Белорусский национальный технический университет

Приборостроительный факультет

Кафедра «Инженерная математика»

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
____________ М.А. Князев	__________А.И. Свистун
25 июня 2018 г.	25 июня 2018 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

«Математика. Раздел «Математическое программирование»

для специальности 1-27 01 01-08 «Экономика и организация производства (приборостроение)»

Составители: Н.А. Кондратьева, Н.К. Прихач
Под редакцией М.А. Князева

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета приборостроительного факультета 25 июня 2018 г.,
протокол № 10

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ

1.1. Краткие теоретические сведения

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

В матрице A этой системы выберем отличный от нуля элемент a_{pq}. Этот элемент называется *разрешающим элементом,* q - й столбец матрицы A – *разрешающим столбцом*, а p - я строка – *разрешающей строкой*.

Рассмотрим новую систему уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_1 \\ \ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

с матрицей A'; коэффициенты и свободные члены этой системы определяются по формулам

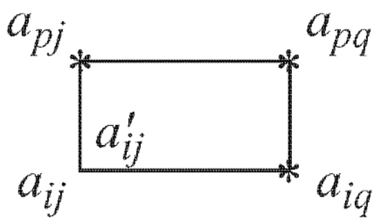
$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{pj}a_{iq}}{a_{pq}} \\ b'_i = b_i - \dfrac{a_{ip}b_q}{a_{pq}} \end{cases}, \text{ если } i \neq p;\ j \neq q.$$

Если же $i = p$, то принимаем $a'_{pj} = a_{pj}$, $b'_p = b_p$. Таким образом, p - е уравнения в системах (1.1) и (1.2) одинаковы, а коэффициенты при x_p во всех уравнениях системы (1.2), кроме p - го, равны нулю.

Системы (1.1) и (1.2) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны (их решения совпадают).

Для определения элемента a'_{ij} матрицы A' применяется правило прямоугольника.

Рассмотрим четыре элемента матрицы A: a_{ij} (элемент, подлежащий преобразованию), a_{pq} (разрешающий элемент) и элементы a_{iq} и a_{pj}. Для нахождения элемента a'_{ij} следует из элемента a_{ij} вычесть произведение элементов a_{iq} и a_{pj}, расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, делённое на разрешающий элемент a_{pq}



Аналогичным образом можно преобразовать систему (1.2), приняв за разрешающий элемент матрицы A' элемент $a'_{sr} \neq 0$, причём $s \neq p$; $r \neq q$. После этого преобразования все коэффициенты при x_r, кроме a'_{sr}, обратятся в нуль. Полученная система может быть снова преобразована и т.д.

1.2. **Практическая часть**

Задача 1.1. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Систему решить методом Жордано-Гаусса: 1) аналитически; 2) с помощью MS Excel.

Решение.

Запишем систему в виде жордановой таблицы.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	4	0	–1	5
2	–3	1	1	3
$\underline{1}$	0	2	–1	3
0	2	–3	2	3

Подвергнем её четырём шагам жордановых исключений, получим:

1 шаг. Разрешающий столбец – 1; разрешающая строка – 3; разрешающий элемент $a_{31} = 1$. Применим правило прямоугольника.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	4	–2	0	2
0	–3	–3	3	–3
$\underline{1}$	0	2	–1	3
0	2	–3	2	3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	4	–2	0	2
0	$\underline{-3}$	–3	3	–3
1	0	2	–1	3
0	2	–3	2	3

2 шаг. Делим элементы разрешающей строки на –3 и опять применяем правило прямоугольника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	4	–2	0	2
0	$\underline{1}$	1	–1	1
1	0	2	–1	3
0	2	–3	2	3

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	–6	4	–2
0	$\underline{1}$	1	–1	1
1	0	2	–1	3
0	0	–5	4	1

3 шаг. В качестве разрешающего элемента выбираем $a_{44} = 4$. Делим элементы четвёртой строки на 4 и проводим ещё один шаг жордановых исключений:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	–6	4	–2
0	1	1	–1	1
1	0	2	–1	3
0	0	–5	4	1

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	$\underline{-1}$	0	–3
0	1	–1/4	0	5/4
1	0	3/4	0	13/4
0	0	–5/4	$\underline{1}$	1/4

4 шаг. Умножаем первую (разрешающую) строку на –1. Разрешающий столбец – третий.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	$\underline{1}$	0	3
0	1	–1/4	0	5/4
1	0	3/4	0	13/4
0	0	–5/4	1	1/4

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	$\underline{1}$	0	3
0	1	0	0	2
1	0	0	0	1
0	0	0	1	4

Система имеет единственное решение $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

Используем для решения системы MS Excel:

Исходные данные

x1	x2	x3	x4	b
1	4	0	-1	5
2	-3	1	1	3
1	0	2	-1	3
0	2	-3	2	3

Первый шаг

x1	x2	x3	x4	b	
1	4	0	-1	5	
2	-3	1	1	3	
1	0	2	-1	3	Разрешающая строка
0	2	-3	2	3	

x1	x2	x3	x4	b
0	4	-2	0	2
0	-3	-3	3	-3
1	0	2	-1	3
0	2	-3	2	3

Второй шаг

Разрешающая строка - вторая, разрешающий столбец - второй

x1	x2	x3	x4	b
0	4	-2	0	2
0	-3	-3	3	-3
1	0	2	-1	3
0	2	-3	2	3

Делим элементы разрешающей строки на -3

x1	x2	x3	x4	b
0	4	-2	0	2
0	1	1	-1	1
1	0	2	-1	3
0	2	-3	2	3

x1	x2	x3	x4	b
0	0	-6	4	-2
0	1	1	-1	1
1	0	2	-1	3
0	0	-5	4	1

Третий шаг

Разрешающая строка - четвёртая, разрешающий столбец - четвёртый

x1	x2	x3	x4	b
0	0	-6	4	-2
0	1	1	-1	1
1	0	2	-1	3
0	0	-5	4	1

Делим элементы разрешающей строки на 4

x1	x2	x3	x4	b
0	0	-6	4	-2
0	1	1	-1	1
1	0	2	-1	3
0	0	-1,25	1	0,25

x1	x2	x3	x4	b
0	0	-1	0	-3
0	1	-0,25	0	1,25
1	0	0,75	0	3,25
0	0	-1,25	1	0,25

Четвёртый шаг

Разрешающая строка - четвёртая, разрешающий столбец - четвёртый

x1	x2	x3	x4	b
0	0	-1	0	-3
0	1	-0,25	0	1,25
1	0	0,75	0	3,25
0	0	-1,25	1	0,25

Умножим элементы разрешающей строки на -1

x1	x2	x3	x4	b
0	0	1	0	3
0	1	-0,25	0	1,25
1	0	0,75	0	3,25
0	0	-1,25	1	0,25

x1	x2	x3	x4	b
0	0	1	0	3
0	1	0	0	2
1	0	0	0	1
0	0	0	1	4

Решение задачи закончено

Система имеет единственное решение

x1=	**1**
x2=	**2**
x3=	**3**
x4=	**4**

Задача 1. 2. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Систему решить методом Жордано-Гаусса с помощью MS Excel.

Решение.

B12 =$A$3*B4-B$3*$A4

1) Исходные данные

x1	x2	x3	x4	b
1	1	-2	1	1
1	-3	1	1	0
4	-1	-1	-1	1
4	3	-4	-1	2

2) Первый шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
1	1	-2	1	1
0	-4	3	0	-1
0	-5	7	-5	-3
0	-1	4	-5	-2

3) Изменим знаки в четвёртой строке

4-й элемент 2-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
1	1	-2	1	1
0	-4	3	0	-1
0	-5	7	-5	-3
0	1	-4	5	2

4) Второй шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
1	0	2	-4	-1
0	0	-13	20	7
0	0	-13	20	7
0	1	-4	5	2

Т.к. 2-я и 3-я строки одинаковы, вычеркнем одну из них

x1	x2	x3	x4	b
1	0	2	-4	-1
0	0	-13	20	7
0	1	-4	5	2

5) 4-й элемент 2-й строки - разрешающий

Умножим 2-ю строку на 1/20

x1	x2	x3	x4	b
1	0	2	-4	-1
0	0	-0,65	1	0,35
0	1	-4	5	2

6) Третий шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
1	0	-0,6	0	0,4
0	0	-0,65	1	0,35
0	1	-0,75	0	0,25

Матрица имеет ранг, равный 3

Система имеет бесконечное множество решений

Пусть $x_3 = c$, тогда:

$$x_1 = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot c \qquad x_2 = 0{,}35 + 0{,}65 \cdot c \qquad x_4 = 0{,}25 + 0{,}75 \cdot c$$

1.3. Контрольные вопросы

1. Дать определение разрешающего элемента матрицы системы линейных уравнений?

2. Как выглядит жорданова форма записи системы линейных уравнений?

3. Как выполняется шаг обыкновенного жорданова исключения?

4. Какова суть «правило прямоугольника»?

1.4. Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Методом Жордано-Гаусса найти решение следующих систем уравнений:

1) аналитически; 2) с помощью MS Excel.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 12 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$	4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

13.	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-3 \\ -2x_1+6x_2+9x_3=1 \\ -4x_1-3x_2+8x_3=-3 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=-3 \\ 3x_1+x_2-x_3=3 \\ 2x_1-x_2+4x_3=19 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=7 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=13 \\ 7x_1+8x_2=1 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=4 \\ 6x_1+5x_2+4x_3=7 \\ x_1+8x_2+7x_3=2 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1+6x_2+4x_3=6 \\ 3x_1+10x_2+8x_3=21 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=11 \\ 4x_1-3x_2+2x_3=1 \end{cases}$

Задача 2. Исследовать и решить (в случае совместности) следующие системы уравнений, пользуясь таблицами Жордано-Гаусса. Использовать пакет MS Excel.

1.	$\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3+x_4=-2 \\ 3x_1-x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5 \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4=5 \\ 2x_1-4x_2-2x_3+6x_4=10 \\ 2x_1+x_2+x_4=20 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=7 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=9 \\ 5x_1+4x_2+2x_4=17 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=4 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=5 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2+8x_3+4x_4=5 \\ 3x_1+4x_2+14x_3+9x_4=4 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 2x_1+7x_2+x_3+x_4=6 \\ 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10 \\ 6x_1-2x_2-2x_3+5x_4=-2 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+7x_3+x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4=8 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ 6x_1+8x_2-14x_3=17 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+11x_2-16x_3=21 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}$	16. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

ТЕМА 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Краткие теоретические сведения

1. Постановка задачи линейного программирования

Рассмотрим оптимизационные задачи, решаемые методами линейного программирования (ЛП), в которых оптимизируемая функция $F(X)$ является линейной, а ограничения A задаются линейными неравенствами. Ограничения задают выпуклые линейные многогранники в конечном линейном пространстве. Целевые функции также линейны.

