *B*, получим $c=3$. Искомое уравнение $y=2x^2-3$.

4. Пределы. Непрерывность функции

4.1. Условие данной задачи эквивалентно следующему:
$\operatorname{ctg}x=\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+o(x^5)$, $\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+o(x^5)$, или $\cos x\left(x+Bx^3\right)=$ $=\sin x\left(1+Ax^2\right)+o(x^7)$. Откуда $\left(x+Bx^3\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^6)\right)=$ $=\left(1+Ax^2\right)\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^7)\right)+o(x^7)$, $x-\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^5}{4!}+o(x^7)+Bx^3-$ $-B\dfrac{x^4}{2}=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^7)+Ax^3-A\dfrac{x^5}{6}+o(x^7)$, $x^3:-\dfrac{1}{2}+B=A-\dfrac{1}{6}$; $x^5:\dfrac{1}{24}-\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{120}-\dfrac{A}{6}$; $A=-\dfrac{2}{5}$, $B=-\dfrac{1}{15}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(e^{-x}+\cos x-1\right)-\ln\left(e^{-x}-\cos x+1\right)\right)x^{\alpha}=$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{e^{-x}+\cos x-1}{e^{-x}-\cos x+1}\right)x^{\alpha}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{2(\cos x-1)}{e^{-x}-\cos x+1}\right)x^{\alpha}=$$

$$=\left|\frac{2(\cos x-1)}{e^{-x}-\cos x+1}\underset{x\to0}{\to}0\right|=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)}{e^{-x}-\cos x+1}x^{\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin^2\frac{x}{2}}{e^{-x}-\cos x+1}x^{\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-4\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)x^{\alpha}=-1 \text{ при условии, что } \alpha=-2.$$

4.3. $y=1,|x|<1;\ \sqrt{|x|},1<|x|<2;\ \frac{|x|}{\sqrt{2}},|x|>2.$

4.4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin^2\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=n^2\sin^2\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-\pi\right)=$

$=n^2\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\frac{\pi^2}{4};$ **б)** 0; **в)** 1;

г) $a_n=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1;$ **д)** $\frac{2}{\pi}.$

4.5. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-\sin x)}{\ln(x-\cos x)}=\frac{\ln x+\ln(1-\sin x/x)}{\ln x+\ln(1-\cos x/x)}=1;$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=0;$

в) 0; **г)** 0; **д)** 0; **е)** 1; **ж)** e^2; **з)** 0; **и)** 1;

к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left((1+x)(1+2x)^{1/2}(1+3x)^{1/3}\ldots(1+2011x)^{1/2011}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left((1+x)(1+x+o(x))(1+x+o(x))\ldots(1+x+o(x))-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1+2011x+o(x)-1\right)=2011.$

4.6. n = 6 (использовать правило Лопиталя).

4.7. а) $a=1,\ b=e$ или $a=-1,\ b=-e;$ **б)** $a=0,\ b=\pm2.$

4.8. а) $x = 4016$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^x\left(\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^x-1\right)}{(n+1)^{x-1}+(n+2)^{x-1}}=\left|\begin{array}{l}(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right|=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x(n-1)^{x-1}}{(n+1)^{x-1}+(n+2)^{x-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{x-1}+\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^{x-1}}=\frac{x}{2}=2008;$$

б) $x=\dfrac{2009}{2010}$; предел равен 0 при $x=-1$ и ∞ при $x\in(-\infty;\,-1)\cup[1;\,+\infty)$, значит $|x|<1$. Таким образом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)...\left(1+x^{2n}\right)}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{4n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}=2010.$$

4.9. а) $f(x)=\cos 2\pi x,\ |x|>1;\ f(x)=x^2,\ |x|\le 1;$ **б)** $f(x)=-1,$ $x\in[-\pi/2;\,-\pi/3)(\pi/3;\,\pi/2];\ f(x)=1,\ |x|<\pi/3;\ f(\pm\pi/3)=0;$ **в)** $f(x)=-\ln x,\ 0<x<1;\ f(x)=1,\ x\ge 1;$ **г)** $f(x)=\sin\pi x,\ x\ge 0;$ $f(x)=1/x,\ x<0;$ **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{n}}-1\right)\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}}\right)^{-2n\sin^2\frac{x}{2\sqrt{n}}}=e^{-\frac{x^2}{2}},\text{ т. е. } f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4.10. Данная функция непрерывна на отрезке $[-2;\,2]$, $f(-2)=1$, $f(2)=5$, так как $1<2\dfrac{1}{3}<5$, то внутри отрезка существует хотя бы одна точка x такая, что $f(x)=7/3$.

