МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Практикум для специальности 1-40 01 01
«Программное обеспечение информационных технологий»

В 4 частях

Часть 4

Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области информатики и радиоэлектроники

Минск
БНТУ
2018

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.1я7
М 34

С о с т а в и т е л и:
А. В. Метельский, Е. А. Федосик, Н. И. Чепелев, Т. И. Чепелева

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра физико-математических дисциплин ИИТ БГУИР,
(зав. кафедрой – доктор педагогических наук, кандидат
физико-математических наук, профессор *Л. И. Майсеня*)
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Цегельник*

М34 **Математика** : практикум для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» : в 4 ч. Ч. 4 / сост. А. В. Метельский [и др.]. – Минск: БНТУ, 2018. – 156 с.
ISBN 978-985-550-858-9 (Ч. 4).

Настоящий практикум по теории вероятностей и математической статистике предназначен для студентов второго курса инженерно-технических специальностей. В нем приведены краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, задачи для аудиторной и самостоятельной работы, имеются два типовых расчета: по теории вероятностей и математической статистике.

Практикум также будет полезен для преподавателей, проводящих практические занятия по теории вероятностей и математической статистике.

Издается с 2014 г. Часть 3 вышла в 2015 г.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-858-9 (Ч. 4)
ISBN 978-985-550-341-6

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Занятие 1. Элементы комбинаторики

Краткие теоретические сведения

Пусть дано множество M, состоящее из n элементов:

$$M = \{x_1, x_2, ... x_n\}.$$

Перестановками на множестве из n элементов называются всякие упорядоченные множества, состоящие из этих n элементов. Количество всех перестановок на множестве из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле

$$P_n = n!$$

Таким образом, перестановки одинаковы по составу элементов, но различаются порядком их перечисления.

Размещениями на множестве из n элементов по m элементов называются всякие упорядоченные подмножества, состоящие из m элементов. Два различных размещения отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений на множестве из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются подмножества, состоящие из m элементов, каждый из которых встречается один раз. Два различных сочетания отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний на множестве из n элементов по m элементов обозначается C_n^m и определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot m}.$$

Если среди n элементов одного вида есть n_1, второго вида – n_2 и т. д., то, поменяв местами элементы одного вида, получим ту же перестановку. Поэтому число перестановок $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ с повторениями определяется формулой

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}, \tag{1.1}$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Число размещений $\hat{A}_n^m$ на множестве из n элементов по m элементов с повторениями определяется формулой

$$\hat{A}_n^m = n^m.$$

Задача 1. Имеется множество, состоящее из пяти цифр, $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из этих цифр?

Решение. Так как пятизначные числа отличаются только порядком следования цифр в числе, то количество различных пятизначных чисел будет равно количеству перестановок на множестве из пяти элементов:

$$n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Задача 2. Студентам нужно сдать пять экзаменов за 20 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

Решение. Расписание определяется датами (пять дат) проведения экзаменов и последовательностью дисциплин, по которым они проводятся. Поэтому число различных вариантов расписаний экзаменов будет равно количеству размещений на множестве из 20 элементов по пять элементов:

$$n = A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480.$$

Задача 3. Из команды, состоящей из 10 человек, выбирают 4 кандидата для эстафеты 4×100 м. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Число различных комбинаций из 10 членов команды для участия в эстафете четырех кандидатов будет равно количеству сочетаний на множестве из 10 элементов по 4 элемента:

$$n = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210.$$

Задача 4. Имеется слово КОЛОКОЛ. Сколько различных слов можно составить из букв этого слова?

Решение. В слово буквы входят с повторениями. Поэтому количество различных перестановок определяется по формуле (1.1):

$$n = \frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!} = 210.$$

Аудиторные задания

1.1. В карточке лотереи спортлото пять игроков из 35 должно зачеркнуть пять чисел. Сколькими способами можно это сделать?

1.2. Имеется множество цифр: 1; 2; 2; 3; 3; 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из этих цифр?

1.3. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Сколько нужно всего сыграть игр, если каждая команда встретится с остальными командами дважды?

1.4. Сколькими способами можно заполнить три одинаковые вакантные должности из 10 кандидатов на эти должности?

1.5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны случайным образом берется пять шаров. Сколько будет различных комбинаций, состоящих из 3 белых и 2 черных шаров.

1.6. На железнодорожной станции имеется 10 путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 состава?

1.7. Сколько существует способов выполнения 8 деловых звонков руководителем фирмы?

1.8. Из 10 мужчин и 8 женщин выбирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 3 мужчины и 3 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

1.9. Сколько можно составить сигналов из шести флажков различного цвета, взятых по 2 флажка?

1.10. Номер автомобиля состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

1.11. В урне 6 белых, 6 черных и 4 синих шара. Сколько различных комбинаций, состоящих из одного белого, двух черных и трех синих шаров, можно составить?

1.12. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

1.13. Сколькими способами можно расставить десять различных книг на полке, чтобы четыре книги стояли рядом?

1.14. Руководство фирмы выбирает из восьми кандидатов три человека на различные должности (все восемь кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

Домашние задания

1.15. Сколькими способами можно расположить на полке в ряд 6 различных книг?

1.16. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 15 языков?

1.17. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «КАЗАК»?

1.18. Найти число способов, которыми можно выбрать делегацию из 15 человек из группы в 20 человек?

1.19. На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1.20. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 10 женщин, выбирает делегацию из четырех человек. Сколькими способами можно выбрать эту делегацию, чтобы в нее входили две женщины и двое мужчин?

1.21. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 5, 7, 9.

1.22. Сколько различных паролей, содержащих две различные цифры и две буквы, можно составить из 5 букв и 10 цифр.

1.23. В мешке 25 шаров: 4 красных, 6 синих, 7 зеленых и 8 желтых. Сколькими способами можно достать четыре шара так, чтобы среди них хотя бы три были одинаковыми.

Ответы: 1.1. 324632; **1.2.** 60; **1.3.** 30; **1.4.** 120; **1.5.** 120; **1.6.** 720; **1.7.** 40320; **1.8.** 6720; **1.9.** 30; **1.10.** 9000000; **1.11.** 360; **1.12.** 11880; **1.13.** 120960; **1.14.** 336; **1.15.** 720; **1.16.** 210; **1.17.** 30; **1.18.** 15504; **1.19.** 120; **1.20.** 4725; **1.21.** 120; **1.22.** 1800; **1.23.** 2167.

Занятие 2. Определения вероятности

Краткие теоретические сведения

Пусть проводится случайный эксперимент. Элементарным событием или исходом в случайном эксперименте называется всякая конкретная реализация этого эксперимента. Множество всех исходов эксперимента образует пространство элементарных исходов Ω. *Случайным событием* A называется всякое подмножество пространства элементарных исходов.

Исход называется *благоприятствующим событию* A, если его появление влечет появление события A.

Пусть случайный эксперимент имеет n равновозможных элементарных исходов.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью* события A называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Статистическое определение вероятности. *Относительной частотой события* A называется отношение числа M испытаний, в которых наступило событие A, к общему числу N проведенных испытаний:

$$\omega(A) = \frac{M}{N}.$$

При неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события A неограниченно приближается к вероятности наступления события в отдельном испытании. На этом факте основано статистическое определение вероятности, когда вероятности полагаются равными относительным частотам событий при большом n.

Геометрическое определение вероятности. Пусть имеется некоторая область Ω на плоскости или в пространстве и другая область $D \subset \Omega$. В область Ω случайным образом ставится точка. Нужно найти вероятность того, что она попадет в область D. Все положения точки в области Ω считаются равновозможными. *Геометрической вероятностью* называется отношение меры области D $(\text{mes}\, D)$ к мере области Ω $(\text{mes}\ \Omega)$:

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, D}{\text{mes}\, \Omega}.$$

Свойства вероятности

1. Вероятность невозможного события $\emptyset$ равна 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. Вероятность достоверного события Ω равна 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Для любого случайного события A:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

4. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, определяется по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие {набраны две нужные цифры}. Для определения вероятности события B будем использовать классическое определение вероятности $P(B)=\dfrac{m}{n}$. Всего можно набрать столько различных цифр по две цифры, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две $n=A_{10}^{2}=$ $=10\cdot 9=90$. Благоприятствует событию B только одна пара цифр: $m=1$. Тогда $P(B)=\dfrac{1}{90}$.

Задача 2. На девять вакантных мест претендуют 15 кандидатов, из них 7 женщин, остальные мужчины. Какова вероятность того, что из девяти случайно отобранных кандидатов ровно 5 женщин?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что из 9 отобранных кандидатов 5 женщин. Для решения используем классическое определение вероятности. Общее число исходов будет равно числу способов, которыми можно выбрать 9 человек из 15 кандидатов: $n=C_{15}^{9}$. Число благоприятствующих исходов $m=C_{8}^{4}\cdot C_{7}^{5}$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{8}^{4}\cdot C_{7}^{5}}{C_{15}^{9}}=0,294.$$

Задача 3. В квадрат со стороной a случайным образом ставится точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что {точка попадет в круг}. Для определения вероятности события A используем геометрическую вероятность

$$P(A)=\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}=\frac{\pi\frac{a^2}{4}}{a^2}=\frac{\pi}{4}=0,785\,.$$

Аудиторные задания

2.1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести наудачу взятых деталей окажется 4 стандартных.

2.2. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимается 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

2.3. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры телефонного номера различны.

2.4. В урне a белых и b черных шаров $(a \geq 2; b \geq 2)$. Из урны случайным образом берутся два шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

2.5. В конверте из 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу взяли 10 фотографий. Найти вероятность того, что среди них находится нужная фотография.

2.6. Найти вероятность угадать 3 номера в спортлото 5 из 36.

2.7. По цели произведено 50 выстрелов, причем зарегистрировано 30 попаданий. Найти относительную частоту попадания в цель.

2.8. Два студента договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первый студент ждет второго в течении 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что они встретятся.

2.9. В правильный треугольник со стороной a вписан круг. В треугольник наугад ставится точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в круг?

2.10. Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один будет выигрышным?

2.11. При стрельбе по мишени относительная частота попаданий равна 0,75. Найти число произведенных выстрелов, если число попаданий равно 75.

2.12. На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$, а область g – эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. В области G случайным образом отмечена точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в область g?

2.13. Область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 25$, а область g – этой окружностью и параболой $16x - 3y^2 = 0$. В области G случайным образом поставлена точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в область g?

2.14. В студсовете факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наугад выбирают на конференцию 5 человек. Какова вероятность того, что на конференцию будут выбраны одни третьекурсники?

2.15. Регистр калькулятора содержит восемь разрядов. Считая, что появление любой цифры на регистре равновероятно, определить вероятность того, что во всех разрядах регистра стоит одна и та же цифра.

Домашние задания

2.16. На карточках написаны буквы И, М, К, С, Н. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК?

2.17. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для аудиторской проверки случайно выбраны 5 сбербанков. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них окажутся за чертой города?

2.18. Для выяснения качества работы бухгалтерии было отобрано для проверки 100 накладных. 98 накладных были оформлены правильно. Какова относительная частота правильно оформленных накладных?

2.19. В куб с ребром a вписан шар. Внутри куба случайным образом ставится точка. Какова вероятность того, что точка попадет в шар?

2.20. В ящике находится 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2.21. В букете 7 роз: 5 белых и 2 красных. Случайным образом из букета взяты две розы. Какова вероятность того, что они белые?

2.22. Наугад выбирается номер автомобиля, содержащий 4 цифры. Какова вероятность того, что в номере все цифры различные?

Ответы: **2.1.** 0,1512; **2.2.** 0,1655; **2.3.** 0,151; **2.4.** $\dfrac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$; **2.5.** 0,1; **2.6.** 0,012; **2.7.** 0,6; **2.8.** $7/16$; **2.9.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$; **2.10.** $5/9$; **2.11.** 100; **2.12.** 15/28; **2.13.** 0,352; **2.14.** $1/143$; **2.15.** $\left(10^{-7}\right)$; **2.16.** $1/120$; **2.17.** 0,848; **2.18.** 0,98; **2.19.** $\pi/6$; **2.20.** $24/91$; **2.21.** 10/21; **2.22.** 0,504.

Занятие 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Краткие теоретические сведения

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если события A и B несовместные, то вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Суммой двух событий называется событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих либо первому событию, либо второму, либо обоим событиям. Два события называются *несовместными*, если они не имеют общих исходов.

Произведением двух событий называется событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих и первому, и второму событиям.

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного события не зависит от того, произошло или не произошло второе событие.

Условной вероятностью $P(B/A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A произошло.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного события на условную вероятность второго события при условии, что произошло первое событие.

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(B)P(A / B).$$

Если события A и B независимые, то вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Задача 1. Найти вероятность того, что случайно взятое двузначное число будет кратным двум или пяти.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что {случайно взятое число будет кратным двум или пяти}; B – событие, состоящее в том, что {число, кратное двум}; C – событие, состоящее в том, что {число, кратное пяти}. События B и C являются совместными, так как есть числа, которые одновременно делятся на два и пять. Так как $A = B + C$, то $P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC)$. Вычислим вероятности этих событий, воспользовавшись классическим определением вероятности

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{45}{90} = 0,5; \quad P(C) = \frac{18}{90} = 0,2; \quad P(BC) = \frac{9}{90} = 0,1.$$

Тогда $P(A) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$

Задача 2. Для подготовки к экзамену студентам дано 60 вопросов. Студент, идя на экзамен, выучил 50 вопросов. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена студенту нужно ответить на два вопроса из двух заданных.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что студент сдаст экзамен. Событие $B_1 = \{$студент ответил на первый вопрос$\}$, $B_2 = \{$студент ответил на второй вопрос$\}$. Тогда $A = B_1B_2$. События

B_1 и B_2 – зависимые. Применяя теорему умножения вероятностей, мы получаем

$$P(A) = P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2 / B_1).$$

Найдем вероятности событий, воспользовавшись классическим определением вероятности

$$P(B_1) = \frac{m}{n} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}; \quad P(B_2 / B_1) = \frac{m}{n} = \frac{49}{59}; \quad P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{49}{59} = 0,69.$$

Задача 3. Стрелок делает независимо друг от друга два выстрела по мишеням. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,7, при втором – 0,9. Найти вероятность того, что при двух выстрелах будет только одно попадание в мишень.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что {будет только одно попадание при двух выстрелах}, событие B_1 состоит в том, что {будет попадание при первом выстреле}, событие $B_2 =$ {попадание при втором выстреле}. $A = B_1 \overline{B}_2 + \overline{B}_1 B_2$. Тогда

$$P(A) = P(\overline{B}_1 B_2) + P(B_1 \overline{B}_2) = P(\overline{B}_1)P(B_2) + P(B_1)P(\overline{B}_2) =$$
$$= (1 - 0,7) \cdot 0,9 + 0,7 \cdot (1 - 0,9) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,1 = 0,27 + 0,07 = 0,34.$$

Аудиторные задания

3.1. У сборщика есть 4 окрашенных детали и 6 неокрашенных деталей. Сборщик случайным образом берет одну деталь для сборки, а затем вторую. Какова вероятность того, что первая деталь будет окрашена, а вторая нет?

3.2. Вероятности выполнения упражнения для первого и второго спортсменов соответственно равны 0,6 и 0,8. Найти вероятность того, что в одной попытке оба спортсмена выполнят удачно упражнение.

3.3. В фирме 550 работников, из них 380 работников имеют высшее образование, 412 работников – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование. Найти вероятность того, что случайно взятый работник имеет высшее или среднее специальное образование.

3.4. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7; для второго – 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.

3.5. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятности того, что при пожаре сработает первый, второй и третий сигнализаторы соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один сигнализатор.

3.6. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятности того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего для первого, второго, третьего и четвертого станков соответственно равны 0,3; 0,7; 0,4; 0,6. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из станков не потребует внимания рабочего.

3.7. Стрелок делает независимо друг от друга четыре выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах соответственно равны 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что будут только два попадания в мишень.

3.8. Автомобиль проходит при техосмотре три вида проверок. Первую проверку проходит в 90 % случаев; вторую – в 80 % и третью – в 75 %. Найти вероятность того, что автомобиль пройдет техосмотр.

3.9. Во время эксплуатации радиатора автомобиля возможны следующие неисправности: подтекание воды; образование большого слоя накипи. Вероятности возникновения этих неисправностей в течение смены соответственно равны 0,2 и 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет хотя бы одна из неисправностей радиатора.

3.10. Дана электрическая схема (рис. 1), в которой вероятности отказа узлов $Z_i, i=\overline{1,5}$ за время T соответственно равны 0,2; 0,3; 0,1; 0,3; 0,1. Схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Определить вероятность безотказной работы схемы за время T.

3.11. Подбрасывается монета три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза.

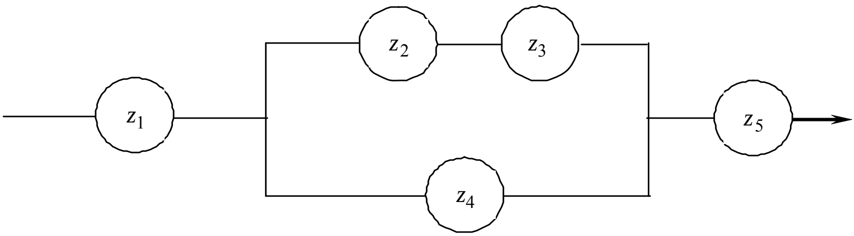


Рис. 1

3.12. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

3.13. На 30 одинаковых жетонах написаны числа от 1 до 30. Жетоны помещены в пакеты и перемешаны. Найти вероятность того, что случайно взятый жетон имеет номер, кратный 2 или 3.

Домашние задания

3.14. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей ($k \le n$) для открывания двери.

3.15. Производится три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении ошибка выйдет за пределы допуска, равна 0,1. Найти вероятность того, что не более одного измерения выйдет за предел допуска.

3.16. В урне находятся 8 красных и 6 синих шаров. Из урны один за другим извлекаются три шара. Найти вероятность того, что они будут все синие.

3.17. Каждое из четырех несовместных событий может произойти в результате опыта соответственно с вероятностями 0,014; 0,011; 0,009; 0,006. Найти вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из указанных событий.

3.18. Подброшены монета и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпадет герб, а на кубике – цифра, кратная двум.

3.19. Вероятность того, что в трех независимых испытаниях некоторое событие наступит хотя бы один раз, равна 0,875. Найти вероятность появления события в отдельном испытании.

3.20. При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Вероятности возникновения брака при каждой операции соответственно равны 0,05; 0,07; 0,09; 0,04. Найти вероятность изготовления стандартной детали.

Ответы: **3.1.** 4/15; **3.2.** 0,48; **3.3.** 0,79; **3.4.** 0,94; **3.5.** 0,994; **3.6.** 0,0504; **3.7.** 0,35; **3.8.** 0,54; **3.9.** 0,4; **3.10.** 0,64; **3.11.** 3/8; **3.12.** 0,991; **3.13.** 2/3; **3.14.** $1/n$; **3.15.** 0,972; **3.16.** 0,055; **3.17.** 0,04; **3.18.** 0,25; **3.19.** 0,5; **3.20.** 0,772.

Занятие 4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Краткие теоретические сведения

Пусть событие A может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. События $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий: **1)** попарно несовместны: $H_i H_j = \varnothing,\ i \neq j$; **2)** образуют полную группу событий: $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. События $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*.

Теорема 4.1. *Пусть событие A может произойти совместно с одной из гипотез* $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$*. Тогда вероятность события A определяется* ***по формуле полной вероятности****:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i).$$

Теорема 4.2. *Пусть событие A может произойти совместно с одной из гипотез* $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$*. Если событие A произошло, то вероятности гипотез вычисляются* ***по формулам Байеса****:*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) P(A / H_j)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задача 1. Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод изготавливает 45 % общего количества электроламп, второй – 40 %, третий – 15 %. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных электроламп, второго – 80 %, третьего – 81 %. Найти вероятность того, что купленная в магазине электролампа будет стандартной.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что {случайно взятая лампа стандартна}. Введем гипотезы H_i $(i=\overline{1,3})$ – {лампа произведена на i заводе}. Вероятность события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3).$$

Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=0,45;\ P(H_2)=0,4;\ P(H_3)=0,15.$$

Условные вероятности будут равны:

$$P(A/H_1)=0,7;\ P(A/H_2)=0,8;\ P(A/H_3)=0,81.$$

Подставив в формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=0,45\cdot 0,7+0,4\cdot 0,8+0,15\cdot 0,81=0,7565.$$

Задача 2. В пирамиде 10 винтовок, из них 6 снабжены оптическим прицелом, а остальные винтовки – с обыкновенным прицелом. Вероятность попадания в цель из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9; из обыкновенной винтовки – 0,7. Стрелок поразил цель из случайно взятой винтовки. Какова вероятность того, что он стрелял из обычной винтовки?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что стрелок поразил цель, событие $H_1=$ {стрелял из обыкновенной винтовки}, событие $H_2=$ {из винтовки с оптическим прицелом}.

