

**Белорусский национальный технический университет**  
Факультет информационных технологий и робототехники  
Кафедра «Высшая математика № 1»

СОГЛАСОВАНО  
Заведующая кафедрой  
\_\_\_\_\_ Катковская И. Н.  
\_\_\_\_\_ июня 2018 г.

СОГЛАСОВАНО  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_ Трофименко Е. Е.  
\_\_\_\_\_ июня 2018 г.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3  
(для студентов заочного отделения)**

для специальностей:

- 1-53 01 01 – Автоматизация технологических процессов и производств
- 1-53 01 02 – Автоматизированные системы обработки информации
- 1-53 01 05 – Автоматизированные электроприводы
- 1-53 01 06 – Промышленные роботы и робототехнические комплексы
- 1-54 01 02 – Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов
- 1-55 01 01 – Интеллектуальные приборы, машины, технологии и производства
- 1-55 01 02 – Интегральные сенсорные системы
- 1-70 02 01 – Промышленное и гражданское строительство
- 1-31 03 02 – Механика
- 1-36 01 01 – Технология машиностроения
- 1-36 01 03 – Технологическое оборудование машиностроительного производства
- 1-36 01 04 – Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов
- 1-36 01 07 – Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин
- 1-36 11 01 – Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование
- 1-44 01 01 – Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте
- 1-44 01 02 – Организация дорожного движения

Составители: И.Н.Катковская, Г.И.Лебедева, Л.А.Раевская, В.И.Юринок,  
Т.С.Яцкевич

---

Рассмотрено и утверждено  
на заседании совета факультета информационных технологий  
и робототехники 28 июня 2018 г., протокол № 10

## ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА. Часть 3» состоит из следующих разделов: теоретического, практического, контроля знаний и вспомогательного.

*Теоретический раздел* ЭУМК содержит краткое изложение изучаемого материала с примерами решения соответствующих задач.

*Практический раздел* ЭУМК содержит материалы задания для самостоятельной работы студентов и контрольную работу № 3.

*Раздел контроля знаний* ЭУМК содержит тесты по изучаемому материалу.

*Вспомогательный раздел* ЭУМК содержит программу дисциплины, умения и навыки, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

*Цели ЭУМК:* ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «МАТЕМАТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

*Особенности структурирования и подачи учебного материала:* ЭУМК состоит из четырех частей.

*Теоретический раздел* содержит краткие методические материалы для изучения учебной дисциплины, состоящие из основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами.

*Практический раздел* содержит задания для самостоятельной работы студентов и контрольную работу № 3, выполняемую студентами заочной формы обучения в третьем семестре.

*Раздел контроля знаний* ЭУМК содержит тесты по изучаемому материалу.

*Вспомогательный раздел* содержит программу дисциплины, умения и навыки студентов, список рекомендуемой литературы.

*Рекомендации студенту по работе над дисциплиной «Математика».*

Основными формами обучения студента являются лекции, практические занятия и самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих этапов:

- изучения теоретического материала по учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций и т.д.;
- решения задач и упражнений;
- выполнения контрольных работ.

Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

При изучении материала полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. На полях следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Список рекомендованной литературы приведен в конце пособия.

*Решение задач.* При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений изучаемой дисциплины. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать самый лучший. До начала вычислений полезно составить краткий план решения.

Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного

путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа  $\pi$  и т.д.

Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ .....	2
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ	
«МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3» .....	7
1. РЯДЫ.....	7
1.1. Числовые ряды. Основные определения. Признаки сравнения .....	7
1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами .....	10
1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница .....	12
1.4. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды .....	14
1.5. Разложение функции в ряд Тейлора .....	18
1.6. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях .....	20
1.7. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2\pi$ .....	24
1.8. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2l$ .....	28
2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	30
2.1. Определенный интеграл по фигуре. Основные понятия и свойства... 30	
2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах .....	31
2.3. Замена переменных в кратном интеграле .....	37
2.4. Криволинейные интегралы I и II рода .....	43
2.5. Поверхностные интегралы I и II рода.....	45
2.6. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода.....	46
2.7. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Связь между ними.....	48
2.8. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.....	50
3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	55
3.1. Оригинал и его изображения .....	55
3.2. Основные теоремы операционного исчисления.....	56
3.3. Отыскание оригинала по изображению .....	57
3.4. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом .....	60
4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ .....	62
4.1. Скалярное поле и его характеристики.....	62
4.2. Векторное поле и его характеристики.....	66
4.3. Формула Остроградского. Дивергенция. Циркуляция. Ротор. Формула Стокса .....	75
4.4. Потенциальное векторное поле. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле. Операторы Гамильтона, Лапласа .....	80
ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	84

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ .....	84
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3 .....	91
РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ .....	101
Тест 1. «Ряды» .....	101
Тест 2. «Кратные интегралы» .....	102
Тест 3. «Операционное исчисление» .....	104
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	106
Программа курса .....	106
Умения и навыки студентов.....	107
Рекомендуемая литература .....	109

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
«МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3»  
(для студентов заочной формы обучения)**

**1. РЯДЫ**

**1.1. Числовые ряды. Основные определения.  
Признаки сравнения**

Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1.1)$$

где  $(u_n)$  – последовательность чисел, называется *числовым рядом*, числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  – членами ряда,  $u_n$  – общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (1.2)$$

называются *частичными суммами* ряда (1.1).

Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то ряд (1.1) называется *сходящимся*, а число  $S$  – его суммой. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует или  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , то ряд называется *расходящимся*.

Если в ряде (1.1) отбросить первые  $k$  членов, то получится ряд

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots, \quad (1.3)$$

называемый  $k$ -м *остатком* ряда (1.1).

**Необходимый признак сходимости.** Если ряд (1.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд (1.1) расходится.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  называется *гармоническим рядом*. Для него  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , но ряд расходится.

**Признаки сравнения.** Рассмотрим числовые ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots); \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, (v_n \geq 0, n = 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

**Теорема 1.1. (Признаки сравнения).** Если, начиная с некоторого номера  $n_0$ , для всех  $n \geq n_0$  выполняются неравенства  $0 \leq u_n \leq v_n$ , то из сходимости ряда (1.5) следует сходимость ряда (1.4), а из расходимости ряда (1.4) следует расходимость ряда (1.5).

**Теорема 1.2. (Предельный признак сравнения).** Если  $u_n \geq 0, v_n > 0$  для всех  $n \geq n_0$  и существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ , то ряды (1.4) и (1.5) сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание.** При использовании признаков сравнения часто применяется ряд Дирихле или **обобщённый гармонический ряд**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , сходящийся при  $p > 1$  и расходящийся при  $p \leq 1$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  (**ряд геометрической прогрессии**), сходящийся при  $|q| < 1$  и расходящийся при  $|q| \geq 1$ .

**Примеры.** Исследовать на сходимость ряды и в случае сходимости найти сумму ряда.

**Пример 1.1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ .

**Решение.** Данный ряд – геометрическая прогрессия с первым членом, равным 1 и со знаменателем  $q = \frac{1}{3}$ . Следовательно, так как  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

имеем  $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$ ,  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$ , ряд сходится.

**Пример 1.2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)}$ .

**Решение.** Так как дробь  $\frac{1}{4n(n+1)}$  представима в виде

$\frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ , то частичная сумма ряда имеет вид:

$$S_n = \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{8 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{4n(n-1)} + \frac{1}{4n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4}$ , ряд сходится и его сумма равна  $1/4$ .

**Пример 1.3.**  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$

**Решение.** Данный ряд – сумма членов арифметической прогрессии с разностью  $d = 3$ , поэтому

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{4 + 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{(1+3n)n}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{(1+3n)n}{2} = \infty,$$

ряд расходится.

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда. В случае выполнения установить, сходится ли ряд с помощью признаков сравнения.

**Пример 1.4.**  $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ , т.е. необходимый признак не выполняется, ряд расходится.

**Пример 1.5.**  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ , т.е. необходимый признак выполняется. Исследуем сходимость данного ряда с помощью признака сравнения (теорема 1.1). Рассмотрим расходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ . Так как

$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$  ( $\ln n < n$ ), то исходный ряд расходится.

**Пример 1.6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} = 0$ . Рассмотрим сходящийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$  – сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем

$q = \frac{1}{4} < 1$ . Так как  $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} < \frac{1}{2^{2n-1}}$ , то по теореме 1.1 исходный ряд

сходится.

**Пример 1.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

**Решение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^4 + 1} = 0$ . Рассмотрим сходящийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  ( $p = 3 > 1$ ) и применим предельный признак сравнения (теорема 1.2):

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^4 + 1} : \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4 + 1} = 1 \neq 0$ . Следовательно, данный ряд сходится.

## 1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

**1. Признак Даламбера.** Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то при  $l < 1$  ряд (6) сходится, при  $l > 1$  - расходится. При  $l = 1$  вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

**Пример 1.8.** Исследовать на сходимость ряды с помощью признака Даламбера:

а)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$ ;  
 б)  $\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots + \frac{n!}{10^n} + \dots$ .

**Решение.**

а)  $u_n = \frac{n}{3^n}; u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$ .

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ , то ряд сходится.

б)  $u_n = \frac{n!}{10^n}; u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$ . Так как  $l = \infty$ , то данный ряд расходится.

**2. Радикальный признак Коши.** Если для знакоположительного ряда (1.6) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд сходится, при  $q > 1$  - расходится. При  $q = 1$  вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

**Пример 1.9.** Исследовать сходимость рядов с помощью радикального признака Коши:

$$а) \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{4n+1}\right)^n + \dots;$$

$$б) \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^9 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + \dots$$

**Решение.**

$$а) \text{ Так как } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n+1}\right) = \frac{1}{4} < 1, \text{ то ряд сходится.}$$

б) в этом случае

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1. \text{ Следова-$$

тельно, ряд расходится.

**3. Интегральный признак Коши.** Пусть  $f(x)$  - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, определенная при  $x \geq 1$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно, где  $f(n) = u_n$ .

**Пример 1.10.** Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

$$а) 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots;$$

$$б) \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)} + \dots$$

**Решение.**

$$а) \text{ Исследуемый ряд } - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \text{ Здесь } f(n) = \frac{1}{n^p}. \text{ Если } p \neq 1, \text{ то } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} (b^{-p+1} - 1) =$$

$$= \frac{1}{-p+1} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{аÑèè } p > 1, \\ \infty, & \text{аÑèè } p < 1, \end{cases}$$

т.е. интеграл сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p < 1$ . Соответственно и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится, если  $p > 1$  и расходится, если  $p < 1$ . При  $p = 1$  имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty, \text{ т.е. интеграл расходится. Следова-}$$

тельно, расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

б) Исследуемый ряд 
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$$

Здесь  $f(n) = \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}.$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)} &= \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{\ln(x+1)} \right]_1^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится.

### 1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.7}$$

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

**Теорема 1.3.** Достаточный признак сходимости ряда (1.7).

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \tag{1.8}$$

составленный из модулей членов ряда (1.7), сходится, то ряд (1.7) также сходится.

Ряд (1.7) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (1.8).

Сходящийся знакопеременный ряд (1.7) называется *условно сходящимся*, если ряд (1.8) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (1.9)$$

где  $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , называется *знакопередающимся*.

**Признак Лейбница.** Если члены знакопередающегося ряда (1.9) удовлетворяют условиям:

- 1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

то ряд (1.9) сходится. Сумма его положительна и не превосходит первого члена  $u_1$ . Остаток  $r_k$  такого ряда имеет знак своего первого члена и не превосходит его по модулю:  $|r_k| \leq u_{k+1}$ .

**Пример 1.11.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

- а)  $\frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2} + \dots$ ;
- б)  $\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3} + \dots$ ;
- в)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$

**Решение.**

а) Ряд из модулей  $\frac{|\sin 1|}{1^2} + \frac{|\sin 2|}{2^2} + \frac{|\sin 3|}{3^2} + \dots + \frac{|\sin n|}{n^2} + \dots$  сходится по признаку сравнения, так как его члены не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) Условия признака Лейбница здесь выполнены: ряд – знакопередающийся,  $\frac{1}{(2n)^3} > \frac{1}{(2(n+1))^3}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^3} = 0, n = 1, 2, \dots$

Следовательно, этот ряд сходится. Ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

также сходится, то есть исходный ряд сходится абсолютно. Найдем сумму данного ряда с точностью 0,01. Для этого возьмем столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет по модулю также меньше 0,01. Модуль третьего члена  $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0,01$ , поэтому с точностью 0,01

имеем:

$$S \approx \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64} \approx 0,109 \approx 0,11.$$

в) Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, так как  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ,  $n=1,2,3,\dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Этот ряд сходится условно, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , составленный из модулей членов данного ряда, расходится (гармонический ряд).

#### 1.4. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды

Ряд вида  $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , членами которого являются функции  $u_n(x)$ , называется *функциональным*.

Множество всех действительных значений аргумента  $x$ , для которых функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1.10}$$

становится сходящимся числовым рядом, называется *областью сходимости* этого ряда.

Функция  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , где  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ , а  $x$  принадлежит области сходимости, называется *суммой* ряда, функция  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$  – *остатком* функционального ряда.

Для определения области сходимости ряда (1.10) можно использовать известные признаки сходимости числовых рядов, считая  $x$  фиксированным.

Функциональный ряд (1.10) называется *равномерно сходящимся* на промежутке  $p \subset R$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $n_0$ , не зависящий от  $x$ , что для всех  $n > n_0$  и для всех  $x \in p$  выполняется неравенство  $|R_n(x)| < \varepsilon$ , то есть  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ , где  $R_n(x)$  – остаток ряда.

**Признак Вейерштрасса.** Если  $|u_n(x)| \leq C_n$ , ( $n=1,2,\dots$ ) при  $x \in [a; b]$  и числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  сходится, то функциональный ряд (1.10) сходится на отрезке  $[a, b]$  абсолютно и равномерно.

**Теорема 1.4.** Если члены сходящегося ряда (1.10) имеют непрерывные производные при  $x \in [a; b]$  и ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$ , то ряд (1.10) можно дифференцировать почленно:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), x \in [a, b].$$

**Теорема 1.5.** Если члены ряда (1.10) непрерывны на  $[a, b]$  и этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , то ряд (1.10) можно интегрировать почленно:

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

*Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots, \quad (1.11)$$

где  $C_n$  и  $a$  – действительные числа. Область сходимости степенного ряда (1.11) имеет один из следующих видов:

$$(a - R, a + R), [a - R, a + R), (a - R, a + R], [a - R, a + R].$$

Число  $R$  называется *радиусом сходимости*, а интервал  $(a - R, a + R)$  – *интервалом сходимости* степенного ряда (1.11). Радиус сходимости можно находить по формулам:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|,$$

если эти пределы существуют. В частных случаях  $R$  может быть равен 0 или  $\infty$ .

Вопрос о сходимости степенного ряда (1.11) в концевых точках области сходимости, то есть при  $x = a - R$ ,  $x = a + R$ , исследуется особо (с применением известных признаков сходимости числовых рядов).

Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус и интервал сходимости, и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

**Пример 1.12.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$ .

**Решение.** При фиксированном  $x$  этот ряд – знакоположительный. Применим к нему признак Коши.

Найдем предел  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 2^x = 2^x$ ;  $l < 1$  – при  $2^x < 1$ , т.е. при  $x < 0$ . При  $l = 1$ , т.е. при  $x = 0$  данный функциональный ряд станет рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Общий член ряда  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к числу  $e$  и поэтому ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости). Итак, область сходимости данного ряда  $(-\infty, 0)$ .

**Пример 1.13.** Можно ли почленно дифференцировать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  в области его сходимости?

**Решение.** Областью сходимости данного ряда является вся числовая ось  $R = (-\infty, +\infty)$ , так как для любого  $x \in R$  верно неравенство  $\left| \frac{\sin nx}{n^4} \right| < \frac{1}{n^4}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  сходится. Члены исходного ряда имеют непрерывные производные  $\left( \frac{\sin nx}{n^4} \right)' = \frac{n \cos nx}{n^4} = \frac{\cos nx}{n^3}$ , ряд из производных  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  сходится равномерно на  $R$  по признаку Вейерштрасса. Действительно, верны неравенства  $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ ,  $n = 1, 2, \dots, x \in R$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  сходится. По теореме 4 исходный ряд можно почленно дифференцировать в области  $R$  его сходимости, т.е.

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nx}{n^4} \right)', x \in R.$$

**Пример 1.14.** Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

**Решение.** Находим радиус сходимости ряда.  $C_n = \frac{1}{n}, C_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ,  
 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1$ . Это означает, что исходный ряд сходится абсолютно при  $-1 < x < 1$ . Далее, исследуем сходимость ряда при  $x = \pm 1$ . Если  $x = 1$ , то данный ряд становится гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится. Если  $x = -1$ , то получаем знакопередающийся ряд  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ , который сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости ряда является полуинтервал  $[-1, 1)$ . При  $-1 < x < 1$  ряд сходится абсолютно, при  $x = -1$  — условно.

**Пример 1.15.** Найти сумму ряда  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots (|x| < 1)$ .

**Решение.** Обозначим искомую сумму ряда через  $S(x)$ , т.е.

$$S(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots \quad (1.12)$$

Можно проверить, что исходный ряд при  $|x| < 1$  сходится абсолютно. Дифференцируем почленно равенство (1.12):

$$S'(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{x^2}{1-x}, |x| < 1$$

(применена формула суммы членов убывающей геометрической прогрессии). Отсюда, интегрируя и учитывая, что  $S(0)=0$ , находим

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt = \int_0^x \left( -t - 1 - \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= -\frac{x^2}{2} - x - \ln |1-x|, |x| < 1. \end{aligned}$$

**Пример 1.16.** Найти сумму ряда  $2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots, |x| < 1$ .

**Решение.** Обозначим эту сумму ряда через  $S(x)$ , т.е.

$$S(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots$$

Данное равенство перепишем так:  $S(x) = x \cdot Q(x)$ , где

$$Q(x) = 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots$$

Почленное интегрирование последнего равенства приводит к сумме членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \int_0^x Q(t) dt &= \int_0^x 2t dt - \int_0^x 3t^2 dt + \int_0^x 4t^3 dt - \int_0^x 5t^4 dt + \dots = \\ &= x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{x^2}{1+x}, |x| < 1. \end{aligned}$$

Отсюда найдем  $Q(x)$ :  $Q(x) = \left( \frac{x^2}{1+x} \right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ , поэтому искомая

сумма  $S(x)$  такова:  $S(x) = x \cdot Q(x) = x - \frac{x}{(x+1)^2}$ .

## 1.5. Разложение функции в ряд Тейлора

Если функция  $f(x)$  имеет производные всех порядков в окрестности точки  $x = a$ , то для нее можно написать ряд по степеням  $(x - a)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ .

**Теорема 1.6.** Если функция  $f(x)$  и все ее производные ограничены на интервале  $(a - R, a + R)$  одним и тем же числом, т.е. существует постоянная  $M > 0$  такая, что выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad x \in (a - R, a + R), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то функция  $f(x)$  представляется сходящимся к ней рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in (a - R, a + R). \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) верно и в случае, когда остаточный член ряда Тейлора  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Остаточный член  $R_n(x)$  можно вычислить по формуле:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (1.14)$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$ , то ряд не сходится к данной функции.

Если в ряде Тейлора положим  $a = 0$ , получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots (x \in R);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots (x \in R);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots (x \in R);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots (|x| < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots (|x| < 1).$$

**Пример 1.17.** Разложить функцию  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$ .

**Решение.** Имеем  $f(0) = \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Вычисляем

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , т.е.  $f'(0) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Далее последовательно

получаем:

$$f''(0) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(0) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f^{(4)}(0) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отметим, что  $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Записываем ряд Тейлора:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{x^n}{n!} + \dots \right).$$

**Пример 1.18.** Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  в ряд по степеням  $x$ , используя разложения основных элементарных функций. Воспользуемся приведенным выше биномиальным разложением

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (1.15)$$

Преобразуем исходную функцию:  $\sqrt{9-x^2} = 3\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Подставим в формулу (1.15)  $m = \frac{1}{2}$ , а вместо  $x$  выражение  $\left(-\frac{x^2}{9}\right)$ . Получим следующее разложение:

$$\begin{aligned} \sqrt{9-x^2} = & 3 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{9} \right) + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} \left( -\frac{x^2}{9} \right)^2 + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \left( -\frac{x^2}{9} \right)^n + \dots \right) = 3 \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 9} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2^2 2! 9^2} x^4 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 3! 9^3} x^6 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n! 9^n} x^{2n} - \dots \right). \end{aligned}$$

Разложение имеет место при  $\left| \frac{x^2}{9} \right| < 1$ , т.е. при  $|x| < 3$ .

## 1.6. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

### 1. Приближенное вычисление значений функций.

Пусть функция  $f(x)$  в окрестности точки  $a$  разлагается в ряд Тейлора. Тогда приближенное значение функции  $f(x)$  в любой точке этой окрестности может быть вычислено как частичная сумма этого ряда.

**Пример 1.19.** Вычислить  $\sqrt[3]{130}$  с точностью до 0,001.

**Решение.**  $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125 \left( 1 + \frac{1}{25} \right)} = 5 \left( 1 + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{3}}$ . Воспользуемся

биномиальным рядом (1.15) при  $m = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{25} \in (-1, 1)$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} = & 5 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left( \frac{1}{25} \right)^2 + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} \left( \frac{1}{25} \right)^3 + \dots \right) = \\ = & 5 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{25^2} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \left( -\frac{5}{3} \right) \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{25^3} + \dots \right) = \\ = & 5,0000 + 0,0667 - 0,0009 + \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд является знакочередующимся рядом. Третий член по модулю меньше 0,001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить. С указанной точностью получим  $\sqrt[3]{130} \approx 5,0000 + 0,0667 \approx 5,067$ .