Задача линейного программирования (ЗЛП) записывается следующим образом: найти переменные $x_j \left(j=\overline{1,n}\right)$, при которых целевая функция

$$F(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

была бы максимальной (минимальной), не нарушая следующих условий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \qquad i=\overline{1,m_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=\overline{m_1+1,m_2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \qquad i=\overline{m_2+1,m}$$

Все три случая можно привести к так называемой *канонической* форме, введя дополнительные переменные $\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}$, где k – количество дополнительных переменных и условие неотрицательности искомых переменных $x_j \ge 0$.

В результате решения задачи находится некий план (программа) работы некоторого предприятия. Отсюда и появилось слово «*программирование*». Слово *линейное* указывает на линейный характер зависимости, как в целевой функции, так и в системе ограничений. Задача обязательно носит экстремальный характер, т.е. состоит в отыскании максимума или минимума (экстремума) целевой функции.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности. Множество всех допустимых решений задачи образуют *область допустимых решений* (сокращенно ОДР).

2. Элементы линейной алгебры и геометрии выпуклых множеств

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

В задачах линейного программирования представляют интерес системы, в которых максимальное число независимых уравнений системы r меньше числа переменных, т.е. $r < n$.

Будем полагать, что в системе (2.1) все m уравнений системы независимы, т.е. $r < n$ и соответственно $m < n$.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m < n$) называются *основными (или базисными*), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные $n - m$ переменных называются *неосновными* (или *свободными*).

Среди бесконечного множества решений системы выделяют так называемые *базисные решения*.

Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все $n - m$ неосновных переменных равны нулю.

В задачах линейного программирования особый интерес представляют *допустимые базисные решения*, или, как их еще называют, *опорные планы*. Число базисных решений является конечным, так как оно равно числу групп основных переменных, не превосходящему C_n^m. Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется в*ырожденным*.

Выпуклые множества точек.

В школьном курсе математики *выпуклыми* назывались многоугольники, целиком расположенные по одну сторону от прямых, на которых лежат их стороны.

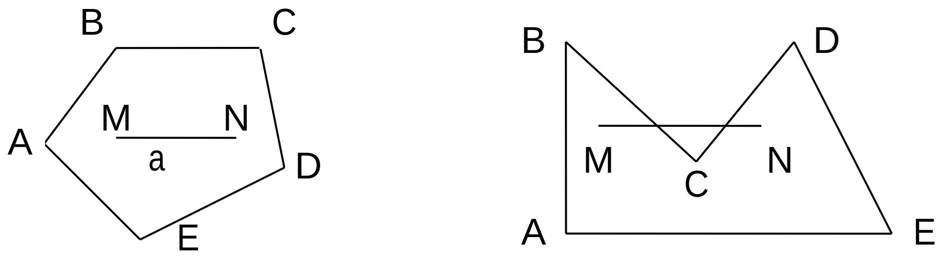


Рис. 2.1

Например, многоугольник на рис. 2.1, а – выпуклый, а многоугольник на рис. 2.1, б не является выпуклым (он расположен по обе стороны от прямой BC).

Общим определяющим свойством, которое отличает выпуклый многоугольник от невыпуклого, является то, что если взять любые две его точки и соединить их отрезком, то весь отрезок будет принадлежать этому многоугольнику. Это свойство может быть принято за определение выпуклого множества точек.

Множество точек называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Выпуклые множества обладают важным свойством, которое устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пересечение (общая часть) любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Среди точек выпуклого множестваможно выделить внутренние, граничные и угловые точки. Точка множества называется *внутренней*, если в некоторой ее окрестности содержатся точки только данного множества. Точка множества называется *граничной*, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему. Точка множества называется *угловой (или крайней)*, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

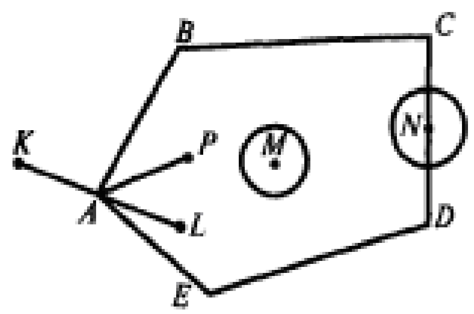


Рис. 2.2

На рис. 2.2 приведены примеры различных точек многоугольника: внутренней (точки M), граничной (точка N) и угловых (точки A, B, C, D, E). Точка A – угловая, так как для любого отрезка, целиком принадлежащего многоугольнику, например, отрезка AP, она не является внутренней; точка A – внутренняя для отрезка KL, но этот отрезок не принадлежит целиком многоугольнику.

Множество точек называется *замкнутым*, если включает все свои граничные точки. Множество точек называется *ограниченным*, если существует шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество; в противном случае множество называется неограниченным.

Если фигура ограничена только прямыми или их отрезками, то число ее угловых точек конечно; в случае криволинейности границ фигура содержит бесконечно много угловых точек, что позволяет сделать следующее определение.

Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется *выпуклым многогранником* (*многоугольником)*, если оно ограниченное, и *выпуклой многогранной (многоугольной*) областью, если оно неограниченное.

Множество всех точек $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ образует n-мерное точечное (векторное) пространство. При $n > 3$ точки и фигуры «n-мерного пространства» не имеют реального геометрического смысла и все исследования объектов этого пространства необходимо проводить в аналитической форме. Тем не менее оказывается целесообразным и вэтом случае использовать геометрические понятия для облегчения представлений об объектах n- мерного пространства.

Геометрический смысл решений неравенств, уравнений и их систем.

Теорема 2.2. Множество решений неравенства с двумя переменными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

является одной из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, включая и эту прямую, а другая полуплоскость с той же прямой есть множество решений неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1.$$

Учитывая, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{2.2}$$

при $n=3$, является плоскостью, а при $n>3$ – ее обобщением в n-мерном пространстве – гиперплоскостью, теорему 2.2 можно распространить на случай трех и более переменных.

Теорема 2.3. Множество всех решений линейного неравенства с n переменными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

является одним из полупространств, на которые все пространство делится плоскостью или гиперплоскостью (2.2), включая и эту плоскость (гиперплоскость).

Рассмотрим **множество решений систем неравенств**.

Теорема 2.4. Множество решений совместной системы n линейных неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

является выпуклым многоугольником (или выпуклой многоугольной областью).

При построении областей решений систем неравенств могут встретиться и другие случаи: множество решений – выпуклая многоугольная область (рис. 2.3, а); одна точка (рис. 2.3, б); пустое множество, когда система неравенств несовместна (рис. 2.3, в).

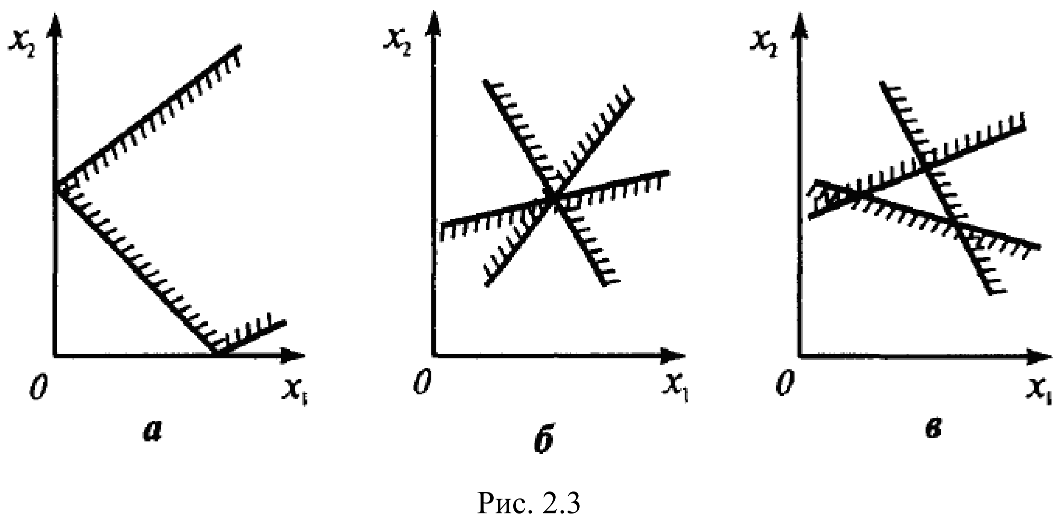


Рис. 2.3

Теорема 2.5. Множество решений совместной системы m линейных неравенств с n переменными является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.

Рассмотрим **множество допустимых решений системы m линейных уравнений с n переменными.**

Теорема 2.6. Множество всех допустимых решений совместной системы m линейных уравнений с n переменными ($m<n$) является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.

3. **Графический метод решения ЗЛП.**

Методы решения задач линейного программирования относятся к вычислительной математике. Задачу линейного программрования можно решать аналитическими и графическими методами. Аналитические методы, которые представляют собой последовательность вычислений по некоторым правилам, являются основой для решения задачи на компьютере. Их единственный недостаток заключается в том, что в отличие от графических методов, они совершенно не наглядны. Графические же методы достаточно наглядны, но они пригодны лишь для решения таких задач, что даёт возможность представлять задачу на плоскости.

Рассмотрим задачу линейного программирования с двумя переменными

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le (\ge) b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Такая задача может быть решена графически (геометрически) ввиду того, что в этом случае легко строить ОДР (область допустимых решений).

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования состоит в выполнении следующих действий.

1) Построить ОДР.

2) Построить вектор нормали $\bar{n} = (c_1, c_2)$ целевой функции (он указывает на направление возрастания целевой функции).

3) Построить нижнюю и верхнюю опорные прямые **p** и q, т. е. крайние линии уровня целевой функции, имеющие общие точки с ОДР.

4) Определить координаты экстремальных точек ($\mathrm{P} = \mathrm{p} \cap$ ОДР $\mathrm{Q} = \mathrm{q} \cap$ ОДР).

Примечания.

1) Если ОДР — пустое множество, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

2) Если ОДР неограничена по направлению вектора $\bar{n} = (c_1, c_2)$, то сама целевая функция неограничена сверху в этой области, и принимаем $F_{\max}(X) = +\infty$. Если ОДР неограничена в направлении, противоположном $\bar{n}$, то принимаем $F_{\min}(X) = -\infty$.

Графически может быть решена также задача линейного программирования, заданная в канонической форме, при условии $n - r \geq 2$ (n – число переменных, r – ранг системы уравнений). Для этого задачу надо привести к симметрическому виду.