5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Применение производной

5.1. При всех $x>0$ $f(x)$ определена и $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+$ $+\frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.$ Таким образом $f(x)=c.$ Найдем c, взяв, к примеру, $x=1$: $f(1)=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}1=\pi/2.$

5.2. Рассмотрим функцию $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}+x^2/2-1.$ $f'(x)=$ $=x\left(1-e^{-x}\right)\ge 0$ при всех $x\in R.$ Таким образом $f(x)$ возрастает на R, и уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня. $x=0$ является корнем уравнения (находим подбором).

5.3. Из исходного равенства при $x = 1$ имеем $f(1)=3.$ Дифференцируя равенство, при $x = 1$ имеем $f'(1)=2$ (легко получить, что $f'(x)=-f'(-x)$). Уравнение касательной $y=2x+1.$

5.4. **а)** Рассмотрим функцию $f(x)=\cos^2 x\sin x=\sin x-\sin^3 x,$ $f'(x)=\cos x-3\sin^2 x\cos x.$ Критические точки: $x=\pm\pi/2,$ $x=\pm\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right),$ $x=\pi-\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right),$ $x=\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)-\pi.$ Тогда $\min\limits_{x\in[-\pi;\pi]} f(x)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}>-\frac{2}{3}=-0,(6);$ **б)** $f(x)=x-\ln(1+x),$ $f'(x)=\frac{x}{x+1},$ $f'(x)>0$ при всех $x>0.$ Таким образом функция $f(x)$ возрастает на $(0;\ +\infty)$ и $f(x)>f(0)=0.$

5.5. $y = x +6269/162$ (касательная параллельна прямой $y = x$).

5.6. **а)** $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$; **б)** $f(a)-f'(a).$

5.7. $S=2a^2.$

5.8. 2012! (логарифмическое дифференцирование).

5.9. $y' = x^{x^b+b-1}\left(b\ln x+1\right)+x^{b^x}b^x\left(\ln b\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+b^{x^x}x^x\ln b\left(\ln x+1\right).$

5.10. $f'\left(\dfrac{x}{x+2}\right)\dfrac{2}{\left(x+2\right)^2}=1,\quad f'\left(\dfrac{x}{x+2}\right)=\dfrac{\left(x+2\right)^2}{2},$ при $x=2$: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(2+2\right)^2}{2}=8.$

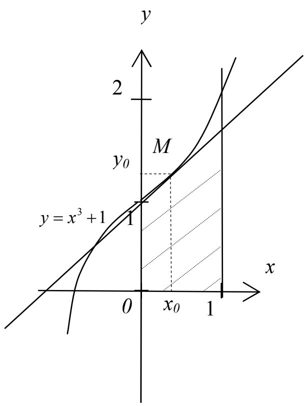
5.11. а) $y^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n+1}\dfrac{\left(n-1\right)!}{x^n}$; **б)** $y^{(n)}\left(x\right)=2^x\left(\ln 2\right)^n$;

в) $y^{(n)}\left(x\right)=e^{3x}3^{n-1}\left(n+3x\right)$; **г)** по условию $y\left(x\right)\left(x^2-3x+5\right)=2x+1$. Дифференцируем тождество n раз. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим $y^{(n)}\left(x\right)\left(x^2-3x+5\right)+ny^{(n-1)}\left(x\right)\left(2x-3\right)+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}\times$ $\times\, y^{(n-2)}\left(x\right)2=0$. Значит, $y^{(n)}\left(x\right)=-\dfrac{y^{(n-1)}\left(x\right)\left(2x-3\right)+n\left(n-1\right)y^{(n-2)}\left(x\right)}{x^2-3x+5}$.

5.12. Рассмотрим функцию $f(x)=4\operatorname{tg}x+\sin x-3x$. Так как $f'(x)=\dfrac{4}{\cos^2 x}+\cos x-3=\dfrac{4}{t^2}+t-3=\dfrac{t^3-3t^2+4}{t^2}=\dfrac{(t-2)^2(t+1)}{t^2}$, где $t=\cos x\in(0;1)$ при $x\in(0;\pi/2)$, то $f'(x)>0$ при $x\in(0;\pi/2)$. Так как $f(0)=0$, то $f(x)>0$ при $x\in(0;\pi/2)$.