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)}.$$

Из условия задачи

$$P(H_1) = \frac{4}{10} = 0,4; P(H_2) = \frac{6}{10} = 0,6; P(A / H_1) = 0,7; P(A / H_2) = 0,9.$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0,4 \cdot 0,7}{0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,9} = 0,341.$$

Аудиторные задания

4.1. Станок может работать в двух режимах: рентабельно и нерентабельно. В рентабельном режиме станок работает 80 % рабочего времени, в нерентабельном – 20 %. Вероятность отказа станка в рентабельном режиме равна 0,1; в нерентабельном режиме – 0,4. Найти вероятность отказа станка.

4.2. В цехе, изготавливающем болты, первая машина производит 30 %, вторая – 25 %, третья – 45 % всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2 %, 1 %, 3 %. Найти вероятность того, что случайно взятый болт будет бракованным.

4.3. По линии связи передаются два сигнала *A* и *B* соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех 1/6 сигналов *A* искажается и принимается как *B*, а 1/8 сигналов В искажается и принимается как *A*. Найти вероятность того, что будет принят сигнал *A*.

4.4. Курс доллара повышается с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма получает прибыль с вероятностью 0,85; а при понижении курса – с вероятностью 0,5. Найти вероятность получения прибыли фирмой.

4.5. Два из трех независимо работающих устройств отказали. Найти вероятность того, что отказало первое и второе устройство, если вероятности отказа первого, второго, третьего устройств соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

4.6. При хороших метеоусловиях вероятность благополучной посадки самолета равна 0,98, при плохих – 0,8. Для данного аэропорта хорошей считается погода в 80 %, а плохой – в 20 %. Посадка самолета оказалась благополучной. Какова вероятность того, что она проводилась в плохих метеоусловиях?

4.7. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 35 % всех деталей, второй – 40 %, третий –

всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого – 2 %, у второго – 3 %, у третьего – 4 %. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

4.8. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

4.9. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Найти вероятность того, что случайно взятый из партии транзистор будет признан дефектным.

4.10. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое выше второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 % деталей отличного качества. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена вторым автоматом.

4.11. Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического спада – 0,13. По мнению экспертов, вероятность того, что начнется период экономического роста равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный заем.

4.12. В цехе трудятся 3 мастера и 6 их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении детали с вероятностью 0,05; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что изделие изготовил мастер?

Домашние задания

4.13. Изделие проверяется одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 2/3 всех изделий, второй – 1/3. Вероятность того, что изделие признает стандартным первый контролер равна 0,8, второй – 0,7. При перепроверке изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что изделие проверил второй контролер?

4.14. В магазине имеются телевизоры с импортными и отечественными кинескопами в соотношении 2:9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортным кинескопом равна 0,005, с отечественным – 0,001. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок.

4.15. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1:2:3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3 %, 2 %, 1 %. Прибор, приобретенный институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что прибор выпустил первый завод?

4.16. Число грузовых автомобилей, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомобилей, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться легковая автомашина, равна 0,2, для грузовой автомашины эта вероятность равна 0,1. К бензоколонке для заправки подъехала автомашина. Найти вероятность того, что это грузовая автомашина.

4.17. По самолету производится три выстрела независимо друг от друга. Вероятность попадания в самолет при первом выстреле равна 0,5; при втором – 0,6; при третьем – 0,8. Для вывода самолета из строя достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет выйдет из строя.

4.18. Строительная конструкция состоит из трех блоков, надежности которых соответственно равны: 0,6; 0,5; 0,3. Для выхода из строя конструкции в целом за время T достаточно разрушения трех блоков. При двух разрушенных блоках конструкция выходит из строя с вероятностью 0,6; при разрушении одного блока – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что конструкция выйдет из строя за время T.

4.19. Студент идет на экзамен, зная k билетов из n. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он зашел вторым в аудиторию?

Ответы: **4.1.** 0,16; **4.2.** 0,022; **4.3.** 0,72; **4.4.** 0,815; **4.5.** 14/47; **4.6.** 0,169; **4.7.** 0,345; **4.8.** 6/7; **4.9.** 0,122; **4.10.** 0,41; **4.11.** 0,0715; **4.12.** 0,1429. **4.13.** 0,304; **4.14.** 0,998; **4.15.** 0,3; **4.16.** 3/7; **4.17.** 0,594; **4.18.** 0,458; **4.19.** k/n.

Занятие 5. Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли)

Краткие теоретические сведения

Схемой Бернулли называется последовательность из n независимых испытаний, в каждом из которых возможны только два исхода: событие A может наступить или не наступить, и вероятность появления события A в каждом испытании постоянна.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$, событие A наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

Локальная теорема Муавра–Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблице по вычисленным значениям x.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$, событие A наступит от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2} dt; \quad x_{1,2} = \frac{k_{1,2} - np}{\sqrt{npq}}; \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Значения функции $\Phi(x)$ находят по таблице по вычисленным значениям x.

Формула Пуассона. Если в схеме Бернулли число испытаний велико, а вероятность появления события A мала, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты от вероятности появления события A не превосходит положительного числа ε, приближенно равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях. *Число* k_0 *называют наивероятнейшим*, если вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k_0 раз, не меньше вероятностей остальных возможных значений k: $0 \le k \le n$.

Наивероятнейшее число определяется из неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

причем:

а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число $k_0 = [np - q] + 1$, где $[np - q]$ – целая часть числа $np - q$;

б) если число $np - q$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа $k_0 = np - q$ и $k_0 = np + p$;

в) если np – целое, то $k_0 = np$.

Задача 1. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что выйдут из строя ровно два узла.

Решение. Для решения задачи используем формулу Бернулли.

$$P_4(2)=C_4^2\,p^2q^2=\frac{4!}{2!2!}0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=0{,}1536.$$

Задача 2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

Решение. Решаем задачу с использованием локальной теоремы Лапласа.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-0{,}8\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;$$

$$\varphi(-1{,}25)=\varphi(1{,}25)=0{,}1826;$$

$$P_{100}(75)=\frac{0{,}1826}{4}=0{,}046.$$

Задача 3. В гараже имеется 100 автомашин. Вероятность того, что в течение рабочего дня машина находится вне гаража, равна 0,8. Найти вероятность того, что вне гаража будут находиться от 70 до 85 машин.

Решение. Для решения используем интегральную теорему Муавра–Лапласа. По условию задачи n = 100, $m_1=75$, $m_1=80$, $p=0{,}8$, тогда

$$x_1=\frac{70-80}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=-\frac{10}{4}=-2{,}5;\quad x_2=\frac{85-80}{4}=-1{,}25;$$

$$P_{100}(70;85)=\Phi(1{,}25)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(1{,}25)+\Phi(2{,}5)=$$
$$=0{,}3944+0{,}4938=0{,}8882.$$

Аудиторные задания

5.1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно выбранных в этом месяце 8 дней 3 будут дождливыми?

5.2. В цехе находятся четыре однотипных станка, которые работают в течение смены с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в случайно взятый момент времени работает хотя бы один станок.

5.3. Всхожесть семян некоторого растения имеет вероятность 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4?

5.4. Вероятность банкротства каждой из 6 фирм к концу года равна 0,2. Какова вероятность того, что к концу года обанкротятся не более 2 фирм?

5.5. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит ровно 75 раз?

5.6. Электронная система состоит из 28 однотипных блоков, каждый из которых может отказать с вероятностью 0,25. Найти наивероятнейшее число отказов и его вероятность.

5.7. По данным отдела технического контроля на 100 металлических брусков, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков не более двух будет с зазубринами?

5.8. Производство дает 1 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий бракованных будет не более 17?

5.9. Вероятность возникновения опасной для работы прибора перегрузки равна 0,4. Определить вероятность выхода из строя прибора в серии из трех испытаний, если при одной опасной перегрузке прибор выходит из строя с вероятностью 0,2; при двух – с вероятностью 0,5; при трех – с вероятностью 0,8.

5.10. Контролер проверяет партию из 15 изделий. Вероятность того, что изделие выдержит проверку равна 0,9. Найти наивероятнейшее число изделий, которые выдержат проверку.

5.11. Устройство состоит из 500 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента за время t равна 0,002. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) ровно 3 элемента; б) менее трех элементов.

5.12. С конвейера в среднем 70 % изделий отправляется на экспорт. Сколько изделий нужно взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение относительной частоты изделий, идущих на экспорт, от вероятности 0,7 по модулю не превышало 0,01.

5.13. Вероятность того, что в течение часа любой из абонентов позвонит на коммутатор, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

5.14. На симпозиум приглашены 75 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0,8. В гостинице для прибывших забронировано 65 мест. Какова вероятность того, что все прибывшие будут поселены в гостинице?

5.15. При эпидемии гриппа 40 % населения заражены вирусом. В лаборатории работает 24 сотрудника. Какова вероятность того, что 10 из них будут носителями вируса?

Домашние задания

5.16. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что план выполнят не менее 6 предприятий.

5.17. Вероятность обнаружения упавшего на Землю метеорита равна 0,0001. Какова вероятность того, что из 3000 упавших метеоритов, обнаружено будет не менее 2 метеоритов?

5.18. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) от 1470 до 1500 раз; б) не менее 1470 раз.

5.19. Найти наивероятнейшее число правильно стандартных деталей среди изготовленных 19, если вероятность изготовления бракованной детали равна 0,1.

5.20. При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 1000 опросов число неискренних ответов будет не более 170.

5.21. Вероятность приема каждого из 100 независимых сигналов равна 0,75. Найти вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.

5.22. В комнате 5 электрических лампочек. Каждая из них перегорает в течение года с вероятностью 0,02. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее четырех лампочек.

5.23. По каналу связи передаются 5000 знаков, каждый из которых может быть искажен с вероятностью 0,0005, независимо от других знаков. Найти вероятность того, что будет искажено не более двух знаков.

Ответы: **5.1.** 0,2787; **5.2.** 0,9984; **5.3.** 0,7373; **5.4.** 0,901; **5.5.** 0,0532; **5.6.** (7; 0,174); **5.7.** 0,647; **5.8.** 0,9651; **5.9.** 0,2816; **5.10.** 14; **5.11.** а) 0,0613; б) 0,92; **5.12.** 18399; **5.13.** 0,0916; **5.14.** 0,9251; **5.15.** 0,1638. **5.16.** 0,9619; **5.17.** 0,037; **5.18.** а) 0,4236; б) 0,5; **5.19.** (17,18); **5.20.** 0,0089; **5.21.** 0,6961; **5.22.** $0{,}787 \cdot 10^{-6}$; **5.23.** $6{,}625e^{-2{,}5}$.

Занятие 6. Функция распределения и плотность распределения случайных величин

Краткие теоретические сведения

Случайной величиной (*СВ*) X называется числовая функция $X = X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных исходов Ω, такая, что при любых действительных x определена вероятность события $\{X(\omega) < x\}$.

Функцией распределения вероятностей называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что $X < x$ (СВ X примет значение, меньшее, чем x).

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R.$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(-\infty) = 0$; $\quad F(+\infty) = 1$.

3. $F(x)$ – неубывающая функция.

4. $F(x)$ – непрерывная слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

5. Вероятность попадания *СВ* X в интервал $[\alpha, \beta)$ определяется формулой $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

СВ X называется дискретной, если она принимает конечное или счетное количество значений.

СВ X называется непрерывной на $(a; b)$, если она принимает все значения из этого интервала.

Законом распределения дискретной СВ называется соответствие между возможными значениями *СВ* x_i и вероятностями их появления $p_i = P(X = x_i)$. Закон распределения дискретной *СВ* записывается в виде таблицы.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Плотностью распределения называется функция $p(x)$, удовлетворяющая условию

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx.$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p(x) \ge 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

3. $p(x) = F'(x)$.

4. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} p(x)\,dx$.

Чтобы задать закон распределения непрерывной *СВ*, нужно задать либо плотность распределения, либо функцию распределения.

Задача 1. Закон распределения дискретной СВ имеет вид

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,05	0,1	0,35	0,3	0,2

Найти функцию распределения.

Решение. По определению $F(x) = P(X < x)$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 0{,}05, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0{,}15, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0{,}5, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 0{,}8, & \text{если } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Задача 2. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ ax^2, & \text{если } 0 < x \le 2; \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Определить значение параметра a и найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Для определения параметра a воспользуемся свойством плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} ax^2\,dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0\,dx = a\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = a\frac{8}{3} = 1 \Rightarrow\ a = \frac{3}{8}.$$

Функцию распределения определим из соотношения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx.$$

1. Если $x < 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$

2. Если $0 < x \le 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{8}.$

3. Если $x > 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8}x^2\,dx + \int\limits_{2}^{x} 0\,dx = \frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 1.$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \dfrac{x^3}{8}, & \text{если } 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Задача 3. Дана функция распределения СВ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \sin 2x, & \text{если } 0 < x \le \pi/4; \\ 1, & \text{если } x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения и вероятность попадания СВ X в интервал $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Вероятность попадания СВ в интервал $(a; b)$ определяется по формуле

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

$$P\left(\frac{\pi}{12} < X < \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Если известна функция распределения $F(x)$, то $p(x) = F'(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2\cos 2x, & \text{если } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{если } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Аудиторные задания

6.1. Закон распределения дискретной СВ имеет вид

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти функцию распределения.

6.2. Дискретная *СВ* задана законом распределения

x_i	1	4	6	8	9
p_i	0,1	λ	0,4	0,3	0,1

Найти значение параметра λ и записать функцию распределения.

6.3. Дана функция распределения *СВ X*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения и вероятность попадания в интервал $(0; \pi/6)$.

6.4. *СВ X* имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & |x|>\dfrac{\pi}{2};\\ c\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти значение параметра c и записать функцию распределения.

6.5. *СВ X* имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & |x|\ge a;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

6.6. Два стрелка делают независимо друг от друга по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,4. *СВ X* – число попаданий в мишень. Составить закон распределения и записать функцию распределения *СВ X*.

6.7. Дана плотность распределения *СВ X*

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1;\\ \dfrac{a}{x^2}, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти: $a,\ F(x),\ P(2<X<3)$.

6.8. Показать, что функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+3x), & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2\end{cases}$$

является функцией распределения. Найти плотность распределения и $P(x>1)$.

6.9. Дана плотность распределения *СВ Х* $p(x)=\dfrac{c}{1+x^2}$. Требуется найти значения параметра c и записать функцию распределения.

6.10. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3}{2}x^2, & 0<x\le 1;\\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

Домашние задания

6.11. Закон распределения дискретной СВ имеет вид

x_i	0	3	5	7
p_i	0,15	0,2	0,5	0,15

Составить функцию распределения.

6.12. Непрерывная *СВ* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти параметр a и плотность распределения.

6.13. Дана плотность распределения *СВ Х*

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Требуется найти: a, $F(x)$, $P(-1<X<0{,}5)$.

6.14. Дана плотность распределения *СВ X*

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, & x>0.\end{cases}$$

Найти: $F(x)$, $P(2<X<3)$.

6.15. Независимые СВ X и Y заданы соответственно законами распределения

x_i	2	3	5
p_i	0,3	0,5	0,2

y_i	1	4
p_i	0,2	0,8

Найти законы распределения СВ $Z=X+Y, T=XY$.

Ответы: 6.3. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\quad p=\dfrac{1}{2};$

6.4. $c=\dfrac{1}{2};\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1), & -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

6.5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a;\\ 1, & x>a;\end{cases}$

6.6.

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,3, & 0<x\le 1;\\ 0,8, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2;\end{cases}$

6.7. $a=1,\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 1-\dfrac{1}{x}, & x>1;\end{cases}\ P(2<X<3)=\dfrac{1}{6};$

6.8. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(3x^2-6x+3), & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases}\quad p=0,5;$

6.9. $c=\dfrac{1}{\pi},\quad F(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2};$

6.10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^3}{2}, & 0<x\le 1;\\ 1-\dfrac{(2-x)^3}{2}, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2;\end{cases}$

6.11. $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,15, & 0<x\le 3;\\ 0,35, & 3<x\le 5;\\ 0,85, & 5<x\le 7;\\ 1, & x>7;\end{cases}$

6.12. $a = \dfrac{1}{4}$; $\quad p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$

6.13. $a = 3$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^3, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad p = \dfrac{1}{8}$;

6.14. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{1 + x^2}, & x > 0, \end{cases} \qquad p = 0{,}1$;

6.15.

z_i	3	4	6	7	9
p_i	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16

t_i	2	3	5	8	12	20
p_i	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

Занятие 7. Числовые характеристики случайных величин

Краткие теоретические сведения

Пусть дискретная *СВ* имеет следующий закон распределения

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Математическим ожиданием СВ называется число, равное сумме произведений всех возможных значений *СВ* на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C)=C,$ где $C = \text{const}$.

2. $M(CX)=CM(X),$ где $C = \text{const}$.

3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

4. $M(XY)=M(X)\cdot M(Y),$ если X, Y – независимые *СВ*.

Математическое ожидание характеризует случайную величину в среднем.

Для непрерывной СВ математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx.$$

Начальным моментом k-го порядка называется математическое ожидание *СВ* X^k, т. е. $M_k=M(X^k)$. Начальные моменты k-го порядка для дискретных и непрерывных *СВ* вычисляются соответственно по формулам:

$$M_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i; \qquad M_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\,dx.$$

Центральным моментом k-го порядка называется математическое ожидание *СВ* $(X-M(X))^k$: $\mu_k=M(X-M(X))^k$.

Для дискретных и непрерывных *СВ* центральный момент k-го порядка вычисляется по формулам:

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^k p_i; \qquad \mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^k p(x)\,dx.$$

Дисперсией СВ называется центральный момент второго порядка

$$D(x)=\mu_2=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2.$$

Дисперсия характеризует степень разброса значений *СВ* относительно математического ожидания. Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(C)=0,$ где C – const;

2. $D(CX)=C^2D(x),$ где C – const;

3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y),$ если X и Y – независимые *СВ*.

4. $D(X)\geq 0.$

Дисперсия *СВ* равна разности математического ожидания квадрата *СВ* и квадрата математического ожидания

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением СВ называется корень квадратный из дисперсии $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$

Задача 1. Дискретная *СВ* задана законом распределения

x_i	1	3	5	10
p_i	1/4	1/2	1/8	1/8

Вычислить $M(X),\ D(X),\ \sigma(X).$

Решение.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{8}=\frac{29}{8}.$$

Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i=1\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{2}+25\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{8}=\frac{163}{8}.$$

$$D(X)=\frac{163}{8}-\left(\frac{29}{8}\right)^2=\frac{463}{64}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{463}{64}}=\frac{\sqrt{463}}{8}.$$

Задача 2. Непрерывная *СВ* задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{при } 0<x\le 3;\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Найдем плотность распределения

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{2x}{9}, & \text{при } 0<x\le 3;\\ 0, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx=\int_0^3 x\cdot\frac{2x}{9}\,dx=\frac{2}{9}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=2.$$

Дисперсия определяется по формуле

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2;$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx=\int_0^3 x^2\cdot\frac{2x}{9}\,dx=\frac{2}{9}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3=\frac{9}{2};$$

$$D(X)=\frac{9}{2}-4=0,5; \qquad \sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аудиторные задания

7.1. Число α-частиц, достигающих счетчика в некотором опыте, является *СВ*, распределенной по закону

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,011	0,007

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу взяты 2 детали. *СВ X* равна числу стандартных деталей из двух взятых. Требуется составить закон распределения *СВ* и вычислить числовые характеристики.

7.3. Функция распределения *СВ X* имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ x^3, & \text{при } 0<x\le 1;\\ 1, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

7.4. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение *СВ*, заданной законом распределения

x_i	131	140	160	180
p_i	0,05	0,1	0,25	0,6

7.5. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}e^x, & \text{при } x\le 0;\\ 0, & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.6. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -c;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}, & \text{при } -c<x\le c;\\ 0, & \text{при } x>c, \quad c\ne 0.\end{cases}$$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

7.7. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ 0,5x, & \text{при } 0<x\le 2;\\ 0, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты до третьего порядка включительно.

7.8. СВ X распределена по закону, определенному плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -\pi/2;\\ a\cos x, & \text{при } -\pi/2<x\le \pi/2;\\ 0, & \text{при } x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти значение параметра a и вычислить $M(X)$, $D(X)$.

7.9. СВ X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -a;\\ \dfrac{(x+a)^2}{2a^2}, & \text{при } -a<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(a-x)^2}{2a^2}, & \text{при } 0<x\le a;\\ 1, & \text{при } x>a.\end{cases}$$

Найти $M(X)$.

Домашние задания

7.10. Случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	–2	1	3
p_i	0,1	0,7	0,2

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$.

7.11. СВ *X* задана плотностью распределения.

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \frac{3}{2}x^2, & \text{при } 0<x\le 1;\\ \frac{3}{2}(2-x)^2, & \text{при } 1<x\le 2;\\ 0, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X)$.

7.12. Непрерывная СВ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -2;\\ \frac{1}{5}(x+2), & \text{при } -2<x\le 3;\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$.

7.13. СВ задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}2x, & x\in(0,1);\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты до третьего порядка включительно.

7.14. Производится 4 независимых испытания прибора. Вероятность того, что прибор выдержит испытание в каждом испытании равна 0,4. СВ X – количество испытаний, в которых прибор выдержал испытание. Составить закон распределения и вычислить числовые характеристики СВ.