2.2. Практическая часть

Задача 2.1. Найти все базисные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ 5x_1 \qquad\quad + 4x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в таблицу. Жордановы исключения будем выполнять в пакете MS Excel (Таблицы 2.1 – 2.4).

1) Таблица 2.1 Исходные данные

x1	x2	x3	x4	b	
7	-4	4	1	-1	
5	0	4	-1	5	*1/5
-1	2	0	-1	3	

2) Таблица 2.2 2-й элемент 1-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
7	-4	4	1	-1
1	0	0,8	-0,2	1
-1	2	0	-1	3

3) Первый шаг жордановых исключений

Таблица 2.3

x1	x2	x3	x4	b
0	-4	-1,6	2,4	-8
1	0	0,8	-0,2	1
0	2	0,8	-1,2	4

4) Умножим 3-ю строку на 1/2

Таблица 2.4

x1	x2	x3	x4	b
0	-4	-1,6	2,4	-8
1	0	0,8	-0,2	1
0	1	0,4	-0,6	2

5) Второй шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
0	0	0	0	0
1	0	0,8	-0,2	1
0	1	0,4	-0,6	2

6) Вычёркиваем первую строку.

x1	x2	x3	x4	b
1	0	0,8	-0,2	1
0	1	0,4	-0,6	2

Эквивалентная система:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 0{,}8x_3 - 0{,}2x_4 = 1 \\ \qquad x_2 + 0{,}4x_3 - 0{,}6x_4 = 2 \end{cases}$$

Система приведена к единичному базису, и переменные x_1, x_2 составляют один из базисов системы переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Поэтому при нулевых значениях свободных переменных x_3, x_4 получаем одно из базисных решений

Б$_1$ = (1, 2, 0, 0).

В данном случае $r = 2, n = 4$, поэтому всего базисных решений может быть не более $C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. Другими базисами могут оказаться следующие группы переменных:

x_3, x_4; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4.

Для того чтобы найти второе базисное решение (x_1, x_3), вернемся к таблице 2.3. Вычеркнем из неё первую строку (первая и третья строки – пропорциональны) и примем за разрешающий третий столбец. Получим таблицы 2.3 – 2.6.

7) Таблица 2.3

x1	x2	x3	x4	b
0	-4	-1,6	2,4	-8
1	0	0,8	-0,2	1
0	2	0,8	-1,2	4

8) Таблица 2.5

2-й элемент третьего столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b	
1	0	0,8	-0,2	1	
0	2	0,8	-1,2	4	*5/4

9) Таблица 2.6

x1	x2	x3	x4	b
1	0	0,8	-0,2	1
0	2,5	1	-1,5	5

Сделав шаг жордановых исключений, перейдём к базису (x_1, x_3) и при $x_2 = x_4 = 0$ (таблица 2.7) получим ещё одно базисное решение (**Б**$_2$ = (–3, 0, 5, 0)):

10) Таблица 2.7

x1	x2	x3	x4	b
1	-2	0	1	-3
0	2,5	1	-1,5	5

Преобразовывая последовательно шагами жордановых исключений таблицы 2.5, 2.1 получим другие базисные решения:

Базисные переменные (x_1, x_4). Свободные переменные (x_2, x_3).

Базисное решение **Б**$_3$ = (0.3(3), 0, 0, -3.3(3)).

11) 2-й элемент 4-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b	
1	0	0,8	-0,2	1	
0	2	0,8	-1,2	4	*-5/6

12)

x1	x2	x3	x4	b
1	0	0,8	-0,2	1
0	-1,66667	-0,66667	1	-3,33333

13) базисное решение (x1, x4)

x1	x2	x3	x4	b
1	-0,33333	0,666667	0	0,333333
0	-1,66667	-0,66667	1	-3,33333

Базисные переменные (x_2, x_4). Свободные переменные (x_1, x_3). Базисное решение **Б**$_3$ = (0, -1, 0, -5).

14) 1-й элемент 4-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
7	-4	4	1	-1
5	0	4	-1	5
-1	2	0	-1	3

15) Первый шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
7	-4	4	1	-1
12	-4	8	0	4
6	-2	4	0	2

16) Вычёркиваем вторую строку
т. к. 2-я и 4-я строка - пропорциональны

x1	x2	x3	x4	b	
7	-4	4	1	-1	
6	-2	4	0	2	*(-1/2)

17) 2-й элемент 2-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
7	-4	4	1	-1
-3	1	-2	0	-1

18) Второй шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
-5	0	-4	1	-5
-3	1	-2	0	-1

Базисные переменные (x_2, x_3). Свободные переменные (x_1, x_4).
Базисное решение **Б**$_3$ = (0, 1.5 ,1.25 , 0).

19) 1-й элемент 4-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b	
7	-4	4	1	-1	
5	0	4	-1	5	
-1	2	0	-1	3	*1/2

20) 3-й элемент 2-го столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
7	-4	4	1	-1
5	0	4	-1	5
-0,5	1	0	-0,5	1,5

21) Первый шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
5	0	4	-1	5
5	0	4	-1	5
-0,5	1	0	-0,5	1,5

22) Вычёркиваем первую строку
Умножаем вторую строку на 1/4

x1	x2	x3	x4	b
1,25	0	1	-0,25	1,25
-0,5	1	0	-0,5	1,5

Базисные переменные (x_3, x_4). Свободные переменные (x_1, x_2).
Базисное решение **Б**$_3$ =(0, 0, 0.5, -3).

23) Умножаем первую строку на 1/4

x1	x2	x3	x4	b	
7	-4	4	1	-1	*1/4
5	0	4	-1	5	
-1	2	0	-1	3	

24) 1-й элемент третьего столбца - разрешающий

x1	x2	x3	x4	b
1,75	-1	1	0,25	-0,25
5	0	4	-1	5
-1	2	0	-1	3

25) Первый шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
1,75	-1	1	0,25	-0,25
-2	4	0	-2	6
-1	2	0	-1	3

26) Вычёркиваем вторую строку
Умножаем 3-ю строку на -1

x1	x2	x3	x4	b
1,75	-1	1	0,25	-0,25
1	-2	0	1	-3

27) Второй шаг жордановых исключений

x1	x2	x3	x4	b
1,5	-0,5	1	0	0,5
1	-2	0	1	-3

Задача 2.2. Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу:

$$F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 \qquad - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Решение. Приведём систему ограничительных уравнений к разрешённой форме, выделяя некоторый базис переменных. Затем, опустив базисные переменные, перейдём к эквивалентной системе неравенств. Для завершения преобразований останется выразить целевую функцию через переменные, вошедшие в полученную систему неравенств.

Эти преобразования удобнее проводить одновременно, приписав к жордановой таблице снизу строку для целевой функции (F – строку). В процессе жордановых исключений эту строку не следует делать разрешающей, но преобразовывать её элементы нужно по обычным правилам. В результате целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные.

В условиях данной задачи разрешающие элементы можно выбрать произвольно

1) Исходные данные

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
	1	3	1	4	-1	12
	2	0	-1	12	-1	14
	1	2	0	3	-1	6
F	6,5	0	-7,5	23,5	-5	0

2) первый шаг жордановых исключений

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
	0	1	1	1	0	6
	0	-4	-1	6	1	2
x1	1	2	0	3	-1	6
F	0	-13	-7,5	4	1,5	-39

3) второй шаг жордановых исключений

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
x2	0	1	1	1	0	6
	0	0	3	10	1	26
x1	1	0	-2	1	-1	-6
F	0	0	5,5	17	1,5	39

4) третий шаг жордановых исключений

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
x2	0	1	1	1	0	6
x5	0	0	3	10	1	26
x1	1	0	1	11	0	20
F	0	0	1	2	0	0

Учитывая неотрицательность базисных переменных x_1, x_2, x_5 в последней таблице, опускаем их и приходим к эквивалентной системе неравенств, а вместе с тем и к симметричной форме записи задачи:

$$F \to x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 6 \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26 \\ x_3 + 11x_4 \le 20 \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \ge 0$$

Задача 2.3. Решить графически следующую задачу математического программирования:

$$F \to 4x_1 + 7x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Решение. а) Область допустимых решений, которую обозначим буквой G, построим следующим образом. Построим прямые с уравнениями:

1) $2x_1 - 3x_2 = 6$ 4) $2x_1 - x_2 = 0$

2) $x_1 + x_2 = 10$ 5) – 7) $x_1 = 6$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0$

3) $2x_1 + 2x_2 = 3$

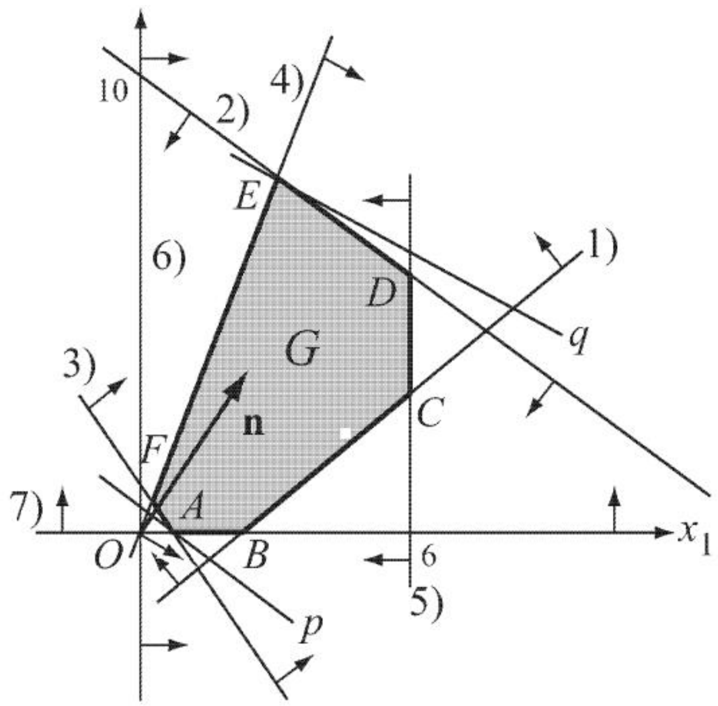


Рис. 2.4.

Прямые пронумерованы. Номер прямой имеется также на рисунке 2.4.

б) Каждое неравенство, фигурирующее в системе ограничений, определяет полуплоскость, причем эта полуплоскость содержит точку, координаты которой удовлетворяют соответствующему строгому неравенству.

Первые два и четвертое неравенства системы ограничений удовлетворяются координатами точки $O(0,0)$.

Поэтому три полуплоскости содержат начало координат системы Ox_1x_2.

На соответствующую полуплоскость указывают стрелки, идущие от каждой прямой. Жирной линией выделим границу ОДР — выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Последние неравенства $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, означающие неотрицательность переменных задачи, определяют первую четверть плоскости Ox_1x_2.