**Пример 1.20.** Вычислить  $e^{0,1}$  с точностью до 0,001.

**Решение.** Воспользуемся разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где  $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ ,  $0 < \theta < 1, \forall x \in R$ . При  $x = 0,1$  получаем:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} + \dots + \frac{(0,1)^n}{n!} + \dots$$

Определим, сколько надо слагаемых для достижения требуемой точности. Так как  $0,1 \in [0,0,5]$ , то  $0 < \theta x < 0,5$ . Тогда  $e^{\theta x} < e^{0,5} < 2$ ;

$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}$ . При  $x = 0,1$  имеем неравенство:

$\frac{2 \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$ . Полагая  $n = 2$ , получим  $\frac{2 \cdot 0,001}{6} = 0,0003 < 0,001$ . Зна-

чит, достаточно взять три слагаемых:  $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} = 1,105$ .

**Пример 1.21.** Вычислить  $\ln 2$  с точностью до  $10^{-5}$ .

**Решение.** Применим разложение  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$ .

Этот ряд сходится при  $x \in (-1,1)$ . Если  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , то  $x = 1/3$ . Возьмем  $n$ -ю

частичную сумму  $\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \right)$ . Погреш-

ность этого равенства выражается остатком ряда

$R_n = 2 \left( \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{3^{2n+5}} + \dots \right)$ . Для его оценки все множители в

знаменателях, стоящие перед степенью 3, заменим на  $2n+3$ . Получим

$$R_n < \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+3)3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}}.$$

Решая неравенство  $\frac{1}{4(2n+3)3^{2n+1}} < 10^{-5}$ , находим, что  $n=4$ :

$$\frac{1}{4 \cdot 11 \cdot 3^9} = \frac{1}{866052} = 0,000001 < 10^{-5}. \text{ Итак,}$$

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} \right) = \\ &= 0,666667 + 0,024691 + 0,001646 + 0,000131 + 0,000011 \approx 0,69315. \end{aligned}$$

## 2. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с заданной точностью.

**Пример 1.22.** Вычислить интеграл  $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$  с точностью до 0,00001.

**Решение.** Разделив почленно ряд для  $\sin x$  на  $x$ , получим

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad \text{Этот ряд сходится при } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Интегрируем его почленно.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{1/4} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^{1/4} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{1}{4^5} - \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{4^7} + \dots = \\ &= 0,25000 - 0,00087 + 0,0000016 - \dots \end{aligned}$$

Получили знакочередующийся ряд. Третий член по модулю меньше заданной точности. Значит, достаточно взять два слагаемых:

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,25000 - 0,00087 \approx 0,24913.$$

## 3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Многие дифференциальные уравнения не приводятся к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некото-

рых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определенных интервалах. В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или способом неопределенных коэффициентов, или способом, основанным на применении ряда Тейлора.

**Пример 1.23.** Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения  $y'' - xy = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0$ .

**Решение. Первый способ.** Применим метод неопределенных коэффициентов. Записываем искомое решение в виде ряда  $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \dots$ . Находим производные:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \dots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + 5 \cdot 6C_6x^4 + \dots$$

Подставляя  $y$  и  $y''$  в данное уравнение, получаем:

$$2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + 5 \cdot 6C_6x^4 + \dots =$$

$$= C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4 + C_4x^5 + C_5x^6 + C_6x^7 + \dots$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях последнего уравнения, получим систему:

$$\left. \begin{aligned} 2C_2 &= 0, \\ 2 \cdot 3C_3 &= C_0, \\ 3 \cdot 4C_4 &= C_1, \\ 4 \cdot 5C_5 &= C_2, \\ 5 \cdot 6C_6 &= C_3, \\ 6 \cdot 7C_7 &= C_4, \\ \dots & \end{aligned} \right\}$$

Используя начальные условия, из выражений для  $y$  и  $y'$  находим:  $y(0) = 1 = C_0$ ,  $C_0 = 1$ ,  $y'(0) = 0 = C_1$ ,  $C_1 = 0$ . Решая систему, получаем

$$C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, C_7 = 0, \dots$$

Таким образом, искомое решение представляется следующим рядом:

$$y = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots \text{ Этот ряд сходится при всех значениях } x.$$

**Второй способ.** Применим для исходного уравнения метод последовательных дифференцирований. Решение  $y(x)$  ищем в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

В соответствии с начальными условиями  $y(0)=1, y'(0)=0$ . Подставляя в уравнение  $x=0, y=1$ , получим  $y''(0) - 0 \cdot 1 = 0$ ;  $y''(0) = 0$ . Для получения

значений остальных производных будем последовательно дифференцировать исходное уравнение:

$$y''' = y + xy', \quad y^{(4)} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'', \\ y^{(5)} = 3y'' + xy''', \dots, y^{(n)} = (n-2)y^{(n-3)} + xy^{(n-2)}, \dots$$

Отсюда получим  $y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)$ . Тогда при  $n = 3, 4, 5, \dots$  имеем:

$$y'''(0) = 1, \quad y^{(4)}(0) = 0, \quad y^{(5)}(0) = 0, \quad y^{(6)}(0) = 4, \quad y^{(7)}(0) = 0, \quad y^{(8)}(0) = 0, \quad y^{(9)}(0) = 4 \cdot 7.$$

Подставляя найденные значения в степенной ряд для  $y(x)$ , получим

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4}{6!}x^6 + \frac{4 \cdot 7}{9!}x^9 + \dots = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

### 1.7. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2\pi$

1. Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . *Рядом Фурье* функции  $f(x)$  называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Числа  $a_0, a_n, b_n$  называются *коэффициентами* Фурье функции  $f(x)$ .

**Теорема 1.7.** Если функция  $f(x)$  кусочно-гладкая на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , т.е.  $f(x)$  и ее производная  $f'(x)$  – непрерывны на отрезке  $[-\pi, \pi]$  или имеют на нем конечное число точек разрыва первого рода, то ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в каждой точке отрезка  $[-\pi, \pi]$ . При этом сумма  $S(x)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , ряда Фурье (1.16) равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ - точка непрерывности;} \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & \text{если } x = x_0 \text{ - точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x - 0) + f(x + 0)), & \text{если } x = -\pi \text{ или } x = \pi. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Сумма  $S(x)$  ряда Фурье (1.16) определена для  $x \in (-\infty, +\infty)$  и является  $2\pi$  – периодической функцией.

**Пример 1.24.** Разложить функцию  $f(x)=e^x$  в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Построить график суммы ряда.

**Решение.** Вычислим коэффициенты Фурье функции  $e^x$  по формулам (1.17), учитывая, что

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C,$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C.$$

Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos nx + n \sin nx}{n^2 + 1} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 + 1} \cdot (e^{\pi} \cos n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin nx - n \cos nx}{n^2 + 1} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-n)}{n^2 + 1} \cdot (e^{\pi} \cos n\pi - e^{-\pi} \cos n\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Поскольку функция  $e^x$  и ее производная непрерывны на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то по теореме 1.7 ряд Фурье этой функции сходится к самой функции  $e^x$  на интервале  $(-\pi, \pi)$ :

$$e^x = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \pi + \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin x), \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках  $x=\pm\pi$  сумма ряда равна  $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{\pi}) = \operatorname{ch} \pi$ . График суммы ряда изображен на рис.1.1 (пунктиром – график самой функции  $e^x$  вне отрезка  $[-\pi, \pi]$ ).

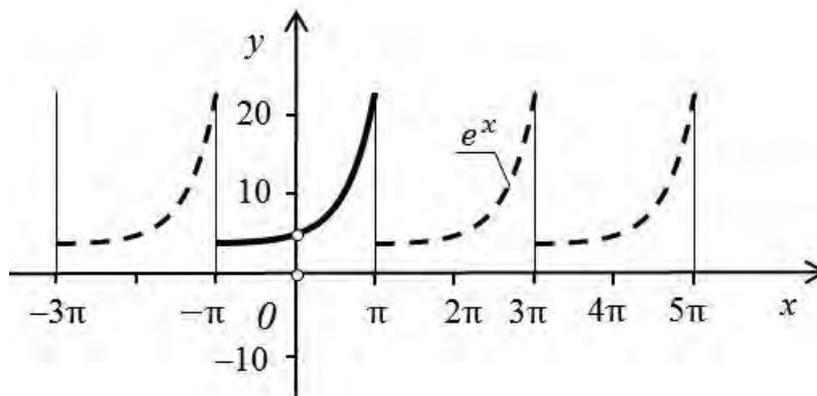


Рис. 1.1. График суммы ряда

Если  $f(x)$  – четная функция на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то ее коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 1, 2, \dots, \quad (1.18)$$

а ряд Фурье имеет вид:  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ . Если  $f(x)$  – нечетная функция на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

а ряд Фурье имеет вид:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ .

**Пример 1.25.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Построить график суммы ряда.

**Решение.** Поскольку функция четная, то  $b_n = 0$ ;  $a_0, a_n$  находим по формулам (1.18), применяя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left( -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1.7, ряд Фурье данной функции  $f(x) = x^2$  на отрезке

$[-\pi, \pi]$  сходится к самой функции  $x^2$ :  $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$

(в точках  $x = \pm\pi$  сумма ряда совпадает со значением функции  $f(x) = x^2$ , так как  $\frac{1}{2}(f(-\pi) + f(\pi)) = \frac{1}{2}(\pi^2 + \pi^2) = \pi^2 = f(\pm\pi)$ ). На рис. 1.2 изображен график суммы данного ряда (пунктиром - график самой функции  $x^2$  вне отрезка  $[-\pi, \pi]$ ).

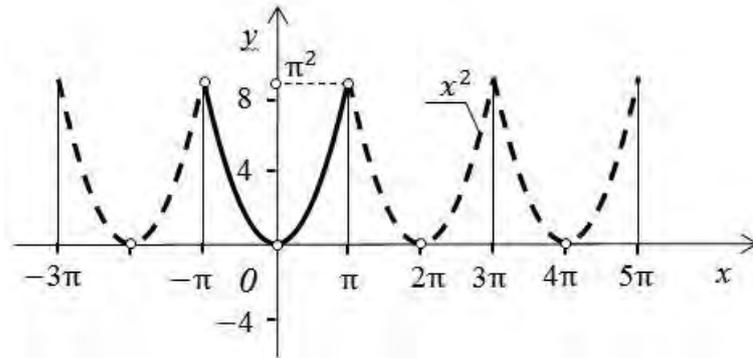


Рис. 1.2. График суммы ряда

Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0, \pi]$  и удовлетворяет на нем условиям теоремы 1.7, то ее можно разложить в ряды Фурье различным образом, например, как по косинусам, так и по синусам.

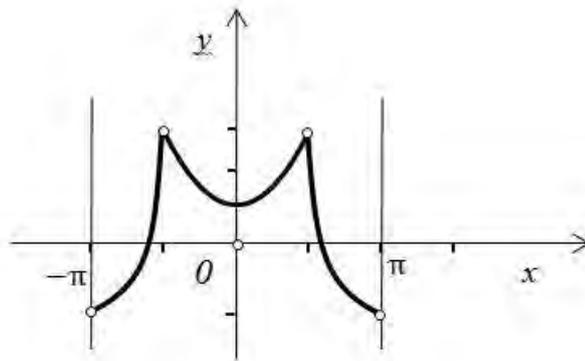


Рис. 1.3. График чётной функции

В первом случае продолжают  $f(x)$  с интервала  $(0, \pi)$  на интервал  $(-\pi, 0)$  четным образом:  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in (-\pi, 0)$  (рис.1.3), а коэффициенты Фурье вычисляют по формулам (1.18); во втором – продолжают  $f(x)$  с интервала  $(0, \pi)$  на  $(-\pi, 0)$  нечетным образом:  $f(x) = -f(-x)$ ,  $x \in (-\pi, 0)$  (рис.1.4), а коэффициенты находят по формулам (1.19).

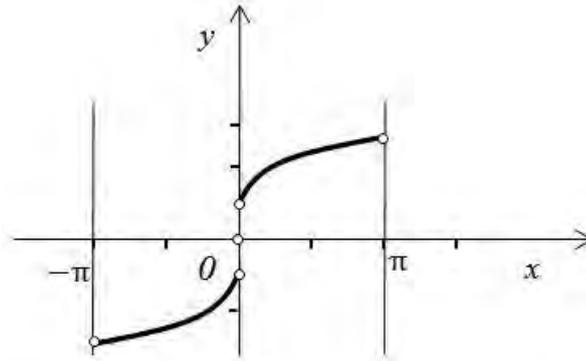


Рис. 1.4. Графие нечётной функции

**Пример 1.26.** Разложить функцию  $f(x) = x^2$  на интервале  $(0, \pi)$  в ряд Фурье по синусам.

**Решение.** Продолжим функцию  $x^2$  с интервала  $(0, \pi)$  на интервал  $(-\pi, 0)$  нечетным образом и вычисляем коэффициенты по формулам (1.19):

$$a_0 = a_n = 0, (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx = \\ &= 2\pi \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right), \end{aligned}$$

$$0 < x < \pi.$$

(Сравните разложение этой же функции  $x^2$  в ряд по косинусам, полученное в примере 1.25).

Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, a+2\pi]$ , то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 1.8. Ряд Фурье функции, заданной на отрезке длиной $2l$

Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[-l, l]$ . *Рядом Фурье* функции  $f(x)$  называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если  $f(x)$  – кусочно-гладкая функция на отрезке  $[-l, l]$ , то ее ряд Фурье сходится в каждой точке отрезка  $[-l, l]$ . При этом сумма  $S(x)$ ,  $x \in [-l, l]$ , ряда Фурье равна

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \text{ - точка непрерывности } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)), & \text{если } x = x_0 \text{ - точка разрыва } f(x); \\ \frac{1}{2}(f(-l + 0) + f(l - 0)), & \text{если } x = -l \text{ или } x = l. \end{cases}$$

**Пример 1.27.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

**Решение.** Продолжим  $f(x)$  на интервале  $(-2, 0)$  нечетным образом. Тогда  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$ ; при  $l=2$  получаем:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \int_0^1 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 (2 - x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}, & \text{если } n = 2k + 1, \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2.$$

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 2.1. Определенный интеграл по фигуре. Основные понятия и свойства

Пусть функция  $f(x, y, z)$  задана в точках тела  $W$ , на поверхности тела  $T$  или кривой  $\Gamma$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Разобьем указанные фигуры на  $n$  частей  $\Delta W_i, \Delta T_i, \Delta \Gamma_i$  соответственно и в каждой из частей выберем по одной точке  $(x_i, y_i, z_i)$ . Меры полученных частей разбиения обозначим через  $\Delta V_i$  (объем части),  $\Delta S_i$  (площадь части) и  $\Delta L_i$  (длина части) соответственно. Через  $\lambda_i$  обозначим наибольшее из расстояний между любыми двумя точками, взятыми в  $i$ -ой части разбиения,  $i = \overline{1, n}$ . Число  $\lambda = \max \lambda_i, 1 \leq i \leq n$ , показывает, насколько мелко разбиты фигуры, и называется *диаметром разбиения*.

Составим теперь интегральные суммы:

$$\sigma_n^W = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i;$$

$$\sigma_n^T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i;$$

$$\sigma_n^{\tilde{A}} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i.$$

Если существуют конечные пределы этих интегральных сумм при  $\lambda \rightarrow 0$ , причем эти пределы не зависят от способа разбиения фигур и от выбора точек в частях разбиения, то они называются *определенными интегралами функции  $f(x, y, z)$  по названным фигурам*:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^W = \iiint_w f(x, y, z) dx dy dz \text{ — тройной интеграл;}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^S = \iint_s f(x, y, z) ds \text{ — поверхностный интеграл I рода;}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n^{\tilde{A}} = \int_{\tilde{A}} f(x, y, z) dl \text{ — криволинейный интеграл I рода.}$$

#### **Физический смысл интеграла по фигуре.**

Если  $f(x, y, z)$  - плотность распределения вещества по фигуре, то интеграл по этой фигуре выражает ее массу в соответствующих единицах измерения.

**Замечание.** Аналогично названным вводятся интегралы:

$$\iint_D f(x, y, z) dx dy \text{ — двойной интеграл по области } D \in Oxy;$$

$\int_{\vec{A}} f(x, y) dl$  – криволинейный интеграл I рода по кривой  $\Gamma \in Oxy$ .

**Свойства интегралов по фигуре** (на примере тройного интеграла  $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$ ).

1. Свойство линейности.

$$\begin{aligned} \iiint_W (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dx dy dz &= \\ &= \alpha \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz; \quad \alpha, \beta \text{ – числа.} \end{aligned}$$

2. Если область  $W$  есть объединение двух областей  $W_1$  и  $W_2$ , не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{W_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Если в области  $W$ :  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ , то

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz.$$

4. Теорема о среднем. Если  $f(x, y, z)$  непрерывна в замкнутой связной области  $W$ , то найдется точка  $(x^*, y^*, z^*) \in W$  такая, что

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = f(x^*, y^*, z^*) \cdot V, \text{ где } V \text{ – объем тела } W.$$

5. Если  $f(x, y, z) \equiv 1$ , то  $\iiint_W 1 dx dy dz = V$ .

Предполагается, что все указанные интегралы существуют.

## 2.2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах

**а) Двойной интеграл.** Пусть область  $D$  плоскости  $Oxy$  ограничена линиями  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \psi(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , где  $a < b$ ,  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  и функции  $\varphi$ ,  $\psi$  непрерывны на отрезке  $[a; b]$  (рис.2.1). Двойной интеграл от непрерывной функции  $f(x, y)$  вычисляется путем сведения к двукратному (повторному) интегралу по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (2.1)$$

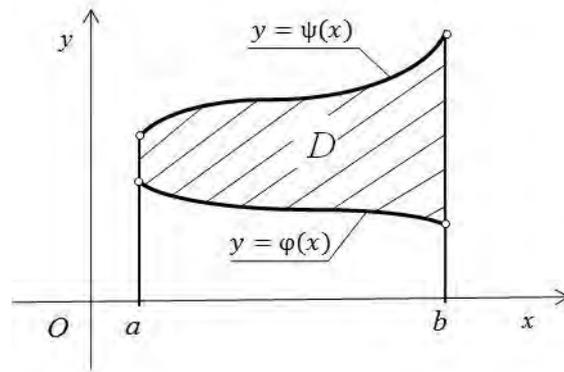


Рис. 2.1. Расстановка пределов интегрирования

В выражении (2.1) сначала вычисляется  $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$  при постоянном

$x$ . Полученный результат интегрируется по  $x$ .

Аналогично, если область  $D$  ограничена линиями  $x = \beta(y)$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ , где  $c < d$ ,  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  и функции  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  непрерывны на отрезке  $[c; d]$  (рис.2.2), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (2.2)$$

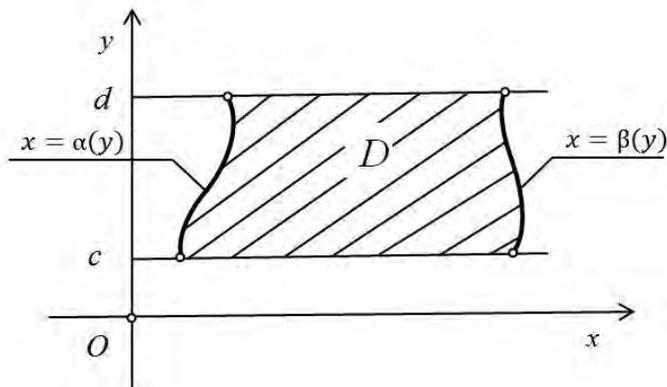


Рис. 2.2. Расстановка пределов интегрирования

**Замечание.** В более общем случае область интегрирования разбивают на части, каждая из которых имеет один из рассмотренных видов.

**Пример 2.1.** Вычислить  $\iint_D (x + 2y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $y = -x^2$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

**Решение.** Указанные линии пересекаются в точках  $O(0,0)$  и  $A(1,-1)$  (рис. 2.3).

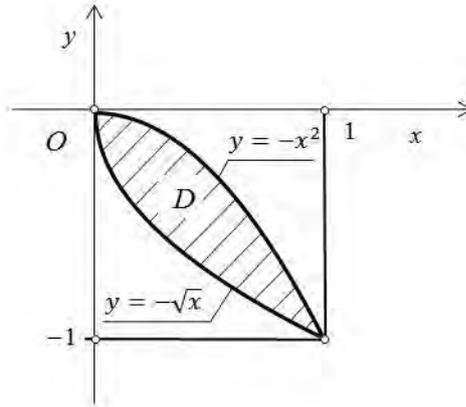


Рис. 2.3. Изображение области интегрирования

Применяя формулу (2.1) при  $\varphi(x) = -\sqrt{x}$ ,  $\psi(x) = -x^2$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ , получим:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} (x+2y) dy = \int_0^1 (xy + y^2) \Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2} dx = \\ &= \int_0^1 ((-x^3 + x^4) - (-x\sqrt{x} + x)) dx = -\frac{3}{20}. \end{aligned}$$

**Пример 2.2.** Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy$ .

**Решение.** Область интегрирования, ограниченную линиями  $y = \sqrt{2x-x^2}$ ,  $y = \sqrt{2x}$ ,  $x = 2$  (рис. 2.4), разобьем с помощью прямой  $y = 1$  на три области. Получим сумму интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y) dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x,y) dx + \\ &+ \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x,y) dx. \end{aligned}$$

Здесь для определения пределов изменения переменной  $x$  уравнения  $y = \sqrt{2x-x^2}$ ,  $y = \sqrt{2x}$  разрешены относительно  $x$ :  $x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$ ,  $x = y^2/2$ .