Ответы: 7.1. $M(X)=3,868;$ $D(X)=3,841;$ $\sigma(X)=1,960;$

7.2.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

$M(X)=\frac{8}{5};$ $D(X)=0,284;$ $\sigma(x)=0,533;$

7.3. $M(X)=\frac{3}{4};$ $D(X)=\frac{3}{80};$ **7.4.** $D(X)=248,95,$ $\sigma(X)=15,78;$

7.5. $M(X)=-1;$ $D(X)=1;$ $\sigma(X)=1;$ **7.6.** $M(X)=0;$ $D(X)=\frac{c^2}{2};$

7.7. $M_1=\frac{4}{3}; M_2=2; M_3=3,2; \mu_1=0; \mu_2=\frac{2}{9}; \mu_3=-\frac{8}{135};$

7.8. $a=\frac{1}{2}; M(X)=0;$ $D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2;$ **7.9.** $M(X)=0;$

7.10. $M(X)=1,1; D(X)=1,69; \sigma(X)=1,3;$ **7.11.** $M(X)=1, D(X)=0,1;$

7.12. $M(X)=\frac{1}{2}; D(X)=\frac{25}{12}; \sigma(X)=\frac{5\sqrt{3}}{6};$

7.13. $M_1=\frac{2}{3}; M_2=\frac{1}{2}; M_3=\frac{2}{5}; \mu_1=0; \mu_2=\frac{1}{18}; \mu_3=-\frac{1}{135};$

7.14.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

$M(X)=1,6; D(X)=0,96$

Занятие 8. Законы распределения дискретных случайных величин

Краткие теоретические сведения

Дискретная СВ называется распределенной по биномиальному закону, если она принимает конечное число значений $k = 0; 1; 2; \ ...; \ n$ с вероятностями, которые определяются по формуле Бернулли

$$P\left(x = k\right) = C_n^k \ p^k \ q^{n-k}. \qquad (8.1)$$

Числовые характеристики дискретной СВ, распределенной по биномиальному закону, определяются формулами

$$M(X) = np; \ D(X) = npq.$$

Дискретная СВ называется распределенной по закону Пуассона, если она принимает счетное число значений $k = 0; 1; 2; \ ....; \ n; ...$ с вероятностями, которые определяются по формуле Пуассона

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0.$$

Для дискретной СВ, распределенной по закону Пуассона, числовые характеристики определяются формулами

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Задача 1. Для сигнализации о пожаре установлено три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при пожаре сработает каждое устройство постоянна и равна 0,9. СВ X равна количеству срабатывающих устройств при пожаре. Требуется составить закон распределения СВ и вычислить $M(X)$, $D(X)$.

Решение. СВ x принимает значение 0; 1; 2; 3. Определим вероятности $P(x = k)$ по формуле (8.1).

$$P(x=0)=C_3^0\,p^0q^3=0,1^3=0,001;$$

$$P(x=1)=C_3^1\,pq^2=3\cdot 0,9\cdot 0,1^2=0,027;$$

$$P(x=2)=C_3^2\,p^2q=3\cdot 0,9^2\cdot 0,1=0,243;$$

$$P(x=3)=C_3^3\,p^3q^0=0,9^3=0,729;$$

Проверка: $\sum\limits_{i=0}^{3} p_i = 0,001+0,027+0,243+0,729=1.$

Закон распределения СВ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Вычислим *M*(*X*) и *D*(*X*). $M(X)=np=3\cdot 0,9=2,7.$ $D(X)=npq=$ $=3\cdot 0,9\cdot 0,1=0,27.$

Аудиторные задания

8.1. Производится 5 независимых испытаний прибора. Вероятность того, что прибор выдержит испытание равна 0,9 и постоянна для всех испытаний. СВ *X* – количество испытаний, в которых прибор выдержал испытание. Требуется составить закон распределения СВ *X*.

8.2. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002 и постоянна для всех изделий. СВ *X* – число изделий, поврежденных в пути. Требуется вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ.

8.3. В партии из 10 изделий имеется 8 изделий высшего сорта. Наудачу отобраны два изделия. СВ *X* – количество изделий высшего сорта из двух отобранных. Требуется составить закон распределения СВ и вычислить *M*(*X*) и *D*(*X*).

8.4. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле, равна 0,6. Стрелок стреляет в цель до первого попадания, имея три патрона. СВ *X* – число израсходованных патронов. Требуется составить закон распределения СВ *X* и вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

8.5. Вероятность того, что нужная студенту книга имеется в библиотеке, равна 0,6. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетил студент, чтобы взять нужную книгу. Составить закон распределения СВ X.

8.6. У человека, подошедшего к двери, имеется связка из пяти однотипных ключей, из которых только один открывает дверь. Он случайным образом берет ключ и пытается открыть дверь. Если ключ не подходит, то он старается открыть дверь следующим ключом и так далее, пока ее не откроет. СВ X равна количеству опробованных ключей. Требуется составить закон распределения и вычислить числовые характеристики.

8.7. Два баскетболиста делают независимо друг от друга по одному броску по кольцу. Вероятность попадания в кольцо для первого баскетболиста равна 0,6, для второго – 0,7. СВ X – число попаданий в кольцо. Нужно составить закон распределения СВ и вычислить ее числовые характеристики.

8.8. В лотерее из 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых равны 100 и 60 у. е. (условных единиц). СВ X – стоимости возможного выигрыша на один билет. Составить закон распределения СВ X и вычислить ее числовые характеристики.

Домашние задания

8.9. На пути движения автомобиля находятся 4 независимо работающих светофора, которые разрешают движение без остановки с вероятностью 0,5. СВ X – количество светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Составить закон распределения СВ X.

8.10. Подбрасываются две монеты. СВ X – количество выпавших гербов. Нужно составить закон распределения СВ X и вычислить $M(X)$, $D(X)$.

8.11. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,1. СВ X – количество элементов, отказавших за время T. Требуется составить закон распределения СВ X.

8.12. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Из партии наугад берут две детали. СВ X – количество стандартных деталей из случайно взятых. Требуется составить закон распределения СВ X и вычислить ее числовые характеристики.

8.13. При массовом производстве шестерен вероятность брака равна 0,001. СВ X – количество бракованных шестерен в партии из 1000 шестерен. Требуется вычислить числовые характеристики СВ.

Ответы:

8.1.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	$4{,}5\cdot 10^{-4}$	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

8.2. $M(X)=1;\ D(X)=1;$

8.3.

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

$M(X)=1{,}6;\ D(X)=64/225;$

8.4.

x_i	1	2	3
p_i	0,6	0,24	0,16

$M(X)=1{,}56;\ D(X)=0{,}5664;\ \sigma(X)=0{,}753;$

8.5.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

8.6.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$M(X)=3;\ D(X)=2;\quad \sigma(X)=1{,}41;$

8.7.

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

$M(X)=1{,}3;\ D(X)=0{,}45;\ \sigma(X)=0{,}67;$

8.8.

x_i	0	60	100
p_i	98/100	1/100	1/100

$M(X)=1{,}6;\ D(X)=133{,}44;$

8.9.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

8.10.

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

$M(X)=1;\ D(X)=0,5;$

8.11.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

8.12.

x_i	0	1	2
p_i	1/15	7/15	7/15

$M(X)=1,4;\ D(X)=0,37;\ \sigma=0,61;$

8.13. $M(X)=1;\ D(X)=1.$

Занятие 9. Законы распределения непрерывных случайных величин

Краткие теоретические сведения

Непрерывная СВ называется *равномерно распределенной* на $(a;b)$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a<x\le b;\\ 0, & \text{если } x>b.\end{cases} \qquad (9.1)$$

Для СВ X, равномерно распределенной на $(a;b)$, справедливы следующие соотношения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a<x\le b;\\ 1, & \text{если } x>b;\end{cases} \tag{9.2}$$

$$M(X)=\frac{b+a}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\ P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a};\ [\alpha,\beta]\subseteq[a,b].$$

Непрерывная СВ (X) называется распределенной по *показательному закону*, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0;\end{cases} \qquad \lambda>0. \tag{9.3}$$

Для СВ, распределенной по показательному закону, справедливы формулы:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0;\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}. \tag{9.4}$$

Функция $F(t)=P(X<t)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0\end{cases}$ определяет *вероятность отказа* (X – момент отказа) за время t. *Вероятность безотказной работы* за это время $P(X>t)$ будет равна $R(t)=1-P(X<t)=e^{-\lambda t}$. Функцию $R(t)$ называют *функцией надежности*.

Непрерывная СВ называется распределенной по *нормальному закону*, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{9.5}$$

где a и σ – параметры нормального распределения *вероятностей*;

a – математическое ожидание;

σ^2 – дисперсия.

Для нормально распределенной СВ справедливы следующие формулы:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),\text{ где }\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$$

$$M(X)=a;\ D(X)=\sigma^2;\ P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right); \tag{9.6}$$

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Задача 1. СВ распределена равномерно на (3;5). Требуется найти: $p(x); F(x); M(X); D(X)$.

Решение. На основании формул (9.1) и (9.2) имеем

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 3;\\ \frac{1}{2}, & \text{если } 3<x\le 5;\\ 0, & \text{если } x>5;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 3;\\ \frac{x-3}{2}, & \text{если } 3<x\le 5;\\ 1, & \text{если } x>5;\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{3+5}{2}=4;\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(5-3)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

Задача 2. СВ, распределенная по показательному закону, имеет функцию распределения вида

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 1-e^{-3x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X)$.

Решение. Согласно формуле (9.4) $\lambda=3$. Тогда

$$M(X)=\frac{1}{3};\quad D(X)=\frac{1}{9}.$$

Задача 3. СВ распределена по нормальному закону с параметрами $a=3; \sigma=5$. Требуется: 1) записать $p(x)$ и $F(x)$; 2) вычислить $P(|x-a|<5)$; $P(0<x<2)$.

Решение. Согласно формулам (9.5) и (9.6) имеем

$$p(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{50}};\quad F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-3}{5}\right);$$

$$P(|x-a|<\delta)=P(|x-3|<5)=2\Phi\left(\frac{5}{5}\right)=2\Phi(1)=0,6876;$$

$$P(0<x<2)=\Phi\left(\frac{2-3}{5}\right)-\Phi\left(\frac{0-3}{5}\right)=\Phi(0,6)-\Phi(+0,2)=$$
$$=\Phi(0,6)-\Phi(0,2)=0,2257-0,0793=0,1464.$$

Аудиторные задания

9.1. СВ X равномерно распределена на $(-5;3)$. Требуется записать плотность и функцию распределения.

9.2. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$ СВ, равномерно распределенной на интервале (2; 8).

9.3. Автобусы некоторого маршрута следуют строго по расписанию. Интервал движения равен 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус менее 3 минут.

9.4. Непрерывная СВ распределена по показательному закону с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 5e^{-5x}, & x>0.\end{cases}$$

Найти $M(X); D(X), P(0{,}1<x<0{,}3)$.

9.5. Математическое ожидание СВ, распределенной по показательному закону, равно 5. Найти $F(x)$ и $P(X<5)$.

9.6. Продолжительность безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda=0{,}03$. Найти вероятность того, что за время $t=100$ ч: а) прибор откажет; б) прибор не откажет.

9.7. Случайная величина X распределена нормально с $a=10$, а вероятность $P(5<X<15)=0{,}8$. Найти вероятность попадания СВ в интервал (9; 10).

9.8. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с $a=375$ г, $\sigma=25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 г до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

9.9. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2>d_1$, то его размеры считаются приемлемыми. Если хотя бы одно из условий не выполняется, то шарик считается бракованным. Известно, что диаметр шарика является СВ, распределенной по нормальному закону с $a=\dfrac{d_1+d_2}{2}$ и $\sigma=\dfrac{d_2-d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

9.10. Случайная величина распределена нормально с $\sigma=5$. Найти длину интервала симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадает СВ.

9.11. Производится измерение размеров детали. Средняя ошибка измерения равна 0,1 мм, среднее квадратическое отклонение ошибки равно 0,5 мм. Найти вероятность того, что отклонение измерения от среднего значения не превосходит по абсолютной величине 0,3.

9.12. Производится измерение длины заготовки детали. Длина заготовки есть СВ, подчиненная нормальному закону с $a = 20$ см, $\sigma = 0{,}5$ см. Найти вероятность того, что две измеренные длины заготовки будут лежать в интервале (19,5; 20,5) в трех измерениях.

Домашние задания

9.13. СВ X распределена равномерно на интервале (2; 4). Записать $p(x)$, $F(x)$ и вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

9.14. Непрерывная СВ X распределена по показательному закону с функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-0{,}6x}; & x > 0. \end{cases}$ Найти вероятность попадания СВ в интервал (2; 5).

9.15. Среднее время обслуживания покупателя 20 минут. Чему равна вероятность того, что покупатель простоит в очереди от 20 до 40 минут.

9.16. Производится измерение размеров детали без систематических ошибок. Вероятность того, что ошибка измерения по абсолютной величине не превосходит 2 мм, равна 0,8. Найти среднее квадратическое отклонение ошибки измерения.

9.17. СВ X – ошибка измерительного прибора, распределена по нормальному закону с $a = 0, \sigma = 3$ мм. Найти вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале (0,2; 4).

Ответы:

9.1. $p(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5; \\ 0{,}125; & -5 < x \le 3;, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5; \\ \dfrac{x+5}{8}, & -5 < x \le 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$

9.2. $(M(X)=5;\ D(X)=3;\ \sigma(X)=1,73;$ **9.3.** 0,6;

9.4. $M(X)=\dfrac{1}{5};\quad D(X)=\dfrac{1}{25};\quad P(0,1<X<0,3)=0,38;$

9.5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-x/5}, & x>0;\end{cases}\qquad P(X<5)=0,63;$

9.6. а) 0,95; б) 0,05; **9.7.** 0,1026; **9.8.** а) 0,976; б) 0,9987; в) 0,9987;
9.9. 0,0456; **9.10.** 30; **9.11.** 0,4514; **9.12.** 0,44.

9.13. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 1/2; & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}\quad M(X)=3;\ D(X)=1/3.$

9.14. 0,251; **9.15.** 0,23; **9.16.** 1,56; **9.17.** 0,762.

Занятие 10. Предельные теоремы теории вероятностей

Краткие теоретические сведения

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение СВ X от ее математического ожидания по модулю меньше данного числа ε, не менее, чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (10.1)$$

Теорема Чебышева. Пусть даны СВ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, которые попарно независимы, имеют математические ожидания $M(X_i)$ и дисперсии, ограниченные одним и тем же числом C: $D(X_i)\le C.$ Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (10.2)$$

Если СВ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ имеют одно и то же математическое ожидание $M(X_i) = a,$ то неравенство (10.2) примет вид

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (10.3)$$

Переходя в неравенстве (10.3) к пределу при $n \to \infty,$ получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

В этом случае говорят, что при $n \to \infty$ последовательность СВ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}$ сходится по вероятности к своему математическому ожиданию a.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность $p = P(A)$ появления события A постоянна, то вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p по модулю не превзойдет положительного числа $\varepsilon > 0,$ больше, чем разность $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (10.4)$$

Переходя в неравенстве (10.4) к пределу при $n \to \infty,$ получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При большом числе испытаний относительная частота $\frac{m}{n}$ события A сходится по вероятности к вероятности p появления события в отдельном испытании.

Центральная предельная теорема Ляпунова. Пусть $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ – последовательность независимых СВ, для каждой из которых существует математическое ожидание $M(X_i) = m_i$ и дисперсия $D(X_i) = \sigma_i^2$, центральный момент третьего порядка $M(X_i - m_i)^3$ и выполняется условие Ляпунова $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i - m_i)^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$

Тогда при $n \to \infty$ функция распределения $F_n(x) = P(Y_n < x)$ СВ $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ стремится к нормальной функции распределения

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sigma(Y_n)\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t - M(Y_n))^2}{2\sigma(Y_n)}} dt.$$

Задача 1. Средняя длина детали равна 50 см, а дисперсия длины равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не менее 49,5 см и не более 50,5 см.

Решение. По условию задачи $M(X) = 50$ см, а $49{,}5 \le X \le 50{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow |X - M(X)| < 0{,}5.$ Так как СВ X непрерывна, то

$$P(|X - M(X) \le \varepsilon|) = P(|X - M(X)| < \varepsilon).$$

Применяя неравенство (10.1), получим

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) = P(|X - 50| < 0{,}5) \ge 1 - \frac{0{,}1}{0{,}5^2} = 0{,}6.$$

Задача 2. При штамповке деталей брак составляет 3 %. Найти вероятность того, что при проверке партии из 1000 деталей выявится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 1 %.

Решение. По условию задачи $n = 1000, \varepsilon = 0{,}010, p = 0{,}03.$ Воспользуемся неравенством (10.5):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{1000 \cdot \left(0{,}01\right)^2} = 0{,}709.$$

Задача 3. Складываются 48 независимых СВ $\{X_i\}$, распределенных по равномерному закону на интервале (0; 1). Записать приближенно функцию распределения суммы этих СВ. Найти вероятность того, что эта сумма будет заключена в пределах от 26 до 28.

Решение. $M\left(X\right) = \frac{a+b}{2} = 0{,}5;\ D\left(X\right) = \frac{\left(b-a\right)^2}{12} = \frac{1}{12}.$ Обозначим СВ $Y = \sum_{i=1}^{48} X_i,\ M\left(Y\right) = M\left(\sum_{i=1}^{48} X_i\right) = 48 \cdot M\left(X_i\right) = 24,\ D\left(Y\right) = D\left(\sum_{i=1}^{48} X_i\right) =$ $= 48 \cdot D\left(X_i\right) = 4.$

Тогда $\sigma(Y) = \sqrt{D\left(Y\right)} = 2$ и функция распределения СВ Y имеет вид

$$F\left(y\right) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{y-24}{2}\right).$$

Найдем вероятность попадания СВ Y в интервал (26; 28).

$$P\left(26 < Y < 28\right) \approx \Phi\left(\frac{28-24}{2}\right) - \Phi\left(\frac{26-24}{2}\right) =$$
$$= \Phi\left(2\right) - \Phi\left(1\right) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

Аудиторные задания

10.1. Дискретная СВ задана законом распределения

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

Найти вероятность того, что $\left|X - M(X)\right| < 2$ и оценить эту вероятность с помощью неравенства Чебышева.

10.2. Расход технической воды на предприятии составляет 5000 л в день, а среднее квадратическое отклонение этой величины не превышает 100 л. Оценить вероятность того, что расход воды будет заключен от 4500 л до 5500 л.

10.3. Выяснить, применима ли теорема Чебышева к последовательности СВ, если последовательность имеет распределение

x_n	$-5n$	0	$5n$
p_n	$\frac{1}{3n^2}$	$1-\frac{2}{3n^2}$	$\frac{1}{3n^2}$

10.4. Для определения урожайности поля из 200 га взяли выборку из каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия урожайности не превосходит 2 ц^2. Оценить вероятность того, что отклонение средней урожайности поля от средней рассчитанной по выборке урожайности не превосходит 0,2 ц.

10.5. Сколько раз нужно измерить величину с истинным значением a, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a по абсолютной величине не более, чем на 2, если $\sigma < 10$.

10.6. Вероятность появления события в отдельном испытании равна 0,6. Применяя теорему Бернулли, определить то число независимых испытаний, начиная с которого

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) > 0{,}97.$$

10.7. Число телевизоров повышенного качества составляет в среднем 40 % общего объема выпуска. Оценить вероятность того, что в партии из 500 доля телевизоров повышенного качества отличается от средней по модулю не более, чем 0,06.

10.8. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70 %. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по модулю 0,01.

10.9. Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято наудачу по одной лампе из ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения a во всей партии по модулю меньше, чем на 5 ч, если известно, что $\sigma = 7$ ч.

10.10. Складываются 50 независимых СВ, распределенных по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Оценить функцию распределения суммы СВ и найти вероятность попадания суммы СВ в интервал (8; 12).

10.11. Номинальное значение диаметра втулки 5 мм, дисперсия, вследствие погрешности изготовления, не превосходит 0,001 мм^2. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более, чем на 0,05 мм.

10.12. Электронная система состоит из 45 элементов одинаковой надежности, равной 0,95 за время T. Найти вероятность того, что доля безотказно работающих элементов в течение времени T отличается от 0,95 не более, чем на 0,1.

Домашние задания

10.13. Дискретная СВ задана законом распределения

x_i	0,3	0,6
p_i	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - M(X)\right| < 0,2.$

10.14. Последовательность СВ $\{X_i\}$ задана законом

x_i	a	$-a$
p_i	$\dfrac{n}{2n+1}$	$\dfrac{n+1}{2n+1}$

Применима ли к этой последовательности СВ теорема Чебышева?

10.15. Начиная с какого числа n независимых испытаний, выполняется неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}1\right)>0{,}97,$ если при отдельном испытании $p=0{,}8$?

10.16. По данным ОТК брак при выпуске деталей составляет 2,5 %. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 8000 деталей, будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005.

10.17. Монета бросается 1000 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты появления герба от вероятности появления герба в отдельном испытании менее, чем на 0,1.

10.18. Электростанция обслуживает цепь из 18000 электролампочек. Вероятность включения каждой лампочки равна 0,9. Оценить вероятность того, что число включенных лампочек отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200.