5.13. Пусть $M\left(x_0,\, y_0\right)$ – точка касания. Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=x^3+1$ в точке $M\left(x_0,y_0\right)$, имеет вид $y-\left(x_0^3+1\right)=3x_0^2\left(x-x_0\right)$.

Основания полученной трапеции равны: $a=y\left(0\right)=-2x_0^3+1$, $b=y\left(1\right)=1+3x_0^2-2x_0^3$. Тогда площадь трапеции равна $S=\dfrac{a+b}{2}h=$ $=\dfrac{-4x_0^3+3x_0^2+2}{2}$. $S'=-6x_0^2+3x_0$, критические точки функции S:



$x_0 = 0$ и $x_0 = \frac{1}{2}$. Таким образом $x_0 = \frac{1}{2}$ – точка максимума функции S, а площадь трапеции равна $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + 2}{2} = \frac{9}{8}$.

5.14. Пусть $(x_0, 0)$ – точка пересечения кривой с осью Ox. Тогда $\frac{ax_0^2 + bx_0 + c}{2ax_0 + b} = 0$ и $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Поэтому $y'(x_0) = \frac{(2ax_0 + b)^2 - 2a(ax_0^2 + bx_0 + c)}{(2ax_0 + b)^2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

5.16. а) $f(0) = -2$, $f'(0) = -6$; **б)** $f(0) = 2$, $f'(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

5.17. $O(0;\, 0)$, $d = 1/\sqrt{5}$ (кратчайшее расстояние равно расстоянию между данной прямой и параллельной ей касательной к кривой).

5.18. а) Ближайшей к прямой $x + y = 5$ будет касательная $x + y = 2$ к эллипсу, $d = 3\sqrt{2}/2$; **б)** задача сводится к минимизации квадрата расстояния от точки $O(0;\, 0)$ до точки $M(x;\, \ln x - 1)$ кривой $d(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$, $d'(x) = 2\left(x + \frac{\ln x - 1}{x}\right) = 0$, что верно только при $x = 1$. $d''(1) > 0$, значит $x = 1$ – точка $\min$. $d_{\min} = d(1) = 2$. Таким образом, кратчайшее расстояние равно $\sqrt{2} - 1$.

5.19. При $a = 0$ – точка min, при $a = 1$ – max.

5.20. Находим вторую производную. Получаем уравнение $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Точки перегиба: $\left(-2 - \sqrt{3};\, -\frac{\sqrt{3} - 1}{4}\right)$, $\left(-2 + \sqrt{3};\, \frac{\sqrt{3} + 1}{4}\right)$, $(1;\, 1)$. Проверяется, что они лежат на одной прямой.

5.21. $\pi/6$.

5.22. $45/(4+\pi)$ м.

5.23. $H=2R.$

5.24. Гонец должен пристать к берегу в 3 км от лагеря.

6. Функции нескольких переменных

6.1. $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – искомая точка. Тогда $F_x'(x_0, y_0, z_0)=\frac{x_0}{2}$, $F_y'(x_0, y_0, z_0)=\frac{y_0}{2}$, $F_z'(x_0, y_0, z_0)=2z_0$, где $F(x, y, z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2-1$. Тогда уравнение нормали к поверхности в этой точке имеет вид: $\frac{x-x_0}{x_0/2}=\frac{y-y_0}{y_0/2}=\frac{z-z_0}{2z_0}$, а направляющий вектор нормали $\vec{s}=(x_0, y_0, 4z_0)$. Так как по условию задачи $cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$, то $x_0=y_0=4z_0$. Точка M_0 принадлежит поверхности, значит $\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{4}+z_0{}^2=1$ и с учетом равенства $x_0=y_0=4z_0$: $9z_0^2=1$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow z_0=\pm\frac{1}{3}$, $x_0=\pm\frac{4}{3}$, $y_0=\pm\frac{4}{3}$.

6.2. Пусть $u=x^y+y^x$, тогда $u=e^{y\ln x}+e^{x\ln y}$. Воспользуемся тем, что $e^x>1+x$, при $x\neq 0$.

Значит $u>1+y\ln x+1+x\ln y$. Найдем $\min f(x, y)$, где $f(x, y)=$ $=1+y\ln x+1+x\ln y$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x}+\ln y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{y}+\ln x. \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\ln y=0, \\ \dfrac{x}{y}+\ln x=0. \end{cases}$

Заметим, что уравнения симметричны относительно переменных x, y, поэтому будет одно решение. Легко убедиться, что решением уравнения $\dfrac{x}{y}+\ln x=0$ будет $x=y=e^{-1}$.