в) Строим теперь нормальный вектор целевой функции $\bar{n} = (4,7)$. Его направление указывает направление возрастания целевой функции $F(X) = 4x_1 + 7x_2$.

Прямая с уравнением $4x_1 + 7x_2 = 0$ представляет собой «нулевую» линию уровня функции $z = 4x_1 + 7x_2$. Эта прямая проходит через начало координат и перпендикулярна нормальному вектору $\bar{n} = (4,7)$. Передвигаем эту прямую параллельно себе, или перпендикулярно $\bar{n}$, и фиксируем два ее крайних положения.

Эти крайние прямые, которые обозначим буквами p и q, должны иметь с границей G либо общую вершину, либо общий отрезок, причем направление от p к q совпадает с направлением $\bar{n}$. В нашем случае p проходит через точку A, а q – через точку E. Эти прямые называются соответственно *нижней и верхней опорными прямыми* для G.

г) Определим координаты точек A и E. На чертеже видно, что точка A лежит на прямых 3) и 7), а E – на 2) и 4). Именно поэтому пронумерованы уравнения прямых и их изображения. Теперь легко составить системы уравнений для определения координат этих точек.

Запишем это так:

$$A: \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2};0\right) \qquad E: \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{10}{3};\frac{20}{3}\right).$$

Вычислим значения целевой функции в точках A и E:

$$F_{\min} = F\left(\frac{3}{2}, 0\right) = 12 \qquad F_{\max} = F\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right) = 66.$$

2.3. Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача линейного программирования (ЗЛП)?
2. Как выглядит каноническая форма ЗЛП?
3. Какие базисные решения ЗЛП являются допустимыми?
4. Что является множеством решений систем линейных неравенств?
5. Каков алгоритм графического метода решения ЗЛП?
6. Как выглядит алгоритм отыскания базисных решений системы уравнений с использованием пакета MS Excel?

2.4. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1.

1.Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 \qquad = 6 \\ \qquad - x_2 - x_3 \qquad\qquad = 4 \\ -3x_1 \qquad - x_3 \qquad - x_5 = 2 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 6x_1 - 2x_2 \to \max$$

Вариант 2.

1. Найти опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad\quad 5x_2 - 4x_3 = 15 \\ 5x_1 - \qquad\quad 2x_3 = 10 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{aligned} &3x_1 + 6x_2 \le 12, \\ &2x_1 - x_2 \ge -2, \\ &-x_1 + 3x_2 \ge 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 3.

1. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = -2x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Вариант 4.

1. Найти опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 36 \\ \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 5 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 8, \\ -x_1 + 5x_2 &\le 37 \\ 5x_1 + x_2 &\le 49, \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 11, \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 19, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 5.

1. Найти неотрицательные решения системы линейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 1 \\ \qquad 3x_2 + 4x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad \le 4 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Вариант 6.

1. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad = 9 \\ \quad -x_2 \quad + x_4 + x_5 = 4 \\ \quad 3x_2 - x_3 - 2x_4 \quad = 1 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Вариант 7.

1. Найти опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ \quad\quad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad\quad = -1 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 3x_1 + 7x_2 \to \max(\min)$$
$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 5x_2 &\le 0, \\ 3x_1 - x_2 &\ge 0, \\ 7x_1 + 5x_2 &\le 35, \\ 7x_1 + 5x_2 &\ge 21, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 8.

1. Найти неотрицательные решения систем линейных уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \quad = 9 \\ \quad\quad x_3 - 2x_4 \quad = 3 \\ \quad 3x_2 \quad - x_4 + x_5 \le 5 \\ \quad x_2 \quad\quad + x_5 \ge -3 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ x_1 + 3x_2 &\ge 9, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 9.

1. Найти опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 2, \\ -2x_1 + x_2 &\le 2, \\ x_1 + x_2 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 10.

1. Найти опорные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Вариант 11.

1. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 12x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ x_1 + 2x_2 &\le 10, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 12.

1. Найти все опорные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ x_1 + 2x_2 &\ge 2, \\ 2x_1 + x_2 &\le 10, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 13.

1. Найти все базисные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 4 \\ \qquad x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

2. Решить графически следующую ЗЛП:

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

ТЕМА 3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

3.1. Краткие теоретические сведения

Симплекс-метод. Максимум или минимум целевой функции может быть достигнут в одной из угловых точек области допустимых планов.

Сделанный вывод на первый взгляд позволяет предположить простой метод решения задач линейного программирования: надо просто «перебрать» все угловые точки области допустимых планов, в каждой из них вычислить значение целевой функции и выбрать ту угловую точку, где целевая функция оптимальна.

Однако количество угловых точек области допустимых планов растет очень резко с ростом числа переменных и особенно числа ограничений. Число перебираемых вершин можно сократить, если производить перебор не беспорядочно, а с учетом изменений целевой функции, т.е. добиваясь того, чтобы каждое следующее решение было «лучше» (или, по крайней мере, «не хуже»), чем предыдущее (было ближе к оптимальному решению).

Эта идея легла в основу универсального метода решения задач линейного программирования – симплекс-метода.

Симплекс-метод – один из первых специализированных методов оптимизации, нацеленный на решение задач линейного программирования. Он был предложен американцем Г. Данцигом в 1951 г. Симплекс-метод состоит в продвижении по выпуклому многограннику ограничений от вершины к вершине, при котором на каждом шаге значение целевой функции улучшается до тех пор, пока не будет достигнут оптимум.

3.2. Практическая часть

Задача 3. 1. Найти какой-либо опорный план задачи (математически).

$$F = 3x_1 - x_2 + 5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Решить задачу в Excel, используя «Поиск решения».

Решение.

Задача записана в канонической форме, но 2 свободных члена отрицательны, поэтому, прежде чем записать задачу в форме таблицы, умножим первое и второе уравнение на (–1).

1-ая симплекс-таблица						
Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
	-1	-1	1	1	0	4
	-1	2	1	0	1	7
	2	-1	0	1	1	7
F	-3	1	0	0	0	5

Для первого шага жорданова исключения возьмём разрешающим, например, четвёртый столбец – в нём есть положительные элементы. Разрешающая строка определится по минимальному из отношений: 4/1 и 7/1.

В данном случае $\min\left(\frac{4}{1},\frac{7}{1}\right)$, что соответствует первой строке, которая и будет разрешающей.

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b	b/aij
x4	-1	-1	1	1	0	4	4
	-1	2	1	0	1	7	
	2	-1	0	1	1	7	7
F	-3	1	0	0	0	5	

Сделаем ещё 2 шага жордановых исключений, получим:

3-ая симплекс-таблица							
Б	x1	x2	x3	x4	x5	b	b/aij
x4	-1	-1	1	1	0	4	
	-1	2	1	0	1	7	7
x5	3	0	-1	0	1	3	3
F	-3	1	0	0	0	5	

4-ая симплекс-таблица							
Б	x1	x2	x3	x4	x5	b	b/aij
x4	-1	-1	1	1	0	4	
	-4	2	2	0	0	4	*1/2
x5	3	0	-1	0	1	3	
F	-3	1	0	0	0	5	

Б	x1	x2	x3	x4	x5	b
x4	-1	-1	1	1	0	4
x3	-2	1	1	0	0	2
x5	3	0	-1	0	1	3
F	**-3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**5**

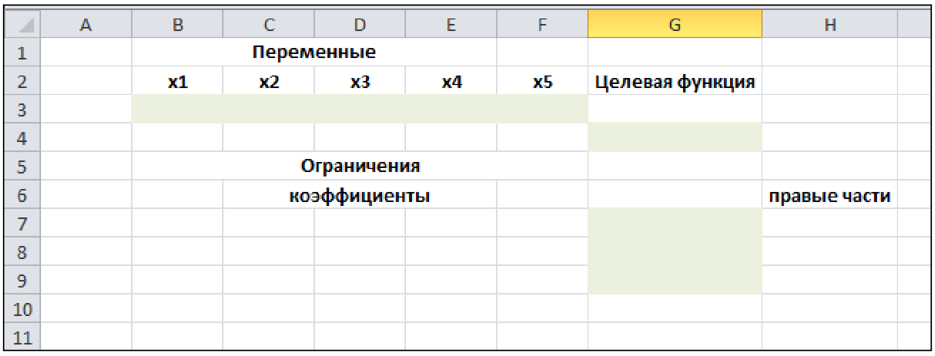
5-ая симплекс-таблица						
Б	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**b**
x4	1	-2	0	1	0	**2**
x3	-2	1	1	0	0	**2**
x5	1	1	0	0	1	**5**
F	**-3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**5**

Базис выделен. Ему соответствует начальный опорный план $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 5 \Leftrightarrow \overline{X}_0 = (0,0,2,2,5), F(\overline{X}_0) = 5$.

Был найден опорный план в базисе x_3, x_4, x_5. Если исходную таблицу преобразовать с другими разрешающими элементами, то получится другой базис – следовательно, и другой опорный план.

Решение задачи в процедуре EXCEL «Поиск решения».

1) Ввод данных в таблицу EXCEL (рис. 3.1).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2		x1	x2	x3	x4	x5	Целевая функция	
3								
4								
5				Ограничения				
6				коэффициенты				правые части
7								
8								
9								
10								
11								

Рис. 3.1

Для переменных задачи отведены ячейки B3:F3. Эти ячейки называются *рабочими* или *изменяемыми* ячейками. В изменяемые ячейки <u>ничего не заносится</u> и в результате решения задачи в этих ячейках будет оптимальные значения переменных.

В ячейку G4 вводится формула для вычисления целевой функции задачи $F = 3x_1 - x_2 + 5$ (рис. 3.2):

=B4*B3+C4*C3+D4*D3+E4*E3+F4*F3+5

B	C	D	E	F	G	H
	Переменные					
x1	x2	x3	x4	x5	Целевая функция	
3	-1	0	0	0	5	
		Ограничения				
		коэффициенты				правые части
-1	-1	1	1	0		4
-1	2	1	0	1		7
2	-1	0	1	1		7

Рис. 3.2

В ячейку G7 вводится формула для вычисления ограничения 1: $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4$, в ячейку G8 вводится формула для вычисления ограничения 2: $-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5$ а в ячейку G9 – вычисления ограничения 3: $2x_1 - x_2 + x_4 + x_5$. Обе формулы вводятся с помощью функции СУММПРОИЗВ():

=СУММПРОИЗВ(B3:F3;B9:F9)

B	C	D	E	F	G
		Переменные			
x1	x2	x3	x4	x5	Целевая функция
3	-1	0	0	0	=B4*B3+C4*C3+D4*D3+E4*E3+F4*F3+5
		Ограничения			
		коэффициенты			
-1	-1	1	1	0	=СУММПРОИЗВ(B3:F3;B7:F7)
-1	2	1	0	1	=СУММПРОИЗВ(B3:F3;B8:F8)
2	-1	0	1	1	=СУММПРОИЗВ(B3:F3;B9:F9)

Рис. 3.3

Окончательно после ввода формул и данных экран имеет вид (рис. 3.4):

B	C	D	E	F	G	H
	Переменные					
x1	x2	x3	x4	x5	Целевая функция	
3	-1	0	0	0	5	
		Ограничения				
		коэффициенты				правые части
-1	-1	1	1	0	0	4
-1	2	1	0	1	0	7
2	-1	0	1	1	0	7

Рис. 3.4

2) *Работа в окне “Поиск решения”*

В меню “*Данные*” выбираем процедуру “*Поиск решения*”

В появившемся окне (рис. 3.5) нужно установить адрес целевой ячейки G4, значение целевой ячейки: *максимальное*, адреса изменяемых ячеек *B3:F3*.