10.19. Пассажирский поезд состоит из 25 вагонов. Время досмотра каждого вагона на таможне T_i имеет нормальное распределение ($a=10$ мин, $\sigma=2$ мин). При проверке таможенники последовательно переходят от вагона к вагону. Какова вероятность того, что стоянка поезда на границе будет от четырех до пяти часов?

Ответы: 10.1. $p=0{,}85$; $p\geq 0{,}585$; **10.2.** $p\geq 24/25$; **10.3.** Применима; **10.4.** $p>0{,}75$; **10.5.** 500; **10.6.** 801; **10.7.** $p\geq 0{,}8667$; **10.8.** $p\geq 0{,}79$; **10.9.** $p>0{,}9902$; **10.10.** $F(y)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{y-10}{\sqrt{2}}\right)$; $p=0{,}8414$; **10.11.** 0,6; **10.12.** $p\geq 0{,}8945$; **10.13.** $p\geq 0{,}64$;

10.14. Применима; **10.15.** 534; **10.16.** $p > 0,878$; **10.17.** $p \ge \frac{39}{40}$; **10.18.** $p \ge 0,9595$; **10.19.** 0,8413.

Занятие 11. Двумерные случайные величины. Законы распределения. Условные законы распределения

Краткие теоретические сведения

Двумерной СВ называется совокупность двух случайных величин (X, Y), описывающих тот или иной случайный эксперимент. СВ X и Y называются составляющими двумерной случайной величины.

Если составляющие двумерной СВ являются дискретными СВ, то двумерная СВ называется *дискретной*, если составляющие являются непрерывными СВ, то двумерная СВ называется *непрерывной*. Если одна из составляющих является дискретной, а вторая – непрерывной, то двумерная величина называется *смешанной*.

Законом распределения дискретной двумерной СВ называется соответствие между всевозможными парами СВ $(x_i; y_i)$ и вероятностями их появления $p_{ij} = P\left(X = x_i; Y = y_j\right)$. Закон распределения дискретных двумерных СВ задается в виде таблицы

Y	X			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Если известен закон распределения двумерной дискретной СВ, то законы распределения составляющих находятся следующим образом:

$$P\left(X = x_i\right) = p_{1i} + p_{2i} + p_{3i} + \ldots + p_{mi} = \sum_{l=1}^{m} p_{li} \ ;$$

$$P\left(Y = y_j\right) = p_{j1} + p_{j2} + p_{j3} + \ldots + p_{jn} = \sum_{l=1}^{n} p_{jl}.$$

Функцией распределения двумерной СВ называется вероятность события $\left(X < x; Y < y\right)$

$$F\left(x; y\right) = P\left(X < x; Y < y\right).$$

Функция распределения вероятностей двумерной СВ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F\left(x;\, y\right) \le 1.$

2. $F\left(-\infty; y\right) = F\left(x; -\infty\right) = F\left(-\infty; -\infty\right) = 0.$ (11.1)

3. $F\left(+\infty; +\infty\right) = 1.$

4. $F\left(+\infty; y\right) = F_2\left(y\right);$ $F\left(x; +\infty\right) = F_1\left(x\right),$ где $F_1\left(x\right), F_2\left(y\right)$ – функции распределения составляющих X и Y.

5. *Функция распределения* $F\left(x;\, y\right)$ является *неубывающей* функцией по каждому из своих аргументов.

Функция $p\left(x;\, y\right)$ называется *плотностью распределения* вероятностей двумерной СВ (X;Y), если она удовлетворяет соотношению

$$F(x;y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(s,t)\, ds\, dt.$$

Плотность распределения вероятностей двумерной СВ обладает следующими свойствами:

1. $p\left(x;\, y\right) \ge 0.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx\, dy = 1.$

3. $p\left(x;\, y\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$

4. $P\left(\left(x;\, y\right) \in D\right) = \iint\limits_D p\left(x;\, y\right) dx\, dy.$

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = p_2(y); \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = p_1(x).$

Чтобы задать закон распределения непрерывной двумерной СВ, достаточно задать либо функцию распределения, либо плотность распределения.

Условным законом распределения называется закон распределения одной из составляющих при условии, что вторая составляющая приняла определенное значение.

Для дискретных двумерных СВ условные вероятности определяются по формулам:

$$P\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i; Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)},$$
$$P\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i; Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)}. \tag{11.2}$$

Условные плотности распределения находятся по формулам:

$$p\left(x/y\right) = \frac{p(x;y)}{p_2(y)}; \quad p\left(y/x\right) = \frac{p(x;y)}{p_1(x)}, \tag{11.3}$$

где $p_1(x)$, $p_2(y)$ – плотности распределения составляющих X, Y.

Составляющие X и Y двумерной СВ называются независимыми, если $F(x;y) = F_1(x)F_2(y)$ или $p(x;y) = p_1(x)\,p_2(y)$.

Задача 1. Двумерная дискретная СВ задана законом распределения

Y	X			
	1	2	3	4
0	0,04	0,08	0,06	0,02
1	0,15	0,20	0,12	0,03
2	0,01	0,22	0,02	0,05

Требуется найти законы распределения составляющих и условный закон распределения составляющей X при условии, что $Y = 1$.

Решение. Законы распределения составляющих X и Y найдем с использованием формул (11.1).

$$P(X = 1) = 0,04 + 0,15 + 0,01 = 0,20;$$

$$P(X = 2) = 0,08 + 0,20 + 0,22 = 0,5;$$

$$P(X = 3) = 0,06 + 0,12 + 0,02 = 0,20;$$

$$P(X = 4) = 0,02 + 0,03 + 0,05 = 0,1.$$

Тогда закон распределения составляющих X имеет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,5	0,2	0,1

Аналогично находится закон распределения составляющей Y.

$$P(Y = 0) = 0,04 + 0,08 + 0,06 + 0,02 = 0,2;$$

$$P(Y = 1) = 0,15 + 0,20 + 0,12 + 0,03 = 0,5;$$

$$P(Y = 2) = 0,01 + 0,22 + 0,02 + 0,05 = 0,3.$$

y_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Условный закон распределения составляющей X при условии, что $Y = 1$, найдем с использованием формул (11.2).

$$P(X = 1/Y = 1) = \frac{p(X = 1; Y = 1)}{p(Y = 1)} = \frac{0,15}{0,5} = 0,3;$$

$$P\left(X=2/Y=1\right)=\frac{0,2}{0,5}=0,4;$$

$$P\left(X=3/Y=1\right)=\frac{0,12}{0,5}=0,24;$$

$$P\left(X=4/Y=1\right)=\frac{0,03}{0,5}=0,06.$$

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i/Y=1)$	0,3	0,4	0,24	0,06

Задача 2. Дана функция распределении двумерной СВ

$$F\left(x;y\right)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & \text{если } x>0;\ y>0;\\ 0, \quad \text{если } x\le 0 \text{ или } y\le 0. & \end{cases}$$

Требуется найти плотность распределения $p\left(x;y\right)$ и условные плотности распределения $p\left(x/y\right)$ и $p\left(y/x\right)$.

Решение. Плотность распределения найдем, используя свойство 3 плотности распределения:

$$p\left(x;y\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y};\quad p\left(x,y\right)=\begin{cases}e^{-x-y}, & \text{если } x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{если } x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Плотности распределения составляющих найдем, используя свойство 5 плотности распределения

$$p_1\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p\left(x;y\right)dy=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x-y}dy=e^{-x}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-y}dy=$$
$$=-e^{-x}e^{-y}\Big|_0^{\infty}=e^{-x},\quad p_2\left(y\right)=e^{-y}.$$

Условные плотности распределения составляющих найдем с использованием формул (11.3).

$$p(x/y)=\frac{p(x;y)}{p(y)}=\frac{e^{-x-y}}{e^{-y}}=e^{-x}; \quad p(y/x)=e^{-y}.$$

Так как условные плотности распределения вероятностей совпадают с плотностями распределения составляющих, то составляющие являются независимыми СВ.

Аудиторные задания

11.1. Дискретная двумерная СВ задана законом распределения

Y	X		
	–1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Требуется найти законы распределения составляющих и условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X=0$.

11.2. Дискретная двумерная величина задана законом распределения

X	Y			
	1	2	3	4
10	0,2	0,02	0,01	0
20	0,03	0,3	0,02	0
30	0,02	0,1	0,2	0,1

Найти законы распределения составляющих и условное распределение СВ Y при условии, что $Y = 30$.

11.3. Найти плотность распределения двумерной СВ (*X*; *Y*), если ее функция распределения имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0<y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x\le 0 \text{ или } y\le 0;\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \text{ или } y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

11.4. Дана функция распределения двумерной СВ (*X*; *Y*)

$$F(x;y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right) \text{ при } x>0;\, y>0;\\ 0, \quad x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента составляющие примут значения $(X<2, Y<4)$.

11.5. Дана плотность распределения двумерной СВ (*X*; *Y*)

$$p(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x<0, \text{ или } y<0, \text{ или } x>\dfrac{\pi}{2}, \text{ или } y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

11.6. Дана плотность распределения двумерной СВ (*X*; *Y*)

$$p(x,y)=\begin{cases}C\sin(2x+2y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\quad 0\le y\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Определить значение параметра *C*.

11.7. Двумерная СВ (*X*; *Y*) задана плотностью распределения

$$p(x;\,y)=\begin{cases}Ae^{-x-y}, & x>0;\ y>0;\\ 0, & x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

Требуется найти значение параметра A, плотности распределения составляющих и условные плотности распределения.

11.8. Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x;y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Найти функцию распределения.

11.9. Двумерная СВ распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат. Найти плотность распределения и плотности распределения составляющих.

11.10. Двумерная СВ (X,Y) задана плотностью распределения

$$p(x,y)=\begin{cases} C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le R; \\ 0, & x^2+y^2>R^2. \end{cases}$$

Найти: а) параметр C; б) вероятность попадания СВ (X,Y) в круг радиуса 1 с центром в начале координат, если $R=2$.

Домашние задания

11.11. Двумерная СВ задана законом распределения

Y	X		
	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) законы распределения составляющих; б) условный закон распределения СВ Y при условии, что $X=5$.

11.12. Задана функция распределения двумерной СВ

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, \; x\ge 0,\; y\ge 0; \\ 0, \quad x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

11.13. Двумерная СВ распределена равномерно внутри треугольника с вершинами $O(0;0), A(8;0), B(0;8)$. Найти: а) плотность распределения СВ $(X;Y)$; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения.

11.14. Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x\ge 0,\ y\ge 0; \\ 0, & x<0 \text{ или } y<0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания СВ (X,Y) в область, ограниченную прямыми $x=0;\ y=0,\ x=1,\ y=1$.

11.15. Найти плотность распределения двумерной СВ (X,Y), если

$$F(x,y)=\begin{cases} \left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right), & x\ge 0,\ y\ge 0; \\ 0, & x<0, \text{или } y<0. \end{cases}$$

11.16. Заданы плотности распределения независимых составляющих двумерной СВ

$$(X,Y)\quad p_1(x)=\begin{cases} 5e^{-5x}, & x\ge 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}\quad p_2(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y\ge 0; \\ 0, & y<0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения двумерной СВ $(X;Y)$; б) функцию распределения $F(x,y)$.

Ответы: 11.1.

x_i	–1	0	1
p_i	0,25	0,40	0,35

y_j	0	1
p_j	0,45	0,55

y_j	0	1
$P(y_i/X=0)$	3/8	5/8

11.2.

x_i	10	20	30
p_i	0,23	0,35	0,42

y_j	1	2	3	4
p_j	0,25	0,42	0,23	0,1

y_j	1	2	3	4
$P(y_i/X=30)$	1/21	5/21	10/21	5/21

11.3. $p(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \quad 0<y\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ **11.4.** 0,849;

11.5. $$F(x;y)=\begin{cases}0, \quad x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x-\cos x), \quad x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right], \quad y>\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}(1+\sin y-\cos y), \quad x>\dfrac{\pi}{2}, \quad y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right];\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), \quad x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right], \quad y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right];\\ 1, \quad x>\dfrac{\pi}{2}, \quad y>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

11.6. $C=2$; **11.7.** $A=1$, $p_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}$ $p_2(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

$p(x/y)=p_1(x), \quad p(y/x)=p_2(y);$

11.8. $F(x;y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right);$

11.9. $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4ab}, \ -a\le x\le a, -b\le y\le b;\\ 0, \ \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

$p_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x|\le a;\\ 0, & |x|>a;\end{cases}$ $p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & |y|\le b;\\ 0, & |y|>b.\end{cases}$

11.10. $C = \dfrac{3}{8\pi}$; $p = 0,5$;

11.11.

y_j	0,4	0,8
p_j	0,8	0,2

y_j	0,4	0,8
$p\left(y_j / X = 5\right)$	5/7	2/7

x_i	2	5	8
p_i	0,2	0,42	0,38

11.12. $\left(p(x,y) = \begin{cases} 3^{-x-y}\ln^2 3, & x>0,\ y>0; \\ 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0. \end{cases} \right)$;

11.13. $p(x,y) = \begin{cases} 1/32, & x \in D; \\ 0, & \text{в ост. случ.}; \end{cases}$ $p(x/y) = p(y/x) = 1/8$;

11.14. $\dfrac{(e-1)^2}{2e^2}$; **11.15.** $p(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0; \\ 0, & x \le 0, \text{ или } y \le 0. \end{cases}$

11.16.

$$p(x,y) = \begin{cases} 10e^{-5x-2y}, & x>0,\ y>0; \\ 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0. \end{cases}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-5x}\right)\left(1-e^{-2y}\right), & x>0,\ y>0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \text{ или } y \le 0. \end{cases}$$

Занятие 12. Числовые характеристики двумерных случайных величин. Коэффициент корреляции

Краткие теоретические сведения

Начальным моментом порядка $k+s$ двумерной СВ (X,Y) называется математическое ожидание произведения X^kY^s

$$M_{ks} = M\left(X^kY^s\right).$$

Для непрерывных СВ

$$M_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s p(x,y)\,dx\,dy,$$

для дискретных

$$M_{ks} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}.$$

Центральным моментом порядка $k+s$ двумерной СВ (X,Y) называется математическое ожидание произведения $(X-m_x)^k (Y-m_y)^s$. $\mu_{ks} = M\left((X-m_x)^k (Y-m_y)^s\right)$, где

$$m_x = M(X), \quad m_y = M(Y).$$

Для непрерывной двумерной СВ центральный момент порядка $k+s$ вычисляется по формуле

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^s p(x,y)\,dx\,dy,$$

для дискретных СВ

$$\mu_{ks} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij},$$

где $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Корреляционным моментом двумерной СВ называется центральный момент μ_{11}. Для непрерывной СВ корреляционный момент вычисляется по формуле

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y)\, p(x,y)\,dx\,dy,$$

для дискретных

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y)\, p_{ij}.$$

Корреляционный момент характеризует тесноту линейной связи между составляющими X и Y.

Коэффициентом корреляции СВ X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений составляющих

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{12.1}$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$.

2. $r_{xy} = r_{yx}$.

3. Если зависимость между СВ X и Y отсутствует, то $r_{xy} = 0$. Если $r_{xy} = 1$, то зависимость между СВ X и Y линейная. СВ X и Y, для которых $r_{xy} = 0$, называются *некоррелированными*. Очевидно, что независимые СВ некоррелированы. Обратное утверждение верно лишь при условии нормального распределения двумерной СВ (X, Y).

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{12.2}$$

Задача 1. Двумерная СВ задана таблицей

X	Y		
	–1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Вычислить коэффициент корреляции.

Решение. Составим законы распределения составляющих:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_j	–1	0	1
p_i	0,2	0,35	0,45

Вычислим математические ожидания и средние квадратические отклонения составляющих:

$$M(X) = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,2 = 1,2,$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,45 = 0,25,$$

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,2 = 1,6,$$

$$M\left(Y^2\right) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_j = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,45 = 0,65,$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = 1,6 - 1,44 = 0,16,$$

$$D(Y) = M\left(Y^2\right) - \left(M(Y)\right)^2 = 0,65 - \left(0,25\right)^2 = 0,5875,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,16} = 0,4; \quad \sigma(Y) = \sqrt{0,5875} = 0,77,$$

$$M(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot (-1) \cdot 0,15 + 1 \cdot 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 1 \cdot 0,35 +$$
$$+2 \cdot (-1) \cdot 0,05 + 2 \cdot 0 \cdot 0,05 + 2 \cdot 1 \cdot 0,1 = -0,15 + 0,35 - 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (12.2):

$$r_{xy} = \frac{0,3 - 1,2 \cdot 0,25}{0,4 \cdot 0,77} = 0.$$

Составляющие X и Y являются некоррелированными СВ. Очевидно, что независимые СВ некоррелированы. Обратное утверждение верно лишь при условии нормального распределения двумерной СВ (X, Y).

Задача 2. Непрерывная двумерная СВ задана плотностью распределения

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & \text{если } 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции.

Решение. Найдем математические ожидания составляющих

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi}{4};$$

$$M(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}.$$

Найдем дисперсии

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2,$$

$$D(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Вычислим корреляционный момент

$$K_{xy}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+y\right)dx\,dy=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1.$$

Коэффициент корреляции вычислим по формуле (12.1):

$$r_{xy}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=\frac{8\pi-\pi^2-16}{\pi^2+8\pi-32}=-\frac{\left(\pi-4\right)^2}{\left(\pi+4\right)^2-48}.$$

Аудиторные задания

12.1. Двумерная СВ задана законом распределения

Y	X			
	1	2	3	4
0	0,07	0,04	0,11	0,11
1	0,08	0,11	0,06	0,08
2	0,09	0,13	0,10	0,02

Вычислить коэффициент корреляции и выяснить, зависимы ли составляющие.

12.2. Непрерывная двумерная СВ задана плотностью распределения вероятностей

$$p\left(x,y\right)=\begin{cases}c\left(x+y\right), & \text{если } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти: а) параметр c; б) коэффициент корреляции.

12.3. Двумерная дискретная СВ задана законом распределения

Y	X		
	0	1	2
0	1/4	0	0
1	1/3	1/6	0
2	1/9	1/9	1/36

Вычислить: $M(X)$, $M(Y)$, $M(X/Y=2)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

12.4. Задана плотность распределения двумерной СВ

$$p(x,y)=\begin{cases} 2\cos x\cos y, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{вне квадрата.}\end{cases}$$

Найти математические ожидания составляющих.

12.5. Случайные величины X и Y независимы и распределены по показательному закону с параметрами $\lambda_1=0{,}1$; $\lambda_2=0{,}4$. Найти плотность распределения двумерной СВ (X,Y) и вычислить $M(XY)$.

12.6. СВ (X,Y) распределена равномерно в квадрате $S=\{(x,y)|\ x\in[0;1],\ y\in[0;1]\}$. Показать, что СВ X и Y некоррелированы.

12.7. Задан закон распределения СВ (X,Y)

X	Y				
	–2	–1	0	1	2
–1	1/8	1/16	1/8	1/16	1/8
1	1/8	1/16	1/8	1/16	1/8

Являются ли коррелированными СВ X и Y?

12.8. Дана плотность распределения двумерной СВ $p(x, y) = Axy$ внутри треугольника, ограниченного прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $p(x, y) = 0$ вне этого треугольника. Найти: A, r_{xy}.

Домашние задания

12.9. Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(x^2 + y^2\right), & |x| \le 1, \ |y| \le 1; \\ 0, & |x| > 1 \text{ или } |y| > 1. \end{cases}$$

Выяснить, зависимы ли составляющие X и Y.

12.10. Дана плотность распределения двумерной СВ

$$p(x, y) = \begin{cases} a\left(1 - xy^3\right), & |x| \le 1, \ |y| \le 1; \\ 0, & |x| > 1 \text{ или } |y| > 1. \end{cases}$$

Найти a и r_{xy}.

12.11. Двумерная СВ (X, Y) имеет закон распределения

Y	X		
	–1	0	1
0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	1/6	1/12

Найти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

12.12. Двумерная СВ (X, Y) задана законом распределения

X	Y			
	6	5	4	3
0,1	0,2	0,1	0,1	0
0,2	0,1	0,2	0,15	0
0,3	0	0	0,05	0,1

Будут ли зависимы составляющие X и Y?

12.13. Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x,y)=\begin{cases}2\sin(2x+2y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

Ответы: 12.1. –0,24, зависимы; **12.2.** $C=1;\ r_{xy}=-\dfrac{1}{11}$;
12.3. $M(X)=\dfrac{1}{3}, M(Y)=1, M(X/Y=2)=\dfrac{2}{3}, D(X)=\dfrac{5}{18}, D(Y)=\dfrac{1}{2},$
$r_{xy}=0,45$; **12.4.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}$;
12.5. $p(x,y)=\begin{cases}0,04e^{-0,1x-0,4y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & x\le 0 \text{ или } y<0;\end{cases}$ $M(XY)=25$;
12.7. Нет; **12.8.** $A=24$, $r_{xy}=-\dfrac{2}{3}$; **12.9.** Да; **12.10.** $a=\dfrac{1}{4};\ r_{xy}=-\dfrac{1}{5}$;
12.11. $M(X)=0,\quad M(Y)=\dfrac{2}{3},\quad D(X)=\dfrac{1}{3},\quad D(Y)=\dfrac{8}{9},\quad r_{xy}=0;$
12.12. Да. **12.13.** $M(X)=M(Y)=\dfrac{\pi}{8}, D(X)=D(Y)=\dfrac{\pi^2}{64}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2},$

$$r_{xy}=-\frac{(\pi-4)^2}{(\pi+4)^2-48}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Занятие 1. Статистическое распределение. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики выборки

Краткие теоретические сведения

Генеральной совокупностью называется совокупность элементов, объединенных по некоторому признаку, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью или выборкой называется совокупность объектов, случайно выбранных для исследования.