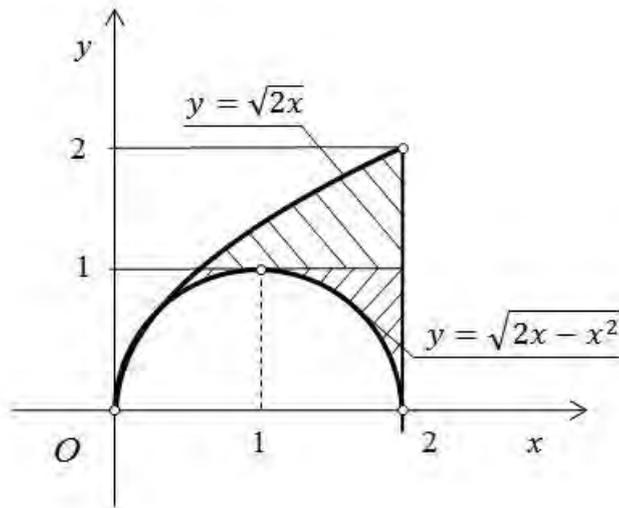


Рис. 2.4. Изменение пределов интегрирования

Из свойств интеграла по фигуре следует, что площадь  $S$  плоской области  $D$  в декартовых прямоугольных координатах равна

$$S = \iint_D dx dy. \quad (2.3)$$

**Пример 2.3.** Вычислить площадь области, ограниченной линиями  $y = 2 - x^2$ ,  $y^3 = x^2$ .

**Решение.** Имеем (рис. 2.5)

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^{2/3}}^{2-x^2} dy = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^{2/3}) dx = \frac{32}{15}.$$

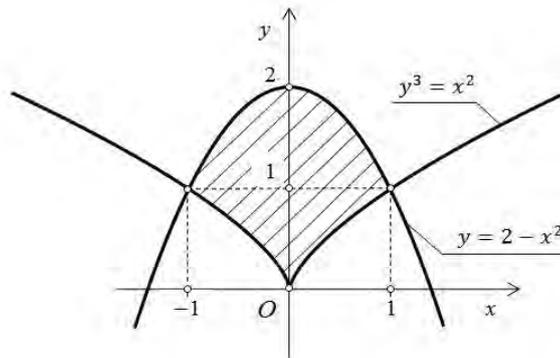


Рис. 2.5. К определению площади фигуры

Геометрический смысл двойного интеграла: объем  $V$  цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью  $z = f(x, y)$ , ( $f(x, y) > 0$ ), снизу плоскостью  $z = 0$  и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости  $Oxy$  область  $D$ , вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.4)$$

Площадь  $S$  гладкой поверхности  $z = z(x, y)$ , проектирующейся в область  $D$  плоскости  $Oxy$ , выражается формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2.5)$$

**б) Тройной интеграл.** Пусть пространственная область  $V$  в декартовой системе координат  $Oxyz$  ограничена снизу и сверху поверхностями  $z = F(x, y)$ ,  $z = \Phi(x, y)$  ( $F(x, y) \leq \Phi(x, y)$ ), с боков прямой цилиндрической поверхностью и проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , ограниченную линиями  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \psi(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , ( $a < b$ ,  $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ), а функции  $F$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  - непрерывны (рис.2.6).

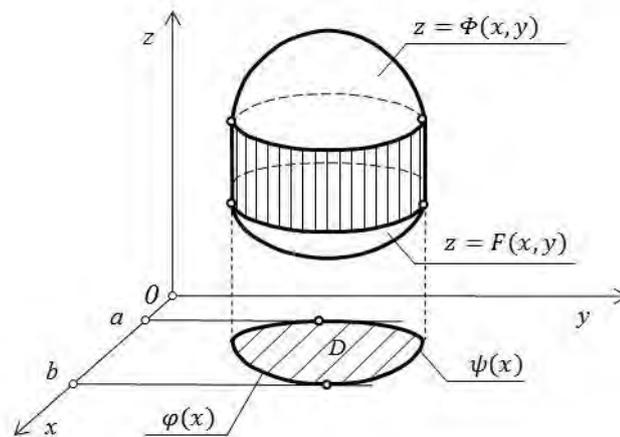


Рис. 2.6. Расстановка пределов интегрирования

Тройной интеграл от непрерывной функции  $f(x, y, z)$  вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{F(x, y)}^{\Phi(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{F(x, y)}^{\Phi(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

**Замечание.** Порядок интегрирования в последней формуле может быть изменен.

**Пример 2.4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$ ,

где область  $V$  ограничена поверхностями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**Решение.** Область  $V$  есть пирамида, ограниченная снизу плоскостью  $z = 0$ , сверху плоскостью  $x + y + z = 1$  и с боков плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$  (рис.2.7). Проекцией пирамиды на плоскость  $Oxy$  является треугольник, ограниченный прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .

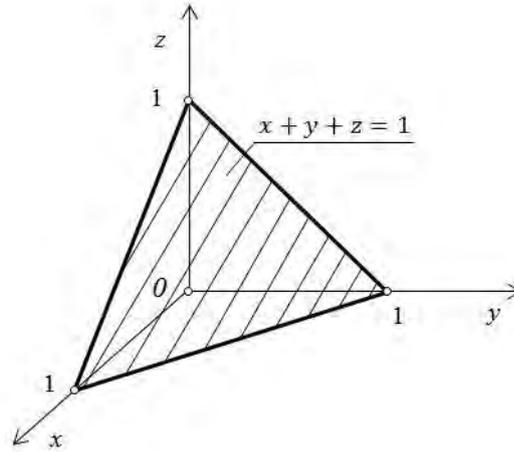


Рис. 2.7. Изображение области интегрирования

Для переменной  $z$  нижним пределом будет  $z=0$  (плоскость  $Oxy$ ), а верхним – значение  $z$ , полученное из уравнения плоскости  $x+y+z=1$ , то есть  $z=1-x-y$ . Поэтому получим:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} - \ln|1+x| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

Из свойств интеграла по фигуре следует, что объем  $V$  пространственной области  $V$  равен

$$V = \iiint_V dx dy dz. \quad (2.6)$$

**Пример 2.5.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x$ .

**Решение.** Тело  $V$  ограничено снизу и сверху параболоидами вращения  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ , с боков - цилиндрической поверхностью  $y = x^2$ , и плоскостью  $y = x$  (рис.2.8). Проекция этого тела на плоскость  $Oxy$  есть область, ограниченная линиями  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$ .

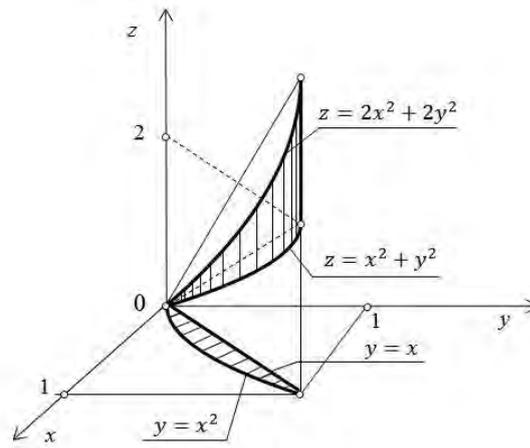


Рис. 2.8. К определению объема тела  $V$

Имеем

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}.
 \end{aligned}$$

### 2.3. Замена переменных в кратном интеграле

**а) Замена переменных в двойном интеграле.** Если в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  осуществляется замена переменных с помощью функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (2.7)$$

которые отображают взаимно-однозначно область  $G$  плоскости  $Ouv$  на область  $D$  плоскости  $Oxy$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v); y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (2.8)$$

где

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} - \text{якобиан.} \quad (2.9)$$

При этом предполагается, что функции (2.7) имеют непрерывные частные производные по аргументам  $u, v$  и якобиан (2.9) отличен от нуля. В частности, при переходе к полярным координатам  $\rho, \varphi$ , где  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , якобиан  $|J(\rho, \varphi)| = \rho$  (рис. 2.9) и формула (2.8) имеет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.10)$$

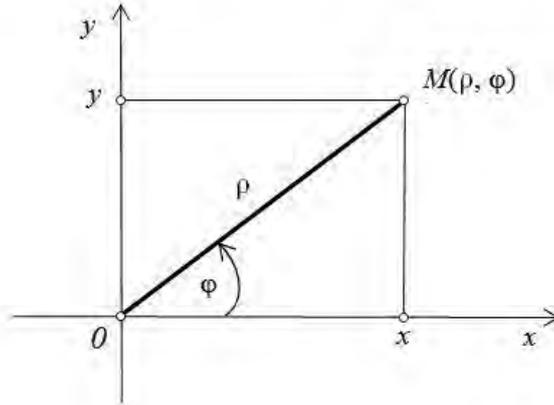


Рис. 2.9. Переход от декартовой к полярной системе координат

Если область  $D$  ограничена лучами, образующими с полярной осью углы  $\varphi_1, \varphi_2$ , и кривыми  $\rho = \rho_1(\varphi)$  и  $\rho = \rho_2(\varphi)$ , где  $\varphi_1 < \varphi_2$ ,  $\rho_1 < \rho_2$  (рис. 2.10), то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

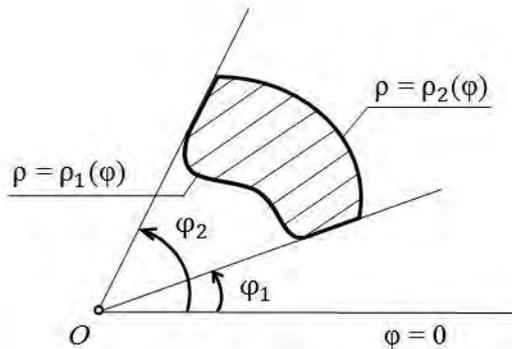


Рис. 2.10. Расстановка пределов интегрирования в полярной системе координат

Если область  $D$  ограничена линией  $\rho = \rho(\varphi)$  и начало координат лежит внутри области, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Если область интегрирования не удовлетворяет указанным условиям, то для вычисления двойного интеграла надо предварительно разбить область на части, обладающие отмеченными выше свойствами.

**Пример 2.6.** Вычислить  $\iint_D dx dy$ , если область  $D$  ограничена кривыми  $y=0$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y=x$ ,  $x^2 + y^2 = 2bx$  ( $a < b$ ).

**Решение.** Область  $D$  изображена на рис. 2.11. Уравнения прямых  $y=0$  и  $y=x$  в полярной системе координат имеют вид  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/4$ . Уравнения окружностей соответственно  $\rho=2a\cos\varphi$  и  $\rho=2b\cos\varphi$ . Итак, область  $D$  заключена между лучами  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi/4$  и кривыми  $\rho=2a\cos\varphi$  и  $\rho=2b\cos\varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi} = \\ &= 2(b^2 - a^2) \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= (b^2 - a^2) \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = (b^2 - a^2) \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Фактически нами найдена площадь области  $D$ .

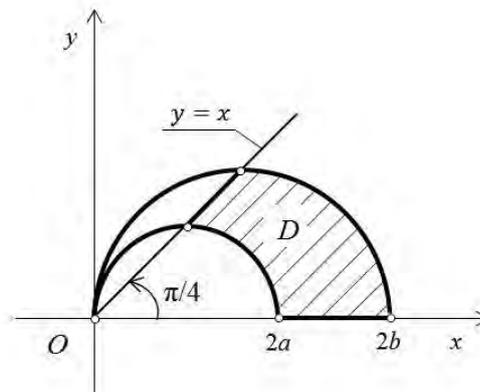


Рис. 2.11 Изображение области  $D$  в полярной системе координат

**Пример 2.7.** Вычислить площадь плоской области  $D$ , ограниченной окружностью  $x^2 + y^2 = 2x$  и прямыми  $y=0$  и  $y = x\sqrt{3}$ .

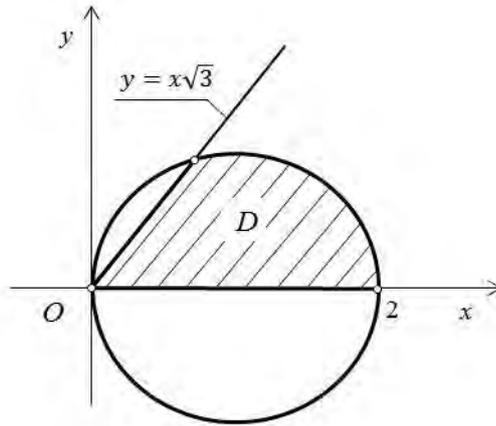


Рис. 2.12 Вычисление площади области  $D$  в полярной системе координат

**Решение.** Площадь плоской области  $D$  в полярной системе координат вычисляется по следующей формуле:

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$$

Уравнение окружности в полярной системе координат запишется в виде  $\rho = 2\cos\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ ). Тогда:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\pi/3} d\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \left[ \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right] \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**б) Замена переменных в тройном интеграле.**

Если

$$x = x(u, v, w); y = y(u, v, w); z = z(u, v, w), \quad (2.11)$$

то

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w); y(u, v, w); z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned}$$

где

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \text{— якобиан.} \quad (2.12)$$

При этом предполагается, что функции (2.11) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам и якобиан  $J(u, v, w)$  отличен от нуля.

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат  $x, y, z$  к цилиндрическим координатам  $\rho, \varphi, z$  (рис.2.13), связанным с декартовыми соотношениями:

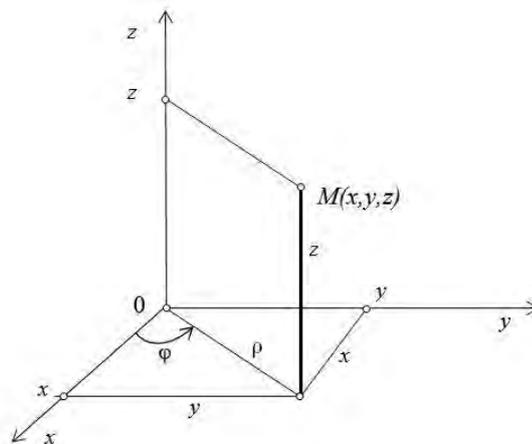


Рис. 2.13 Переход к цилиндрической системе координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < +\infty \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}, \text{ имеет вид:}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.13)$$

**Пример 2.8.** Вычислить массу тела, если его плотность в каждой точке вычисляется по формуле  $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  и тело  $V$  ограничено параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 4$  (рис. 2.14).

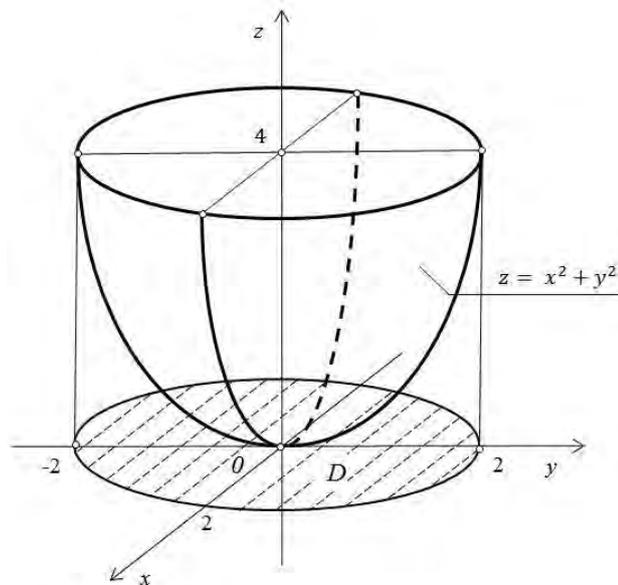


Рис. 2.14 Вычисление массы тела  $V$

**Решение.** Данная пространственная область  $V$  проектируется в область  $D$  плоскости  $Oxy$ , ограниченной окружностью  $x^2 + y^2 = 4$ . Вычислим тройной интеграл в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида

лоида будет  $z = \rho^2$ . Координаты  $\rho, \varphi, z$  изменяются так:  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\rho^2 \leq z \leq 4$ ; плотность  $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \rho$ . Тогда масса  $M$  равна:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} \rho \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^4 dz = 2\pi \int_0^2 (4\rho^2 - \rho^4) d\rho = \\ &= 2\pi \left( \frac{4}{3} \rho^3 - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{15} \pi. \end{aligned}$$

Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат  $x, y, z$  к сферическим  $r, \varphi, \theta$  (рис.2.15), связанным с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (2.14)$$

имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

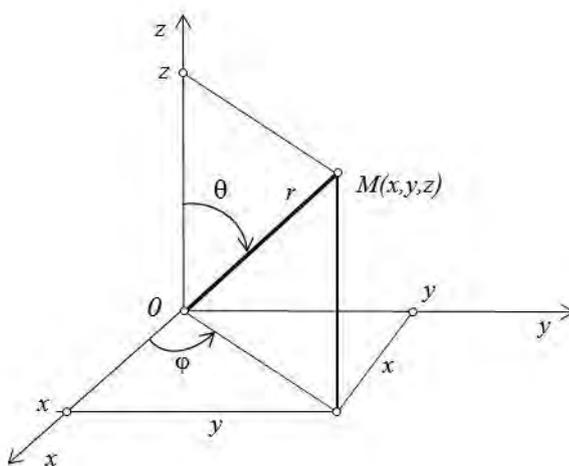


Рис. 2.15 Переход к сферическим координатам

**Пример 2.9.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V z dx dy dz$ , где  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и является внутренней по отношению к конусу (рис.2.16).

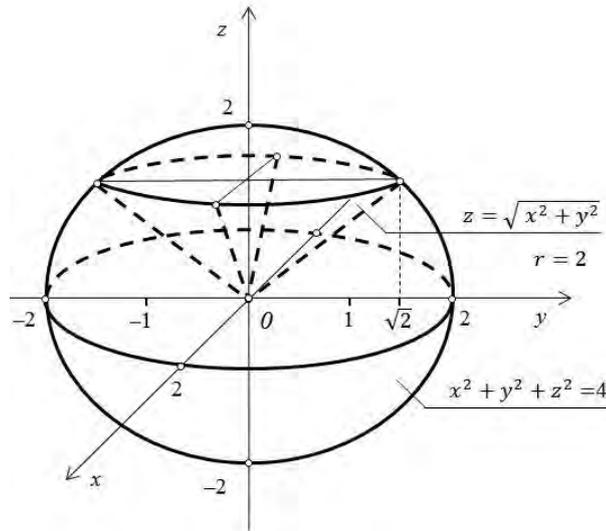


Рис. 2.16 Изображение тела  $V$

**Решение.** Перейдем в данном интеграле к сферическим координатам. Уравнение сферы запишется в виде  $r = 2$ , а уравнение конуса  $\theta = \pi/4$ . В области  $\Omega$  координаты  $r, \varphi, \theta$  изменяются следующим образом:  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ . Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} (-\cos 2\theta) \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi. \end{aligned}$$

## 2.4. Криволинейные интегралы I и II рода

**а) Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл I рода).** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в точках дуги  $AB$  гладкой кривой  $\Gamma$ .

Разобьем дугу  $AB$  произвольным образом на  $n$  элементарных дуг точками  $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n=B$ ; пусть  $\Delta s_k$  - длина дуги  $A_{k-1}A_k$ . На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку  $M_k(\xi_k; \eta_k)$  и умножим значение функции  $f(\xi_k; \eta_k)$  в этой точке на длину  $\Delta s_k$  соответствующей дуги.

*Интегральной суммой* для функции  $f(x, y)$  по длине дуги  $AB$  называется сумма вида  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$ .

*Криволинейным интегралом по длине дуги  $AB$*  от функции  $f(x, y)$  (или *криволинейным интегралом I рода*) называется предел интегральной сум-

мы при условии, что  $\max \Delta s_k \rightarrow 0$ : 
$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k$$

( $ds$  – дифференциал дуги), если этот предел конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора мочек  $M_k$ .

Криволинейный интеграл I рода в случае, когда кривая задана уравнением  $y = \varphi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), вычисляется по формуле

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx.$$

Если  $f(x, y) > 0$ , то криволинейный интеграл I рода  $\int_{\tilde{A}} f(x, y) ds$  представляет собой *массу кривой  $\Gamma$* , имеющей переменную линейную плотность  $\mu = f(x, y)$  (физическое истолкование).

Если  $f(x, y) \geq 0$ , то криволинейный интеграл I рода  $\int_{\tilde{A}} f(x, y) ds$  численно равен *площади части цилиндрической поверхности*, у которой направляющая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $xOy$ , а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , а снизу плоскостью  $xOy$  (геометрическое истолкование).

**б) Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл II рода).** Пусть в декартовой системе координат  $Oxyz$  задана линия  $\Gamma$ , в точках которой определена векторная функция  $\vec{F}(x, y, z)$  с координатами  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ .

Разобьем кривую  $\Gamma$  на  $n$  частей  $\Delta \Gamma_i$  точками  $M_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . На каждой части разбиения  $\Delta \Gamma_i$  выберем по одной точке  $K_i(x_i, y_i, z_i)$ .

Составим так называемую *интегральную сумму*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \vec{F}(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right) = \sum_{i=1}^n P(K_i) \Delta x_i + Q(K_i) \Delta y_i + R(K_i) \Delta z_i,$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ , слагаемыми которой являются скалярные произведения; вектор  $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$  соединяет начало и конец части разбиения  $\Delta \Gamma_i$ .

*Криволинейным интегралом II рода* от вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  по кривой  $\Gamma$  называется предел интегральной суммы  $\sigma_n$  при условии, что диаметр разбиения  $\lambda \rightarrow 0$  (если этот предел конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора точек  $K_i$ ). Обозначение криволинейного интеграла II рода:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \int_{\tilde{A}} (\vec{F}(x, y, z), d\vec{l}) = \int_{\tilde{A}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

*Физический смысл:* криволинейный интеграл  $\int_G (\vec{F}, d\vec{l})$  выражает работу силы  $\vec{F}(x, y, z)$  при перемещении точки ее приложения вдоль кривой  $G$ .

Если направление обхода кривой  $G$  изменить на противоположное, то указанный интеграл изменит свой знак.

## 2.5. Поверхностные интегралы I и II рода

**а) Поверхностный интеграл I рода.** Пусть  $F(x, y, z)$  - непрерывная функция и  $z = f(x, y)$  - гладкая поверхность  $S$ , где  $f(x, y)$  задана в некоторой области  $D$  плоскости  $xOy$ . Поверхностным интегралом I рода называется предел интегральной суммы при условии, что  $\max d_k \rightarrow 0$  (если он конечен, не зависит от способа разбиения поверхности  $S$  и выбора промежуточных точек):

$$\lim_{\max d_k \rightarrow 0} \sum F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z) dS,$$

где  $\Delta S_k$  - площадь  $k$ -го элемента поверхности  $S$ , точка  $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$  принадлежит этому элементу,  $d_k$  - диаметр этого элемента,  $F(x, y, z)$  определена в каждой точке поверхности  $S$ .

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности  $S$ , по которой производится интегрирование.