Значит $\min f(x,y)=2+2e^{-1}\ln e^{-1}\approx 1,26>1$.

6.3. а) Используя 1-е условие, получим $U(x,\ y)=-2y^2+\dfrac{xy^3}{3}+$ $+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – неизвестная функция. Подставим в полученную функцию переменную y вместо переменной x, получим $U(y,\ y)=-2y^2+\dfrac{y^4}{3}+\varphi(y)=\dfrac{y^4}{3}-y^2$ (из 2-го условия задачи). Тогда $\varphi(y)=2y^2-y^2=y^2$ и искомая функция равна $U(x,\ y)=-2y^2+$ $+\dfrac{xy^3}{3}+x^2$; **б)** $U(x,\ y)=-\cos(x+2y)+x^2y+\cos\dfrac{5x}{2}$;
в) $U(x,\ y)= \ =y\ +\sin y-\sin(x+y)$.

6.4. Ближайшей к плоскости точкой поверхности будет та касательная плоскость, которая параллельна данной плоскости, т. е. вектор нормали $\vec{n}=(2x;\ 2y;\ -4)\,||\,(2;\ -1;\ 2)$, откуда $x=-2$, $y=1$, $z=5/4$. Искомое расстояние $d=1/6$.

6.5. 4,5.

6.6. $x+2z-1=0$ или $x-2z-1=0$. Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – точка касания, тогда $n=(2x_0/3;\ 2y_0;\ -2z_0)\,||\,\overrightarrow{AB}=(0;\ 1;\ 0)$, откуда $y_0=0$, $3z_0^2=x_0^2+3$ (*). Уравнение искомой плоскости: $(2x_0/3)(x-x_0)-2z_0(z-z_0)=0$. Так как точки A и B лежат в плоскости, то $x_0-x_0^2+3z_0^2=0$, и с учетом (*) получим: $x_0=-3$, $z_0=\pm 2$.

6.7. $z_{\min}\left(3;\,3\right)=0.$

6.8. Раскрывая определитель, получим равенство:
$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=1.$

Используя определения полного дифференциала, получим $\varphi\mathrm{d}u-y\mathrm{d}x=\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\left(\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\right)\mathrm{d}x+\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$ Данное выражение является полным дифференциалом при условии, что $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y}\right).$ Находя частные производные, получим: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\varphi\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-1=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\varphi\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$ что и требовалось доказать.

6.9. $z_{\min}=z\left(0;\,y_n\right)=-1,$ где $y_n=-\pi/2+2\pi n,\ n\in Z.$

6.10. Кратчайшим является отрезок нормали к поверхности, проходящей через заданную точку. Так как нормаль к поверхности $\dfrac{x-x_0}{2x_0}=\dfrac{y-y_0}{4y_0}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ проходит через точку $M\left(1;\,0;\,2\right),$ то $\dfrac{1-x_0}{2x_0}=-\dfrac{y_0}{4y_0}=\dfrac{2-z_0}{-1}.$ Если $y_0\neq 0,$ то получим, что $x_0=2,$ $z_0=7/4,$ тогда $2y_0^2=z_0-x_0^2=7/4-4<0.$ Таким образом $y_0=0,$ тогда $2x_0^3-3x_0-1=0,$ корни которого: $x_1=-1,\ x_2=\left(1+\sqrt{3}\right)/2,$ $x_3=\left(1-\sqrt{3}\right)/2.$ Получили три точки: $M_1\left(-1;\,0;\,1\right),\ M_2\left(x_2;\,0;\,x_2^2\right),$ $M_3\left(x_3;\,0;\,x_3^2\right).$ Проверкой убеждаемся, что $\delta_{\min}=\left|MM_2\right|=\sqrt{11-6\sqrt{3}}/3.$

7. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его приложения

7.1. **а)** Вычислим $\int e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = e^{x+\frac{1}{x}}, & \mathrm{d}u = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, & v = x \end{matrix} \right| =$

$= xe - \int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)e\,\mathrm{d}x.$ Тогда $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = xe^{x+\frac{1}{x}} + C;$

б) $\dfrac{1}{n}\left(x^n - \ln\left|x^n+1\right|\right)+C$ (замена $x^n = t$);