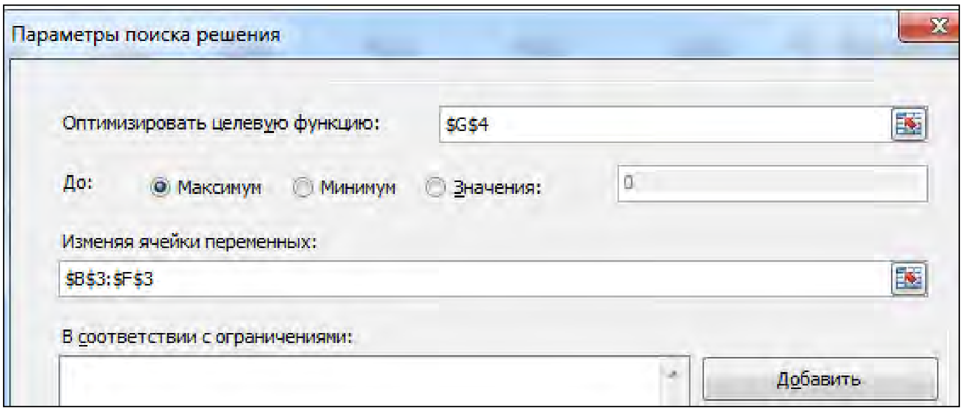


Рис. 3.5

Чтобы ввести ограничения задачи, нажать кнопку «*Добавить*». В появившемся диалоговом (рис. 3.6) окне слева ввести адрес G7 (ограничение 1), затем выбрать знак <= и в правой – адрес ячейки H7.

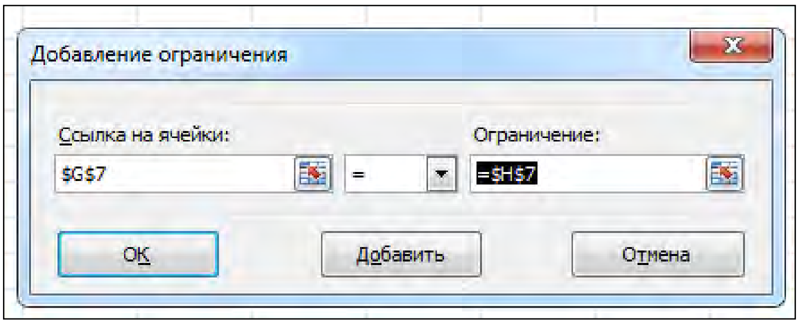


Рис. 3.6

После ввода нажать кнопку «*Добавить*» и аналогично ввести второе и третье ограничение. Снова нажать кнопку «*Добавить*» и ввести ограничение: В3:3 >=0 (соответствующее ограничению $x_j, \geq 0 \left(j = \overline{1,5}\right)$). После ввода последнего ограничения нажать ОК. В опции «Выбрать метод решения» выбрать «Поиск решения линейных задач симплекс-методом». Окно «*Поиска решений*» будет иметь вид (рис. 3.7):

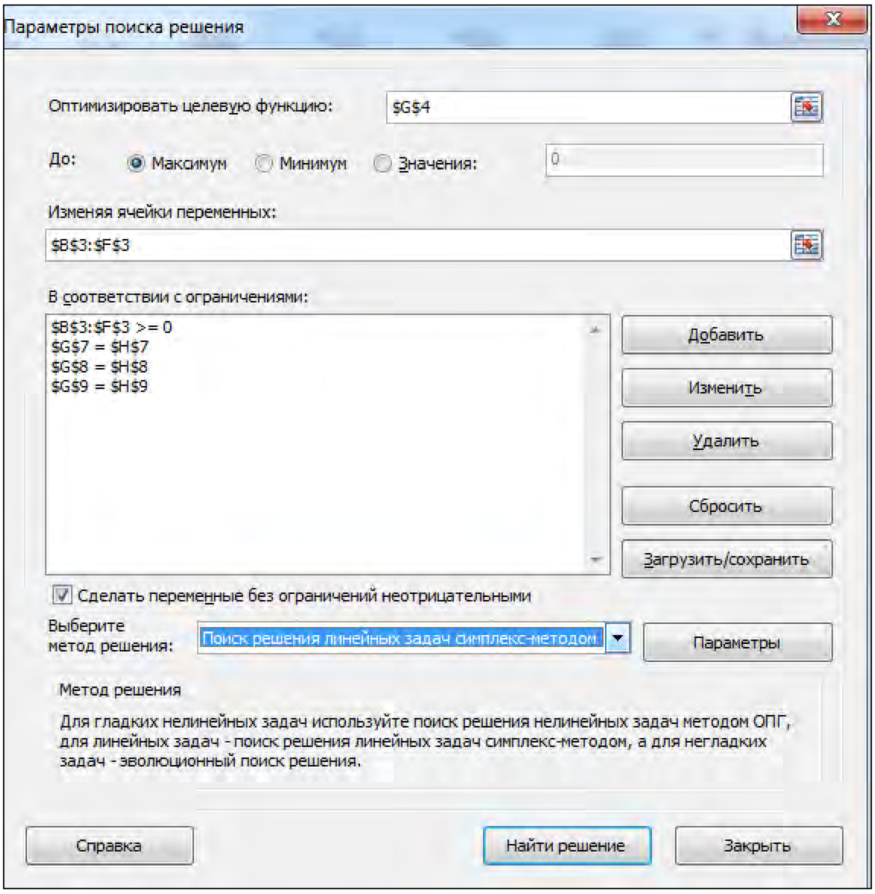


Рис. 3.7

Для решения задачи в окне «*Поиск решения*» нажать кнопку «*Найти решение*». Если решение найдено появляется окно (рис. 3.8):

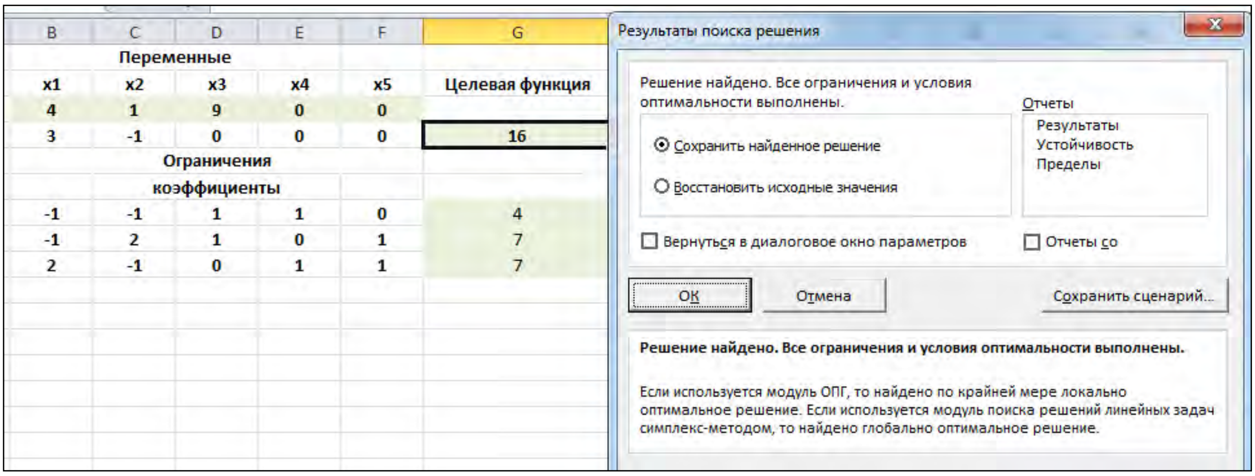


Рис. 3.8

Оптимальное решение задачи линейного программирования:
$x_1 = 4,\ x_2 = 4, x_3 = 9,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0 \Leftrightarrow \overline{X}_{опт} = (4{,}1{,}9{,}2{,}0), \quad F(\overline{X}_{опт}) = 16.$
Был найден оптимальный план в базисе x_1, x_2, x_3.

Различные технико-экономические и экономические задачи производственного менеджмента, от оптимальной загрузки станка и раскройки стального листа или полотна ткани
до анализа межотраслевого баланса и оценки темпов роста экономики страны в целом, приводят к необходимости решения тех или иных задач линейного программирования.

Задача 3.2. *Задача распределения ресурсов.*

Если финансы, оборудование, сырьё и даже людей полагать ресурсами, то значительное число задач в экономике можно рассматривать как задачи распределения ресурсов. Достаточно часто математической моделью таких задач является задача линейного программирования.

Рассмотрим следующий пример.

Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырёх типов Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой требуются ресурсы трёх видов: трудовые, сырьё, финансы. Количество ресурсов каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется *нормой расхода*. Нормы расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены в таблице 2. Там же приведено наличие располагаемого ресурса.

Таблица 3.1

Ресурс	**Прод1**	**Прод2**	**Прод3**	**Прод4**	**Знак**	**Наличие**
Прибыль	60	70	120	130	Max	–
Трудовые	1	1	1	1	≤	16
Сырье	6	5	4	3	≤	110
Финансы	4	6	10	12	≤	100

Составить математическую модель, решить задачу симплекс-методом, применяя процедуру Excel «Поиск решения».

Решение.

Введём следующие обозначения:

x_j – количество выпускаемой продукции j - го типа, $j=\overline{1,4}$;

b_i – количество располагаемого ресурса i - го вида, $i=\overline{1,3}$;

a_{ij} – норма расхода i - го ресурса для выпуска единицы продукции j - го типа;

c_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j - го типа.