Если проекция  $D$  поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$  однозначна, то соответствующий поверхностный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

**б) Поверхностный интеграл II рода.** Пусть в декартовой системе координат  $Oxyz$  задана двусторонняя поверхность  $S$ . Выберем определенную сторону поверхности  $S$ , задав определенное направление единичного вектора нормали  $\vec{n}(x, y, z)$ , точка  $(x, y, z) \in S$ . И пусть в точках поверхности  $S$  определена вектор-функция  $\vec{F}(x, y, z)$  с координатами  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ . Сделав разбиение  $S$  на  $n$  частей  $T_i$  с площадями  $S_i$ , составим интегральную сумму вида

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(x_i, y_i, z_i), \vec{n}(x_i, y_i, z_i)) \Delta S_i,$$

где  $(x_i, y_i, z_i) \in T_i$ ;  $(\vec{F}, \vec{n})$  означает скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{n}$ .

Поверхностным интегралом II рода от вектор-функции  $\vec{F}(x, y, z)$  по выбранной стороне поверхности  $S$  называется предел интегральной суммы  $\sigma_n$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda$  - диаметр разбиения), если этот предел существует; конечен, не зависит от способа разбиения и от выбора точек  $(x_i, y_i, z_i)$ . Обозначение:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n &= \iint_S (\vec{F}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) dS = \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \end{aligned}$$

*Физический смысл.* Указанный интеграл выражает массу жидкости единичной плотности, протекающей через поверхность  $S$  в направлении вектора нормали  $\vec{n}$  со скоростью  $\vec{F}$  за единицу времени, то есть так называемый *поток* вектор-функции (или векторного поля)  $\vec{F}$  через  $S$  в направлении  $\vec{n}$ .

## 2.6. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода

Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена и непрерывна в точках дуги  $\overset{\cup}{AB}$  кусочно-гладкой пространственной кривой. Если дуга  $\overset{\cup}{AB}$  задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

то

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (2.15)$$

В случае плоской кривой  $\overset{\cup}{AB}$

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (2.16)$$

Механический смысл криволинейного интеграла I рода: если  $f(x, y, z) > 0$ , то  $\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl$  представляет собой массу кривой, имеющей переменную линейную плотность  $\mu(x, y, z) = f(x, y, z)$ .

**Пример 2.10.** Вычислить массу отрезка прямой, заключенного между точками  $A(0; -2)$ ,  $B(4; 0)$ , если  $\mu(x, y) = \frac{1}{x - y}$ .

**Решение.** Найдем уравнение прямой  $AB$ :  $y = 0,5x - 2$ ; тогда  $dl = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$ .

$$\text{Отсюда } M = \int_0^4 \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{dx}{x - y} = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x + 4} = \sqrt{5} \ln 2.$$

Пусть функции  $P(x,y,z)$ ,  $Q(x,y,z)$ ,  $R(x,y,z)$  непрерывны в точках дуги  $\overset{\cup}{AB}$  кусочно-гладкой пространственной кривой. Если уравнение дуги  $\overset{\cup}{AB}$  задано параметрически  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), то

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt. \quad (2.17)$$

В случае плоской кривой  $\overset{\cup}{AB}$

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt. \quad (2.18)$$

**Пример 2.11.** Найти работу силы  $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$  вдоль части кривой  $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  (линия пересечения поверхностей  $4x^2 - y^2 = 1$  и  $z = 0$ ) от точки  $A\left(\frac{1}{2}, 0, 4\right)$  до точки  $B(1, \sqrt{3}, 4)$ .

**Решение.**  $x = \frac{1}{2} \text{ch}t$ ,  $y = \text{sh}t$ ,  $z = 4$ . ( $0 \leq t \leq \text{arcch}2$ ) – параметрическое

задание пути  $\overset{\cup}{AB}$ . По формуле (2.17)

$$\begin{aligned} A &= \int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{\overset{\cup}{AB}} 2x dx + y dy + z y x dz = \\ &= \int_0^{\text{arcch}2} \left( 2 \text{ch}t \cdot \frac{1}{2} \text{sh}t + \text{sh}t \text{ch}t + 2 \cdot \frac{1}{2} \text{ch}t \text{sh}t \cdot 4 \cdot 0 \right) dt = \\ &= \int_0^{\text{arcch}2} \text{sh}2t dt = \frac{1}{2} (\text{ch}(2 \text{arcch}2) - 1) = \frac{1}{2} (2 \text{ch}^2 \text{arcch}2 - 2) = \frac{27}{2} = 3. \end{aligned}$$

**Пример 2.12.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$  вдоль части кривой  $\rho = 2$ ,  $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ ,  $B(0, 2)$ . Движение от точки  $A$  к точке  $B$  – по ходу часовой стрелки.

**Решение.**  $x = \rho \cos \varphi = 2 \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi = 2 \sin \varphi$  – параметрическое задание части кривой ( $\varphi$  в роли параметра  $t$ ). По формуле (2.18)

$$A = \int_{\overset{\cup}{AB}} ydx + xdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin \varphi (-2 \sin \varphi) + 2 \cos \varphi 2 \cos \varphi) d\varphi =$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos 2\varphi d\varphi = -2 \sin 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = 2.$$

## 2.7. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода. Связь между ними

**а) Поверхностный интеграл I рода (ПОВИ-1).** Если поверхность  $T$  задана уравнением  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset Oxy$ , причем  $z(x, y)$  имеет непрерывные частные производные, а проекция  $D$  поверхности  $T$  на плоскость  $Oxy$  имеет кусочно-гладкую границу, и если в точках поверхности  $T$  задана непрерывная функция  $f(x, y, z)$ , то интеграл от  $f(x, y, z)$  по площади поверхности  $T$  (I рода) существует и вычисляется по формуле:

$$\iint_T f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (2.19)$$

(Справа в этой формуле стоит двойной интеграл).

Аналогичные формулы можно получить, проектируя поверхность  $T$  на другие координатные плоскости.

**б) Поверхностный интеграл II рода (ПОВИ-2).** Если поверхность  $T$  задана так же, как в предыдущем пункте а), то поверхностный интеграл II рода  $\iint_T f(x, y, z) dx dy$  существует и сводится к двойному интегралу по проекции  $D$  поверхности  $T$  на плоскость  $Oxy$  следующим образом:

$$\iint_T f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.20)$$

Знак "+" в формуле (2.20) берется, если нормаль к выбранной стороне поверхности  $T$  образует острый угол с осью  $Oz$ ; знак "-" - в случае тупого угла.

Формулы, аналогичные (2.20), имеют место и для поверхностных интегралов II рода таких, как:  $\iint_T f(x, y, z) dy dz$ ,  $\iint_T f(x, y, z) dz dx$ . При этом нуж-

но спроектировать поверхность  $T$  на плоскости  $Oyz$  и  $Ozx$  соответственно.

**в) Связь между ПОВИ-1 и ПОВИ-2.** Имеет место формула

$$\iint_T P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iint_T (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS, \quad (2.21)$$

связывающая поверхностные интегралы II рода (слева) и I рода (справа).

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  есть углы, образованные с осями  $Ox, Oy, Oz$  нормалью  $\vec{n}(x, y, z)$  к выбранной стороне поверхности  $T$  в точке  $(x, y, z)$ .

**Пример 2.13.** Вычислить массу плоской пластины  $T: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ , расположенной в I октанте (рис.2.17) и имеющей поверхностную плотность  $\mu(x, y, z) = 2x + \frac{4}{3}y + z$ .

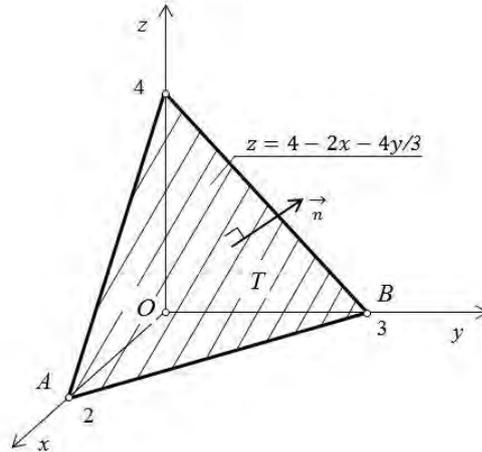


Рис. 2.17 К вычислению массы пластины

**Решение.** Уравнение поверхности  $T: z = 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)$ ;  $\Delta OAB$  – есть проекция поверхности  $T$  на плоскость  $Oxy$ . По формуле (2.19):

$$\begin{aligned} m_T &= \iint_T f(x, y, z) dS = \iint_D \mu(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_D \left(2x + \frac{4}{3}y + 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)\right) \sqrt{1 + (2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} dx dy = \\ &= \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot 4 \cdot \iint_D dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot S_D, \end{aligned}$$

где  $S_D$  - площадь фигуры  $D$ . А так как  $D$  - это  $\Delta OAB$ , то  $S_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ .

Итак,  $m_T = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{61}$ .

**Пример 2.14.** Вычислить поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = z \cdot \vec{k}$  ( $\vec{k}$  – единичный направляющий вектор оси  $Oz$ ) через верхнюю сторону нижней половины сферы  $T: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**Решение.** Уравнение нижней полусферы:  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Нормаль  $\vec{n}$  к выбранной стороне образует острый угол с  $Oz$ , поэтому по формуле (2.20) имеем:

$$\dot{I} = \iint_{\vec{O}} (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_T z dx dy = + \iint_D \left( -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy.$$

Здесь  $D$  - проекция  $T$  на плоскость  $Oxy$  есть круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Перейдем в последнем двойном интеграле к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ . В итоге:

$$\dot{I} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left( -\sqrt{R^2 - r^2} \right) r dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left( R^2 - r^2 \right)^{1/2} d \left( R^2 - r^2 \right) = -\frac{2\pi}{3} R^3.$$

## 2.8. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса

Эти формулы связывают интеграл по фигуре с некоторым интегралом по границе данной фигуры.

Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в области  $D \subset Oxy$  и на ее границе  $\Gamma$ ; область  $D$  - связная;  $\Gamma$  - кусочно-гладкая кривая. Тогда верна *формула Грина*:

$$\int_{\vec{A}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy; \quad (2.22)$$

здесь слева стоит криволинейный интеграл II рода, справа - двойной интеграл; контур  $\Gamma$  обходится против часовой стрелки.

Пусть  $T$  - кусочно-гладкая ограниченная двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Если функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные I порядка непрерывны в точках поверхности  $T$  и границы  $\Gamma$ , то имеет место *формула Стокса*:

$$\begin{aligned} & \int_{\vec{A}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_T \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx; \end{aligned} \quad (2.23)$$

слева стоит криволинейный интеграл II рода; справа - поверхностный интеграл II рода, взятый по той стороне поверхности  $T$ , которая остается слева при обходе кривой  $\Gamma$ .

Если связная область  $W \subset Oxyz$  ограничена кусочно-гладкой, замкнутой поверхностью  $T$ , а функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные первого порядка непрерывны в точках из  $W$  и  $T$ , то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*:

$$\begin{aligned} & \iint_T P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \\ & = \iiint_W \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz ; \end{aligned} \quad (2.24)$$

слева – поверхностный интеграл II рода по внешней стороне поверхности  $T$ ; справа – тройной интеграл по области  $W$ .

**Пример 2.15.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$  при обходе точки ее приложения окружности  $\Gamma: x^2 + y^2 = R^2$ , начиная от оси  $Ox$ , по часовой стрелке (рис.2.18).

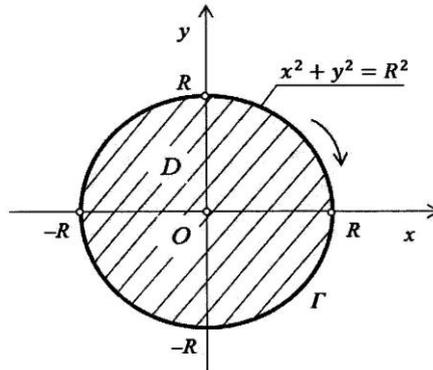


Рис. 2.18 Изображение окружности  $\Gamma$

**Решение.** Работа равна  $A = \int_{\tilde{A}} (x - y)dx + (x + y)dy$ . Применим формулу

Грина (2.22), ставя знак "-" справа перед интегралом (так как обход контура – по часовой стрелке) и учитывая, что  $P(x, y) = x - y$ ,  $Q(x, y) = x + y$ . Имеем:

$$A = - \iint_D \left( \frac{\partial(x + y)}{\partial x} - \frac{\partial(x - y)}{\partial y} \right) dxdy = - \iint_D 2dxdy = -2S_D,$$

где  $S_D$  -площадь круга  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ , равная  $\pi R^2$ . В итоге:  $A = -2\pi R^2$  – искомая работа силы.

**Пример 2.16.** Вычислить интеграл  $J = \int_{\tilde{A}} x^2 y^3 dx + dy + 2dz$ , если  $\Gamma$  есть окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в плоскости  $z = 2$ , обходимая против часовой стрелки.

**Решение.** По формуле Стокса (2.23) исходный интеграл сведем к поверхностному интегралу по кругу  $T$ :

$$T: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Итак, учитывая, что  $P(x, y, z) = x^2 y^3$ ,  $Q(x, y, z) = 1$ ,  $R(x, y, z) = 2$ , имеем:

$$J = \iint_T \left( \frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial(2)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z} \right) dy dz + \\ + \left( \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial z} - \frac{\partial(2)}{\partial x} \right) dz dx = -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy.$$

Последний интеграл есть двойной интеграл по кругу  $D \subset Oxy$ , на который проектировался круг  $T$ ;  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ . Перейдем к полярным координатам:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $r \in [0; 1]$ . В итоге:

$$J = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi r dr = -3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr = -\frac{\pi}{8}.$$

**Пример 2.17.** Найти поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = (x^2; y^2; z^2)$  через полную поверхность  $T$  пирамиды  $W$ :  $\begin{cases} x + 2y + 3z \leq 6, \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$  (рис. 2.19) в направлении внешней нормали к поверхности.

**Решение.** Поток равен  $\dot{I} = \iint_T x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ . Применяя формулу Остроградского-Гаусса (2.24), сводим задачу к вычислению тройного интеграла по фигуре  $W$ -пирамиде:

$$\dot{I} = \iiint_W \left( \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = 2 \iiint_W (x + y + z) dx dy dz = 2 \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} (x + y + z) dz = \\ = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left( 4 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{9}x^2 - \frac{14}{9}xy - \frac{8}{9}y^2 \right) dy = \\ = \int_0^6 \left( 10 + x - \frac{7}{6}x^2 + \frac{13}{108}x^3 \right) dx = 20.$$

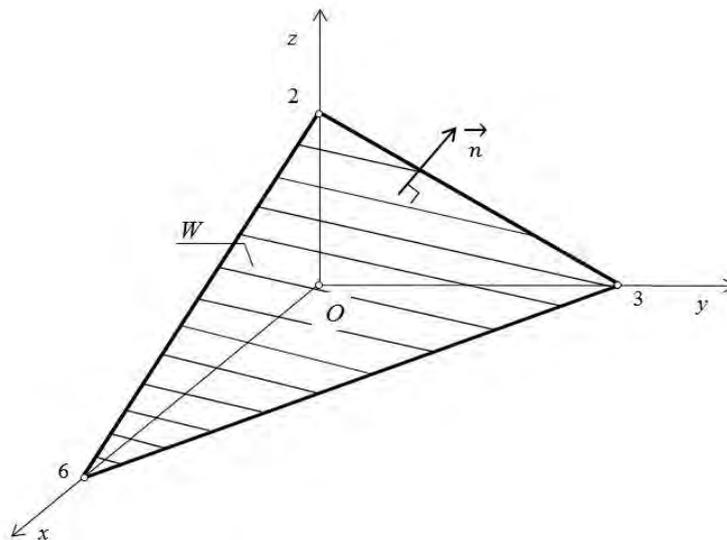


Рис. 2.19 К вычислению потока через поверхность пирамиды

**Пример 2.18.** Найти поток  $\Pi$  векторного поля  $\vec{F} = (x + 3z)\vec{k}$  через полную поверхность  $T$  пирамиды  $W$ :  $x + 2y + 3z \leq 6$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$  (рис. 2.20), в направлении внешней нормали к поверхности.

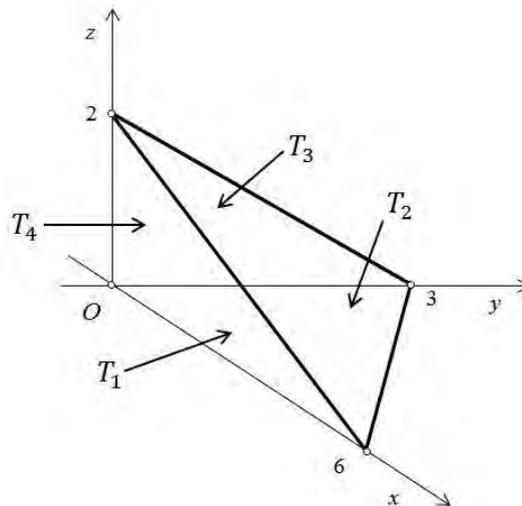


Рис. 2.20 К вычислению потока через поверхность пирамиды

**Решение.** Применим формулу Остроградского-Гаусса (2.24)

$$\Pi = \iiint_W \frac{\partial(x + 3z)}{\partial z} dx dy dz = \iiint_W 3 dx dy dz = 3V = 18, \text{ где } V \text{ — объем пирамиды.}$$

Сравним с решением непосредственного вычисления потока ( $T_1, T_2, T_3, T_4$  — грани пирамиды).

$$\dot{I} = \iint_T (x + 3z) dx dy dz = \iint_{T_1} + \iint_{T_2} + \iint_{T_3} + \iint_{T_4} .$$

$$\iint_{T_3} (x + 3z) dx dy = \iint_{T_4} (x + 3z) dx dy = 0,$$

так как проекции граней  $T_3, T_4$  на плоскость  $Oxy$  имеют нулевую площадь (рис. 2.21).

$$\iint_{T_1} (x + 3z) dx dy = -\iint_G x dx dy;$$

$$\iint_{T_2} (x + 3z) dx dy = \iint_G (x + 6 - x - 2y) dx dy.$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \iint_G (6 - x - 2y) dx dy = \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (6 - x - 2y) dx = \\ &= \int_0^3 \left( (6 - 2y)^2 - \frac{(6 - 2y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^3 (6 - 2y)^2 dy = 18. \end{aligned}$$

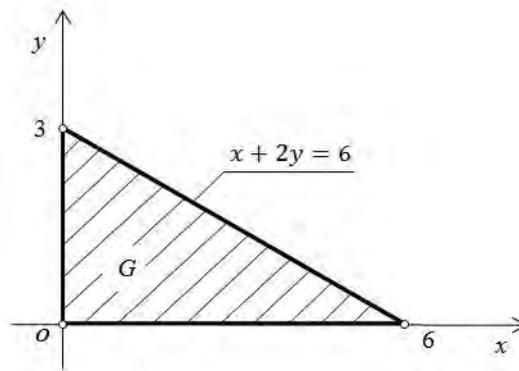


Рис. 2.21 Проекция граней  $T_1$  и  $T_2$

### 3. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

#### 3.1. Оригинал и его изображения

Функция  $f(t)$  действительного переменного  $t$  называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям:  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;

существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $S_0 \geq 0$ , что  $|f(t)| < Me^{S_0 t}$  для всех  $t$ ; при  $t \geq 0$  функция  $f(t)$  непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на каждом конечном интервале оси  $Ot$ .

Изображением функции  $f(t)$  по Лапласу называется функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p = \alpha + i\beta$ , определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Если  $f(t)$  – оригинал, интеграл в правой части последнего равенства сходится при  $\text{Re } p = \alpha > S_0$ . Тот факт, что  $F(p)$  является изображением оригинала  $f(t)$ , будем обозначать так:  $F(p) = L(f(t))$  или  $F(p) \doteq f(t)$ ,  $F(p) \rightarrow f(t)$ .

Таблица 3.1

Изображение основных элементарных функций

$f(t)$ при $t > 0$	$L(f(t))$
1	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$\text{sh } \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$\text{ch } \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$

### 3.2. Основные теоремы операционного исчисления

**Теорема 3.1 (линейности).**

Для любых оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$  и любых чисел  $a, b$   
 $L(af(t)+bg(t))=aL(f(t))+bL(g(t))$ .

Пусть всюду в дальнейшем  $L(f(t))=F(p)$ .

**Теорема 3.2 (подобия (изменения масштаба)).**

Для любого постоянного  $C > 0$   $L(f(Ct))=\frac{1}{C}F\left(\frac{p}{C}\right)$ .

**Теорема 3.3 (смещения).**

Для любого числа  $\alpha$ :  $L(e^{-\alpha t} f(t))=F(p+\alpha)$ .

**Теорема 3.4 (о дифференцировании оригинала).**

Если функции  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  являются оригиналами, то

$$L(f'(t))=pF(p)-f(0);$$

$$L(f''(t))=p^2F(p)-pf(0)-f'(0);$$

.....

$$L(f^{(n)}(t))=p^n F(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0).$$

**Теорема 3.5 (о дифференцировании изображения).**

$$L(t^n f(t))=(-1)^n F^{(n)}(p), \quad n=1,2,\dots$$

**Теорема 3.6 (об интегрировании оригинала).**

$$L\left(\int_0^t f(s)ds\right)=\frac{F(p)}{p}.$$

**Теорема 3.7 (об интегрировании изображения).**

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_p^\infty F(y)dy.$$

**Теорема 3.8 (запаздывания).**

$$L(f(t-t_0))=e^{-pt_0} \cdot F(p), \quad t_0 > 0.$$

**Теорема 3.9 (об изображении свертки двух функций).**

$L(f_1 * f_2)=F_1(p)F_2(p)$ , где  $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds$  – свертка функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ ,  $F_1(p)=L(f_1(t))$ ,  $F_2(p)=L(f_2(t))$ .

**Пример 3.1.** Найти изображения функции  $\text{sh } at \sin bt$ .

**Решение.** Известно, что

$$L(\sin bt)=\frac{b}{p^2+b^2}=F(p); \quad \text{sh } at = \frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at}).$$

Тогда  $\text{sh at sin bt} = \frac{1}{2}e^{at} \sin bt - \frac{1}{2}e^{-at} \sin bt$ . По теореме линейности имеем  $L(\text{sh at sin bt}) = \frac{1}{2}L(e^{at} \sin bt) - \frac{1}{2}L(e^{-at} \sin bt)$ . В каждом из полученных слагаемых применим теорему смещения и получаем

$$\frac{1}{2}F(p-a) - \frac{1}{2}F(p+a) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}.$$

Это и есть искомое изображение.