Объемом выборки называется количество объектов, входящих в выборку.

Пусть из совокупности извлечена выборка объемом n.

Выборочная совокупность, расположенная по возрастанию или убыванию значения признака, называется *вариационным рядом*, а ее объекты – *вариантами*.

Если значения вариант совпадают или отличаются незначительно, то их можно сгруппировать, придав частоту каждой варианте. В результате получим сгруппированный вариационный ряд.

Частостью или относительной частотой варианты называется отношение частоты варианты к объему выборки

$$\omega_i = \frac{m_i}{n}.$$

Статистическим распределением называется соответствие, по которому каждому возможному значению варианты ставится в соответствие частота (относительная частота) ее появления. Статистическое распределение записывается в виде таблицы, в которой в первой строке перечислены все значения вариант, а во второй – частоты или частости, которые соответствуют вариантам

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
m_i	m_1	m_2	m_3	…	m_k

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Для построения интервального статистического ряда разбивают множество вариант на полуинтервалы $\left[a_i; a_{i+1}\right)$, т. е. производят группировку. Рекомендуется число интервалов k определять по формуле

$$k = 1 + 1,4 \cdot \ln n.$$

Длина интервала равна

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Для наглядности используются графические изображения варицонных рядов в виде полигона и гистограммы.

Полигоном частот или частостей называется ломаная линия, соединяющая точки с координатами $\left(x_i; m_i\right)$ или $\left(x_i; \omega_i\right)$.

Гистограммой частот или частостей называют ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с основанием Δ и высотой $\frac{m_i}{\Delta}$ или $\frac{\omega_i}{\Delta}$.

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*\left(x\right)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*\left(x\right) = \omega\left(X < x\right) = \frac{m_x}{n},$$

где m_x – число вариант (с учетом их кратностей), меньших x;

n – объем выборки.

Эмпирическая функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку $\left[0; 1\right]$.

2. Эмпирическая функция является неубывающей функцией.

3. Если x_1 – наименьшее значение варианты, а $x_к$ – наибольшее значение варианты, то $F^*\left(x\right) = 0$ при $x \le x_1$ и $F^*\left(x\right) = 1$ при $x > x_k$.

Для описания выборки применяются такие числовые характеристики, как выборочная средняя, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Выборочной средней называется среднее значение варианты, вычисленное по данным выборки:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ или } \overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i,$$

где m_i – частота варианты x_i.

Выборочной дисперсией называется дисперсия, вычисленная по данным выборки:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 \text{ или } D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2.$$

Выборочная дисперсия равна разности между средним значением квадрата вариант и квадратом выборочного среднего:

$$D_в = \overline{X^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2, \text{ где } \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из выборочной дисперсии $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Задача 1. По данному распределению выборки найти эмпирическую функцию распределения и построить полигон частот.

x_i	1	3	5	7	9
m_i	6	11	23	7	3

Решение.

Определим объем выборки $m = \sum_{i=1}^{k} m_i = 6 + 11 + 23 + 7 + 3 = 50.$

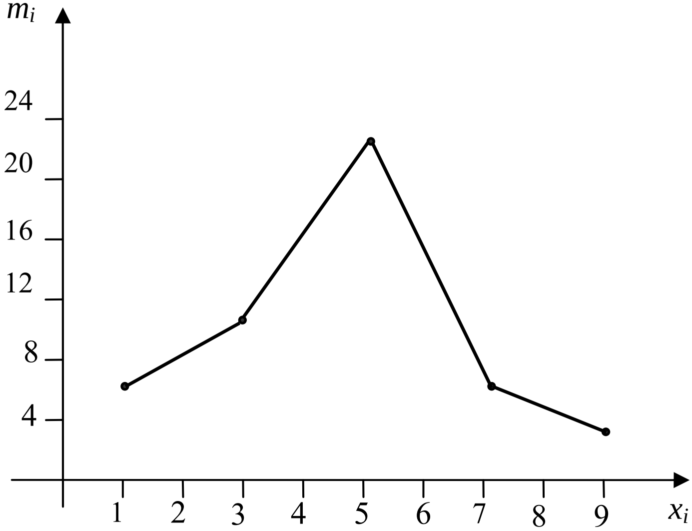
Определим относительные частоты вариант $\omega_i = \frac{m_i}{n}$.

x_i	1	3	5	7	9
ω_i	0,12	0,22	0,46	0,14	0,06

Запишем эмпирическую функцию распределения

$$F^*(x) = \omega(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0{,}12, & 1 < x \le 3; \\ 0{,}34, & 3 < x \le 5; \\ 0{,}80, & 5 < x \le 7; \\ 0{,}94, & 7 < x \le 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Построим полигон частот.



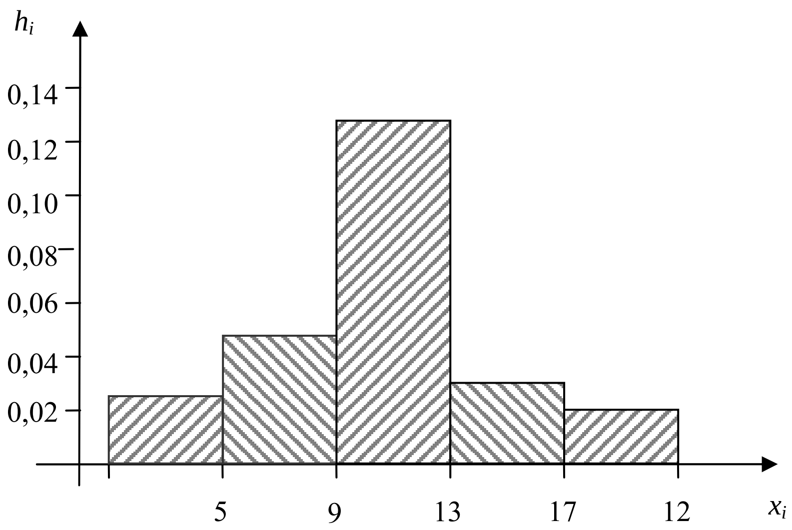
Задача 2. Построить гистограмму частостей по данным выборки объема 100 и вычислить числовые характеристики выборки.

$x_i - x_{i+1}$	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21
m_i	10	20	50	12	8

Решение. Вычислим относительные частоты по формуле $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$ и найдем высоты прямоугольников по формуле $h_i = \dfrac{\omega_i}{h}$, где $h = 4$. Вычисления сведем в таблицу.

$x_i - x_{i+1}$	1–5	5–9	9–13	13–17	17–21
ω_i	0,1	0,2	0,5	0,12	0,08
h_i	0,025	0,05	0,125	0,03	0,02

Построим гистограмму частостей.



Вычислим числовые характеристики выборки

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^{*} m_i = \frac{1}{100}\left(3\cdot 10 + 7\cdot 20 + 11\cdot 50 + 15\cdot 12 + 19\cdot 8\right) =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot\left(30 + 210 + 550 + 180 + 152\right) = \frac{1122}{100} = 11,22.$$

$$D_в = \overline{X^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2.$$

Вычислим $D_в$ и $\sigma_в$:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^{*}\right)^2 m_i = \frac{1}{100}\left(9\cdot 10 + 49\cdot 20 + 121\cdot 50 + 225\cdot 12 + 361\cdot 8\right) =$$

$$= \frac{1}{100}\left(90 + 980 + 6050 + 2700 + 2888\right) = \frac{12708}{100} = 127,08.$$

$$D_в = 127,08 - \left(11,22\right)^2 = 1,1916.\ \ \sigma_в = 1,092.$$

Аудиторные задания

1.1. Даны измерения отклонений от номинала 50 подшипников в мкм:

– 1,752,	– 0,291,	– 0,933,	– 0,450,	0,512,
– 1,256,	1,701,	0,634,	0,720,	0,490,
1,531,	– 0,433,	1,409,	1,730,	– 0,266,
– 0,058,	0,248,	– 0,095,	– 1,488,	– 0,361,
0,415,	– 1,382,	0,129,	– 0,361,	– 0,087,
– 0,329,	0,086,	0,130,	– 0,244,	– 0,882,
0,318,	– 1,087,	0,899,	1,028,	– 1,304,
0,349,	– 0,293,	– 0,883,	– 0,056,	0,757,
– 0,059,	– 0,539,	– 0,078	0,229,	0,194,
– 1,084,	0,318,	0,367,	– 0,992,	0,529.

Построить для данной выборки интервальный статистический ряд.

1.2. Измеряется рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов:

178,	160,	150,	183,	155,	153,	167,	186,	163,	155,
157,	175,	170,	166,	159,	173,	182,	167,	171,	169,
179,	165,	156,	179,	158,	171,	175,	173,	164,	172.

Построить интервальный статистический ряд.

1.3. По данным выборки объемом 100 найти эмпирическую функцию и построить полигон частот.

$x_i - x_{i+1}$	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
m_i	6	12	33	22	19	8

1.4. Найти эмпирическую функцию распределения и построить полигон частостей по следующим данным.

x_i	1	2	3	4	5
m_i	4	6	16	26	48

1.5. Построить гистограмму частот по данным выборки.

$x_i - x_{i+1}$	2–7	7–12	12–17	17–22	22–27
m_i	5	10	25	6	4

1.6. Построить гистограмму частостей и найти эмпирическую функцию распределения по данным выборки объемом 100.

$x_i - x_{i+1}$	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
m_i	10	14	26	28	14	6	2

1.7. Найти числовые характеристики по данным выборки

а)

x_i	1	3	6	26
m_i	8	40	10	2

б)

$x_i - x_{i+1}$	40,1–40,2	40,2–40,3	40,3–40,4	40,4–40,5	40,5–40,6
m_i	7	24	34	26	9

1.8. Для проверки оборудования размельчения руды были случайно отобраны и измерены 50 образцов переработанного минерала. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

0,030; 0,559; 0,407; 2,784; 0,518; 1,185; 1,297;
0,614; 0,171; 0,155; 0,081; 30,02; 3,554; 1,155;
2,664; 1,889; 0,114; 6,038; 7,815; 0,074; 21,370;
0,412; 16,740; 31,820; 0,587; 2,010; 0,558; 0,171;
0,894; 4,545; 0,147; 1,642; 0,827; 0,051; 0,486;
0,889; 0,340; 0,856; 1,581; 1,474; 2,293; 0,063;
1,294; 0,009; 0,114; 1,889; 2,083; 0,138; 2,881;
0,114.

Домашние задания

1.9. Составить эмпирическую функцию распределения и построить полигон частостей по данным выборки

x_i	15	16	17	18	19
m_i	1	4	5	6	4

1.10. Составить эмпирическую функцию распределения и построить гистограмму частот по данным выборки.

$x_i - x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
m_i	1	2	7	18	12	8	2

1.11. Интервал движения поездов в метро составляет 2 минуты. Приведены значения случайной величины X – время ожидания пассажиром поезда. Составить интервальный вариационный ряд и найти среднее время ожидания.

0,000; 0,002; 0,007; 0,025; 0,089; 0,312; 1,068; 1,604; 0,014; 0,045; 1,747; 1,677; 0,341; 0,952; 0,645; 1,297; 1,981; 0,214; 1,452; 0,787; 1,654; 0,838; 0,143; 1,317; 0,618; 1,853; 1,555; 0,653; 1,922; 1,653; 0,617; 0,828; 1,413; 1,030; 1,459; 1,483; 1,769; 1,265; 1,669; 0,635; 0,787; 1,004; 0,941; 0,612; 1,200; 1,692; 1,356; 0,908; 1,245; 1,295.

1.12. Вычислить выборочную дисперсию по данным выборки.

x_i	340	360	375	380
m_i	20	50	18	12

1.13. Вычислить числовые характеристики выборки.

$x_i - x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
m_i	1	8	10	3	3

Ответы:

1.1.

$x_i - x_{i+1}$	–1,755 – (–1,255)	–1,255 – (–0,755)	–0,755 – (–0,255)	–0,255 – 0,245	0,245 – 0,745	0,745–1,245	1,245–1,745
m_i	5	6	9	12	11	3	4

1.2.

$x_i - x_{i+1}$	150–156	156–162	162–168	168–174	174–180	180–186
m_i	5	4	6	7	5	3

1.3. $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 9; \\ 0,06, & 9 < x \le 12; \\ 0,18, & 12 < x \le 15; \\ 0,51, & 15 < x \le 18; \\ 0,73, & 18 < x \le 21; \\ 0,92, & 21 < x \le 24; \\ 1, & x > 24; \end{cases}$$

1.4. $$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0,04, & 1 < x \le 2; \\ 0,1, & 2 < x \le 3; \\ 0,26, & 3 < x \le 4; \\ 0,52, & 4 < x \le 5; \\ 1, & x > 5; \end{cases}$$

1.6. $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 154;\\ 0,1, & 154<x\le 158;\\ 0,24, & 158<x\le 162;\\ 0,5, & 162<x\le 166;\\ 0,78, & 166<x\le 170;\\ 0,92, & 170<x\le 174;\\ 0,98, & 174<x\le 178;\\ 1, & x>178;\end{cases}$

1.7. а) $\overline{x}_в=4;\quad D_в=18,67;\quad \sigma_в=4,32;$

б) $\overline{x}_в=40,356;\quad D_в=0,011;\quad \sigma_в=0,105;$

1.8. $\overline{x}_в=3,188;\quad D_в=46,02;\quad \sigma_в=6,78;$

1.9. $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 15;\\ 0,05, & 15<x\le 16;\\ 0,25, & 16<x\le 17;\\ 0,5, & 17<x\le 18;\\ 0,8, & 18<x\le 19;\\ 1, & x>19;\end{cases}$ **1.10.** $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 10;\\ 0,02, & 10<x\le 20;\\ 0,06, & 20<x\le 30;\\ 0,20, & 30<x\le 40;\\ 0,56, & 40<x\le 50;\\ 0,80, & 50<x\le 60;\\ 0,96, & 60<x\le 70;\\ 1, & x>70;\end{cases}$

1.11. $\overline{x}_в=1,022;$ **1.12.** $D_в=167,29;$

1.13 $\overline{x}_в=34,6;\quad D_в=107,84;\quad \sigma_в=10,38.$

Занятие 2. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

Краткие теоретические сведения

Пусть изучается СВ X с законом распределения, зависящим от одного или нескольких параметров. Требуется по выборке, полученной в результате n испытаний, оценить неизвестный параметр θ.

Точечной оценкой неизвестного параметра θ теоретического распределения называется его приближенное значение, зависящее от данных выборки.

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n\right).$$

Точечная оценка должна удовлетворять следующим требованиям:

– оценка должна быть *несмещенной*, т. е. $M\left(\overline{\theta}\right) = \theta$;

– оценка должна быть *состоятельной*, т. е. она должна сходиться по вероятности к оцениваемому параметру: для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$;

– оценка должна быть *эффективной*: если неизвестный параметр имеет несколько оценок, то в качестве оценки нужно брать оценку с наименьшей дисперсией.

Выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$ является несмещенной и состоятельной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Несмещенной и состоятельной оценкой для дисперсии генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия

$$D_u = s^2 = \frac{n}{n-1} D_в, \quad D_в = \overline{X^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2.$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из исправленной дисперсии

$$s = \sqrt{D_u}.$$

Для вычисления $\overline{x}_в$ и $D_в$ разработано много методов. Одним из наиболее распространенных методов является *метод произведений*. При вычислении выборочного среднего и выборочной дисперсии поступают следующим образом:

– выбираем «ложный нуль» c. В качестве «ложного нуля» берется варианта, стоящая посредине вариационного ряда, или варианта, имеющая максимальную частоту;

– переходим к условным вариантам U_i по формулам $U_i = \dfrac{x_i - c}{h}$, где h – шаг разбиения;

– вычисляем условные моменты 1-го и 2-го порядков:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i m_i; \qquad M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} U_i^2 m_i;$$

– вычисляем выборочное среднее $\overline{x}_в$ и выборочную дисперсию $D_в$:

$$\overline{x}_в = M_1^* h + c; \qquad D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2 \right) h^2 .$$

Задача 1. Методом произведений вычислить выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данным выборки

x_i	65	70	75	80	85
m_i	2	5	25	15	3

Решение. В качестве «ложного нуля» возьмем варианту 75, $c = 75$. Перейдем к условным вариантам по формуле $U_i = \dfrac{x_i - c}{h}$. Результаты вычислений сведем в таблицу.

x_i	m_i	U_i	$U_i m_i$	$U_i^2 m_i$	$(U_i+1)^2 m_i$
65	2	–2	–4	8	2
70	5	–1	–5	5	0
75	25	0	0	0	25
80	15	1	15	15	60
85	3	2	6	12	27
Σ	50		12	40	114

Результаты вычислений можно проверить равенством

$$\sum_{i=1}^{k}\left(U_i+1\right)m_i=\sum_{i=1}^{k}m_i+2\sum_{i=1}^{k}m_iU_i+\sum_{i=1}^{k}U_i^{\,2}m_i;\ 114=50+2\cdot 12+40.$$

Равенство выполняется, следовательно, таблица заполнена верно. Вычислим условные моменты

$$M_1^*=\frac{1}{50}\cdot 12=0,24;\qquad M_2^*=\frac{1}{50}\cdot 40=0,8.$$

Вычислим выборочную среднюю и выборочную дисперсию

$$\overline{x}_в=M_1^*h+C=0,24\cdot 5+75=76,2;$$

$$D_в=\left(M_2^*-\left(M_1^*\right)^2\right)h^2=\left(0,8-0,0576\right)\cdot 25=18,56.$$

Аудиторные задания

2.1. По данным выборки найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

$x_i - x_{i+1}$	7,8–8,0	8,0–8,2	8,2–8,4	8,4–8,6	8,6–8,8	8,8–9,0
m_i	5	20	80	95	40	10

2.2. Найти несмещенную оценку для дисперсии по данным выборки.

x_i	102	104	108
m_i	2	3	5

2.3. По данным выборки найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

а) Положительные отклонения от номинального размера в партии деталей (в мкм):

17;	21;	8;	20;	23;	18;	22;	20;	17;	12;
20;	11;	9;	19;	20;	9;	19;	17;	21;	13;
17;	22;	22;	10;	20;	20;	15;	19;	20;	20;
13;	21;	21;	9;	14;	11;	19;	18;	23;	19.

б) Время реакции (в секундах):

8,5;	7,1;	6,7;	6,2;	2,9;	4,4;	6,0;	5,8;	5,4;
8,2;	6,9;	6,5;	6,1;	3,8;	6,0;	6,0;	5,6;	5,3;
7,7;	6,8;	6,5;	6,1;	4,2;	4,7;	5,6;	5,4;	5,3;
7,4;	6,7;	6,4;	6,1;	4,5;	6,0;	5,8;	5,6;	5,1.

2.4. Даны результаты наблюдений за сроком службы 100 однотипных станков до выхода за пределы норм точности.

$x_i - x_{i+1}$	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
m_i	9	24	35	22	10

Найти несмещенную оценку для дисперсии срока службы.

2.5. Приведены результаты измерения диаметра втулок, обрабатываемых автоматом.

$x_i - x_{i+1}$	20,00–20,04	20,04–20,08	20,08–20,12	20,12–20,16	20,16–20,20
m_i	8	18	45	20	9

Найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

Домашние задания

2.6. Даны отклонения напряжений от номинала (мВ):

$x_i - x_{i+1}$	0,00–0,02	0,02–0,04	0,04–0,06	0,06–0,08	0,08–0,10	0,10–0,12	0,12–0,14	0,14–0,16
m_i	9	15	29	35	32	19	8	3

Найти оценки для математического ожидания и дисперсии.

2.7. Даны урожайности ржи на различных участках поля

Урожайность, ц/га	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
Количество участков	6	12	33	22	19	8

Найти оценку для средней урожайности всего поля.

2.8. По данной выборки найти оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

Ответы: 2.1. $\overline{x}_в = 8,44$; $D_и = 0,042$; **2.2.** $D_и = 6,93$;
2.3. а) $\overline{x}_в = 17,225$; $D_и = 19,67$; **б)** $\overline{x}_в = 5,922$; $D_и = 1,4$;
2.4. $D_и = 30,81$; **2.5.** $\overline{x}_в = 20,1016$; $D_и = 0,002$; **2.6.** $\overline{x}_в = 0,073$; $D_и = 0,0011$; **2.7.** $\overline{x}_в = 18,3$; **2.8.** $\overline{x}_в = 16,46$; $D_и = 4,92$.

Занятие 3. Интервальные оценки

Краткие теоретические сведения

Пусть $\theta^* = \theta^*(x_1, ..., x_n)$ – функция выборки. Это есть случайная величина, называемая **статистикой**.