в) $\dfrac{1}{4(x-3)^4}+\dfrac{6}{5(x-3)^5}+\dfrac{3}{2(x-3)^6}+C;$ **г)** $\dfrac{3\sqrt[3]{\left(x^4-1\right)^4}}{16}+C;$

д) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\left(x^2-10\right)^{502}}{502}+\dfrac{10\left(x^2-10\right)^{501}}{501}\right)+C;$

е) $\dfrac{1}{7}\ln\left|\dfrac{x^7}{x^7+1}\right|+C$ (замена $x^7+1=t$);

ж) $\mathrm{arctg}x+\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3+C$ $\left(\dfrac{1+x^4}{1+x^6}=\dfrac{\left(1-x^2+x^4\right)+x^2}{1+x^6}\right);$

з) $-\dfrac{\ln(\ln x)+1}{\ln x}+C$ (замена $\ln x = t,$ интегрирование по частям).

7.2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^2+\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2}{n}=\int\limits_0^1(a+x)^2\,\mathrm{d}x = a^2+a+\dfrac{1}{3};$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\sin\dfrac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\pi\right)=\int\limits_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 2;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\right.$

$\left.+\ldots+\frac{1}{1+(n-1)/n}\right)=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln 2;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right)=$

$=\int\limits_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$ при $k>-1;$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{4}{n^2}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{6}{n^2}e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{2n}{n^2}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{4}{n}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{6}{n}e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{2n}{n}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)=\int\limits_0^1 2xe^{x^2}=e^2-1;$

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1+\frac{8\cdot 2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{8n}{n}}\right)^2=$

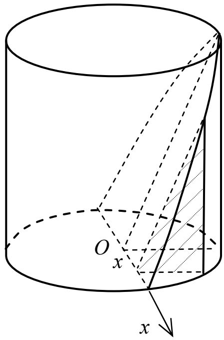
$=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin^2\frac{\pi}{n}\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1+\frac{8\cdot 2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{8n}{n}}\right)^2=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1+\frac{8\cdot 2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{8n}{n}}\right)^2=$

$=2\pi^2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{8\cdot 2}{n}}+\ldots+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{8n}{n}}\right)^2=$

$=2\pi^2\left(\int\limits_0^1\sqrt{1+8x}dx\right)^2=2\pi^2\left(\frac{(1+8x)^{\frac{3}{2}}}{12}\Big|_0^1\right)^2=\frac{2\pi^2}{144}(27-1)^2=\frac{169\pi^2}{18}.$

7.3. Пусть радиус основания стакана равен R, высота – H.



Сечения получившегося тела (цилиндрического клина) плоскостями, перпендикулярными диаметру дна, являются подобными друг другу треугольниками. Его объем получается интегрированием площадей этих сечений:

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{H\sqrt{R^2-x^2}}{R}=\frac{H\left(R^2-x^2\right)}{2R}.$$

Тогда искомый объем равен $V=\frac{H}{2R}\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}HR^2$, что составляет $\frac{2}{3\pi}$ объема всего стакана.

7.4. Для первого слагаемого $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^{2n}x\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)(\mathrm{ctg}x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x=$

$$=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}x)^{2n-2}\,\mathrm{d}(\mathrm{ctg}x)-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x==-\left.\frac{(\mathrm{ctg}x)^{2n-1}}{2n-1}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-...-...+(-1)^{n+1}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^2x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-...+(-1)^{n+1}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Аналогично для второго слагаемого имеем

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n+2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}-...+(-1)^n\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Сумма двух интегралов равна

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{ctg}x)^{2n}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x)^{2n+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \ldots + (-1)^{n+1}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} - \ldots + (-1)^{n}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

При $n = 2016$ получим $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{ctg}x)^{4032}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x)^{4034}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4033}.$

7.5. а) $\pi - 1 - \ln 2$; **б)** $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$; **в)** $\frac{\pi}{2} - 1$, интегрирование по частям, $u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$; **г)** $\frac{7\pi^3}{1296}\left(\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$; **д)** $1 - \frac{3}{4}\ln 3$,

$I = \int\limits_{-1/2}^{1/2} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1/2}^{1/2} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x,$ так как под вторым интегралом – нечетная функция, затем интегрирование по частям; **е)** $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

7.6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2x^2}\mathrm{d}x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}\int\limits_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x}{e^{2x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0;$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x \mathrm{arctg}^3 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x \mathrm{arctg}^3 t\,\mathrm{d}t\right)'_x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'_x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{arctg}^3 x\right)\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{arctg}^3 x\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi^3}{8}.$$