**Пример 3.2.** Найти свертку функций  $t$  и  $e^t$  и ее изображение.

**Решение.**  $t * e^t = \int_0^t se^{t-s} ds = \int_0^t se^t e^{-s} ds = e^t \int_0^t se^{-s} ds$ . Вычисляя интеграл, имеем  $te^t = e^t(1 - te^{-t} - e^{-t})$ . По теореме об изображении свертки  $L(t * e^t) = L(t)L(e^t) = \frac{1}{p^2(p-1)}$ .

**Пример 3.3.** Найти  $L(te^{-2t} \sin t)$ .

**Решение.** Найдем  $F(p) = L(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}$ . По теореме о дифференцировании изображения  $L(\sin t \cdot t) = -F'(p) = -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = G(p)$ . Наконец, по теореме смещения  $L(e^{-2t} t \sin t) = G(p+2) = \frac{2(p+2)}{\left((p^2 + 1)^2 + 1\right)^2}$ .

### 3.3. Отыскание оригинала по изображению

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения.

Вторая теорема разложения позволяет найти оригинал по известному изображению, являющемуся дробно-рациональной функцией  $p$ :  $F(p) = u(p)/v(p)$ , где  $u(p)$  и  $v(p)$  – многочлены от  $p$  соответственно степени  $m$  и  $n$ , причем  $m < n$ . Если разложение  $v(p)$  на простейшие множители имеет вид  $v(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_r)^{k_r}$ ,  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ , то, как известно,  $F(p)$  может быть разложена на сумму элементарных дробей

вида  $\frac{A_{js}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}$ ;  $j = \overline{1, r}$ ;  $s = \overline{1, k_j}$ . Итак,

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{js}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \quad (3.1)$$

Все коэффициенты могут быть найдены по формуле

$$A_{js} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left( \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[ (p-p_j)^{k_j} F(p) \right] \right). \quad (3.2)$$

Вместо этой формулы для определения коэффициентов  $A_{js}$  можно использовать элементарные приемы, применяемые в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей. Если все корни многочлена  $v(p)$  простые, разложение упрощается:

$$v(p) = (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n); \quad (p_j \neq p_k \quad \text{при} \quad j \neq k)$$

$$F(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{p-p_j}, \quad (3.3)$$

где  $A_j = \frac{u(p_j)}{v'(p_j)}$ .

После отыскания тем или иным способом разложения  $F(p)$  на простейшие дроби оригинал  $f(t)$  находится так:

а) в случае кратных корней знаменателя

$$f(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} A_{js} \frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!} e^{p_j t}; \quad (3.4)$$

б) в случае простых корней знаменателя  $v(p)$

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} e^{p_j t}. \quad (3.5)$$

**Пример 3.4.** Найти оригинал  $f(t)$ , если известно, что

$$F(p) = L(f(t)) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

**Решение.** У изображения  $F(p)$  в данном случае все корни знаменателя – действительные и простые. Поэтому лучше всего воспользоваться формулой (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} u(p) &= p+1; \quad v(p) = p(p-1)(p-2)(p-3) = \\ &= p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p; \quad v'(p) = 4p^3 - 18p^2 + 22p - 6. \end{aligned}$$

$$v(p): \quad p_1 = 0; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 2; \quad p_4 = 3; \quad \frac{u(p_1)}{v'(p_1)} = -\frac{1}{6};$$

Корни  $\frac{u(p_2)}{v'(p_2)} = 1; \quad \frac{u(p_3)}{v'(p_3)} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)} = \frac{2}{3}.$

Отсюда по формуле (3.5) находим  $f(t)$ :  $f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}$ .

**Пример 3.5.** Найти оригинал  $f(t)$  по его изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}.$$

**Решение.** Разложение  $F(p)$  на простейшие дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{A_{11}}{(p-1)^3} + \frac{A_{12}}{(p-1)^2} + \frac{A_{13}}{p-1} + \frac{A_{21}}{(p+2)^2} + \frac{A_{22}}{p+2} \quad (3.6)$$

Находим коэффициенты  $A_{ij}$  по формуле (3.2)

$$A_{11} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 1} \left( (p-1)^3 F(p) \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p}{(p+2)^2} = \frac{1}{9};$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left( (p-1)^3 F(p) \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} - \frac{2p}{(p+2)^3} \right) = \frac{1}{27}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} \left( (p-1)^3 F(p) \right) = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p}{(p+2)^2} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left( -\frac{4}{(p+2)^3} + \frac{6p}{(p+2)^4} \right) = -\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Аналогично получим  $A_{21} = \frac{2}{27}$ ;  $A_{22} = \frac{1}{27}$ . Следовательно,

$$F(p) = \frac{1}{27} \left[ \frac{3}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} \right].$$

Отсюда по таблице изображений и теоремам смещения и линейности изображения имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{27} \left[ \frac{3}{2} t^2 e^t + t e^t - e^t + 2t e^{-2t} + 2^0 e^{-2t} \right] = \\ &= \frac{1}{54} (3t^2 + 2t - 2) e^t + \frac{1}{27} (2t + 1) e^{-2t}. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты разложения (3.6) можно найти и таким способом, который применялся в математическом анализе при интегрировании рациональных дробей.

### 3.4. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционным методом

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ)  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t),$$

правая часть которого  $f(t)$  является оригиналом. Тогда и решение  $y(t)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y_0'$ , ...,  $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$  (то есть решение задачи Коши для данного ЛДУ), тоже будет оригиналом.

Обозначим изображение искомого решения  $y(t)$  через  $S(p)$ , то есть  $S(p) = L(y(t))$ . Используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности, находим изображение левой части исходного ЛДУ и приравниваем его к  $L(f(t))$ . В итоге вместо ЛДУ с начальными условиями получается так называемое изображающее уравнение, которое является линейным алгебраическим уравнением относительно новой неизвестной функции  $S(p) = L(y(t))$ . Решая изображающее уравнение, находим  $S(p)$ . Определяя затем по  $S(p)$  оригинал  $y(t)$ , мы тем самым найдем искомое решение  $y(t)$  задачи Коши. Аналогично решаются и системы ЛДУ.

**Пример 3.6.** Решить ЛДУ  $y'''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$ , если  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Решение.** Обозначим  $L(y(t)) = S(p)$ . По теореме о дифференцировании оригинала имеем  $L(y'(t)) = pS(p) - y_0$ ;  $L(y''(t)) = p^2 S(p) - py_0 - y_0' = p^2 S(p)$ . Тогда изображающее уравнение таково:  $p^2 S(p) - 2pS(p) - 3S(p) = \frac{1}{p-3}$ . Отсюда

$S(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2 - 2p - 3)} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}$ . Восстановим теперь оригинал  $y(t)$  по изображению  $S(p)$ . Разложим вначале дробь  $S(p)$  на простейшие дроби:  $\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{(p-3)} + \frac{C}{p+1}$ .

Ищем  $A, B, C$ , приводя сумму справа к общему знаменателю и приравнявая числители дробей:  $1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2$ .

Полагая  $p=3$ , получаем  $1=4A$ ;  $A=\frac{1}{4}$ ; полагая  $p=0$ , получаем  $1=A-3B+9C$ , откуда  $B=\frac{1}{3}(A+9C-1)=-\frac{1}{16}$ .

Следовательно,  $S(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{(p-3)}+\frac{1}{16}\frac{1}{p+2}$ .

Перейдя к оригиналам, получим  $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$ .

Решение поставленной задачи Коши найдено.

**Пример 3.7.** Решить систему ЛДУ 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 1, \end{cases}$$
 , если  $x(0)=-1$ ,

$y(0)=5$ .

**Решение.** Обозначим  $L(x(t))=T(p)$ ,  $L(y(t))=S(p)$  и найдем изображения левой и правой частей каждого из уравнений системы.

$$\begin{cases} pT(p)-(-1)=T(p)+2S(p) \\ pS(p)-5=2T(p)+S(p)+\frac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)T(p)-2S(p)=-1; \\ -2T(p)+(p-1)S(p)=5+\frac{1}{p}. \end{cases}$$

Из последней линейной алгебраической системы уравнений находим неизвестную  $T(p)$  (например, по формулам Крамера)

$$T(p)=\frac{-p^2+11p+2}{p((p-1)^2-4)}=\frac{-p^2+11p+2}{p(p+1)(p-3)}.$$

Разложим  $T(p)$  на простейшие рациональные дроби:

$$T(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-3}=\frac{-p^2+11p+2}{p(p+1)(p-3)}.$$

Для определения чисел  $A, B, C$  получаем равенство  $A(p+1)(p-3)+Bp(p-3)+Cp(p+1)=-p^2+11p+2$ .

Подставляя в обе части равенства вместо  $p$  поочередно числа  $-1; 3$  и  $0$ , имеем  $4B=-10$ ,  $12C=26$ ,  $-3A=2$ .

Отсюда

$$B=-\frac{5}{2}; \quad C=\frac{13}{6}; \quad A=-\frac{2}{3}; \quad T(p)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{13}{6}\frac{1}{p-3}.$$

Пользуясь таблицей изображений и свойством линейности изображения, найдем оригинал  $x(t)$ . Итак,  $x(t)=-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{13}{6}e^{3t}$ , одна из искомым функций найдена. Функцию  $y(t)$  можно найти аналогично  $x(t)$ , предварительно определив ее изображение  $S(p)$ . Но в данном случае  $y(t)$  можно найти проще, выражая из первого уравнения исходной системы ЛДУ:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} - x(t) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} e^{-t} + \frac{13}{2} e^{3t} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{13}{6} e^{3t} \right) = \\ = \frac{5}{2} e^{-t} + \frac{13}{6} e^{3t} + \frac{1}{3}.$$

Задача решена.

## 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

### 4.1. Скалярное поле и его характеристики

**Пространственным скалярным полем** называется функция

$$u = u(x, y, z), \quad (4.1)$$

заданная в некоторой области трехмерного евклидова пространства.

Аналогично **плоским скалярным полем** называется функция  $u = u(x, y)$ , заданная в некоторой области двумерного евклидова пространства.

**Характеристики поля.**

1. Геометрической характеристикой скалярного поля служат *поверхности уровня* – множества точек области определения поля, в которых оно принимает постоянное значение:

$$u(x, y, z) = C, \quad (4.2)$$

где  $C$  – любое фиксированное число из области значений функции.

Аналогично определяются линии уровня для плоского поля:  $u(x, y) = C$ .

2. Частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  характеризуют скорость изменения поля  $u = u(x, y, z)$  по направлению координатных осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно. Точки, в которых выполнено условие  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , называются *стационарными* (иногда говорят – критическими) для поля.

Пусть  $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  – единичный вектор ( $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, образованные вектором  $\vec{l}$  с осями координат). Тогда *производной по направлению  $\vec{l}$*  скалярного поля  $u = u(x, y, z)$  в точке  $M(x, y, z)$  называется

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma. \quad (4.3)$$

Если вектор не является единичным, то следует сначала найти его направляющие косинусы.

3. **Градиентом скалярного поля  $u = u(x, y, z)$**  в точке  $M$  называется вектор, который в дальнейшем будем обозначить жирным шрифтом.

$$\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad (4.4)$$

где частные производные вычислены в точке  $M$  и  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей.

Если в качестве вектора  $\vec{l}$  взять направление градиента  $\mathbf{grad} u / |\mathbf{grad} u|$

$$\frac{du}{d\vec{l}} = |\mathbf{grad} u|. \quad (4.5)$$

В направлении градиента производная по направлению принимает наибольшее значение, то есть в этом направлении поле имеет наибольшую скорость возрастания.

**Пример 4.1.** Найти линии уровня скалярного поля  $u = 2x + 3y$ .

**Решение.** По (4.2) имеем  $2x + 3y = c$  – это семейство прямых линий.

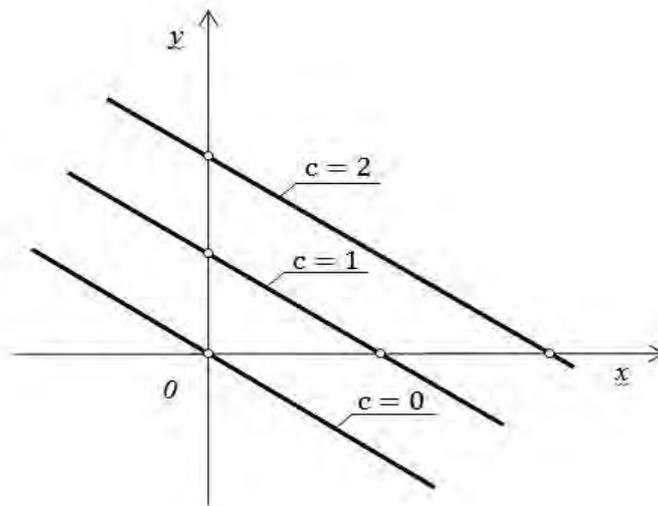


Рис. 4.1. Линии уровня

**Пример 4.2.** Для скалярного поля  $u = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2$  найти стационарные точки, поверхности уровня и записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку  $M(2; -1; 2)$ .

**Решение.** Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

одновременно обращаются в нуль в точке  $N(1, -1, 0)$ , которая является стационарной.

По определению поверхности уровня имеем:

$$2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = c$$

или

$$2(x-1)^2 - 2 + (y+1)^2 - 1 + z^2 = c$$

$$2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = c + 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{1/2} + \frac{(y+1)^2}{1} + \frac{z^2}{1} = c + 3$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{c+3}{2}} + \frac{(y+1)^2}{c+3} + \frac{z^2}{c+3} = 1.$$

Последнее уравнение при различных  $c > -3$  определяет семейство эллипсоидов с центром в точке  $O(1, -1, 0)$  и полуосями

$$a = \sqrt{\frac{c+3}{2}}, \quad b = \sqrt{c+3}, \quad d = \sqrt{c+3}.$$

Поверхность уровня, проходящая через точку  $M(2, -1, 2)$ , имеет уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{6} + \frac{z^2}{6} = 1,$$

где  $c = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + (-1)^2 + 2(-1) + 2^2 = 3$ .

**Пример 4.3.** Найти производную скалярного поля  $u = xy + y^2 - 4z$  в точке  $M(1, 2, 3)$  по направлению вектора  $\vec{l} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ .

**Решение.** Вектор  $\vec{l}$  имеет координаты  $(2, 3, 5)$ . Найдем его направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{3}{2\sqrt{7}},$$

$$\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{-5}{2\sqrt{7}}.$$

Вычислим частные производные в точке  $M(1, 2, 3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y|_M = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x + 2y)|_M = 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -4.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} + 5 \cdot \frac{3}{2\sqrt{7}} - 4 \cdot \frac{-5}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{15}{2\sqrt{7}} + \frac{20}{2\sqrt{7}} = \frac{39}{2\sqrt{7}}.$$

**Пример 4.4.** Найти производную скалярного поля  $u = 4xy + y^2$  в точке  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

**Решение.** Направление  $\vec{l}$  внешней нормали к эллипсу в точке  $M$  перпендикулярно к направлению вектора  $\vec{a}$  касательного к эллипсу в этой точке (Рис. 4.2).

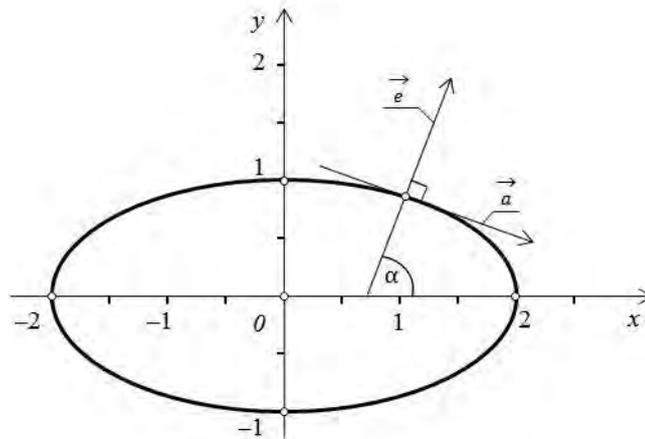


Рис. 4.2. К определению производной по направлению

Точка  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  лежит на верхней части эллипса  $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ .

Обозначим через  $\varphi$  угол, который образует касательный вектор  $\vec{a}$  с осью  $Ox$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = y' \Big|_M = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) \Big|_M = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Если обозначить через  $\alpha$  угол, образованный вектором  $\vec{l}$  с осью  $Ox$ , то из условия ортогональности  $\vec{l}$  и  $\vec{a}$  получим:  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ .

Находим направляющие косинусы вектора  $\vec{l}$ :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{13}};$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Значения частных производных функции  $u = 4xy + y^2$  в точке  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4y|_M = 2\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + 2y|_M = 4 + \sqrt{3}.$$

Следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} + (4 + \sqrt{3}) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}(5 + \sqrt{3}).$$

**Пример 4.5.** Найти вектор-градиент скалярного поля  $u = 2x + 3y$ .

**Решение.**  $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ .

В нашем случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

Следовательно,  $\operatorname{grad} u = (2; 3)$ .

**Пример 4.6.** Для скалярного поля  $u = \operatorname{tg}(yz) + e^{z \ln x} - z$  в точке  $M(1; 0; 2)$  найти вектор-градиент и наибольшую скорость возрастания.

**Решение.** Имеем,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} e^{z \ln x} \Big|_M = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{\cos^2(yz)} \Big|_M = 2;$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{\cos^2(yz)} + e^{z \ln x} \cdot \ln x - 1 \Big|_M = -1.$$

Следовательно,  $\operatorname{grad} u = (2; 2; -1)$ .

Наибольшую скорость возрастания поля  $u$  в точке  $M$  найдем по формуле

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

## 4.2. Векторное поле и его характеристики

Векторное поле задается вектор-функцией

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

В случае двумерного векторного плоского поля

$$\vec{F}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Векторной линией поля  $\vec{F}$  называется такая линия, касательная в каждой точке которой параллельна вектору поля в этой точке (рис. 4.3).

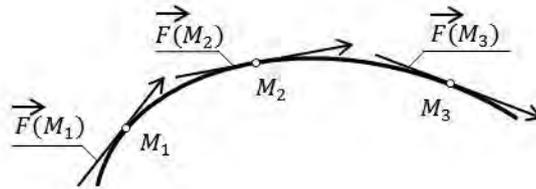


Рис. 4.3. Векторные линии

В трехмерном случае векторные линии определяются из уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \quad (4.6)$$

а для плоского векторного поля

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{P(x, y)} &= \frac{dy}{Q(x, y)} \\ \frac{dx}{P(x, z)} &= \frac{dz}{R(x, z)} \\ \frac{dy}{Q(y, z)} &= \frac{dz}{R(y, z)} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Потоком векторного поля через ориентированную поверхность  $S$  называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора  $\vec{F}$  на единичный вектор нормали  $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ :

$$\dot{I}_S = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS \quad (4.8)$$

Напомним, что ориентация гладкой поверхности определяется выбором одного из двух возможных векторов нормали, который изменяется на поверхности непрерывным образом.

В случае замкнутой поверхности  $S$  в качестве вектора  $\vec{n}$  берется вектор к внешней стороне этой поверхности, а поток записывается в виде

$$\dot{I}_S = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS \quad (4.9)$$

### Свойства потока.

1. При изменении ориентации поверхности поток изменяет знак на противоположный.

$$2. \Pi_S(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \Pi_{S_i}(\vec{F}), \text{ где } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Физический смысл потока зависит от природы поля  $\vec{F}$ . Если, например,  $\vec{F}$  – поле скоростей текущей жидкости в области  $V$ , а  $S$  – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ , то поток  $\Pi_S(\vec{F})$  будет равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность  $S$  в направлении  $\vec{n}$ .

Если  $\vec{F}$  – силовое поле, то поток  $\Pi_S(\vec{F})$  выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих поверхность  $S$  в единицу времени в направлении  $\vec{n}$ .

Если  $S$  – часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = a^2$ , ограниченная поверхностями  $z = z_1(x, y)$ ,  $z = z_2(x, y)$ , ( $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ ), то в цилиндрических координатах поток векторного поля через рассматриваемую поверхность вычисляется по формуле:

$$\dot{I}_S(\vec{F}) = \pm \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1(a \cos \varphi, a \sin \varphi)}^{z_2(a \cos \varphi, a \sin \varphi)} (x \cdot P(x, y) + yQ(x, y)) dz \quad (4.10)$$

где

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \text{ – цилиндрические координаты,}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho < \infty, -\infty < z < \infty.$$

Если  $S$  – часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , то

$$\dot{I}_S(\vec{F}) = \pm R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} (xP(x, y, z) + y \cdot Q(x, y, z) + zR(x, y, z)) \sin \theta d\theta, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \text{ – сферические координаты,}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho < \infty.$$

**Пример 4.7.** Для плоского поля  $\vec{F} = (5x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$  найти векторные линии.

**Решение.** Данное поле дифференцируемо во всех точках плоскости  $Oxy$ .

$$P(x, y) = 5x - y$$

$$Q(x, y) = 2y.$$

Согласно (4.7) имеем:  $\frac{dx}{5x-y} = \frac{dy}{2y}$ . Отсюда  $2ydx = (5x-y)dy$  или

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{5x-y}$ . Мы получили однородное уравнение, которое решаем с по-

мощью подстановки

$$y = t \cdot x$$

$$y' = t'x + t:$$

$$t'x + t = \frac{2tx}{5x - tx}$$

$$t'x + t = \frac{2t}{5-t} \quad \text{или}$$

$$t'x = \frac{2t}{5-t} - t$$

$$t'x = \frac{2t - 5t + t^2}{5-t}$$

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{t^2 - 3t}{-t + 5}$$

$$\frac{(5-t)dt}{t^2 - 3t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(5-t)dt}{t^2 - 3t} = \int \frac{dx}{x}$$

Разложим подынтегральную дробь:

$$\frac{5-t}{t^2 - 3t} = \frac{5-t}{t(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} = \frac{At - 3A + Bt}{t(t-3)}.$$

Откуда

$$\left. \begin{array}{l} t^0: 5 = -3A \\ t^1: -1 = A + B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{5}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{array}$$

Следовательно,

$$\int -\frac{5}{3} \frac{dt}{t} + \int \frac{2}{3} \frac{dt}{t-3} = \int \frac{dx}{x}$$

или

$$-\frac{5}{3} \ln|t| + \frac{2}{3} \ln|t-3| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln \frac{(t-3)^{2/3}}{t^{5/3}} = \ln(x \cdot C)$$

$$\frac{(t-3)^{2/3}}{t^{5/3}} = x \cdot C; \quad t = \frac{y}{x}$$

Следовательно,  $C = \frac{\left(\frac{y}{x} - 3\right)^{2/3}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{5/3} \cdot x}$  – семейство векторных линий.