Интервальной называют оценку, которая определяется случайным интервалом $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)$, $\theta_1^* < \theta_2^*$. В качестве интервальной оценки используются доверительные интервалы.

Доверительным интервалом для неизвестного параметра θ, называется случайный интервал $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)$, который с заданной вероятностью γ (надежностью) накрывает неизвестный параметр θ.

Если исследуемая СВ распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением σ, то *доверительный интервал для математического ожидания* определяется неравенством

$$\overline{x}_в - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (3.1)$$

где $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{n}$ – точность оценки;

n – объем выборки;

t_γ – значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi\left(t_\gamma\right) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Если среднее квадратическое отклонение неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания исследуемой СВ определяется неравенством

$$\overline{x}_в - t_{\gamma,n} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_{\gamma,n} \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ где } s = \sqrt{D_u}. \qquad (3.2)$$

Значения $t_{\gamma,n}$ находят по табл. П.5 по заданным n и γ. Число $\delta = t_{\gamma,n} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ называют точностью оценки математического ожидания.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения исследуемой СВ определяется неравенством

$$s q_1 < \sigma < s q_2, \qquad (3.3)$$

Значения q_1 и q_2 находятся по табл. 6 приложения по заданным γ и $n - 1$.

Задача 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака *X*, если известно, что $\sigma = 4$, а по данным выборки объемом 100 вычислено $\overline{x}_в = 12,4$.

Решение. Так как известно среднее квадратическое отклонение СВ, то для определения доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся неравенством (3.1). Определим значение t_γ: $\Phi\left(t_\gamma\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,99}{2} = 0,495 \Rightarrow t_\gamma = 2,58.$ Подставим в неравенство (3.1):

$$12,4 - 2,58\frac{4}{10} < a < 12,4 + 2,58\frac{4}{10}; \qquad 11,08 < a < 13,432.$$

Задача 2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка объемом 25.

$x_i - x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
m_i	1	8	10	3	3

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего кадратического отклонения исследуемой СВ.

Решение. По данным выборки методом произведений определим $\overline{x}_в$ и *s*.

x_i^*	m_i	U_i	$U_i m_i$	$U_i^2 m_i$	$\left(U_i + 1\right)^2 m_i$
15	1	–2	–2	4	1
25	8	–1	–8	8	0
35	10	0	0	0	10
45	3	1	3	3	12
55	3	2	6	12	27
Σ	25		–1	27	50

Проверка:

$$50 = 25 + 2(-1) + 27; \quad 50 = 50. \; M_1^* = \frac{-1}{25} = -0,04; \quad M_2^* = \frac{27}{25} = 1,08.$$

$$\overline{x}_в = 35 + (-0,04) \cdot 10 = 34,6; \quad D_в = \left(1,08 - \left(0,04\right)^2\right) \cdot 100 = 107,84;$$

$$D_и = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{25}{24} \cdot 107,84 = 112,33; \quad s = \sqrt{D_и} = 10,6.$$

Для определения доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся неравенством (3.2):

$$t_{\gamma,n} = t\left(0,95; 24\right) = 2,064;$$

$$34,6 - 2,064 \frac{10,6}{5} < a < 34,6 + 2,064 \frac{10,6}{5};$$

$$34,6 - 4,38 < a < 34,6 + 4,38;$$

$$30,22 < a < 38,98.$$

Для определения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения воспользуемся неравенством (3.3):

$$q_1 = 0,781; \quad q_2 = 1,391;$$

$$10,6 \cdot 0,781 < \sigma < 10,6 \cdot 1,391;$$

$$8,28 < \sigma < 14,74.$$

Аудиторные задания

3.1. Для определения привеса рыбы за год в одном из рыбхозов проводились выборочные исследования. Разводимые в пруду карпы взвешивались и отпускались обратно. Результаты 100 таких измерений показали, что годовой привес рыбы в среднем составил 200 г, а генеральная дисперсия – 320 г^2. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для годового привеса рыбы ΔP.

3.2. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерения $\sigma = 40$ м проведено пять различных измерений расстояния. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки истинного расстояния, если среднее всех проведенных измерений $\overline{x}_в = 2000$ м.

3.3. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения ламп в выборке равна 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для продолжительности горения ламп всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч.

3.4. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1{,}5$.

3.5. По данным выборки найти доверительный интервал, с надежностью 0,99 накрывающий среднее квадратическое отклонение.

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

3.6. Из генеральной совокупности СВ, распределенной по нормальному закону, выбрано 100 значений СВ. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95.

$x_i - x_{i+1}$	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
m_i	17	40	32	8	3

3.7. С целью определения средней суммы Q вкладов в банке произведена выборка

Сумма, млн.руб.	10–30	30–50	50–70	70–90	90–110	110–130
m_i	1	3	10	30	60	7

Найти границы среднего вклада с надежностью 0,95.

Домашние задания

3.8. Станок-автомат штампует валики. По выборке объемом 100 вычислены выборочная средняя $\overline{x}_в = 12,5$ и $s = 2,1.$ Найти с надежностью 0,95 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

3.9. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания а по выборочной средней равна $\overline{x}_в = 0,3,$ если $\sigma = 1,2.$

3.10. Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки:

а)

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

б)

$x_i - x_{i+1}$	46–50	50–54	54–58	58–62	62–66	66–70	70–74	74–78	78–82	82–86
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Ответы: 3.1. $196,49 < \Delta P < 203,51;$ **3.2.** $1964,94 < a < 2035,06;$
3.3. $992,16 < a < 1007,84;$ **3.4.** $n = 179;$ **3.5.** $0,076 < \sigma < 0,179;$
3.6. $134,2 < a < 141,8;$ $16,9 < \sigma < 22,4;$ **3.7.** $86,47 < Q < 93,34;$
3.8. $12,08 < a < 12,92;$ $1,84 < \sigma < 2,44;$ **3.9.** $n = 81;$
3.10. а) $15,88 < a < 17,04; 1,87 < \sigma < 2,70;$
б) $65,99 < a < 70,25; 6,84 < \sigma < 9,86.$

Занятие 4. Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова

Краткие теоретические сведения

Статистической называется гипотеза о предполагаемом виде неизвестного распределения СВ или о значениях параметров известного вида распределения. *Нулевой гипотезой* H_0 называется выдвинутая гипотеза. *Конкурирующей* (альтернативной) называется гипотеза, которая противоречит нулевой гипотезе. При проверке статистической гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* – будет отклонена верная гипотеза. *Ошибка второго рода* – будет принята неверная гипотеза.

Вероятность допустить ошибку первого рода называется *уровнем значимости*. Для проверки статистической гипотезы используют специальную статистику, которая называется критерием. По рассчитанному значению критерия определяют принимать или отвергать нулевую гипотезу. *Критерий согласия* – это проверка гипотезы о виде распределения СВ.

Основными критериями согласия являются *критерии Пирсона* χ^2 и *Колмогорова*.

При проверке гипотезы с помощью критерия Пирсона поступают следующим образом:

- из генеральной совокупности извлекают выборку объемом n;
- по выборке вычисляют $\overline{x}_в$ и s;
- переходят к нормированной СВ по формуле $U_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}$;
- находят вероятности попадания в интервал $(U_i,\ U_{i+1})$, $P_i = \Phi(U_{i+1}) - \Phi(U_i)$;
- вычисляют теоретические частоты $m_i' = nP_i$;
- вычисляют статистику Пирсона $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$;
- из таблицы критических точек распределения Пирсона (табл. П.3) по уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - 1 - r$ определяют $\chi^2_{кр}$, где k – число интервалов в вариационном ряде, r – количество параметров закона распределения, которые оцениваются по выборке (для нормального закона $r = 2$);
- если $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{кр}$, то нет необходимости отвергать нулевую гипотезу, т. е. эмпирические и теоретические частоты согласуются;
- если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотеза отвергается, т. е. расхождение между теоретическими и эмпирическими частотами существенно;

Задача 1. Пользуясь критерием Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки

$x_i - x_{i+1}$	3–8	8–13	13–18	18–23	23–28	28–33	33–38
m_i	6	8	15	40	16	8	7

Решение. По данным выборки методом произведений вычислим $\overline{x}_в$ и $D_в$.

x_i^*	m_i	U_i	$U_i m_i$	$U_i^2 m_i$	$(U_i+1)^2 m_i$
5,5	6	–3	–18	54	24
10,5	8	–2	–16	32	8
15,5	15	–1	–15	15	0
20,5	40	0	0	0	40
25,5	16	1	16	16	64
30,5	8	2	16	32	72
35,5	7	3	21	63	112
Σ	100		4	212	320

Проверка:

$$320 = 100 + 8 + 212 = 320;$$

$$M_1^* = \frac{4}{100} = 0,04; M_2^* = \frac{212}{100} = 2,12;$$

$$\overline{x}_в = M_1^* h + c = 20,5 + 0,04 \cdot 5 = 20,7;$$

$$D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^* \right)^2 \right) h^2 = \left(2,12 - 0,0016 \right) \cdot 25 = 52,96;$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = 7,28.$$

Вычислим вероятности попадания в интервалы

x_i	$x_i - \overline{x}_в$	$\dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}$	$\Phi\left(\dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right)$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	– 0,5
8	– 12,7	– 1,74	– 0,4591
13	– 7,7	– 1,06	– 0,3554
18	– 2,7	– 0,37	– 0,1443
23	2,3	0,32	0,1255
28	7,3	1,00	0,3413
33	12,3	1,69	0,4545
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0,5

$P_1 = -0,4591 + 0,5 = 0,0409;$ $P_2 = -0,3554 + 0,4591 = 0,1037;$

$P_3 = -0,1443 + 0,3554 = 0,2111;$ $P_4 = 0,1255 + 0,1443 = 0,2698;$

$P_5 = 0,3413 - 0,1255 = 0,2158;$ $P_6 = 0,4545 - 0,3413 = 0,1132;$

$P_7 = 0,5 - 0,4545 = 0,0455;$

Вычислим $\chi^2_{набл}$.

m_i	P_i	$m_i' = nP_i$	$m_i - m_i'$	$(m_i - m_i')^2$	$(m_i - m_i')^2 / m_i'$
6	0,0409	4,09	1,91	3,648	0,892
8	0,1037	10,37	–2,37	5,617	0,542
15	0,2111	21,11	–6,11	37,332	1,768
40	0,2698	26,98	13,02	169,520	6,283
16	0,2158	21,58	–5,58	31,136	1,443
8	0,1132	11,32	–3,32	11,022	0,974
7	0,0455	4,55	2,45	6,003	1,319
$\Sigma\, \chi^2_{набл} = 13,221$					

Определим число степеней свободы

$$\nu = k - 1 - r = 7 - 1 - 2 = 4.$$

По уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $\nu = 4$ найдем критическую точку правосторонней критической области распределения Пирсона (табл. П.3)

$$\chi^2_{кр} = \chi^2(0,05; 4) = 9,5.$$

Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то гипотеза о нормальном распределении совокупности отвергается.

Критерий согласия Колмогорова применяется для проверки гипотезы о законе распределения непрерывной СВ. Для статистической проверки гипотезы с помощью критерия согласия Колмогорова поступают следующим образом:

– выбирают из генеральной совокупности выборку;

– по выборке составляют эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$;

– записывают теоретическую функцию распределения $F(x)$;

– вычисляют величину $D = \max\limits_x \left|F^*(x) - F(x)\right|$;

– вычисляют статистику Колмогорова $\lambda = D\sqrt{n}$, где n – объем выборки. СВ λ имеет функцию распределения $K(x) = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2x^2}$, $x > 0$, которая называется функцией Колмогорова;

– находим по уровню значимости α λ_α (табл. П.7);

– если $\lambda \geq \lambda_\alpha$, то гипотеза о законе распределения СВ отклоняется, если $\lambda < \lambda_\alpha$, то нет оснований отклонять нулевую гипотезу.

Рассмотрим применение критерия Колмогорова на примере.

Задача 2. Проверить по критерию Колмогорова гипотезу о нормальном распределении СВ по данным выборки при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

$x_{i-1} - x_i$	0–0,5	0,5–1	1–1,5	1,5–2	2–2,5	2,5–3	3–3,5	3,5–4
m_i	17	11	9	8	2	1	1	1

Решение. Вычислим выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s.

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \frac{1}{50}(0,25\cdot 17 + 0,75\cdot 11 + 1,25\cdot 9 + 1,75\cdot 8 + 2,25\cdot 2 +$$
$$+2,75 + 3,25 + 3,75) = 1,04;$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i = 1,7625;$$

$$D_в = \overline{X^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2 = 1,7625 - 1,04^2 = 0,6809;$$

$$D_и = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{50}{49}\cdot 0,6809 = 0,6948;$$

$$s = \sqrt{D_и} = \sqrt{0,6948} = 0,834.$$

Тогда теоретическая функция распределения в предположении, что СВ распределена по нормальному закону, имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \overline{x}_в}{s}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 1,04}{0,834}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Эмпирическую функцию распределения определим по формуле

$$F^*(x) = \frac{m_x}{n},$$

где m_x – сумма частот вариант, меньших x.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}34, & 0 < x \le 0{,}5; \\ 0{,}56, & 0{,}5 < x \le 1; \\ 0{,}74, & 1 < x \le 1{,}5; \\ 0{,}90, & 1{,}5 < x \le 2; \\ 0{,}94, & 2 < x \le 2{,}5; \\ 0{,}96, & 2{,}5 < x \le 3; \\ 0{,}98, & 3{,}0 < x \le 3{,}5; \\ 1, & x > 3{,}5. \end{cases}$$

Вычислим величину $D = \max\left|F^*(x) - F(x)\right|$.

x_i	$x_i - \overline{x}_в$	$\dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}$	$\Phi\left(\dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right)$	$F(x_i) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right)$	$F^*(x_i)$	$\left|F(x_i) - F^*(x)\right|$
0	–1,04	–1,25	–0,3944	0,1056	0	0,1056
0,5	–0,55	–0,65	–0,2422	0,2578	0,34	0,0822
1,0	–0,04	–0,05	–0,0199	0,4801	0,56	0,0799
1,5	0,46	0,55	0,2088	0,7088	0,74	0,0312
2,0	0,96	1,15	0,3749	0,8749	0,90	0,0251
2,5	1,46	1,75	0,4599	0,9599	0,94	0,0199
3,0	1,96	2.35	0,4908	0,9906	0,96	0,0306
3,5	2,46	2,95	0,4985	0,9985	0,98	0,0185
4,0	2,96	3,55	0,4999	0,9999	1	0,0001

$D = 0{,}1056.$ Вычислим статистику Колмогорова

$$\lambda = D\sqrt{n} = \sqrt{50} \cdot 0{,}1056 = 0{,}747.$$

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ найдем по табл. П.7 $\lambda_\alpha = 1{,}358.$

Так как $\lambda < \lambda_\alpha$, то нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении.

Аудиторные задания

4.1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α установить, случайно или значимо расхождение между теоретическими и эмпирическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении СВ.

а) $\alpha = 0{,}01$,

m_i	8	16	40	72	36	18	10
m_i'	6	18	36	76	39	18	7

б) $\alpha = 0{,}05$,

m_i	5	10	20	8	7
m_i'	6	14	18	7	5

4.2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении совокупности с данными выборки.

а)

$x_i - x_{i+1}$	–20–(–10)	–10–0	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
m_i	20	47	80	89	40	16	8

б)

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
m_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

4.3. Наблюдения за межремонтными интервалами T (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты:

0,000; 0,001; 0,003; 0,012; 0,044; 0,156; 0,534;
0,802; 0,007 0,822; 0,873; 0,838; 0,170; 0,476;
0,322; 0,648; 0,991; 0,107; 0,726; 0,393; 0,827
0,419; 0,071; 0,659; 0,309; 0,927; 0,778; 0,327;
0,961; 0,826; 0,308; 0,414; 0,707; 0,515; 0,729;
0,742; 0,884; 0,632; 0,835; 0,318; 0,394; 0,502;
0,471; 0,306; 0,600; 0,846; 0,678; 0,454; 0,623;
0,648.

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0,01$ с помощью критерия Колмогорова гипотезу о показательном распределении совокупности.

4.4. Даны результаты измерения 1000 деталей.

$x_i - x_{i+1}$	97,75–98,25	98,25–98,75	98,75–99,25	99,25–99,75	99,75–100,25
m_i	21	47	87	158	181

$x_i - x_{i+1}$	100,25–100,75	100,75–101,25	101,25–101,75	101,75–102,25	102,25–102,75
m_i	201	142	97	41	25

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить с помощью критерия Колмогорова, согласуются ли данные выборки с гипотезой о нормальном распределении.

Домашние задания

4.5. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими (m_i) и теоретическими частотами (m_i'), которые вычислены в предположении, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

m_i	14	18	32	70	20	36	10
m_i'	10	24	34	80	18	22	12

4.6. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении совокупности с данным выборки.

$x_i - x_{i+1}$	6–16	16–26	26–36	36–46	46–56	56–66	66–76	76–86
m_i	8	7	16	35	15	8	6	5

4.7. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ с помощью критерия Колмогорова проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении СВ с данными выборки.

$x_{i-1} - x_i$	–20–(–10)	–10–0	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
m_i	20	47	80	89	40	16	8

Ответы: 4.1. а) случайно; **б)** случайно; **4.2. а)** согласуется; **б)** согласуется; **4.3.** Согласуется; **4.4.** Согласуются; **4.5.** Значимо; **4.6.** Не согласуется; **4.7.** Согласуется.

Занятие 5. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства. Проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции

Краткие теоретические сведения

Для вычисления выборочного коэффициента корреляции данные представляются в виде корреляционной таблицы. *Корреляционная таблица* представляет собой таблицу следующего вида: в первой строке записаны наблюдаемые значения СВ X, в первом столбце записаны наблюдаемые значения СВ Y, на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается частота m_{ij} появления пары $(y_i,\ x_j)$. В последнем столбце записывается частота появления варианты y_i, в последней строке – частота появления варианты x_j, на пересечении последней строки и последнего столбца записывается суммарное количество наблюдений. Корреляционная таблица имеет вид

Y	X					
	x_1	x_2	x_3	…	x_k	n_y
y_1	m_{11}	m_{12}	m_{13}	…	m_{1k}	n_{y1}
y_2	m_{21}	m_{22}	m_{23}	…	m_{2k}	n_{y2}
…	…	…	…	…	…	…
y_l	$m_{\ell 1}$	$m_{\ell 2}$	$m_{\ell 3}$	…	$m_{\ell k}$	$n_{y\ell}$
n_x	n_{x1}	n_{x2}	n_{x3}	…	n_{xk}	n

Основной оценкой тесноты связи между случайными величинами X и Y служит *выборочный коэффициент корреляции* $r_в$, который определяется так: $r_в = \dfrac{\overline{XY} - \overline{x_в} \cdot \overline{y_в}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, где $\overline{XY}$ – среднее арифметическое произведений значений СВ X, Y. Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам коэффициента корреляции между СВ:

1. $-1 \le r_в \le 1$.

2. Если переменные X и Y умножить на одно и то же число, то коэффициент корреляции не изменится.

3. Если $r_в = \pm 1$, то корреляционная связь между значениями X и Y представляет собой линейную функциональную зависимость.

Для вычисления выборочного коэффициента корреляции применяется формула

$$r_в = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j m_{ij} - n\overline{x_в}\,\overline{y_в}}{n\sigma_x\sigma_y}. \tag{5.1}$$

Если $r_в = 0$, то между наблюдаемыми значениями X и Y корреляционная зависимость отсутствует, чем ближе к единице приближается модуль коэффициента корреляции, тем теснее связь между переменными X и Y. Так как выборочный коэффициент корреляции вычисляется по данным выборки, то в отличие от коэффициента корреляции генеральной совокупности $r_в$ является случайной величиной. Если $r_в \ne 0$, то возникает вопрос, объясняется ли это действительно существующей связью между СВ X и Y или вызвано случайными факторами. Для выяснения этого вопроса проверяется гипотеза H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции r генеральной совокупности.

Для того чтобы при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной двумерной нормальной совокупности, вычисляют статистику $T_{\text{набл.}} = \dfrac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в{}^2}}$ и по таблице критических точек *распределе-*

ния Стьюдента (табл. П.4) по уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 2$ находят $t_{кр} = t\left(\dfrac{\alpha}{2}, \nu\right)$ – критическую точку двусторонней критической области. Если $|T_{набл}| < t_{\text{кр}}$ нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т. е. $r = 0$; если $|T_{набл}| > t_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают, т. е. $r \neq 0$. Рассмотрим вычисление выборочного коэффициента корреляции и проверку гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности на примере.