Как видно из таблицы 2, для выпуска единицы Прод1 требуется 6 единиц сырья, значит, для выпуска всей продукции Прод1 требуется $6x_1$ единиц сырья, где x_1– количество выпускаемой продукции Прод1. С учётом того, что для других видов продукции зависимости аналогичны, ограничение по сырью будет иметь вид:

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110$$

В этом ограничении левая часть равна величине *необходимого* ресурса, а правая показывает количество *имеющегося* ресурса.

Аналогично можно составить ограничения для остальных ресурсов и написать зависимость для целевой функции. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max \\
&\left.\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \\
&6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 \\
&4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100
\end{aligned}\right\} \\
&x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Решение задачи в пакете EXCEL с поиощью «Поиск решения».

1) Ввод данных в таблицу EXCEL (рис. 3.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Переменные				
2	имя	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4			
3	значение	0	0	0	0	ЦФ	напр	
4	коэф. В ЦФ	60	70	120	130	0	max	
5				Ограничения				
6	вид					левая часть	знак	правая часть
7	трудовые	1	1	1	1	0	<=	16
8	сырьё	6	5	4	3	0	<=	110
9	финансы	4	6	10	13	0	<=	100

Рис. 3.9

2) *Работа в окне “Поиск решения”*

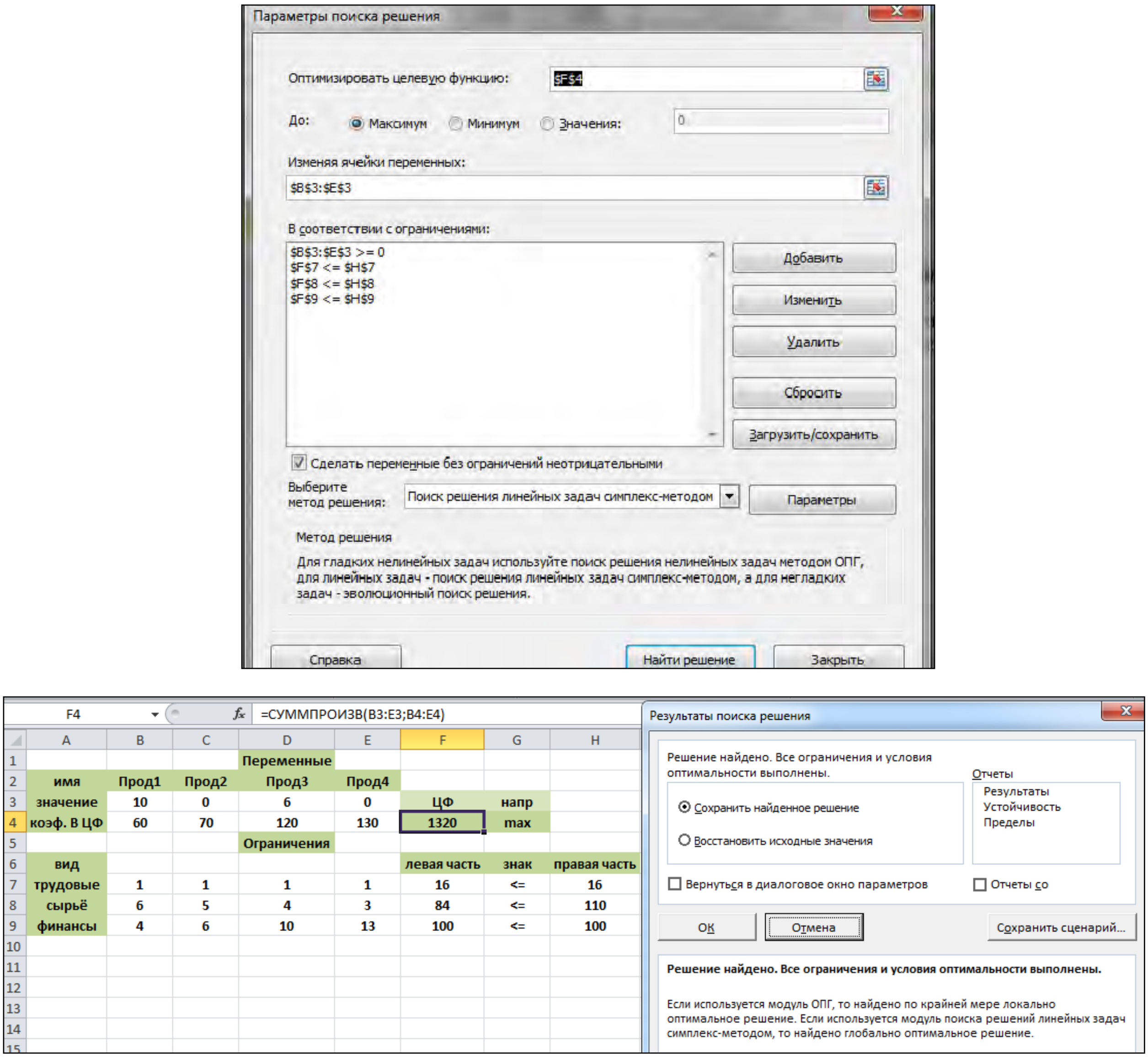


Рис. 3.10

На рис. 3.10 видно, что в оптимальном решении

Прод1 = B3 = 10   Прод2 = C3 = 0

Прод3 = D3 = 6   Прод4 = E3 = 0.

При этом максимальная прибыль будет составлять F4 = 1320, а количество использованных ресурсов равно

трудовых = F7 = 16   сырья = F8 = 84   финансов = F9 = 100

Анализ оптимального решения.

Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется диалоговое окно *Результат поиска решения*. *Решение найдено* (рис. 3.10). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчёты трёх типов:

- Результаты

•Устойчивость

•Пределы.

Вызов отчётов анализа.

Начнём с *отчёта по результатам.* Выделяем вызываемый отчёт и жмём на **ОК** (рис. 3.11)

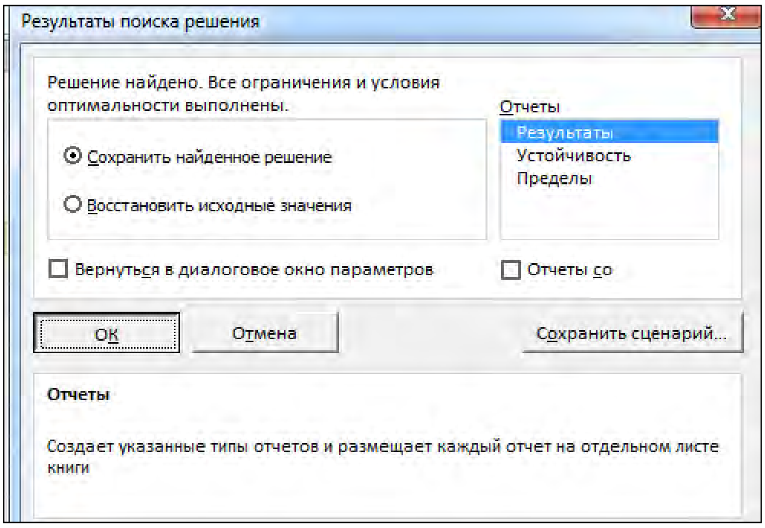


Рис. 3.11

На экране: вызванный отчёт на новом листе, на ярлыке которого указано название отчёта (рис. 3.12).

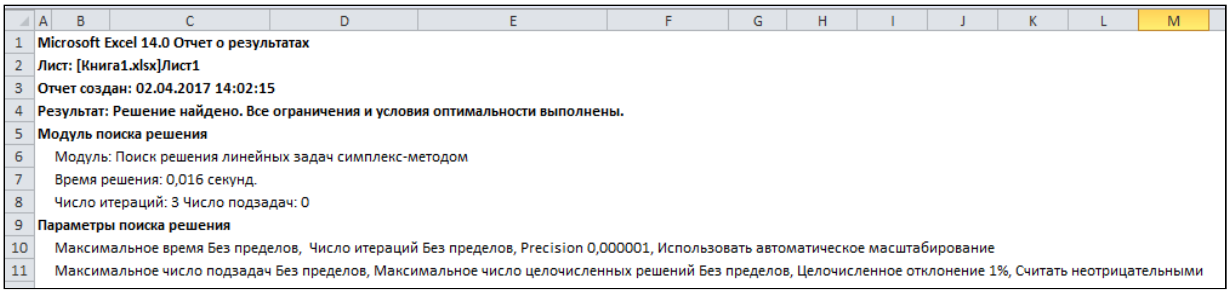
Отчёт состоит из трёх таблиц.

•Таблица 1 приводит сведения о целевой функции.

•Таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи.

•Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

Для *Ограничений* в графе *Формула* приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно **Поиск решения**; в графе *Значение ячейки* приведены величины использованного ресурса; в графе *Допуск* показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в графе *Состояние* указывается *Привязка*; при неполном использовании ресурса в этой графе указывается *Без привязки*.



1	**Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах**
2	**Лист: [Книга1.xlsx]Лист1**
3	**Отчет создан: 02.04.2017 14:02:15**
4	**Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.**
5	**Модуль поиска решения**
6	Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
7	Время решения: 0,016 секунд.
8	Число итераций: 3 Число подзадач: 0
9	**Параметры поиска решения**
10	Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
11	Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$F$4	коэф. В ЦФ ЦФ	0	1320

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$3	значение Прод1	0	10	Продолжить
$C$3	значение Прод2	0	0	Продолжить
$D$3	значение Прод3	0	6	Продолжить
$E$3	значение Прод4	0	0	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$F$7	трудовые левая часть	16	$F$7<=$H$7	Привязка	0
$F$8	сырьё левая часть	84	$F$8<=$H$8	Без привязки	26
$F$9	финансы левая часть	100	$F$9<=$H$9	Привязка	0
$B$3	значение Прод1	10	$B$3>=0	Без привязки	10
$C$3	значение Прод2	0	$C$3>=0	Привязка	0
$D$3	значение Прод3	6	$D$3>=0	Без привязки	6
$E$3	значение Прод4	0	$E$3>=0	Привязка	0

Рис. 3.12

Для *Граничных условий* приводятся аналогичные величины с той лишь разницей, что вместо величины неиспользованного ресурса показана разность между значением переменой в найденном оптимальном решении и заданным для неё граничным условием.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Лист: [Книга1.xlsx]Лист1

Отчет создан: 02.04.2017 14:35:45

Ячейки переменных

		Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
$B$3	значение Прод1	10	0	60	40	12
$C$3	значение Прод2	0	-10	70	10	1E+30
$D$3	значение Прод3	6	0	120	30	13,33333333
$E$3	значение Прод4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

		Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
$F$7	трудовые левая часть	16	20	16	3,545454545	6
$F$8	сырьё левая часть	84	0	110	1E+30	26
$F$9	финансы левая часть	100	10	100	60	36

Рис. 3.13

Отчёт по устойчивости (рис. 3.13) состоит из двух таблиц.