**Пример 4.8.** Найти векторные линии поля

$$\vec{F} = (x - y + z)\vec{i} + (x + y - z)\vec{j} + (2z - y)\vec{k}.$$

**Решение.** Запишем систему дифференциальных уравнений (4.6), используя дифференцирование по параметру  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = x - y + z; \quad \frac{dy}{dt} = x + y - z; \quad \frac{dz}{dt} = 2z - y.$$

Найдем общее решение этой системы. Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 1 & (-1-\lambda) & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

а) Рассмотрим  $\lambda_1 = 2$ :

$$\begin{cases} -e_1 - e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 - e_2 - e_3 = 0 \\ -e_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим:  $e_1 = e_3$ ,  $e_2 = 0$ . Следовательно,  $(1, 0, 1)$  – собственный вектор и

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 0 \\ z = e^{2t} \end{cases} \text{ – частное решение системы.}$$

б) Рассмотрим  $\lambda_1 = 1$ .

Система линейных уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} -e_2 + e_3 = 0 \\ e_1 - e_3 = 0 \\ -e_2 + e_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2. Корень  $\lambda = 1$  имеет кратность, равную 2. Поэтому решение будем искать в виде:

$$\begin{cases} x = (a + bt) e^t \\ y = (c + dt) e^t \\ z = (k + lt) e^t. \end{cases}$$

Подставив правые части последних равенств в систему дифференциальных уравнений, записанных через параметр  $t$ , после преобразований получим:

$$\left. \begin{array}{l} -d + l = 0 \quad b = -c + k \\ b - l = 0 \quad d = a - k \\ 2l - d = l \quad l + k = 2k - c \end{array} \right\}.$$

Приняв  $l = C_1$ ,  $k = C_2$ , получим:

$$\begin{aligned} d &= C_1, & b &= C_1, & c &= -C_1 + C_2, \\ a &= C_1 + C_2, & \ell &= C_1, & k &= C_2. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражения для  $x, y, z$  и прибавив частное решение  $(x = e^{2t}, y = 0, z = e^{2t})$ , умноженное на  $C_3$ , получим общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_1 t) e^t + C_3 e^{2t} \\ y = (-C_1 + C_2 + C_1 t) e^t \\ z = (C_2 + C_1 t) e^t + C_3 e^{2t}, \end{cases}$$

определяющее параметрические уравнения семейства векторных линий поля.

**Пример 4.9.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$  через верхнюю сторону части поверхности  $z = 4 - x^2 - y^2$ , отсеченной плоскостью  $z = 0$ .

**Решение.** Поверхность  $z = 4 - x^2 - y^2$  представляет собой параболоид вращения (Рис.4.4).

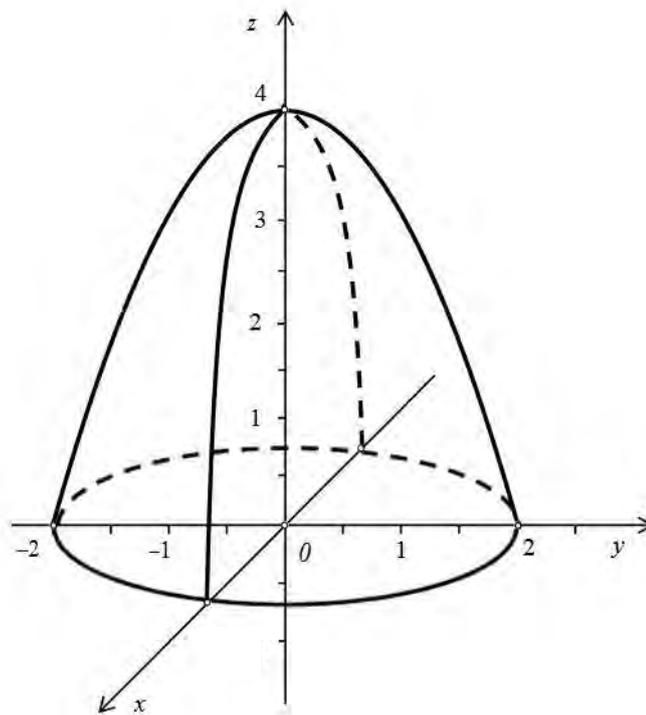


Рис.4.4 К вычислению потока векторного поля

Проекцией  $(G)$  рассматриваемой поверхности на плоскость  $XOY$  является круг радиуса 2. Так как верхняя сторона параболоида видна со стороны положительного направления оси  $OZ$ , то перед интегралом по проекции  $G$  надо взять знак плюс.

Находим нормаль  $\vec{n} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$  к нашей поверхности и скалярное произведение

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}, \vec{n}) &= x \cdot 2x + y \cdot 2y + 1 \cdot (-z) = 2x^2 + 2y^2 - z = 2x^2 + 2y^2 - 4 + x^2 + y^2 = \\
 &= 3x^2 + 3y^2 - 4 = 3(x^2 + y^2) - 4.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \Pi_S(\vec{F}) &= + \iint_G (3(x^2 + y^2) - 4) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3\rho^2 - 4) \cdot \rho d\rho = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{3\rho^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{4\rho^2}{2} \Big|_0^2 \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi (12 - 8) = 4\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

**Пример 4.10.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = (4x - 3)\vec{i} + (2y - 6x)\vec{j} - y^2 z^3 \vec{k}$  через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра  $x^2 + y^2 = 9$ , ограниченной плоскостью  $z = 0$ , параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и расположенной в первом октанте (см. рис.4.5).

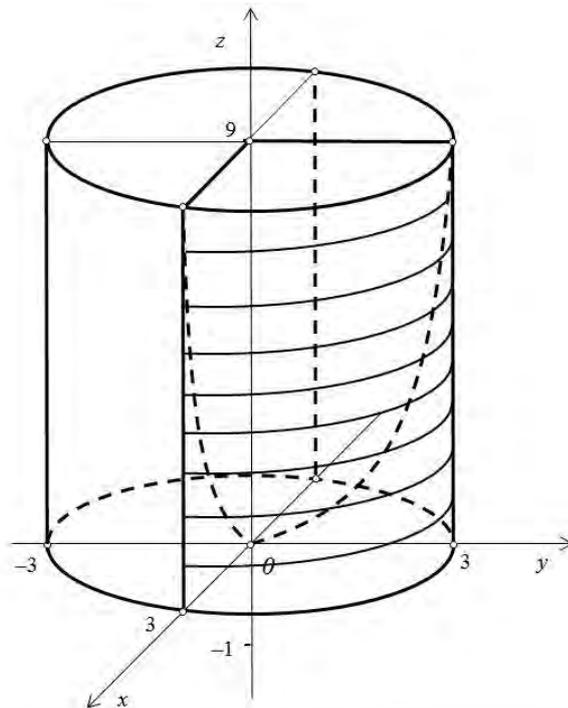


Рис. 4.5 К вычислению потока векторного поля

**Решение.** Для решения используем цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \\ |I| = \rho. \end{cases}$$

По внутренней стороне поверхности интеграл берем со знаком «минус», т.к. заданная поверхность видна с отрицательной стороны оси  $OY$  :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_S(\vec{F}) &= - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 (x(4x-3y) + y(2y-6x)) dz = \\
&= - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 (4x^2 - 12xy + 2y^2 - 6xy) dz = \\
&= - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 (4 \cdot \rho^2 \cos^2 \varphi - 12\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + 2\rho^2 \sin^2 \varphi - 6\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi) dz = \\
&= - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^9 (4\rho^2 \cos^2 \varphi + 2\rho^2 \sin^2 \varphi - 18\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi) \Big|_{\rho=3} dz = \\
&= -9 \int_0^{\pi/2} (4\cos^2 \varphi + 2\sin^2 \varphi - 18\cos\varphi \sin\varphi) d\varphi \cdot z \Big|_0^9 = \\
&= -81 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{4(1+\cos 2\varphi)}{2} + 1 - \cos 2\varphi - 18\cos\varphi \sin\varphi \right) d\varphi = \\
&= -81 \left( 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + \varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} + 18 \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \\
&= -81 \left( \pi + \frac{\pi}{2} - 18 \right) = -81 \left( \frac{3}{2} \pi - 18 \right).
\end{aligned}$$

**Пример 4.11.** Вычислить поток поля  $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + 2z\vec{k}$  через внешнюю сторону части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , вырезанной конической поверхностью  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (см. рис. 4.6)

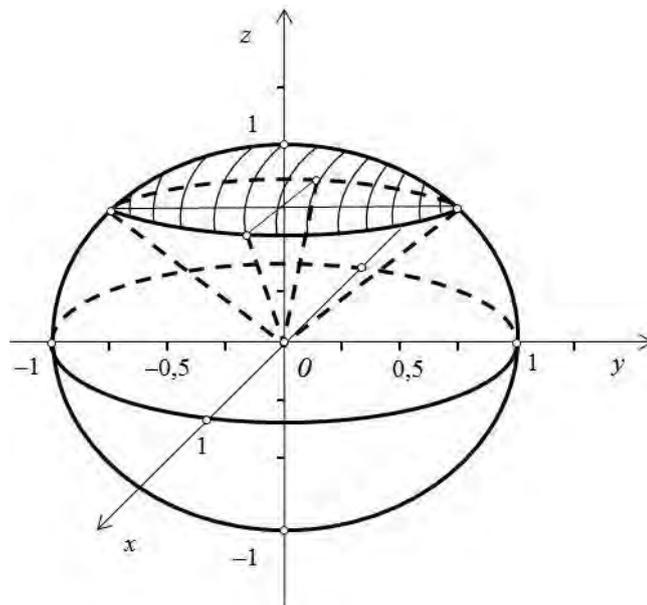


Рис 4.6 К вычислению потока векторного поля

**Решение:** Для решения используем сферические координаты

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ z = \rho \cos \theta \\ |I| = \rho^2 \sin \theta \end{cases}$$

в которых уравнение сферы задается равенством  $\rho = 1$ .

В соответствии с формулой (4.11) имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_S(\vec{F}) &= + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (x \cdot x^3 + y(-y)^3 + z \cdot 2z) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (\sin^4 \theta \cos^4 \varphi - \sin^4 \theta \sin^4 \varphi + 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (\sin^4 \theta (\cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi) + 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (\sin^4 \theta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} (\sin^4 \theta \cdot \cos 2\varphi + 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^5 \theta d\theta + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta - 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^4 \theta d(\sin \theta) - 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\sin^5 \theta}{5} \Big|_0^{\pi/4} - 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5} - \\ &- 2 \left( \frac{2\sqrt{2}}{24} - \frac{1}{3} \right) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5} \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\pi(2\sqrt{2}-8)}{6} = \frac{\pi(\sqrt{2}-4)}{3}. \end{aligned}$$

### 4.3. Формула Остроградского. Дивергенция. Циркуляция. Ротор. Формула Стокса

Если векторное поле  $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  дифференцируемо в некоторой замкнутой области  $V$ , границей которой является гладкая или кусочно-гладкая поверхность  $S$  (которую считаем положительно ориентированной), то справедлива **формула Остроградского**:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (4.12)$$

*Дивергенцией* векторного поля  $\vec{F}$  в точке  $M(x, y, z)$  называется

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (4.13)$$

Если  $\operatorname{div} \vec{F}(M) > 0$ , то в точке  $M$  – источник, если  $\operatorname{div} \vec{F}(M) < 0$ , то в точке  $M$  – сток, если  $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$ , то в точке  $M$  нет ни источника, ни стока. Поле в этом случае называется *соленоидальным*.

С учетом равенства (4.13) формула Остроградского примет вид:

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (4.14)$$

*Циркуляцией* векторного поля  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  вдоль замкнутой линии  $L$  называется криволинейный интеграл

$$\mathcal{C}_L(\vec{F}) = \int_L P dx + Q dy + R dz, \quad (4.15)$$

где обход линии  $L$  осуществляется в положительном направлении. Циркуляция имеет простой физический смысл: циркуляция – это работа силы поля вдоль кривой  $L$ , расположенной в области действия силового поля.

*Ротором* векторного поля  $\vec{F}$  в точке  $M(x, y, z)$  называется вектор (будем обозначать жирным шрифтом)

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}, \quad (4.16)$$

где частные производные вычислены в этой точке. Его можно записать в символической форме следующим образом

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

Ротор является характеристикой вихревых движений в поле. Если  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ , то поле называется *безвихревым*.

Для любой незамкнутой поверхности  $S \subset V$ , опирающейся на контур  $L$ , имеет место формула Стокса

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{l}) = \iint_S (\mathbf{rot} \vec{F}, \vec{n}) dS \quad (4.18)$$

Формула Стокса позволяет свести вычисления циркуляции векторного поля  $\vec{F}$  по контуру  $L$  к вычислению потока поля  $\mathbf{rot} \vec{F}$  через незамкнутую поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$  ( $L$  – граница незамкнутой поверхности  $S$ )

$$\oint_L (\vec{F}) = \pm \iint_{D_{xy}} (\mathbf{rot} \vec{F}, \vec{n}) \Big|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (4.19)$$

где  $D_{xy}$  – проекция  $S$  на плоскость  $XOY$ ,  $\vec{n} = -z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}$  – вектор нормали к поверхности  $S$ .

**Пример 4.12.** Вычислить дивергенцию поля  $\vec{F} = (2xy + zx)\vec{i} + (xyz + y)\vec{j} + (x + y + 2z)\vec{k}$  в точке  $M(1,1,2)$ .

**Решение.** Согласно формуле (4.13) имеем  $div \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ,

где  $\frac{\partial P}{\partial x} = (2y + z) \Big|_M = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = (xz + 1) \Big|_M = 1 \cdot 2 + 1 = 3$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = 2$ .

Отсюда  $div \vec{F}(M) = 4 + 3 + 2 = 9 > 0$ . Следовательно, в точке  $M$  находится источник, мощность которого равна 9.

**Пример 4.13.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j} - 5z^2\vec{k}$  через внешнюю сторону замкнутой поверхности  $S$ , состоящей из части параболоида  $x^2 + y^2 = 2z$  и сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ , накрывающей параболоид (рис. 4.7.).

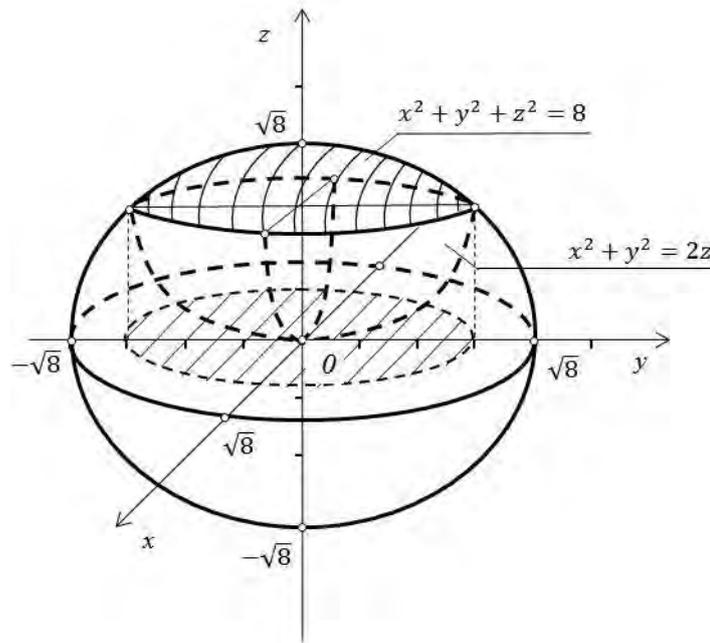


Рис. 4.7. К вычислению потока векторного поля

**Решение.** Вычислим поток по формуле Остроградского. Дивергенция заданного поля равна

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -10z,$$

где  $\frac{\partial P}{\partial x} = 3$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = -3$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = -10z$ .

$$\text{Поток } \Pi_S(\vec{F}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iiint_V (-10z) dx dy dz.$$

Вычисление тройного интеграла по области  $V$  будем осуществлять в цилиндрических координатах:  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $z = z$ :

$$\begin{aligned} \Pi_S(\vec{F}) &= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}} z dz = -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}} \right) = \\ &= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left( \frac{8-\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{8} \right) = -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \int_0^{\sqrt{2}} 4\rho d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{2} d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^5}{8} d\rho \right) = \\ &= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{4\rho^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{\rho^4}{8} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{\rho^6}{48} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right) = -10 \left( \frac{16\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \left( -32\sqrt{2} + \frac{20}{3} \right) 2\pi. \end{aligned}$$

**Пример 4.14.** Вычислить поток векторного поля  $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$  через внешнюю сторону замкнутой поверхности, ограниченной поверхностями:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot z \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz. \text{ (см. рис. 4.8).}$$

**Решение.** Исходное поле  $\vec{F}$  определено и дифференцируемо во всем пространстве и

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3z^2, \text{ где } \frac{\partial P}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$$

Следовательно,  $\Pi_S(\vec{F}) = \iiint_V 3z^2 dx dy dz$ .

Вычислим этот интеграл в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \Pi_S(\vec{F}) &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho = \\ &= 6\pi \cdot \int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2R \cos \theta} \rho^4 d\rho = \end{aligned}$$

$$= \frac{192\pi R^5}{5} \int_0^{\pi/3} \cos^7 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{153\pi R^5}{32}.$$

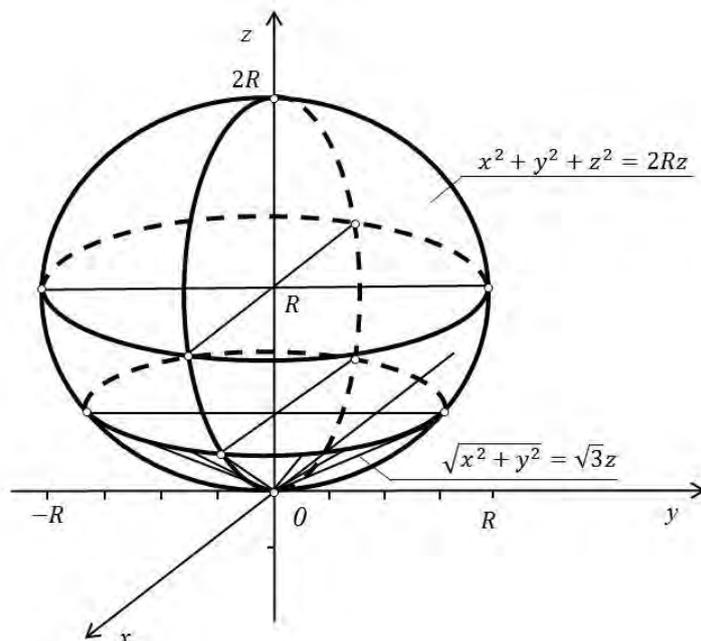


Рис.4.8 К вычислению потока векторного поля

**Пример 4.15.** Вычислить циркуляцию векторного поля  $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$  по линии  $L$ , состоящей из отрезка прямой  $AB$  и параболы  $x = 3 - y^2$  (рис.4.9).

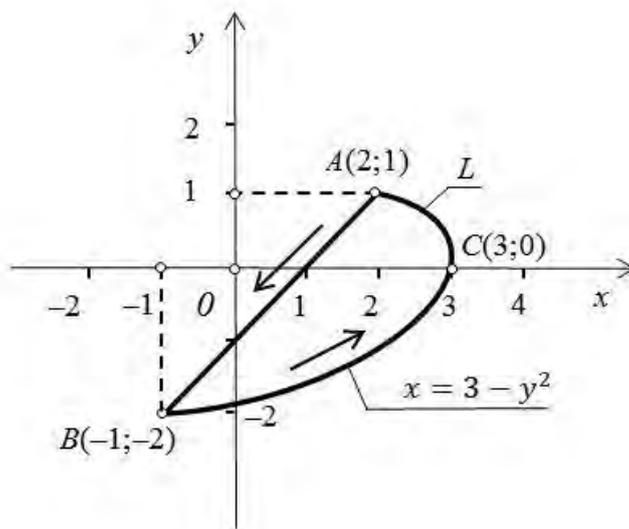


Рис.4.9 К вычислению циркуляции векторного поля

**Решение.** Исходная линия  $L$  состоит из 2-х участков: прямой  $AB$  и параболы. Следовательно, циркуляция заданного поля  $\vec{F}$  будет равна сумме двух линейных интегралов:

$$\oint_L(\vec{F}) = \int_{\underbrace{\quad}_{AB}} \dots + \int_{\underbrace{\quad}_{BCA}} \dots$$

Уравнение прямой  $AB$  записывается в виде  $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-2}{-1-2}$  или

$$\frac{y-1}{-3} = \frac{x-2}{-3} \Rightarrow y = x - 1. \text{ Тогда}$$

$$\int_{\underbrace{\quad}_{AB}} = \int_2^{-1} \left( 2x - (x-1)^2 + 1 + (3x + 2(x-1)^2 - 10) \right) dx = \int_2^{-1} \left( 5x + (x-1)^2 - 9 \right) dx =$$

$$= \frac{5x^2}{2} \Big|_2^{-1} + \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_2^{-1} - 9x \Big|_2^{-1} = \frac{5}{2} - 10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 9 + 18 = 16,5.$$

$$\int_{\underbrace{\quad}_{BCA}} = \int_{-1}^2 \left( (2x - (3-x) + 1) + (3x + 2(3-x) - 10) \right) dx = \int_{-1}^2 (4x - 6) dx =$$

$$= \frac{4x^2}{2} \Big|_{-1}^2 - 6x \Big|_{-1}^2 = 8 - 2 - 12 - 6 = -12.$$

Циркуляция по заданному контуру  $L$  будет равна  $\oint_L(\vec{F}) = 16,5 - 12 = 4,5 > 0$ .