7.7. В 1-м интеграле выполним замену $y=\sqrt{\ln x}$, тогда

$$\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx+\int_0^1 e^{x^2}\,dx=\int_0^1 2y^2e^{y^2}\,dy+\int_0^1 e^{x^2}\,dx \overset{\substack{\text{интегр.}\\ \text{по частям}}}{=} ye^{y^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{y^2}\,dy+\int_0^1 e^{x^2}\,dx=e.$$

7.8. $\int\limits_0^{\infty} 4\pi\gamma_0\left(r+h\right)^2 e^{-kh}\mathrm{d}h=4\pi\gamma_0\left(\frac{r^2}{k}+\frac{2r}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$

7.9. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+2007x^{2007}}=\left[\begin{array}{l} x=1/t;\ \mathrm{d}x=-1/t \\ x=1;\ t=1 \\ x\to+\infty;\ t\to 0\end{array}\right]=\lim\limits_{A\to 0}\int\limits_1^{A}\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}+2007\frac{1}{t^{2007}}}=$

$$=\int_0^1\frac{t^{2005}\mathrm{d}t}{t^{2006}+2007}=\frac{1}{2006}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(t^{2006}+2007\right)}{t^{2006}+2007}=\frac{1}{2006}\ln\left|t^{2006}+2007\Big|_0^1\right|=$$

$$=\frac{1}{2006}\left(\ln 208-\ln 2007\right)=\frac{1}{2006}\ln\frac{2008}{2007}.$$

7.10. а) 2; **б)** $\ln 4$.

7.11. а) $33\pi/2$; **б)** 2; **в)** 1; **г)** $\pi/4+1/2$; **д)** 4π.

7.13. $f\left(a\right)\le\frac{1}{b-a}\int\limits_a^a f\left(t\right)\mathrm{d}t=0.$ Так как $f\left(x\right)$ непрерывна на $\left[a;b\right]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений. В силу условия $f\left(x\right)\ge 0$ на $\left[a;b\right]$, то в точке $x=a$ она достигает наименьшего значения, т. е. $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f\left(x\right)=0$. Пусть в точке $x_0\in\left[a;b\right]$ функция $f\left(x\right)$ достигает наибольшего значения и $f\left(x_0\right)>f\left(a\right)=0$. Из геометрического смысла определенного интеграла: $f\left(x_0\right)\left(b-a\right)\ge f\left(x_0\right)\left(x_0-a\right)>\int\limits_a^{x_0} f\left(t\right)\mathrm{d}t$. Пришли к противоречию с условием $f\left(x\right)\le\frac{1}{b-a}\int\limits_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ для любого $x\in\left[a;b\right]$. А, значит, наибольшее значение функции $f\left(x\right)$ совпадает с ее наименьшим значением и $f\left(x\right)\equiv 0$ на $\left[a;b\right]$.

7.14. Рассмотрим функцию $Z(A,\, B)=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-(Ax+B)\right)^2\mathrm{d}x=$

$=\int\limits_0^1\left(x-2Ax^{3/2}-2Bx^{1/2}+A^2x^2+2ABx+B^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+$

$+AB+B^2.$ Найдем наименьшее значение функции

$$Z=\frac{1}{2}-\frac{4A}{5}-\frac{4B}{3}+\frac{A^2}{3}+AB+B^2.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial A}=\frac{2}{3}A+B-\frac{4}{5},\quad \frac{\partial Z}{\partial B}=2B+A-\frac{4}{3}.$$

Критическая точка: $A=\frac{4}{5},\ B=\frac{4}{15}.$ $\frac{\partial^2 Z}{\partial A^2}=\frac{2}{3},$ $\frac{\partial^2 Z}{\partial A\partial B}=1,$ $\frac{\partial^2 Z}{\partial B^2}=2.$

Так как $\frac{\partial^2 Z}{\partial A^2}>0,$ а $\Delta=2\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}>0,$ то $\left(\frac{4}{5};\frac{4}{15}\right)$ – точка локального минимума функции Z. Значит $g(x)=\frac{4}{5}x+\frac{4}{15}.$

7.15. Прологарифмировать левую часть равенства.

Учебное издание

ФЕДОРАКО Елена Ивановна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Пособие для студентов специальностей
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»,
1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»,
1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций»

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 26.06.2018. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,73. Уч.-изд. л. 2,14. Тираж 100. Заказ 268.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.