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

- результат решения задачи;
- приведенная стоимость, т.е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;
- коэффициенты целевой функции;
- предельные значения приращения коэффициентов Δc_j целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

В таблице 2 приводятся аналогичные значения для ограничений:

- величина использованных ресурсов;
- теневая цена, т.е. двойственные оценки z_i, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
- значения приращения ресурсов Δb_i, при которых сохраняется оптимальный объём переменных, входящих в оптимальное решение.

Отчёт по пределам приведён на рис. 3.14.

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [Книга1.xlsx]Лист1
Отчет создан: 02.04.2017 14:35:54

	Целевая функция	
Ячейка	Имя	Значение
$F$4	коэф. В ЦФ ЦФ	1320

	Переменная		Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$3	значение Прод1	10	0	720	10	1320
$C$3	значение Прод2	0	0	1320	2,37E-15	1320
$D$3	значение Прод3	6	0	600	6	1320
$E$3	значение Прод4	0	0	1320	0	1320

Рис. 3.14

В нём показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

- приводятся значения x_j в оптимальном решении;
- приводятся нижние пределы изменения значений x_j.

Кроме этого, в отчёте указаны значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на нижнем пределе. Так, при значении 720 видно, что $F = c_1x_1 + c_3x_3 = 60 \cdot 0 + 120 \cdot 6 = 720$. Далее приводятся верхние пределы изменения x_j и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах.

Поэтому везде $F = 60 \cdot 10 + 120 \cdot 6 = 1320$.

3.3. Контрольные вопросы

1. Какова основная идея симплексного метода?
2. Как выглядит построение начального опорного плана?
3. Какова суть признака оптимальности опорного плана?
4. Каков алгоритм нахождения опорного плана задачи в пакете MS Excel с помощью процедуры «Поиск решения»?

5.каков вид математической модели задачи распределения ресурсов?

6. Как используется симплексный метод решения задачи распределения ресурсов?
7. Как проводится анализ оптимального решения задачи распределения ресурсов в пакете MS Excel? Что характеризует отчет по устойчивости, отчет по пределам?

3.4. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти какой-либо опорный план задачи (математически). Решить задачу в Excel, используя «Поиск решения».

Вариант 1 $F = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 25 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5}$	**Вариант 2** $F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5}$
Вариант 3 $F = x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 7x_5 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5}$	**Вариант 4** $F = 2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,6}$

Вариант 5 $F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31 \\ -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118 \end{cases}$ $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$	**Вариант 6** $F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 8x_5 = 8 \end{cases}$ $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$
Вариант 7 $F = x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 + 4x_5 = 11 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 33 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 2 \end{cases}$ $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$	**Вариант 8** $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$

ТЕМА 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В MICROSOFT EXCEL

4.1. Постановка задачи.

Предприятие выпускает продукцию двух типов $П_1$ и $П_2$. Запас сырья и нормы расхода сырья на условную единицу продукции каждого типа даны в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Расход на единицу продукции		Прибыль от реализации	
		$П_1$	$П_2$	$Д_1$	$Д_2$
1	7	1	1	2	3
2	12	1	2		
3	15	3	1		

Прибыль от реализации продукции типа $П_1$ составляет $Д_1$ денежных единиц, а прибыль от реализации продукции типа $П_2$ составляет $Д_2$ денежных единиц. Как следует спланировать выпуск продукции, чтобы прибыль была наибольшей?

4.2. Практическая часть.

4.2.1. Решение данной задачи графическим методом в табличном редакторе Microsoft Excel

Математическая модель и исходные данные задачи – на рисунке 2.3.

Для построения области допустимых решений, $gradF$ и линии уровня необходимо:

1) Выделить данные в области (например, C17:D29), и на вкладке «Вставка» выбрать: «Точечная». Затем после построения первой линии из области допустимых решений, щёлкнуть правой клавишей мыши на области диаграммы и выбрать «Выбрать данные».

2) Щёлкнуть мышью по «Ряд 1» и выбрать кнопку «Изменить». В поле имя ряда записать уравнение построенной прямой (см. рис. 4.1)

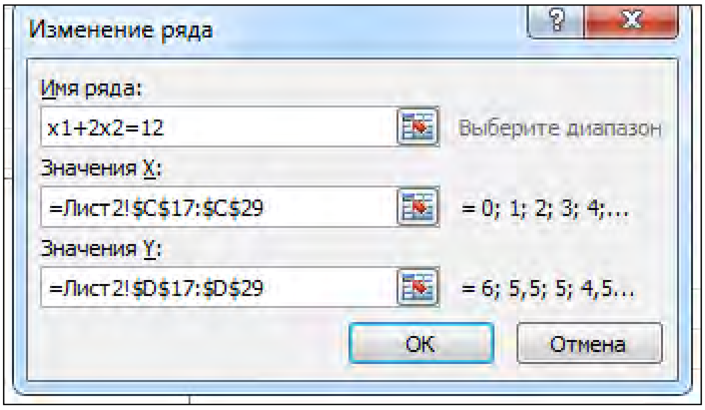


Рис. 4.1

3) Нажать кнопку «Добавить» и выбрать исходные данные для построения второго графика (см. рис. 4.2)

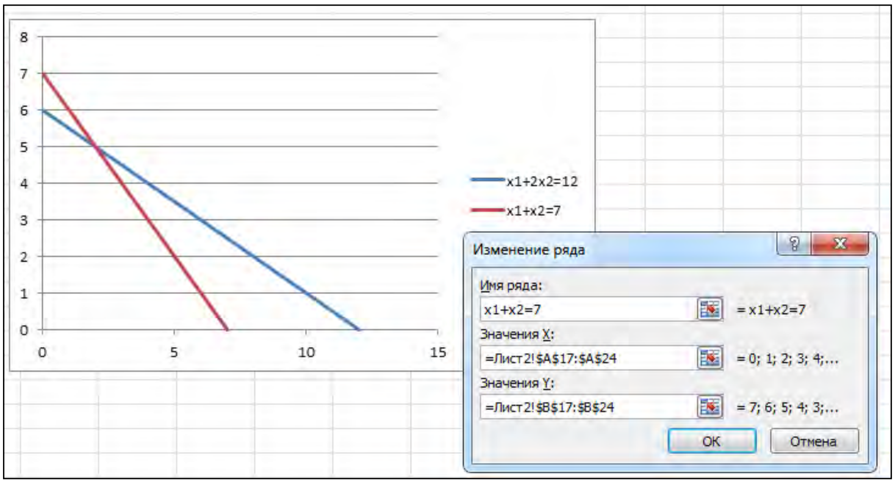


Рис. 4.2

4) Повторить предыдущий пункт для остальных уравнений, входящих в область допустимых решений, а также для градиента и линии уровня.

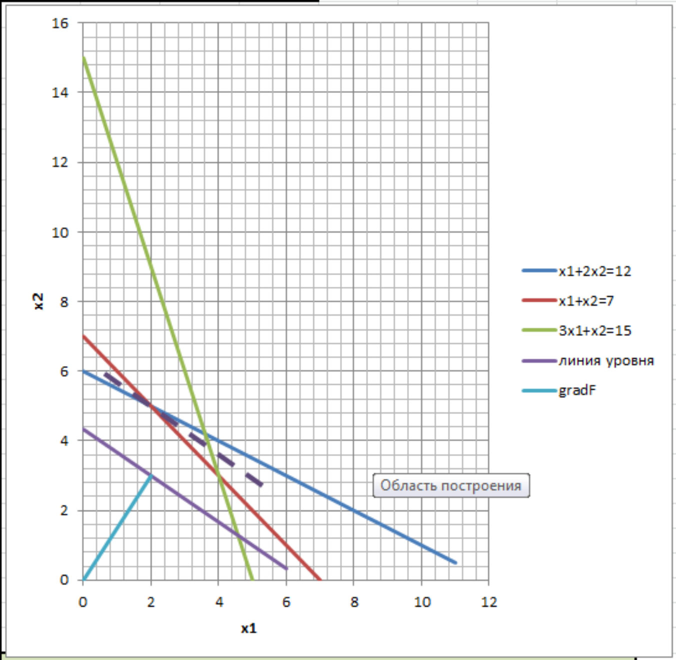
5) Итоги решения задачи приведены на рисунке 4.3.

Область допустимых решений представляет собой многоугольник с вершинами в точках: (0;0), (0;6), (2;5), (4;3), (5;0).

При перемещении линии уровня в направлении вектора $gradF$ получаем оптимальное решение в точке с координатами (2;5), причём $F_{max} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$:

Для получения максимальной прибыли равной 19 д. е. предприятие должно выпускать 2 ед. продукции П$_1$ *и 5 ед. продукции П*$_2$

Лабораторная работа № 2					
1. Решение задачи ЛП графическим методом					
Таблица исходных данных					
Вид сырья	**Запас сырья**	**Расход на ед. продукции**		**Прибыль от реализации**	
		П1	**П2**	**Д1**	**Д2**
1	7	1	1		
2	12	1	2	2	3
3	15	3	1		
Математическая модель					
x1-кол-во единиц продукции П1				x1+x2<=7	
x2-кол-во единиц продукции П2		ОДР		x1+2x2<=12	
F=2x1+3x2-целевая функция (max)				3x1+x2<=15	
gradF=(2,3)				x1>=0	x2>=0
x2=7-x1		**x2=6-0,5x1**		**x2=15-3x1**	
x1	x2	x1	x2	x1	x2
0	7	0	6	0	15
1	6	1	5,5	1	12
2	5	2	5	2	9
3	4	3	4,5	3	6
4	3	4	4	4	3
5	2	5	3,5	5	0
6	1	6	3	**линия уровня**	
7	0	7	2,5	x1	x2
gradF=(2,3);x2=(3/2)x1		8	2	0	4,333333
x1	x2	9	1,5	1	3,666667
0	0	10	1	2	3
1	1,5	11	0,5	3	2,333333
2	3	12	0	4	1,666667
				5	1
				6	0,333333



Вывод: Для получения максимальной прибыли равной 19 д.е. Предприятие должно выпускать 2 ед. продукции П1 и 5 ед. продукции П2

Рис. 4.3

4.2.2. Решение ЗЛП в Microsoft Excel симплекс-методом

Подготовим начальную симплекс таблицу по образцу:

Базис	Сб	В	2	3	0	0	0
			X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**
X3	0	7	1	1	1	0	0
X4	0	12	1	2	0	1	0
X5	0	15	3	1	0	0	1

Рис. 4.4 Начальная симплекс-таблица

В столбце $C_б$ этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце B записывают положительные компоненты начального опорного плана, в нём же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана.