**Пример 4.16.** Найти ротор для векторного поля

$$\vec{F} = (2xy - z)\vec{i} + (yx + 2)\vec{j} + (x^2 - 3xz)\vec{k}.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy - z) & (yx + 2) & (x^2 - 3xz) \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial(x^2 - 3xz)}{\partial y} - \frac{\partial(yx + 2)}{\partial z} \right) - \\ &- \vec{j} \left( \frac{\partial(x^2 - 3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - z)}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial(yx + 2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - z)}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(2x - 3z + 1) + \vec{k}(y - 2x) - (-2x + 3z - 1)\vec{j} + (y - 2x)\vec{k}. \end{aligned}$$

**Пример 4.17.** Вычислить циркуляцию поля

$\vec{F} = (y^3 - 8yz - z)\vec{i} + (yz - x^3 + 2x)\vec{j} + (yx^3 - 2z^3)\vec{k}$  вдоль контура  $L$ , полученного пересечением параболоида  $z = x^2 + y^2$  плоскостью  $z = 1$  и ориентированного положительно по отношению к оси  $OZ$ . (рис. 4.10)

**Решение.** Контур  $L$  – окружность радиусом, равным 1, с центром в точке  $(0, 0, 1)$ . Ротор данного поля

$$\mathbf{rot} \vec{F} = (x^3 - y) \vec{i} - (3yx^2 + 8y + 1) \vec{j} + (2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z) \vec{k}$$

$$(\mathbf{rot} \vec{F}, \vec{n}) = 2 - 3x^2 - 3y^2 + 8z.$$

Тогда циркуляция вычисляется по формуле Стокса:

$$\begin{aligned} \ddot{O}_L(\vec{F}) &= + \iint_{D_{xy}} (\mathbf{rot} \vec{F}, \vec{n})|_{z=1} dx dy = \iint_{D_{xy}} (10 - 3x^2 - 3y^2) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (10 - 3x^2 - 3y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (10 - 3\rho^2) \rho d\rho = \frac{17\pi}{2}. \end{aligned}$$

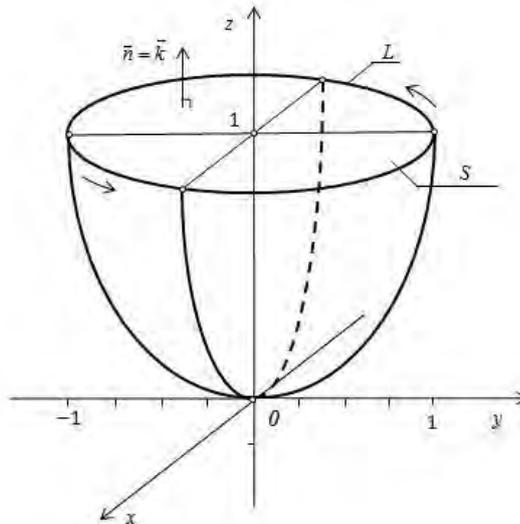


Рис. 4.10. К вычислению циркуляции векторного поля

#### 4.4. Потенциальное векторное поле. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле. Операторы Гамильтона, Лапласа

Векторное поле  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , заданное в области  $V$ , называется *потенциальным*, если в области  $V$  существует такая скалярная функция  $u$ , градиент которой совпадает с  $\vec{F}$

$$\vec{F} = \mathbf{grad} u. \quad (4.20)$$

Функция  $u$  в таком случае называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* векторного поля.

Для того, чтобы векторное поле  $\vec{F}$  в заданной области  $V$  было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области

$$\mathbf{rot} \vec{F} = 0. \quad (4.21)$$

В потенциальном векторном поле  $\vec{F}$ :

$$1) u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{x_0}^x Q(x, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C. \quad (4.22)$$

$$2) \oint_L (\vec{F}, d\vec{l}) = 0. \quad (4.23)$$

3) Для любых двух точек  $A$  и  $B$  в области  $V$  значение криволинейного интеграла  $\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l})$  не зависит от пути интегрирования  $\overset{\cup}{AB}$ , соединяющего точки  $A$  и  $B$  и расположенного в области  $V$ , а зависит только от расположения этих точек в области.

4) Если  $u(x, y, z)$  – потенциал векторного поля  $\vec{F}$ , то для любого пути  $\overset{\cup}{AB}$  справедлива формула

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l}) = u(B) - u(A). \quad (4.24)$$

Основные характеристики векторного анализа (градиент, дивергенция и ротор) и операции над ними удобно представлять с помощью оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.25)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\nabla u = \mathbf{grad} u. \quad (4.26)$$

$$(\nabla, \vec{F}) = \mathit{div} \vec{F}. \quad (4.27)$$

$$[\nabla, \vec{F}] = \mathbf{rot} \vec{F}. \quad (4.28)$$

С помощью оператора  $\nabla$  можно показать, что  $\mathit{div} \mathbf{rot} \vec{F} = 0$  и  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} u = 0$ .

Введем оператор Лапласа

$$\nabla = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.29)$$

Нетрудно убедиться, что  $\mathit{div} \mathbf{grad} u = \Delta u$ .

Уравнение  $\Delta u = 0$  называется *уравнением Лапласа*, а функции, удовлетворяющие этому уравнению – *гармоническими функциями*.

Операции  $\mathbf{grad} \mathit{div} \vec{F}$  и  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{F}$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \vec{F} = \mathbf{grad} \mathit{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}, \quad (4.30)$$

где  $\Delta \vec{F} = \Delta P \vec{i} + \Delta Q \vec{j} + \Delta R \vec{k}$ .

**Пример 4.18.** Проверить, является ли поле

$$\vec{F} = \left( \frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3 \right) \vec{i} + \left( \frac{2x^3y}{z} + 3y^3 \right) \vec{j} + \left( z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2} \right) \vec{k}$$

потенциальным, найти его потенциал и вычислить криволинейный интеграл по пути  $\overset{\cup}{AB}$ , где  $A(1;2;2)$ ,  $B(1;3;1)$ .

**Решение.** Для данного поля ротор

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3 \right) & \left( \frac{2x^3y}{z} + 3y^3 \right) & \left( z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, поле является потенциальным при  $z \neq 0$ .

Найдем потенциал заданного поля  $\vec{F}$  по формуле (4.22):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x \left( \frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3 \right) \Big|_{z=1}^{z=0} dx + \int_0^y \left( \frac{2x^3y}{z} + 3y^3 \right) \Big|_{z=1}^{z=0} dy + \int_1^z \left( z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2} \right) dz + C = \\ &= -2 \int_0^x x^3 dx + \int_0^y (2x^3y + 3y^3) dy + \int_1^z \left( z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2} \right) dz + C = \\ &= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{x^3y^2}{z} + C_1, \end{aligned}$$

где  $C_1 = C - \frac{1}{4}$ . В качестве начальной выбрана точка  $(0,0,1)$ .

Криволинейный интеграл (по формуле 4.24):

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{F}, d\vec{l}) = \left( -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{x^3y^2}{z} + C_1 \right) \Big|_{A(1,3,1)}^{B(1,2,2)} = 52.$$

**Пример 4.19.** С помощью оператора Гамильтона  $\nabla$  доказать, что  $\text{div}[\vec{F}, \vec{a}] = (\vec{a}, \text{rot} \vec{F}) - (\vec{F}, \text{rot} \vec{a})$ .

**Решение.** Имеем,

$$\text{div}[\vec{F}, \vec{e}] = (\nabla, [\vec{F}, \vec{e}]) = (\nabla, [\vec{F}, \vec{e}]) + (\nabla, [\vec{F}, \vec{e}]).$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляют собой смешанное произведение трех векторов:  $\nabla$ ,  $\vec{F}$  и  $\vec{e}$ .

Воспользовавшись свойством смешанного произведения векторов, получим:

$$\left( \nabla, [\vec{F}, \vec{a}] \right) = -\left( \nabla, [\vec{a}, \vec{F}] \right) = (\vec{a}, [\nabla, \vec{F}]) = (\vec{a}, \mathbf{rot} \vec{F});$$

с другой стороны

$$\left( \nabla, [\vec{F}, \vec{a}] \right) = -(\vec{F}, [\nabla, \vec{a}]) = -(\vec{F}, \mathbf{rot} \vec{a}).$$

Таким образом,

$$\mathit{div}[\vec{F}, \vec{a}] = (\vec{a}, \mathbf{rot} \vec{F}) - (\vec{F}, \mathbf{rot} \vec{a}).$$

**ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3»**

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**Задание 1**

Исследовать на сходимость ряд, рассматривая последовательность его частичных сумм. В случае сходимости найти сумму ряда.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$

7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{10^{n-1}}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+1)}$

9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}$

5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

**Ответы к заданию 1.**

1.  $\frac{1}{5}$ ; 2.  $\frac{3}{4}$ ; 3.  $\frac{1}{3}$ ; 4.  $\frac{1}{3}$ ; 5.  $\frac{1}{3}$ ; 6.  $\frac{3}{4}$ ; 7.  $\frac{10}{11}$ ; 8.  $\frac{5}{4}$ ;  
9.  $\frac{2}{5}$ ; 10.  $\frac{1}{2}$ .

**Задание 2**

Пользуясь известными признаками сходимости, исследовать на сходимость ряды:

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{4n+5} \right)^n$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}$

2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+5)^{10}}$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)!}$

4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{7n+3}$
5. в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{n^2}$
6. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$
7. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n-1}{3n}\right)^n$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n^2-4n+13}$
8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+3}}$
9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$
10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

### Ответы к заданию 2.

1. а) сход. б) сход.; 2. а) расход. б) сход.;
3. а) расход. б) сход.; 4. а) сход. б) расход.;
5. а) сход. б) сход.; 6. а) сход. б) расход.;
7. а) расход. б) расход.; 8. а) сход. б) расход.;
9. а) сход. б) расход.; 10. а) расход. б) расход.;

### Задание 3

Найти область сходимости степенного ряда.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$  6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} n5^n(x-3)^n$  7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(x-1)^n}{\sqrt{n}}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n!}(x+2)^n$  8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}3^n}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$  9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+1)}$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2n+5}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^n}{2n}$$

**Ответы к заданию 3.**

1.  $x \in [0;4);$
2.  $x \in \left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right);$
3.  $x \in (-\infty; +\infty);$
4.  $x \in [1;3];$
5.  $x \in [2;4);$
6.  $x \in (-1;3);$
7.  $x \in \left[\frac{9}{10}; \frac{11}{10}\right);$
8.  $x \in [-4;2);$
9.  $x \in [1;3);$
10.  $x = 3.$

#### Задание 4

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить определенный интеграл с точностью до  $\varepsilon=0,001$ .

$$1. \int_0^{0,2} e^{-x^2} dx$$

$$2. \int_0^{0,5} x^5 \sin x dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$4. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x^2 dx$$

$$5. \int_0^{1/3} \sqrt{1+x^4} dx$$

**Ответы к заданию 4.**

1. 0,197
2. 0,001
3. 0,946
4. 0,580
5. 0,333

#### Задание 5

Найти первые четыре (отличные от нуля) члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

$$1. \begin{cases} y' - 2xy = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' + y = x + 1; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y' = xy + e^y; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y' = e^{3x} + 2xy^2; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y' = 2x + y^2 + e^x; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**Ответы к заданию 5.**

1.  $y(x) \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$
2.  $y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
3.  $y(x) \approx \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11}{24}x^4$
4.  $y(x) \approx 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{17}{6}x^3$
5.  $y(x) \approx 1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{23}{6}x^3$

**Задание 6**

Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской области  $D$ , ограниченной заданными линиями:

1.  $D: y = 2 - 2x^2, \quad y \geq -6.$
2.  $D: y^2 = 4x, \quad x = \frac{8}{y^2 + 4}.$
3.  $D: x = y^2 + 1, \quad x + y = 3.$
4.  $D: x^2 = 3y, \quad y^2 = 3x.$
5.  $D: x = 4 - y^2, \quad x - y + 2 = 0.$
6.  $D: y = 6x^2, \quad x + y = 2, \quad x \geq 0.$
7.  $D: x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$
8.  $D: y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$
9.  $D: xy = 1, \quad x^2 = y, \quad y = 2, \quad x = 0.$
10.  $D: x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - y = 0, \quad y = x, \quad y = -x.$

**Ответы к заданию 6.**

1.  $\frac{64}{3}$ ; 2.  $2\pi - \frac{4}{3}$ ; 3.  $\frac{9}{2}$ ; 4. 3; 5.  $\frac{95}{6}$ ; 6.  $\frac{5}{8}$ ;
7.  $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ; 8.  $\frac{3\pi - 2}{6}$ ; 9.  $\frac{2}{3} + \ln 2$ ; 10.  $\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).$

### Задание 7

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

1.  $y^2 = x$ ,  $x = 3$ ,  $z = x$ ,  $z \geq 0$ .
2.  $z = y^2$ ,  $x + y = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
3.  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $y = x$ ,  $x \geq 0$ ,  $y = 1$ ,  $z \geq 0$ .
4.  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ .
5.  $y = 1 - z^2$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**Ответы** к заданию 7.

1.  $\frac{36\sqrt{3}}{5}$ ; 2.  $\frac{1}{12}$ ; 3.  $\frac{7}{12}$ ; 4.  $\frac{3}{2}\pi$ ; 5.  $\frac{8}{15}$ .

### Задание 8

Вычислить массу тела  $V$ , ограниченного заданными поверхностями ( $\mu = \mu(x, y, z)$  – плотность в точке  $M(x, y, z)$ ).

1.  $V: z = x^2 + y^2$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;  $\mu = x + 1$ .
2.  $V: z = \sqrt{1 - y}$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $z = 0$ ;  $\mu = 3z$ .
3.  $V: x = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z = y^2$ ,  $\mu = xy$ .
4.  $V: 2z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2$ ,  $\mu = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ .
5.  $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 2$ ;  $\mu = z$ .

**Ответы** к заданию 8.

1.  $\frac{92}{15}$ ; 2.  $\frac{1}{2}$ ; 3.  $\frac{1}{24}$ ; 4.  $\frac{128}{15}\pi$ ; 5.  $4\pi$ .

### Задание 9

Найти массу, где  $\mu(x, y)$  – плотность:

1. отрезка прямой, заключенного между точками  $A(4;0)$ ;  $B(6;1)$ , если  $\mu(x, y) = \frac{1}{x + y}$ ;
2. первой четверти окружности  $x^2 + y^2 = 4$ , если  $\mu(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2$ ;

3. дуги параболы  $y^2 = 2x$ , отсечённой параболой  $x^2 = 2y$ , если  $\mu(x, y) = y$ ;

4. отрезка прямой, соединяющего точки  $A(1;1;1)$  и  $B(2;2;2)$ , если

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

5. первого витка винтовой линии  $x = 9\cos t, y = 9\sin t, z = 9t$ , если

$$\mu(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}.$$

**Ответы к заданию 9.**

1.  $\frac{\sqrt{5}}{3} \ln \frac{7}{4}$ ; 2.  $16\pi$ ; 3.  $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$ ; 4.  $\ln 2$ ; 5.  $24\pi^2 \sqrt{2}$ .

### Задание 10

Вычислить работу силового поля  $\vec{F}$  при перемещении материальной точки вдоль пути  $\overset{\cup}{AB}$ :

1.  $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ ,  $\overset{\cup}{AB}: y = 2x^2, A(0;0), B(1;2)$ ;

2.  $\vec{F} = (xy - 1)\vec{i} + x^2 y \cdot \vec{j}$ ,  $\overset{\cup}{AB}: x = \cos t; y = 2\sin t, A(1;0), B(0;2)$ ;

3.  $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} + yz^2 \cdot \vec{j} - x^2 z \cdot \vec{k}$ ,  $\overset{\cup}{AB}$ : отрезок прямой  $A(0;0;0), B(-2;4;5)$ .

4.  $\vec{F} = x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j}$ ,  $\overset{\cup}{AB}$ : дуга астроида  $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, A(2;0); B(0;2)$ .

5.  $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$   $\overset{\cup}{AB}$ : дуга одного витка винтовой линии  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t, A(1;0;0), B(1;0;4\pi)$ .

**Ответы к заданию 10.**

1.  $\frac{31}{30}$ ; 2.  $\frac{5}{6}$ ; 3. 91; 4.  $\frac{3\pi}{4}$ ; 5.  $\frac{64\pi^3}{3}$ .

## Задание 11

Решить уравнение или систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями операционным методом.

1.  $y'' + y' = 1$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ .
2.  $y' + 3y = e^{-2t}$ ;  $y(0) = 0$ .
3.  $y'' - 5y' + 4y = 4$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ .
4.  $y''' - y'' = e^t$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = y''(0) = 0$ .
5.  $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t}$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 1$ .
6. 
$$\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$
7. 
$$\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$
8.  $y'' - y = t^2$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ .
9.  $y'' + 2y' + y = 2\sin t$ ;  $y(0) = -1$ ;  $y'(0) = 0$ .
10.  $y'' + y' - y = 6e^t \cos t$ ;  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 2$ .

**Ответы** к заданию 11.

1.  $y(t) = t$ ; 2.  $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ ; 3.  $y(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}$ ;
4.  $y(t) = 3 + t + te^t - 2e^t$ ; 5.  $y(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t} + 4t^2 e^{-2t}$ ;
6. 
$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ y(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{cases}$$
; 7. 
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$
8.  $y(t) = -2 - t^2 + e^t + e^{-t}$ ;
9.  $y(t) = -\cos t$ ;
10.  $y(t) = 2e^t \sin t$ .

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

### Правила выбора номера варианта

Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если номер шифра больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. В каждом из семи заданий нужно выполнить номер, соответствующий номеру варианта.

Например, если шифр содержит две последние цифры 62, номерами этого варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2.

**Задание 1.** Исследовать на сходимость числовые ряды, пользуясь известными признаками сходимости

$$1.1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arcsin \frac{n+1}{2n+3} \right)^n \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2 + 1}$$

$$1.2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 2}} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)4^n}{n!}$$

$$1.3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n+1}{4n+6} \right)^n \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 + 4n + 1}$$

$$1.4. \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 2^n}{n+1}$$

$$1.5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{7n^2 + 1} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n \cdot 3^n}$$

$$1.6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{1}{2^n} \right)^n \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)!}{n^3}$$

$$1.7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 2}{5n^3 + 1} \right)^2 \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n (\ln n)^n$$

$$1.8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n}{(n+1)^3} \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$$

$$1.9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{2}{3n+1} \right)^n \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2n^2 + 5}$$

$$1.10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 6^n}{(n+2)!} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 4n + 1}{2n^2 + 3}$$

1.11.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 + 5n}{2n^5 + 7}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$
1.12.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{2n+1}$
1.13.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1) \cdot 3^n}{n^2}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$
1.14.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+6}{3n+4}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 3}{9n^3 + 6n + 1}$
1.15.a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+3) \cdot 3^n}$
1.16.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n/2}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 5}{6n^3 + 8n}$
1.17.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{5n^4 + 1}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n+1} \cdot 4^n$
1.18.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{3n+1}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{7n+1}\right)^n$
1.19.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{3}\right)^n \cdot n^2$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n}}{2n^4 + 5}$
1.20.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{(3n+1)^2 - 1}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{5^n}$
1.21.a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^5}$
1.22.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{1 + 5n^3}$
1.23.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n-1}{3n}\right)^n$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^4}{7^{n+1}}$
1.24.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+3n}{7+8n}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$
1.25.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{4 + n^2 + n^3}$
1.26.a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[4]{n^3 + 2n}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n-1)!}$

$$\begin{array}{ll}
1.27.a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{5^n} & б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+7n^3}{4-n+3n^4} \\
1.28.a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n \cdot n! & б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} \\
1.29.a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}\right)^n & б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+5n^2}{(2n+1)^2-1} \\
1.30.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3-1}{5+n+n^4} & б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)7^n}{(n+1)!}
\end{array}$$