Задача 1. По данной корреляционной таблице вычислить выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности.

y_j	x_i				
	12,5	17,5	22,5	27,5	n_y
20,5	1				1
21,5		2			2
22,5		1	2		3
23,5			3	3	6
24,5				8	8
n_x	1	3	5	11	20

Решение. Вычислим компоненты, входящие в формулу (5.1), для нахождения $r_в$.

$$\sum x_i n_i = 12,5 \cdot 1 + 17,5 \cdot 3 + 22,5 \cdot 5 + 27,5 \cdot 11 = 480; \ \sum y_j n_j = 468;$$

$$\sum x_i^2 n_i = 11925; \quad \sum y_j^2 n_j = 10979;$$

$$\sum\sum x_i y_j n_{ij} = 20,5 \cdot 12,5 + 21,5 \cdot 12,5 \cdot 2 + 22,5 \cdot 17,5 + 22,5 \cdot 22,5 \cdot 2 +$$
$$+23,5 \cdot 22,5 \cdot 3 + +23,5 \cdot 27,5 \cdot 3 + 24,5 \cdot 27,5 \cdot 8 = 11330;$$

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{480}{20} = 24;\ \ \overline{y}_в = \frac{1}{n}\sum y_j n_j = \frac{468}{20} = 23,4;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^{\,2} n_i - \left(\overline{x_в}\right)^2} = \sqrt{596,25 - 576} = \sqrt{20,25} = 4,5;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum y_j^{\,2} n_j - \left(\overline{y_в}\right)^2} = \sqrt{548,95 - 547,56} = \sqrt{1,39} = 1,18.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции

$$r_в = \frac{\sum\sum x_i y_j m_{ij} - n\overline{x_в}\ \overline{y_в}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{11330 - 20\cdot 24\cdot 23,4}{20\cdot 4,5\cdot 1,18} = 0,923.$$

Проверим гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности. Вычислим

$$T_{набл} = \frac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^{\,2}}} = \frac{0,923\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{1-0,923^2}} = 10,25.$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента (табл. 4 приложения) по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $\nu = n - 2 = 18$ найдем $t_{кр} = t\left(0,025;18\right) = 2,101.$

Так как $\left|T_{набл}\right| > t_{кр},$ то гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности отвергается, т. е. выбранный коэффициент корреляции значим.

Аудиторные задания

5.1. Определить тесноту связи и значимость общего веса *X* (г) растения и веса *Y* (г) его семян на основании данных

x_i	40	50	60	70	80	90	100
y_i	20	25	28	30	35	40	45

5.2. Для исследования влияния объема капиталовложений X (млрд. руб.) на полученную годичную прибыль Y (млрд. руб.) была собрана статистика по 20 крупным предприятиям, которая сведена в корреляционную таблицу. Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

X	Y					
	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	n_x
1,5–2,5	1					1
2,5–3,5	2	5	2			9
3,5–4,5		3	3	2		8
4,5–5,5					2	2
n_y	3	8	5	2	2	20

5.3. По выборке объема n = 100, извлеченной из двумерной нормальной совокупности (X, Y), вычислить выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности.

X	Y						
	10	15	20	25	30	35	n_x
35	5	1					6
45		6	2				8
55			5	40	5		50
65			2	8	7		17
75				4	7	8	19
n_y	5	7	9	52	19	8	100

5.4. Определить тесноту связи между себестоимостью продукции Y (тыс. руб.) и количеством выпускаемой продукции X (тыс. штук) по данным семи предприятий.

X	2	3	4	5	6	7	8
Y	2	1,9	2,2	2,4	2,3	2,5	2,5

Выяснить значимость выборочного коэффициента корреляции при α = 0,05.

5.5. Для выяснения зависимости урожайности сельхозкультур от почвенной влаги были исследованы 20 одинаковых участков земли в пойме реки (X – расстояние участка от реки; Y – урожайность).

Y	X						
	0,4	0,8	1,0	1,2	1,8	2,0	n_y
3,0	2	3					5
3,5		4	2	1			7
4,5			1	2	2		5
5,0					2	1	3
n_x	2	7	3	3	4	1	20

Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

Домашние задания

5.6. При отладке токарного станка были измерены погрешности обработки X (мкм) для разных диаметров обрабатываемых деталей Y (см).

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Y	3	3	4	4	4	5	5	5	6	8

Найти выборочный коэффициент корреляции между X и Y и определить его значимость при $\alpha = 0{,}05$.

5.7. Для изучения надежности машин был собран статистический материал зависимости времени непрерывной работы Y (в месяцах) и количества предшествующих ремонтов X. Вычислить $r_в$ и установить тесноту связи при $\alpha = 0{,}05$.

X	Y				
	0	1	2	3	n_x
2–6			1	2	3
6–10		1	3	1	5
10–14	1	2	1		4
14–18	2	1	1		4
18–22	1	3			4
n_y	4	7	6	3	20

5.8. По данным корреляционной таблицы вычислить $r_в$.

X	Y				
	5	10	15	20	n_x
10	2				2
20	5	4	4		13
30	3	8	3	3	17
40		3	6	6	15
50			2	1	3
n_y	10	15	15	10	50

Ответы: 5.1. $r_в = 0{,}995; T_{набл} = 22{,}28;$ значим; **5.2.** $r_в$=0,782; **5.3.** $r_в = 0{,}818; T_{набл} = 14{,}08; r \neq 0;$ **5.4.** $r_в = 0{,}925; T_{набл} = 5{,}44;$ значим; **5.5.** $r_в$=0,871; **5.6.** $r_в = 0{,}921;$ $T_{набл} = 6{,}68;$ значим; **5.7.** $r_в = -0{,}812;$ $T_{набл} = 5{,}9;$ значим.

Занятие 6. Линейная регрессия. Определение параметров линейной регрессии

Краткие теоретические сведения

Если обе линии регрессии Y на X и X на Y являются прямыми, то в этом случае *корреляцию называют линейной*. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_в = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}_в\right). \tag{6.1}$$

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_в = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}_в\right). \qquad (6.2)$$

Здесь x, y – значения СВ X, Y. $\overline{y}_x, \overline{x}_y$ – их условные средние.

Коэффициент уравнений (6.1)–(6.2) можно также определить по формулам, полученным *методом наименьших квадратов*. Например, если уравнение (6.1) взять в виде $\overline{y}_x = ax + b$, то параметры a и b линейной регрессии имеют вид:

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\;2} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (6.3)$$

Задача 1. Распределение 40 заводов отрасли по количеству слесарей X и числу станкосмен Y задано корреляционной таблицей.

Y	X						
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	n_y
0–0,2	4	–	–	–	–	–	4
0,2–0,4	2	2	–	–	–	–	4
0,4–0,6	–	–	2	–	–	–	2
0,6–0,8	–	6	–	4	4	–	14
0,8–1,0	–	–	–	–	6	6	12
1,0–1,2	–	–	–	–	–	4	4
n_x	6	8	2	4	10	10	40

Составить уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение. По корреляционной таблице вычислим

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_{xi} =$$

$$= \frac{1}{40}\left(12,5\cdot 6 + 17,5\cdot 8 + 22,5\cdot 2 + 27,5\cdot 4 + 32,5\cdot 10 + 37,5\cdot 10\right) = 26,75;$$

$$\overline{y_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i n_{yi} =$$

$$= \frac{1}{40}\left(0,4\cdot 4 + 0,3\cdot 4 + 0,5\cdot 2 + 0,7\cdot 14 + 0,9\cdot 12 + 1,1\cdot 4\right) = 0,69;$$

$$\sigma_x = 0,29;\quad \sigma_y = 9,25;\quad r_в = 0,85..$$

Подставим вычисленные значения в уравнение (6.1):

$$\overline{y_x} - 0,69 = 0,85\cdot\frac{9,25}{0,29}\left(x - 26,75\right);$$

$$\overline{y_x} - 0,69 = 22,8\left(x - 26,75\right);$$

$$\overline{y_x} = 22,8x - 609,2.$$

Задача 2. При эталонировании медного термометра изучалась зависимость электрического сопротивления *Y* от температуры *X*. Были получены следующие результаты.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	10	20	30	40	50
y_i	0,533	0,553	0,574	0,596	0,619	0,645

Оценить параметры уравнения регрессии с помощью метода наименьших квадратов и записать уравнение регрессии *Y* на *X*.

Решение.

Сведем результаты вычисления в таблицу.

Номер опыта i	Исходные данные		Расчетные данные		
	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0	0,533	0	0	0,2841
2	10	0,553	5,53	100	0,3047
3	20	0,574	11,48	400	0,3295
4	30	0,596	17,88	900	0,3552
5	40	0,619	24,75	1600	0,3832
6	50	0,645	32,25	2500	0,4160
$n = 6$	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$
	150	3,519	91,89	5500	2,0727

Параметры линейной регрессии определим по формулам (6.3).

$$a = \frac{6 \cdot 91{,}89 - 150 \cdot 3{,}519}{6 \cdot 5500 - (150)^2} = 0{,}002237,$$

$$b = \frac{3{,}519 \cdot 5500 - 150 \cdot 91{,}89}{6 \cdot 5500 - (150)^2} = 0{,}53067.$$

Эмпирическое уравнение регрессии Y на X примет вид $\overline{y_x} =$ $= 0{,}53067 + 0{,}002237x.$

Аудиторные задания

6.1. Найти выборочное уравнение регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице.

X	Y								
	5	10	15	20	25	30	35	40	n_x
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_y	5	5	8	11	8	6	5	2	50

6.2. Для исследования зависимости годового объема производства Y от основных фондов X получены статистические данные по 20 предприятиям.

X	Y				
	12,5	17,5	22,5	27,5	n_x
20–21	1				1
21–22		2			2
22–23		1	2		3
23–24			3	3	6
24–25				8	8
n_y	1	3	5	11	20

Составить выборочное уравнение регрессии Y на X.

6.3. По данным измерениям двух переменных величин найти уравнение линейной регрессии Y на X.

x_i	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y_i	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

6.4. В таблице приводятся данные о распаде 10 г радиоактивного вещества, где t – время (в месяцах), X – количество (г) оставшегося вещества в момент t.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	8,45	7,67	5,08	3,63	3,46	2,43	1,91	1,17	0,98	0,81	0,76	0,72

Составить уравнение линейной регрессии X на t.

Домашние задания

6.5. В таблице приведены данные о связи между ценой на нефть X (ден. ед.) и индексом нефтяных компаний Y (усл. ед.). Составить уравнение прямой регрессии Y на X.

X	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
Y	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	1,9

6.6. Найти выборочные уравнения прямых регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в корреляционной таблице.

Y	X								
	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	50

Ответы: **6.1.** $\overline{y}_x = 0,4x - 38,8$; **6.2.** $\overline{y}_x = 3,523x - 58,44$; **6.3.** $\overline{y}_x = 12,25 + 0,8x$; **6.5.** $\overline{y}_x = 0,189x - 0,677$; **6.6.** $\overline{y}_x = 1,92x +$ $+100,9$; $\overline{x}_y = 0,42y - 38,3$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что при пожаре сработает первое, второе и третье устройства соответственно равны 0,9; 0,7; 0,85. Какова вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы одно устройство?

2. Для подготовки к экзамену студент должен изучить 50 теоретических вопросов и научиться решать 30 типов задач. Студент, идя на экзамен, выучил 40 теоретических вопросов и научился решать 25 типов задач. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена достаточно ответить на любые два задания из билета, содержащего два теоретических вопроса и задачу.

3. Детали проходят четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой, второй, третьей и четвертой операциях соответственно равны 0,005; 0,01; 0,015; 0,02. Найти вероятность того, что после четырех операций будет получена стандартная деталь.

4. У сборщика 10 деталей, из них первого сорта 6, второго – 4. Какова вероятность того, что из 5 одновременно взятых деталей 3 окажутся первого сорта и 2 – второго сорта?

5. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности выхода из строя за время T первого, второго, третьего блоков соответственно равны 0,1; 0,05; 0,01. Каждый блок необходим для работы прибора в целом. Какова вероятность того, что за время T прибор выйдет из строя?

6. В ящике 15 деталей, среди которых 12 окрашенных. Сборщик случайным образом извлекает 5 деталей. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей 3 будут окрашенными?

7. В мастерской работают два мотора независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый мотор не потребует внимания мастера равно 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены только один мотор потребует внимания мастера.

8. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 80 % небракованной продукции удовлетворяют требованиям первого сорта.

9. Устройство содержит три независимо работающих блока. Вероятности отказов блоков соответственно равны 0,15; 0,2; 0,1. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один из блоков.

10. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0,01. Для второго и третьего исследователей эти вероятности равны 0,02 и 0,015. Найти вероятность того, что ошибка будет допущена при измерении не более, чем одним исследователем.

11. В контейнере 17 изделий, из них 10 изделий первого сорта, 4 изделия – второго сорта и 3 изделия – третьего сорта. Рабочий случайным образом берет 6 изделий. Какова вероятность того, что среди взятых изделий первого сорта окажется 3 изделия, второго – 2 изделия, третьего – 1 изделие?

12. В течение года три фирмы имеют возможность обанкротиться независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,02; 0,05; 0,04. Какова вероятность того, что в конце года все фирмы будут функционировать?

13. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по четырем предметам. Студент освоил 90 % вопросов по первому предмету, 80 % – по второму, 75 % – по третьему и 95 % – по четвертому. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст сессию?

14. Устройство состоит из четырех элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Какова вероятность того, что включенными будут неизношенные элементы?

15. В электрическую цепь включено последовательно три элемента, работающих независимо друг от друга. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

16. Из партии для контроля отбирают 3 изделия. Известно, что в партии содержится 20 изделий, из которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди отобранных все изделия годные.

17. На фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет высшее или среднее образование или то и другое?

18. В ремонтную мастерскую поступило 8 телевизоров, из них 5 нуждается в общей регулировке. Мастер случайным образом берет для ремонта 4 телевизора. Какова вероятность того, что из выбранных телевизоров 3 нуждаются в общей регулировке?

19. Из группы туристов, отправляющихся за границу, 60 % владеют английским языком, 40 % – французским и 10 % – обоими языками. Найти вероятность того, что наугад взятый турист будет нуждаться в переводчике.

20. В читальном зале 10 учебников по теории вероятности, из которых четыре в твердом переплете. Библиотекарь берет один за другим два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

21. Вероятность того, что студент выполнит без ошибок лабораторную работу по физике, равна 0,7, а по химии – 0,8. Какова вероятность того, что он выполнит без ошибок: а) обе лабораторные работы; б) только одну из них; в) хотя бы одну лабораторную работу?

22. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

23. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

24. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

25. Для студента второго курса вероятность решить правильно задачу № 1 из типового расчета равна 0,8, а задачу № 2 – 0,7. Какова вероятность того, что: а) студент правильно решит обе задачи; б) решит неправильно хотя бы одну из задач; в) решит верно только одну из задач?

26. Две фотомодели снимаются для журнала мод, первая – с вероятностью 0,9, вторая – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что в следующем номере журнала появятся снимки: а) обеих девушек; б) только первой; в) хотя бы одной из них?

27. Вероятность того, что наугад выбранный компьютер работает со сбоем, равна 0,2. Оператор включил два компьютера. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них будет работать без сбоев; б) оба компьютера будут исправны?

28. Два скрипача участвуют в конкурсе. Вероятность стать лауреатом конкурса для первого музыканта равна 0,7, для второго – 0,6. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них станет лауреатом; б) лауреатами станут оба скрипача?

29. Автомеханик находит неисправность генератора автомобиля с вероятностью 0,8, карбюратора – 0,9. Какова вероятность того, что при очередной поломке автомобиля: а) он обнаружит хотя бы одну из поломок; б) не обнаружит неисправностей генератора и карбюратора?

30. Два баскетболиста делают по одному броску мячом по корзине. Для первого спортсмена вероятность попадания равна 0,7, для второго – 0,9. Какова вероятность того, что в корзину попадут: а) оба игрока; б) хотя бы один из них; в) попадет только первый спортсмен?

31. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

32. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

33. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

34. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием K, 30 % – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

35. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 % и третьего – 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % – со второго и 50 % – с третьего?

36. У стоматолога три вида пломбирующего материала: цемент (50 %), амальгама (30 %) и пластмасса (20 %). Условия лечения таковы, что вероятность выпадения пломбы, сделанной из цемента, в течение первого года после лечения равна 0,5, пломбы из амальгамы – 0,6, из пластмассы – 0,4. У пациента пломба выпала через неделю. Из какого материала вероятнее всего она была сделана, если врач взял тот пломбирующий материал, что оказался под рукой?

37. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим осуществляется в 80 % всего времени полета, режим перегрузки – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Найти вероятность отказа прибора за время полета.

38. Для участия в математической олимпиаде среди студентов университета из группы № 1 выбрано четыре студента, из группы № 2 – шесть и из группы № 3 – пять. Вероятность того, что студент попадет в команду факультета, для этих групп соответственно равна 0,9, 0,8 и 0,5. Наугад выбранный студент в итоге попал в команду. В какой из групп вероятнее всего он учится?

39. На склад поступают диваны с трех мебельных фабрик. Первая и третья фабрики изготавливают одинаковое количество продукции, а вторая – вдвое больше. Вероятность для первой, второй и третьей фабрики сделать бракованный диван равна 0,15, 0,05 и 0,1 соответственно. Какова вероятность того, что диван, купленный наудачу, качественный?

40. Экзаменационные работы по математике с вероятностью 0,2, 0,3 и 0,5 попадают на проверку к одному из трех экзаменаторов, каждый из которых может пропустить (не заметить) ошибку студента с вероятностью 0,01, 0,02 и 0,015 соответственно. Наугад выбранная работа (из числа проверенных) оказалась правильно аттестованной. Какова вероятность, что эту работу проверял третий преподаватель?

41. С первого станка на сборку поступает 30 %, со второго – 40 %, с третьего – 30 % общего количества деталей. Среди деталей, изготовленных на первом станке, имеется 2 % брака, на втором – 3 %, на третьем – 1 % брака. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь стандартная.

42. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 55 % общего количества изделий, второй – 45 %. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9; а вторым – 0,85. Стандартное изделие при проверке признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

43. Партия электролампочек на 25 % изготовлена первым заводом, на 35 % – вторым, на 40 % – третьим. Вероятности выпуска брака первым, вторым и третьим заводом соответственно равны 0,01; 0,02; 0,05. Найти вероятность того, что случайно взятая лампочка окажется бракованной.

44. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Объем продукции первого завода в четыре раза больше объема продукции второго. Вероятность брака на первом заводе 0,05; на втором – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что деталь изготовлена первым заводом?

45. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

46. В цехе работает 15 станков. Из них 10 станков марки A, 3 – марки B и 2 – марки C. Вероятности выпуска стандартной детали на этих станках соответственно равны 0,85; 0,8; 0,9. При проверке деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она выпущена на станке марки C?

47. Среди студентов факультета 35 % составляют первокурсники, 30 % студентов учатся на втором курсе, на третьем и четвертом курсах их соответственно 20 % и 15 %. Среди студентов первого курса сдали сессию на отлично 3 %, среди второкурсников – 4,5 %, среди третьекурсников – 7 %, а среди студентов четвертого курса – 10 %. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он учится на третьем курсе?

48. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат дает в среднем 2 % брака, второй – 1 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 5000 деталей, со второго – 3000 деталей.

49. В двух ящиках имеются однотипные детали. В первом ящике 20 деталей, из них две бракованные, во втором – 30, из них пять бракованных. Наугад взятая деталь из случайно выбранного ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она взята из первого ящика.

50. Аппаратура в 80 % случаях работает в нормальном режиме и в 20 % – в аварийном. Вероятность сбоя в нормальном режиме равна 0,05; в аварийном – 0,5. Найти вероятность сбоя аппаратуры.

51. На наблюдательной станции установлены три радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели первым локатором равна 0,86; вторым – 0,7; третьим – 0,9. Оператор случайным образом включает один из локаторов и обнаруживает цель. Какова вероятность того, что был включен второй локатор?

52. Вероятность, что выпущенная деталь окажется годной, равна 0,96. Деталь подвергается упрощенной схеме контроля, которая для годных деталей дает положительный результат с вероятностью 0,95, а для деталей с отклонениями – с вероятностью 0,08. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, является годным?

53. Производится три независимых выстрела по самолету. Вероятность попадания в самолет при каждом выстреле равна 0,3. Самолет сбивается при одном попадании с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – 0,5; при трех – 0,9. В результате трех выстрелов самолет сбит. Какова вероятность того, что было два попадания?

54. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,25; 0,25; 0,5. Вероятности того, что радиолампа проработает гарантийный срок для первой, второй и третьей партий соответственно равны 0,9; 0,8; 0,85. Найти вероятность того, что наугад взятая электролампа выдержит гарантийный срок.

55. В торговую сеть поступают однотипные изделия, выпущенные тремя фабриками. Первая фабрика выпускает 30 % общего количества изделий, вторая – 50 %, третья – 20 %. Продукция первой фабрики содержит 0,5 % брака, второй – 2 %, третьей – 1 %. Какова вероятность того, что купленное изделие не будет бракованным?

56. Деталь производится одним из трех автоматов. Производительность первого автомата в два раза больше производительности второго автомата, а производительность третьего автомата в полтора раза больше производительности второго автомата. Брак первого, второго и третьего автоматов составляет соответственно 1 %, 2 %, 4 %. Какова вероятность выпуска стандартной детали?

57. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40 % общего количества приборов. Вероятности выхода из строя прибора в течение гарантийного срока, собранного из высококачественных деталей, равна 0,03; собранного из деталей обычного качества – 0,1. Прибор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что прибор собирался из обычных деталей?

58. На трех автоматических линиях изготавливаются однотипные детали. Вследствие разладки станков возможен выпуск бракованной продукции первой линией с вероятностью 0,01; второй – 0,015; третьей – 0,02. Первая линия выпускает 30 % общего количества деталей, вторая – 20 %, третья – 50 %. Найти вероятность выпуска брака.

59. Партия микросхем содержит 10 % брака. Проверка микросхем такова, что с вероятностью 0,98 обнаруживается дефект (если он есть) и с вероятностью 0,03 стандартная микросхема признается бракованной. Какова вероятность того, что на самом деле микросхема стандартна?

60. Две из трех независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья лампы, если вероятности отказа первой, второй и третьей ламп соответственно равны 0,1; 0,3; 0,4.

61. В телевизионной студии четыре камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее двух камер.

62. Рабочий обслуживает восемь однотипных станков. Вероятность того, что в течение времени T станок потребует внимания рабочего, равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение времени T не менее семи станков потребуют внимания рабочего.

63. В течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 5 % телевизоров. Какова вероятность того, что в партии из 100 телевизоров выдержат гарантийный срок не менее 60 телевизоров?

64. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,98. Какова вероятность того, что из 100 больных, подвергшихся новому лечению, выздоровевших будет не менее 95?

65. Завод отправил на базу 5000 лампочек. Вероятность повреждения лампочки при перевозке равна 0,0002. Найти вероятность того, что при перевозке поврежденными окажутся три лампочки.

66. Вероятность того, что прибор не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 приборов более одного не выдержат испытание.

67. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,2. Какова вероятность того, что сообщение из 6 символов содержит не более одного искаженного символа?

68. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение часа равна 0,0005. Какова вероятность того, что в течение часа нить оборвется на трех веретенах?

69. В комнате пять электрических лампочек, каждая из которых перегорает в течение года с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее двух электролампочек.

70. Вероятность сбоя в АТС при каждом вызове равна 0,0002. Определить вероятность того, что при 5000 вызовов произойдет не более двух сбоев.

71. По данным отдела технического контроля на 100 металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из семи случайно взятых брусков не более двух окажутся с дефектом?

72. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Вероятность звонка абонента в течение часа равна 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа поступят звонки не более, чем от трех абонентов?

73. В 30 % случаев страховая компания выплачивает по договору страховку. Найти вероятность того, что по истечении срока 10 договоров компания уплатит страховку в трех случаях.

74. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены каждого узла равна 0,8. Причем работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Найти вероятность того, что в течение смены прибор выйдет из строя.

75. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская контора предлагает 100 акций этой компании. Какова вероятность того, что будет продано не менее 85 акций?

76. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более двух изделий?

77. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,15. Какова вероятность того, что из 10 приборов при испытании откажут не более двух из них?

78. Агрегат состоит из 21 блока. Вероятность того, что за время T произвольный блок испытывает лишь допустимые деформации, равна 0,8. Найти вероятность того, что за время T испытывают такие деформации от 18 до 20 блоков.

79. На склад поступают изделия, из которых 80 % оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 наудачу взятых изделий, не менее 80 окажутся высшего сорта.

80. При установившемся технологическом процессе 70 % всего числа изделий выпускается высшего сорта. Отдел технического контроля испытывает 200 изделий. Найти вероятность того, что количество изделий высшего сорта окажется в пределах от 140 до 180.

81. Инженерное сооружение состоит из семи узлов, вероятность разрушения каждого из которых 0,2. Сооружение считается разрушенным, если разрушено не менее трех узлов. Какова вероятность разрушения сооружения?

82. Книга из 500 страниц имеет 40 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более одной опечатки?

83. В магазин вошло десять покупателей. Найти вероятность того, что четверо из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя равна 0,3.

84. Среди 100 изготавливаемых микросхем в среднем одна бракованная. Найти вероятность того, что в партии из 1000 микросхем будет не более двух бракованных.

85. В цехе 80 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 60 до 70 станков?

86. При массовом производстве шестерен вероятность брака 0,001. Какова вероятность того, что из 500 шестерен не более трех окажутся бракованными?

87. В ходе аудиторской проверки компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Найти вероятность того, что он обнаружит не более одного счета с ошибкой, если ошибки содержат в среднем 3 % счетов.

88. Сборник содержит 400 задач с ответами. В каждом ответе вероятность ошибки 0,01. Какова вероятность того, что в сборнике не более двух задач с ошибочными ответами?

89. Каждое из восьми предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что месячный план выполняет не менее шести предприятий.

90. При передаче текстовой информации слова кодируются в символы. Вероятность искажения каждого символа при передаче равна 0,009. При искажении двух и более символов слово не поддается дешифровке. Найти вероятность того, что слово, содержащее 10 символов, будет принято правильно.

В задачах 91–120 требуется для данной СВ X:

1) составить закон распределения СВ;
2) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
3) найти функцию распределения $F(x)$.

91. В партии из шести изделий имеются два бракованных. Наудачу взято три изделия. СВ X – количество стандартных изделий среди трех взятых изделий.

92. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна

0,9. СВ X – количество заготовок, оставшихся после изготовления первой стандартной детали.

93. Прибор состоит из трех узлов. Вероятности выхода узлов из строя в течение времени T соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2. СВ X – число отказавших узлов в течение времени T.

94. Вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,2. СВ X – число телевизоров, не выдержавших гарантийный срок, из четырех приобретенных телевизоров.

95. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. СВ X – число израсходованных патронов.

96. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятности попадания в цель при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

97. В партии 10 % деталей нестандартных. Наудачу взяты четыре детали. СВ X – число нестандартных деталей из четырех взятых.

98. Сигнальное устройство состоит из трех независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,2. СВ X – число отказавших элементов.

99. В партии из 10 изделий содержится три бракованных. Наудачу отобраны два изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

100. Вероятность изготовления стандартного изделия при установившемся технологическом процессе постоянна и равна 0,9. Для проверки качества изделия берутся и проверяются одно за другим четыре изделия. Если обнаруживается бракованное изделие, то бракуют всю партию. СВ X – число изделий, проверяемых ОТК из каждой партии.

101. Установлены три независимо работающих сигнализатора, которые срабатывают при пожаре с вероятностями 0,8; 0,7; 0,9. СВ X – количество сигнализаторов, сработавших при пожаре.

102. Баскетболист делает три броска в кольцо. Вероятности попадания в кольцо при первом, втором и третьем броске соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. СВ X – количество попаданий в кольцо.

103. Стрелок делает три выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна 0,16. СВ X – число попаданий.

104. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания в мишень для первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,5; 0,6; 0,6. СВ X – количество попаданий в мишень.

105. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностями 0,1; 0,05; 0,15. СВ X – количество блоков, вышедших из строя за время T.

106. В партии из шести изделий – три бракованных. Случайным образом взяты три изделия из партии. СВ X – количество бракованных изделий среди трех взятых.

107. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностью 0,1. СВ X – количество блоков, которые вышли из строя за время T.

108. В партии деталей – 5 % брака. Наудачу из партии взято три детали. СВ X – количество бракованных деталей из взятых.

109. Монету подбрасывают пять раз. СВ X – количество появлений герба.

110. В партии из пяти изделий одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и проверяют. СВ X – количество проверенных изделий.

111. Вероятность приема каждого из четырех сигналов равна 0,6. СВ X – число принятых сигналов.

112. На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение. СВ X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

113. На участке имеется пять однотипных станков, работающих независимо друг от друга. Коэффициент использования для каждого станка равен 0,8. СВ X – число работающих станков.

114. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,6. В городе четыре библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент, чтобы взять нужную ему книгу.

115. Два стрелка делают независимо друг от друга по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6; для второго – 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

116. Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, выбраны случайно 3 изделия. СВ X – число бракованных изделий среди выбранных.

117. Батарея состоит из 4 орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для 1, 2, 3 и 4 орудий соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,75. СВ X – количество попаданий при одном залпе батареи.

118. Срок службы шестерен коробки передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятности отказа каждого фактора соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. СВ X – число отказавших факторов в одном испытании.

119. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что в течение часа 1, 2, 3 и 4 станки потребуют внимания рабочего соответственно равны 0,2; 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – число станков, потребовавших внимания рабочего.

120. В пятиблочном радиоприемнике (все блоки различные) перегорел один блок. Для устранения неисправности наудачу взятый блок заменяется исправным блоком, после чего проверяется работа приемника. СВ X – число замененных блоков.

В задачах 121–150 дана плотность распределения вероятности *p* (*x*)

Требуется:

1) определить значение параметра a;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

4) построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

121. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ ax^2, & 0<x\le 10, \\ 0, & x>10. \end{cases}$

122. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ ax, & 1<x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$

123. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ ax^3, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$

124. $p(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ a(x-1), & 1<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

125. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

126. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

127. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a\left(x+1\right)^2, & -1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

128. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a\left(x-3\right)^2, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

129. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ a\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

130. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

131. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

132. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

133. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

134. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a\left(x+2\right), & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

135. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

136. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

137. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a\left(x+2\right)^2, & -2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$ **138.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

139. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$ **140.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

141. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$ **142.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2)^2, & -2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

143. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^4, & 3<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$ **144.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^2, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

145. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^3, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$ **146.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^4, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

147. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^3, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$ **148.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

149. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$ **150.** $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^3, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

В задачах 151–180 СВ X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Требуется:

1) записать $p(x)$, $F(x)$;

2) найти $P(\alpha \le X \le \beta)$;

3) найти $P(|X - a| < \delta)$.

№ задачи	a	σ	α	β	δ
151	2,8	0,6	2,1	3,0	1,8
152	3,5	1,2	2,2	4,2	2,1
153	1,5	0,5	2,1	3,0	0,9
154	2,8	0,8	2,5	3,5	1,2
155	10	3	6	13	7,5
156	4	1,5	3	7	2,8
157	5	3	3,5	7	5,1
158	3	2	2	6	4,8
159	4,1	3,5	2	7	4,5
160	3,6	5,1	1,5	5,6	8,2
161	6,2	4,3	5	10	6,4
162	4,7	2,8	1,2	7,3	4,9
163	5,6	2,9	3,0	9,1	5,4
164	8,5	4,7	5,2	10,2	6,3
165	9,4	5,6	4,2	12,5	7,0
166	2,5	4,1	2,7	5,2	5,4
167	7,2	3,5	4,1	10,8	5,5
168	7,8	6,2	3,0	12,9	8,4
169	4,3	5,1	1,6	9,8	9,2
170	10,5	7,1	7,2	15,4	10,1
171	3,5	0,5	4,0	4,5	0,7
172	5,0	1,5	4,5	6,0	1,2
173	4,5	1,0	5,5	6,0	0,6
174	2,3	0,7	3,0	3,6	0,5
175	1,5	2,0	1,5	2,5	1,5
176	3,2	1,5	4,0	5,5	2,3
177	3,0	2,1	5,5	6,0	2,5
178	0,7	2,4	4,0	5,1	2,0
179	1,4	3,1	2,6	3,8	2,7
180	4,3	2,7	2,3	4,9	4,1

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В задачах 1–20 дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины X.

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму частостей (относительных частот) СВ X;

2) по виду полигона и гистограммы, исходя из механизма образования СВ, сделать предварительный выбор закона распределения;

3) вычислить выборочную среднюю $\overline{x}_в$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s;

4) записать гипотетичную функцию распределения и плотность распределения;

5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$;

6) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

1. Даны результаты испытания стойкости 200 удлиненных сверл диаметра 4 мм (в часах):

стойкость сверла x_i	3–3,2	3,2–3,4	3,4–3,6	3,6–3,8	3,8–4
частота m_i	16	50	70	44	20

2. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм^2):

прочность x_i	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

3. Даны результаты исследования на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм^2):

предел прочности x_i, кг/мм^2	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	25	36	22	9

4. Даны результаты содержания фосфора (6 %) в 100 чугунных образцах:

содержание фосфора x_i	0,1–0,2	0,2–0,3	0,3–0,4	0,4–0,5	0,5–0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

5. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

стойкость x_i, ч	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

6. Даны данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей автоколонны (в сотнях км):

x_i (сотни км)	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	2,8–3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

7. С автомата, обрабатывающего втулки диаметра d = 40 мм, взята выборка изделий объемом 100. Результаты измерения диаметров втулок приведены в таблице:

диаметр x_i, мм	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

8. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Контроль механического состояния автомобиля после возвращения в гараж»:

трудоемкость x_i, мин.	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

9. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «ремонт валика водяного насоса автомобиля»:

трудоемкость x_i, мин.	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	17	47	70	46	20

10. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (в часах):

стойкость x_i, час	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
частота m_i	8	21	43	21	7

11. Даны сведения о расходе воды, используемой цехом для технических нужд в течение 100 дней (м^3):

расход x_i, м^3	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
частота m_i	7	25	36	22	10

12. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей (в км):

среднесуточный пробег x_i	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220
частота m_i	9	21	40	18	12

13. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля БелАЗ при средних скоростях:

температура x_i, °	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65
частота m_i	8	17	46	18	11

14. Даны размеры внутреннего диаметра гайки (в мм):

диаметр x_i, мм	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

15. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

диаметр x_i, мм	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27
частота m_i	10	19	38	21	12

16. Даны результаты измерения диаметра валика, обработанного одношпиндельным автоматом:

диаметр x_i, мм	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,00–20,05	20,05–20,10
частота m_i	6	15	27	32	14	6

17. Даны результаты исследования грануляции партии порошка (в мкм):

грануляция x_i, мкм	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
частота m_i	7	23	35	26	9

18. Даны результаты наблюдений за сроком службы 150 однотипных станков до выхода за пределы норм (в месяцах двухсменной работы):

срок x_i, (в месяцах)	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
частота m_i	15	27	61	29	18

19. Даны результаты измерения толщины (в см) 100 слюдяных прокладок:

толщина x_i, см	0,20–0,26	0,26–0,32	0,32–0,38	0,38–0,44	0,44–0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

20. Даны диаметры 100 валиков после шлифовки (в мм):

диаметр x_i, мм	20,0–20,1	20,1–20,2	20,2–20,3	20,3–20,4	20,4–20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

В задачах 21–40 приводятся результаты наблюдений над СВ X и Y. Используя эти экспериментальные данные, необходимо:

1) построить корреляционное поле. Подобрать математическую модель регрессионной зависимости Y от X (рекомендуется использовать модель линейной регрессии);

2) оценить параметры a и $в$ модельного уравнения регрессии методом наименьших квадратов;

3) записать эмпирическое уравнение регрессии Y на X.

21. СВ X и СВ Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4
y_i, см	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8

22. СВ X – величина напряжения стального бруса; СВ Y – величина нагрузки при сжатии стального бруса.

x_i, Кн	5	10	20	40	60
y_i, МПа	51,33	78,00	144,3	263,6	375,2

23. СВ X – углубление резца; СВ Y – удельная энергия.

x_i	4	8	10	14	16	20	19	23
y_i	41	50	81	104	120	139	154	180

24. СВ X, СВ Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y_i, см	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	5,0	4,4	3,9

25. СВ X – электрическое сопротивление молибдена; СВ Y – температура.

x_i, см	61,97	57,32	52,70	47,92	37,72	32,09	28,09
y_i, °К	2289	2132	1988	1830	1489	1286	1178

26. СВ X – электровооруженность труда на одного рабочего; СВ Y – выпуск продукции на одного рабочего.

x_i, квт.ч	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
y_i, тыс. руб.	4,3	4,8	5,0	5,7	6,5	7,0	7,5	8,1

27. СВ X – температура; СВ Y – сопротивление медного термометра.

x_i, °C	0	10	20	30	40	50	60	70
y_i, Ом	0,533	0,552	0,574	0,596	0,619	0,645	0,687	0,690

28. СВ X – масса детали; СВ Y – время, затрачиваемое на закрепление детали на токарном станке.

x_i, кг	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7
y_i, с	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0

29. СВ X – плотность брикетов из карбонильного железного порошка; СВ Y – предел прочности на стане двух таких брикетов.

x_i , %	75	76	77	80	82	85	88	90
y_i, ГПа	2,1	2,0	2,5	2,4	3,6	4,0	4,1	5,0

30. СВ X – скорость движения автомобиля ЗИЛ-130; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	10	15	20	25	30	35	40	45
y_i, м	1,8	2,7	2,5	4,5	4,4	6,3	6,5	6,5

31. СВ X – скорость движения автомобиля ВАЗ-2301; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	31	30	42	40	55	48	64	59
y_i, м	2,0	2,6	3,9	5,2	7,0	6,2	7,5	8,6

32. СВ X – давление гелия; СВ Y – объем одного моля гелия.

$x_i,\ \cdot 10^8$, Па	3,0	3,6	4,0	4,5	5,2	5,6	6,0	6,4
$y_i,\ \cdot 10^{-2}$, м^3	1,98	1,92	1,93	1,81	1,83	1,70	1,73	1,68

33. СВ X – масса груза, подвешенного на эластичном шнуре; СВ Y – удлинение этого шнура.

x_i, кг	0,05	0,07	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,250
y_i, см	0,005	0,052	0,012	0,016	0,017	0,025	0,027	0,034

34. СВ X – температура при прессовании болтов из стекловолокнита; СВ Y – предел их прочности.

x_i, °C	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65
$y_i,\ \cdot 10^8$, Па	10,8	10,2	9,2	8,9	8,3	8,3	8,0	7,3

35. СВ X – ударная вязкость инструментальных быстрорежущих сталей; СВ Y – коэффициент их обрабатываемости.

$x_i,\ \cdot 10^{-3}$, Дж / м^2	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
y_i	0,6	0,62	0,64	0,67	0,69	0,73	0,75	0,8

36. СВ X – стаж работы; СВ Y – среднегодовое перевыполнение нормы.

x_i, год	2	3	4	5	6	7
y_i, %	6	6	7	8	9	10

37. СВ X – отклонение размеров валиков от номинала при черновой обработке; СВ Y – при чистовой обработке.

x_i, мкм	–30	–25	–20	–15	–10	–5	0
y_i, мкм	–8	–4	0	2	4	8	12

38. СВ X – скорость движения автомобиля БелАЗ; СВ Y – температура смазочного масла в двигателе этого автомобиля.

x_i, км/ч	20	25	30	35	40	45	50	55
y_i, °C	43,5	43,9	44,2	45,0	46,0	46,9	47,5	49,0

39. СВ X – скорость резания; СВ Y – площадь поперечного сечения стружки при обработке.

x_i, м/мин	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2
y_i, мм^2	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0

40. СВ X – температура; СВ Y – коэффициент трения в подшипнике.

x_i, °C	60	70	80	90	100	110	120
y_i	0,0148	0,0124	0,0102	0,0085	0,0071	0,0059	0,0051

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин, А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – Санкт-Петербург: Лань, 1998.

2. Гайшун, Л. Н. Теория вероятностей / Л. Н. Гайшун, Г. К. Игнатьева, О. А. Велько. – Минск: МПУ, 2002.

3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – Москва: Высшая школа, 2005.

4. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2009.

5. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. / П. Е. Данко [и др.] – Москва: Оникс, 2005.

6. Микулик, Н. А. Решение задач с техническим содержанием по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам : справочное пособие / Н. А. Микулик, Г. Н. Рейзина. – Минск: БНТУ, 2011.

7. Математика для инженеров: учебник : в 2 т. Т. 2 / С. А. Минюк [и др.]. – Минск: Элайда, 2006.

8. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : ч. 4 / А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2009.

9. Математическая статистика : сборник задач для аудиторной и самостоятельной работы студентов / Н. И. Чепелев [и др.] – Минск: БНТУ, 2010.

10. Теория вероятностей : сборник для аудиторной и самостоятельной работы студентов / Т. И. Чепелева [и др.] – Минск: БНТУ, 2008.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Справочные таблицы

Таблица П.1

Значения функции $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

Окончание табл. П.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П.2

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0734	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485

Продолжение табл. П.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953

Окончание табл. П.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2764	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблица П.3

Значения функции $\chi^2_{\alpha;\nu}$; $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$

$\nu \setminus \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,683	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23.542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,312	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица П.4

Распределение Стьюдента

(значения $t_{\alpha;\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \geq t_{\alpha;\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha;\nu}}^{\infty} S(t,\nu)dt = \alpha$)

$\nu \setminus \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0.258	0,536	0,866	1.341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3.922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745

Окончание табл. П.4

ν \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	7,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица П.5

Значения функции $t_{\gamma;n}$: $\overline{x}_в - t_{\gamma;n}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t_{\gamma;n}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439

Окончание табл. П.5

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица П.6

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $q_1 s < \sigma < q_2 s$

	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358

Окончание табл. П.6

	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Таблица П.7

Критические значения распределения
Колмогорова, $P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Практикум для специальности 1-40 01 01
«Программное обеспечение информационных технологий»

В 4 частях

Часть 4

С о с т а в и т е л и:
МЕТЕЛЬСКИЙ Анатолий Владимирович
ФЕДОСИК Евгений Анатольевич
ЧЕПЕЛЕВ Николай Иосифович
ЧЕПЕЛЕВА Тереса Иосифовна

Редактор *Ю. В. Ходочинская*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 25.05.2018.Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 7,09. Тираж 600. Заказ 599.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.