**Задание 2.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\begin{array}{ll}
2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)2^n} & 2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+5} \\
2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)3^n} & 2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n} \\
2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2} & 2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \\
2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)4^n} & 2.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{5n^2} \\
2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n} & 2.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 5^n} \\
2.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n} & 2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n} \\
2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{n^2} & 2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3 \cdot 4^n} \\
2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 6^n} & 2.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1)5^n} \\
2.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x+4)^n}{3^n} & 2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n+1)5^n} \\
2.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n} & 2.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n} \\
2.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{n^2} & 2.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}
\end{array}$$

$$2.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-4)^n}{3n^2 + 1}$$

$$2.24. \sum_{n=1}^{\infty} n 2^n x^n$$

$$2.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}$$

$$2.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{5n^2}$$

$$2.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$2.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$2.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2 + 1}$$

$$2.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}$$

### Задание 3.

3.1 – 3.15. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить определенный интеграл с точностью до  $\varepsilon = 0,001$

$$3.1. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

$$3.2. \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$3.3. \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$$

$$3.4. \int_0^{0,5} x^5 \sin x dx$$

$$3.5. \int_0^1 \cos x^4 dx$$

$$3.6. \int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx$$

$$3.7. \int_0^{1/2} x^3 \cos 3x dx$$

$$3.8. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$$

$$3.9. \int_0^1 x^2 \sin x dx$$

$$3.10. \int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

$$3.11. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

$$3.12. \int_0^1 e^{-3x^2} dx$$

$$3.13. \int_0^{1/2} \ln(1+x^3) dx$$

$$3.14. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$$

$$3.15. \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

3.16 – 3.30. Найти первые три (отличные от нуля) члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$3.16. y' = 2 \cos x - xy^2, y(0) = 1$$

$$3.17. y' = 2x + y^2 + e^x; y(0) = 1$$

$$3.18. y' = xy + e^y; y(0) = 0$$

$$3.19. y' + 3xy = 0, y(0) = 1$$

$$3.20. y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 1$$

$$3.21. y' = 1 - xy; y(0) = 0$$

$$3.22. y' = e^x - y^2; y(0) = 0$$

$$3.23. y' = x + e^y; y(0) = 0$$

$$3.24. y' + y = x + 1; y(0) = 1$$

$$3.25. y' - 2xy = 0; y(0) = 1$$

$$3.26. y' = x^2 + e^y; y(0) = 0$$

$$3.27. y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$$

$$3.28. y' = xy - y^2; y(0) = 0,2$$

$$3.29. y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1$$

$$3.30. y' = x \sin x - y^2, y(0) = 1$$

**Задание 4.** Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской области  $D$ , ограниченной заданными линиями

4.1.  $D: y = x^3, y = \sqrt{x}$

4.2.  $D: y = \frac{5}{x}, y = 6 - x$

4.3.  $D: y = 2 - 2x^2, y \geq -6$

4.4.  $D: x = y^2 + 1, x + y = 3$

4.5.  $D: 4y = x^2 - 4, 2y = 4 - x^2$

4.6.  $D: y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$

4.7.  $D: y = x^2 + 2x, y = x + 2$

4.8.  $D: y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 0, x = 2$

4.9.  $D: x^2 = 3y, y^2 = 3x$

4.10.  $D: y = x^2 + 4x, y = x + 4$

4.11.  $D: y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0$

4.12.  $D: x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0$

4.13.  $D: y^2 = 4 - x, y = x + 2$

4.14.  $D: y = x^2, y = 3 - 2x$

4.15.  $D: y = x^2, y = 2 - x$

4.16.  $D: y = x^2, y = -3x$

4.17.  $D: y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4$

4.18.  $D: xy = 6, x + y - 7 = 0$

4.19.  $D: y = 6x^2, x + y = 2, x \geq 0$

4.20.  $D: y^2 = 4x, x + y = 3, y \geq 0$

4.21.  $D: y^2 = x + 2, x = 2$

4.22.  $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = -4x$

4.23.  $D: y = x^2, y = \frac{3}{4}x^2 + 1$

4.24.  $D: xy = 9, y = x, y = 6$

4.25.  $D: y = \frac{1}{2}x^2 - x, y = x$

4.26.  $y = e^x, y = e^{-x}, y = 2$

4.27.  $D: y = x^2 + 1, x + y = 3$

4.28.  $D: y = -\frac{1}{3}x^2, \quad y = -2x$

4.29.  $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad x = 1$

4.30.  $D: xy = 1, \quad x^2 = y, \quad y = 2, \quad x = 0$

**Задание 5.** Вычислить данные тройные интегралы

5.1.  $\iiint_V (xy + 8z) dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$

5.2.  $\iiint_V xyz^2 dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3$

5.3.  $\iiint_V (x^2 + y + 9z^2) dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$

5.4.  $\iiint_V (x^2 + 3y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \pi$

5.5.  $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 5$

5.6.  $\iiint_V (xy + yz + z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$

5.7.  $\iiint_V (2x^2 + y^2 + z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$

5.8.  $\iiint_V 2xy^2 z dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, -1 \leq z \leq 2$

5.9.  $\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$

5.10.  $\iiint_V (x^2 + 2y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 2$

5.11.  $\iiint_V (xy + 2yz) dx dy dz, \quad V: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$

5.12.  $\iiint_V (xz + yz^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 3$

5.13.  $\iiint_V (xy + 8z) dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$

5.14.  $\iiint_V (xy + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3$

5.15.  $\iiint_V (x^2 + yz) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

5.16.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + xz) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$

$$5.17. \iiint_V (2x^2 + y^2 + z^3) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$5.18. \iiint_V (x^2 + yz^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0$$

$$5.19. \iiint_V (xz + yx + z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 5$$

$$5.20. \iiint_V (xy + 2y + 3z^2) dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$$

$$5.21. \iiint_V (3x^2 + 2y + xz) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3$$

$$5.22. \iiint_V (xy^2 + z^3) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$$

$$5.23. \iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz, \quad V: -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$$

$$5.24. \iiint_V (xy^2 + z) dx dy dz, \quad V: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$$

$$5.25. \iiint_V (xy + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 4$$

$$5.26. \iiint_V (x^2 + yz) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2$$

$$5.27. \iiint_V (xy + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 5$$

$$5.28. \iiint_V (x^2 + xy + z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 3$$

$$5.29. \iiint_V (xz + y^2 + 2z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1$$

$$5.30. \iiint_V (xy + y^2 + z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 1$$

### Задание 6.

6.1 – 6.15. Найти массу, где  $\mu = \mu(x, y, z)$  – плотность

6.1. верхней половины кардиоиды  $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ , если  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

6.2. отрезка  $AB$ , где  $A(0;0); B(1;2)$ , если  $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ ;

6.3. отрезка  $AB$ , где  $A(1,2); B(2,4)$ , если плотность в каждой его точке равна произведению квадратов координат этой точки;

- 6.4. дуги лемнискаты  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ ,  $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right)$ , если  $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- 6.5. первой арки циклоиды  $x = 2(t - \sin t)$ ;  $y = 2(1 - \cos t)$ , если  $\mu = y^2$ ;
- 6.6. дуги кривой  $y = x^2 + 4$  от точки  $A(0,4)$  до  $B(2,8)$ , если плотность в каждой точке ее равна абсциссе точки;
- 6.7. дуги окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе точки;
- 6.8. дуги кривой  $x = t$ ;  $y = \frac{\sqrt{3}t^2}{\sqrt{2}}$ ;  $z = t^3$ ;  $0 \leq t \leq 1$ , если  $\mu = x + z$ ;
- 6.9. дуги синусоиды  $y = \sin x$ ,  $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ , если  $\mu = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$ ;
- 6.10. дуги окружности  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , лежащей в первой четверти, если плотность ее в каждой точке равна произведению абсциссы на квадрат ординаты этой точки;
- 6.11. отрезка  $AB$ , где  $A(0;0;0)$ ;  $B(1;1;1)$ , если  $\mu = 2x + y + z$ ;
- 6.12. дуги кривой  $y = x^3$  от точки  $A(1;1)$  до точки  $B(2;8)$ , если плотность в каждой точке кривой равна ординате этой точки;
- 6.13. дуги тангенсоиды  $y = \operatorname{tg} 3x$ ,  $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}\right)$ , если  $\mu = \sqrt{9 + \cos^4 3x}$ ;
- 6.14. правого лепестка лемнискаты  $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ , если  $\mu = x + y$ ;
- 6.15. одной арки циклоиды  $x = 3(t - \sin t)$ ,  $y = 3(1 - \cos t)$ , если плотность ее в каждой точке равна ординате точки.

6.16 – 6.30. Вычислить работу силового поля  $\vec{F}$  при перемещении материальной точки вдоль пути  $\overset{\cup}{AB}$ .

6.16.  $\vec{F} = 2x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$ ;  $\overset{\cup}{AB}: x = t - 1; y = \sin 2t, z = \cos 2t,$   
 $A\left(\frac{\pi}{2} - 1; 0; -1\right); B(-1; 0; 1).$

6.17.  $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} + yx^2 \cdot \vec{j}$ ,  $\overset{\cup}{AB}$ : отрезок прямой,  $A(0;0); B(-2;4).$

6.18.  $\vec{F} = \cos^2 x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $\overset{\cup}{AB}: x = t; y = \cos t, z = t^2, A(0;1;0);$   
 $B\left(\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi^2}{4}\right).$

- 6.19.  $\vec{F} = \sin y \cdot \vec{i} + \cos x \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$ ;  $AB: x = 2t; y = 3t, z = t + 2, A(0;0;2); B(2\pi;3\pi;\pi + 2)$ .
- 6.20.  $\vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$ ,  $AB$ : отрезок прямой,  $A(1;1); B(2;3)$ .
- 6.21.  $\vec{F} = (y + x) \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$ ;  $AB$ : отрезок прямой,  $A(0;1); B(2;7)$ .
- 6.22.  $\vec{F} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $AB: x = t; y = 2t, z = 3t, A(1;2;3); B(2;4;6)$ .
- 6.23.  $\vec{F} = 2xy \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$ ,  $AB$ : отрезок прямой,  $A(1;0); B(2;9)$ .
- 6.24.  $\vec{F} = 3(x + y)\vec{i} + y \cdot \vec{j}$ ;  $AB$ : отрезок прямой,  $A(-1;3); B(1;1)$ .
- 6.25.  $\vec{F} = xz \cdot \vec{i} + (y + 1)\vec{j} - z^2 \cdot \vec{k}$ ;  $AB: x = 3t; y = 2t, z = t, A(3;2;1); B(9;6;3)$ .
- 6.26.  $\vec{F} = -y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j}$ ;  $AB$ : отрезок прямой,  $A(1;0); B(6;1)$ .
- 6.27.  $\vec{F} = \frac{y}{x^2} \cdot \vec{i} + \frac{x}{y} \cdot \vec{j}$ ;  $AB$ : отрезок прямой,  $A(1;2); B(1;3)$ .
- 6.28.  $\vec{F} = x^2 y \cdot \vec{i} - y^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $AB: x = t; y = t - 1, z = t^2, A(0;-1;0); B(1;0;1)$ .
- 6.29.  $\vec{F} = yz \cdot \vec{i} + xz \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$ ;  $AB$ : отрезок прямой,  $x = 2t; y = 1 + 2t, z = 2 + t, A(2;1;2); B(3;3;3)$ .
- 6.30.  $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ;  $AB: x = \sin t; y = \cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], A(0;1;0); B(1;0)$ .

**Задание 7.** Решить уравнение или систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями операционным методом

- 7.1.  $y'' - y' - 6y = 6; y(0) = 0; y'(0) = 2$ .
- 7.2.  $y'' - 2y' + y = e^t; y(0) = y'(0) = 0$ .
- 7.3.  $y'' - 9y = 2 - t; y(0) = 0; y'(0) = 1$ .
- 7.4.  $y'' + y' - 4y = (10 + 4t)e^{2t}; y(0) = 0; y'(0) = 2$ .
- 7.5.  $y'' - y = 3; y(0) = 0, y'(0) = 1$ .
- 7.6.  $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = 3x + 2y; \end{cases} x(0) = 2; y(0) = 0$ .
- 7.7.  $y'' + y = 1; y(0) = -1; y'(0) = 0$ .
- 7.8.  $y'' - y' - 6y = 2; y(0) = 1; y'(0) = 0$ .
- 7.9.  $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0; \end{cases} x(0) = 1, y(0) = -1$ .

$$7.10. y'' + y' - y = 6e^t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$$

$$7.11. y'' - y = e^{2t}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

$$7.12. \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x; \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 2.$$

$$7.13. y'' - 9y = 6e^{3t}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$7.14. y''' + y'' = \cos t; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = -1.$$

$$7.15. \begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 3; \quad y(0) = 15.$$

$$7.16. \begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$7.17. y'' + 2y' + 5y = 5; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

$$7.18. y'' - 9y = e^t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$7.19. y'' - 16y = e^{3t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

$$7.20. y'' + y = t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$7.21. y'' - y = 3; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$7.22. y'' - y = 2 + t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$7.23. y'' - y = 8t; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$7.24. \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 3.$$

$$7.25. \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$7.26. y'' - 2y' = 3; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$7.27. y'' + y = 4; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

$$7.28. y'' - 5y' + 6y = 5; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$7.29. y'' - 5y' + 6y = 2; \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

$$7.30. y'' + 2y' + y = 2; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0.$$

## РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

### Тест 1. «Ряды»

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Исследовать ряд на сходимость, используя определение суммы ряда. Найти, если возможно, сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ .	1) сходится, $S = \frac{11}{18}$ ; 2) сходится, $S = 1$ ; 3) расходится, $S = \frac{11}{18}$ ; 4) расходится, $S = 1$ .
2.	Установить, сходится ли ряд, используя необходимый признак сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)n}{2n-1}$ .	1) сходится; 2) расходится; 3) другой ответ.
3.	Установить, сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^3-1}$ .	1) сходится; 2) расходится; 3) другой ответ.
4.	Установить, сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}$ .	1) сходится; 2) расходится; 3) другой ответ.
5.	Установить, сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2n}} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ .	1) сходится; 2) расходится; 3) другой ответ.
6.	Установить, сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(2n+4)}{2n+4}$ .	1) сходится; 2) расходится; 3) другой ответ.
7.	Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+5)}{n^4-6}$ .	1) сходится условно; 2) расходится; 3) сходится абсолютно; 4) другой ответ.
8.	Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$ .	1) $[-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}]$ ; 2) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ ; 3) $[-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}]$ ; 4) $(-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3})$ ; 5) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ .

9.	Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 4^n (x-1)^n$ .	1) $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ ; 2) (3;5); 3) $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$ ; 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$ ; 5) $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ .
10.	Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,0001: $\int_0^{0,1} x e^{-2x} dx$ .	1) 0,0003; 2) 0,004; 3) 0,0043; 4) 0,005; 5) 0,0004.

### Ответы

	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Ответы</b>	1	2	2	2	1	2	3	4	5	3

### Тест 2. «Кратные интегралы»

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^1 dx \int_0^2 (x+y) dy$ .	1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) -3; 5) 4.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y) dx$ .	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1-y$ .	1) -2; 2) -1; 3) -3; 4) 2; 5) $-\frac{2}{3}$ .
4.	Вычислить интеграл $\iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ область $D$ ограничена линиями: $x^2 + y^2 = 9$ , $x = 0$ , $x > 0$ .	1) $\frac{3}{2}\pi$ ; 2) $\frac{2}{3}\pi$ ; 3) $3\pi$ ; 4) $-3\pi$ ; 5) 3,6.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ , $y = 1$ .	1) $\frac{3}{4}$ ; 2) $\frac{2}{3}$ ; 3) $-\frac{2}{3}$ ; 4) $\frac{4}{3}$ ; 5) $\frac{5}{2}$ .
6.	Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$ .	1) $\frac{3}{4}$ ; 2) $-\frac{3}{4}$ ; 3) $\frac{3}{2}$ ; 4) -3; 5) 6.

7.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ , если область $V$ ограничена поверхностями: $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ .	1) $-\frac{1}{8}$ ; 2) $\frac{1}{8}$ ; 3) $\frac{1}{4}$ ; 4) $-\frac{1}{4}$ ; 5) $\frac{3}{8}$ .
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y)dxdydz$ , если область $V$ ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-y^2}, z=0, z=5$ .	1) $\frac{40}{3}$ ; 2) $-\frac{40}{3}$ ; 3) $\frac{80}{3}$ ; 4) $\frac{3}{80}$ ; 5) $\frac{3}{40}$ .
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ , если область $V$ ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, z=0$ .	1) $\frac{2}{3}\pi$ ; 2) $4\pi$ ; 3) $\frac{3}{2}\pi$ ; 4) $8\pi$ ; 5) $-4\pi$ .
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x=\sqrt{25-z^2-y^2}, z=\sqrt{16-x^2-y^2}, x\geq 0, y\geq 0$ , если плотность $\gamma(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ .	1) $\frac{4}{9}\pi$ ; 2) $-\frac{4}{9}\pi$ ; 3) $9\pi$ ; 4) $4\pi$ ; 5) $\frac{9}{4}\pi$ .

### Ответы

	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Ответы</b>	2	$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$	1	3	4	5	2	3	4	5

### Тест 3. «Операционное исчисление»

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если $F_k(p)$ , $\operatorname{Re} p > s_0^{(k)}$ , $k = \overline{1, n}$ – изображение по Лапласу функций $f_k(t)$ , где $s_0^{(k)}$ – показатель роста функций $f_k(t)$ , $k = \overline{1, n}$ , и $c_k$ – действительные или комплексные постоянные, то $F(p)$ функции $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$ равно	
2.	Является ли функция $f(t) = a^t$ ( $a > 0, a \neq 1$ ) оригиналом, если да, то указать показатель роста	1) нет; 2) да, 0; 3) да, $\ln a$ ; 4) да, $\ln 2$ ; 5) да, $a$ .
3.	Функция $f(t) = \cos t$ имеет изображение	1) $\frac{1}{1+p^2}$ ; 2) $\frac{p}{1+p^2}$ ; 3) $\frac{1}{p^2-1}$ ; 4) $\frac{p}{p^2-1}$ ; 5) $\frac{1}{p-1}$ .
4.	Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2; \\ -1, & 2 \leq t < 3; \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$	1) $-\frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p} + \frac{e^{-3p}}{p}$ ; 2) $\frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p} - \frac{e^{-3p}}{p}$ ; 3) $\frac{e^{-3p}}{3p} + \frac{2e^{-2p}}{p}$ ; 4) $\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2e^{-3p}}{p}$ ; 5) $\frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p}$ .
5.	Найти изображение функции $f(t) = \sin^4 t$ .	1) $\frac{1}{p(2+p^2)(p^2+4)}$ ; 2) $\frac{p}{(4+p^2)(p^2+16)}$ ; 3) $\frac{2}{(2+p^2)(p^2+16)}$ ; 4) $\frac{4!}{p(16+p^2)(p^2+4)}$ ; 5) $\frac{3!}{(2+p^2)(p^2+4)}$ .
6.	Найти свертку двух функций $f_1(t) = 1, f_2(t) = \sin t$	1) $1 - \sin t$ ; 2) $\sin t - 1$ ; 3) $\sin t \cos t$ ; 4) $\cos t - 1$ ; 5) $1 - \cos t$ .

7.	Найти изображение свертки двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из №6.	1) $\frac{p}{1+p^2}$ ;    2) $\frac{1}{p(p^2-1)}$ ; 3) $\frac{1}{p(p^2+1)}$ ;    4) $\frac{p}{p^2-1}$ ; 5) $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$ .
8.	Найти оригинал по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$ .	1) $e^t \sin 2t$ ;    2) $e^{-2t} \sin t$ ; 3) $e^{2t} \cos t$ ;    4) $e^{-2t} \cos t$ ; 5) $e^{-2t} \cos 2t$ .
9.	Дифференциальному уравнению $x''+x=2\cos t$ с начальными условиями $x(0)=0, x'(0)=-1$ соответствует операторное.	1) $p^2X(p)+1+X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$ ; 2) $p^2X(p)+p+X(p) = \frac{1}{p^2+1}$ ; 3) $p^2X(p)-1+X(p) = \frac{p}{p^2+1}$ ; 4) $p^2X(p)-p+X(p) = \frac{2}{p^2+1}$ ; 5) $p^2X(p)+1+X(p) = \frac{p}{p^2+1}$ .
10.	Решить задачу Коши из №9 методом операционного исчисления.	1) $t \sin t$ ;    2) $(1-t) \sin t$ ; 3) $(t-1) \cos t$ ;    4) $(t-1) \sin t$ ; 5) $t \cos t$ .

### Ответы

	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Ответы</b>	$\sum_{k=1}^n c_k F_k(p)$	3	2	1	4	5	3	2	1	4

## **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ**

### **Программа курса**

#### **I. Ряды**

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды.

Применение рядов к приближенным вычислениям.

Ряды Фурье по тригонометрическим системам. Разложение функций в ряды Фурье. Условия поточечной сходимости и сходимости в среднем. Применение рядов Фурье.

#### **II. Интегральное исчисление функций нескольких переменных**

Определенный интеграл по фигуре, его механический смысл. Свойства интегралов по фигуре.

Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

Замена переменных в кратных интегралах.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов I и II рода, их приложения. Формулы Грина, Стокса, Остроградского-Гаусса.

#### **III. Элементы операционного исчисления**

Преобразование Лапласа. Теорема существования и единственности. Класс оригиналов и класс изображений.

Основные теоремы операционного исчисления.

Определение оригинала по изображению с помощью таблиц и второй теоремы разложения.

Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операционным методом.

#### IV. Элементы теории поля

Скалярные и векторные поля. Основные понятия.

Скалярное поле и его характеристики: поверхности и линии уровня, производная по направлению, градиент.

Векторное поле и его характеристики: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция, ротор.

Формулы Остроградского–Гаусса и Стокса, их физический смысл. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Основные классы векторных полей и их свойства: соленоидальное, потенциальное и гармоническое поле.

#### Умения и навыки студентов по дисциплине «Математика» 30 2 курс 3 семестр

На экзамене студент должен уметь:

1. Исследовать на сходимость числовые ряды.
2. Находить радиус, интервал, область сходимости степенного ряда.
3. Раскладывать в ряды Тейлора и Маклорена функции.
4. Знать разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.
5. Применять степенные ряды в приближенных вычислениях.
6. Уметь раскладывать функции в тригонометрический ряд Фурье на интервалах  $(-\pi, \pi)$  и  $(-l, l)$ . Знать разложения четных и нечетных функций.
7. Вычислять двойной интеграл в декартовых и полярных координатах.
8. Применять двойной интеграл для решения прикладных задач: вычисления площади, массы фигуры, объема тела.
9. Вычислять тройной интеграл в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
10. Применять тройной интеграл для решения прикладных задач: вычисления объема, массы тела.
11. Вычислять криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода.
12. Применять криволинейные интегралы для решения прикладных задач: вычисления длины, массы дуги, работы силы.
13. Вычислять поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.
14. Применять поверхностные интегралы для решения прикладных задач: вычисления площади, массы поверхности, потока поля.
15. Находить изображение Лапласа по определению и с помощью основных теорем операционного исчисления.
16. Решать обратную задачу операционного исчисления (восстановление оригинала) с помощью основных теорем.

17. Решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений операционным методом.
18. Уметь находить характеристики скалярного поля.
19. Уметь находить характеристики векторного поля и их применять для решения практических задач.

## Рекомендуемая литература

### Перечень учебно-методических пособий

1. Высшая математика: Теория и задачи. В 5 частях. Часть 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы / А.П.Рябушко А.П., Т.А.Жур. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 319 с.
2. Гусак, А.А. Высшая математика. Т. 2. – Мн.: ТетраСистемс, 2009.
3. Данко, П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Оникс, 2005.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). Т. 2. – М.: Наука, 1985.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис Пресс, 2010.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1985.
7. Сборник тестов по высшей математике для студентов II курса инженерно-технических специальностей вузов / А.Н. Андриянчик [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2013, 1788 с.
8. Элементы операционного исчисления. Методические указания и контрольные задания / Г.К. Воронович [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2009.