Первые три строки начальной симплекс-таблицы определяются исходными данными задачи, а показатели четвёртой строки – вычисляют. В этой строке в столбце B записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце X_j – значение $\Delta_j = F_j - c_j$.

Значение F_j находится как скалярное произведение вектора $\overline{X}_j (j = \overline{1,m})$, на вектор $\overline{C_6} = (c_1, c_2, ..., c_m)$:

$$F_j = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ij} .$$

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора $\overline{B}$ на вектор $\overline{C_6}$. Вычислим его и запишем результат в ячейку D_7. Для вычисления скалярного произведения двух векторов используется функция **СУММПРОИЗВ (**массив1, [массив2], [массив3],…) (рис. 4.5).

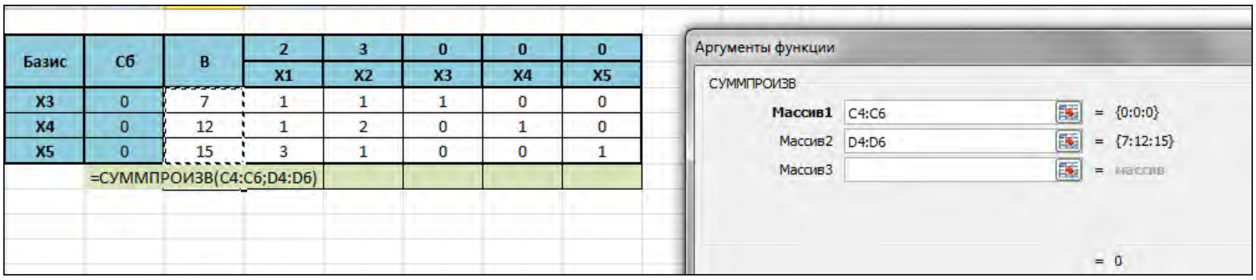


Рис. 4.5

Для вычисления оценок Δ_j используется формула $\Delta_j = C_6 \cdot c_j$.

Выделим ячейку **E7** и введём формулу:

=СУММПРОИЗВ($C$4:$C$6;E4:E6)-E2

Аналогично вычислим значения других оценок.

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5
X3	0	7	1	1	1	0	0
X4	0	12	1	2	0	1	0
X5	0	15	3	1	0	0	1
		0	-2	-3	0	0	0

Рис. 4.6

Далее исходный план нужно проверить на оптимальность. Для этого просматриваем элементы последней строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трёх случаев:

1) $\Delta_j \geq 0$ – исходный план является оптимальным;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого j и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} < 0$ – целевая функция не ограничена сверху на множестве планов;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j и для каждого такого j по крайней мере одно из чисел a_{ij} является положительным – можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится.

Определим разрешающий столбец – столбец с наибольшей по модулю отрицательной оценкой и найдем отношение элементов столбца B к положительным элементам выбранного столбца для определения разрешающей строки. Для этого выделим ячейку K4 и введём формулу:

=ЕСЛИ(F4>0;D4/F4;"–")

Скопируем формулу на диапазон K4:K6.

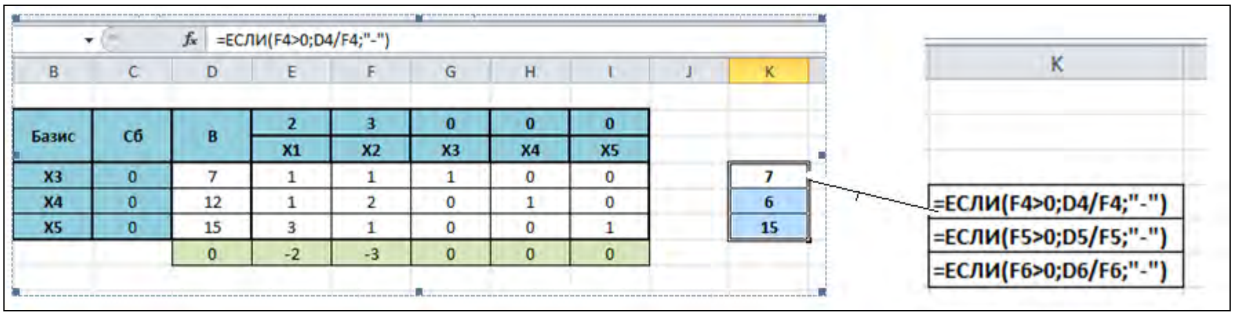


Рис. 4.7

Таким образом, разрешающий столбец – столбец X_2 и разрешающая строка – X_4.

Создадим вторую симплекс-таблицу (скопируем предыдущую и удалим все ненужное). Произведём замену в базисе вектора X_4 (разрешающий столбец) на вектор X_2 (разрешающая строка).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
3					X1	X2	X3	X4	X5
4		X3	0	7	1	1	1	0	0
5		X4	0	12	1	2	0	1	0
6		X5	0	15	3	1	0	0	1
7				0	-2	-3	0	0	0
8									
9									
10		Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
11					X1	X2	X3	X4	X5
12		X3	0						
13		X2	0						
14		X5	0						
15									

Рис. 4.8

Выделим диапазон D12:I15 и сменим формат числовых данных на дробный.

Вычислим новые элементы разрешающей строки: разделим элементы разрешающей строки на разрешающий элемент.

В ячейку D13 введём формулу

=D5/$F$5

Скопируйте формулу на диапазон E13: I13:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
3					X1	X2	X3	X4	X5
4		X3	0	7	1	1	1	0	0
5		X4	0	12	1	2	0	1	0
6		X5	0	15	3	1	0	0	1
7				0	-2	-3	0	0	0
8									
9									
10		Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
11					X1	X2	X3	X4	X5
12		X3	0						
13		X2	3	6	1/2	1	0	1/2	0
14		X5	0						
15									

Рис. 4.9

В ячейку D12 введём формулу: =D13*(-$F$4)+D4. Скопируем формулу на диапазон E12:I12. В ячейку D14 введём формулу: =D13*(-$F$6)+D6 и скопируем формулу на диапазон E15:I15. В ячейку D15 введём формулу: =D13*(-$F$6)+D6. Скопируем формулу на диапазон E15:I15.

Получим:

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5
X3	0	1	1/2	0	1	- 1/2	0
X2	3	6	1/2	1	0	1/2	0
X5	0	9	2 1/2	0	0	- 1/2	1
		18	- 1/2	0	0	1 1/2	0

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5
X3	0	=D13*(-$F$4)+D4	=E13*(-$F$4)+E4	=F13*(-$F$4)+F4	=G13*(-$F$4)+G4	=H13*(-$F$4)+H4	=I13*(-$F$4)+I4
X2	3	=D5/$F$5	=E5/$F$5	=F5/$F$5	=G5/$F$5	=H5/$F$5	=I5/$F$5
X5	0	=D13*(-$F$6)+D6	=E13*(-$F$6)+E6	=F13*(-$F$6)+F6	=G13*(-$F$6)+G6	=H13*(-$F$6)+H6	=I13*(-$F$6)+I6
		=D13*(-$F$7)+D7	=E13*(-$F$7)+E7	=F13*(-$F$7)+F7	=G13*(-$F$7)+G7	=H13*(-$F$7)+H7	=I13*(-$F$7)+I7

Рис. 4.10

Так как строка оценок содержит отрицательное число, и соответствующий столбец содержит положительные числа, то план можно улучшить.

Выбираем разрешающую строку и разрешающий столбец:

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Базис	Сб	B	2	3	0	0	0		
			X1	X2	X3	X4	X5		
X3	0	7	1	1	1	0	0		7
X4	0	12	1	2	0	1	0		6
X5	0	15	3	1	0	0	1		15
		0	-2	-3	0	0	0		
Базис	Сб	B	2	3	0	0	0		
			X1	X2	X3	X4	X5		
X3	0	1	1/2	0	1	- 1/2	0		2
X2	3	6	1/2	1	0	1/2	0		12
X5	0	9	2 1/2	0	0	- 1/2	1		3 3/5
		18	- 1/2	0	0	1 1/2	0		

Рис. 4.11

Строим новую симплекс-таблицу и заменяем вектор X_3 (разрешающая строка) на вектор X_1 (разрешающий столбец). Заполняем таблицу аналогично предыдущей итерации:

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5
X1	2	=D12/$E$12	=E12/$E$12	=F12/$E$12	=G12/$E$12	=H12/$E$12	=I12/$E$12
X2	3	=D20*(-$E$13)+D13	=E20*(-$E$13)+E13	=F20*(-$E$13)+F13	=G20*(-$E$13)+G13	=H20*(-$E$13)+H13	=I20*(-$E$13)+I13
X5	0	=D20*(-$E$14)+D14	=E20*(-$E$14)+E14	=F20*(-$E$14)+F14	=G20*(-$E$14)+G14	=H20*(-$E$14)+H14	=I20*(-$E$14)+I14
		=D20*(-$E$15)+D15	=E20*(-$E$15)+E15	=F20*(-$E$15)+F15	=G20*(-$E$15)+G15	=H20*(-$E$15)+H15	=I20*(-$E$15)+I15

Или

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0	
			X1	X2	X3	X4	X5	
X3	0	7	1	1	1	0	0	7
X4	0	12	1	2	0	1	0	6
X5	0	15	3	1	0	0	1	15
		0	-2	-3	0	0	0	

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0	
			X1	X2	X3	X4	X5	
X3	0	1	1/2	0	1	- 1/2	0	2
X2	3	6	1/2	1	0	1/2	0	12
X5	0	9	2 1/2	0	0	- 1/2	1	3 3/5
		18	- 1/2	0	0	1 1/2	0	

Базис	Сб	B	2	3	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5
X1	2	2	1	0	2	-1	0
X2	3	5	0	1	-1	1	0
X5	0	4	0	0	-5	2	1
		19	0	0	1	1	0

Так как строка оценок не содержит отрицательных значений, то полученный план оптимален и имеет вид:

$F_{\max} = 19$ при $X = (2,5,0,0,4)$.

Исключая из решения балансовые неизвестные, получим ответ:

$F_{\max} = 19$ при $X = (2,5)$.

4.2.3. Решение ЗЛП в Microsoft Excel с помощью встроенной функции Поиск решения

В табличном процессоре Microsoft Excel существует встроенная функция **Поиск решения**, с помощью которой можно решить задачу линейного программирования. Если данный модуль установлен, его можно запустить, выбрав вкладку ***Данные /Поиск решения***. На экране появится диалоговое окно ***Поиск решения*** (рис. 4.12).

Если такого пункта во вкладке ***Данные*** не оказалось, следует загрузить соответствующую программу-надстройку. Для этого нужно выбрать вкладку ***Файл–Параметры–Надстройки–Перейти*** и в диалоговом окне ***Надстройки*** установить флажок в строке ***Поиск решения***.

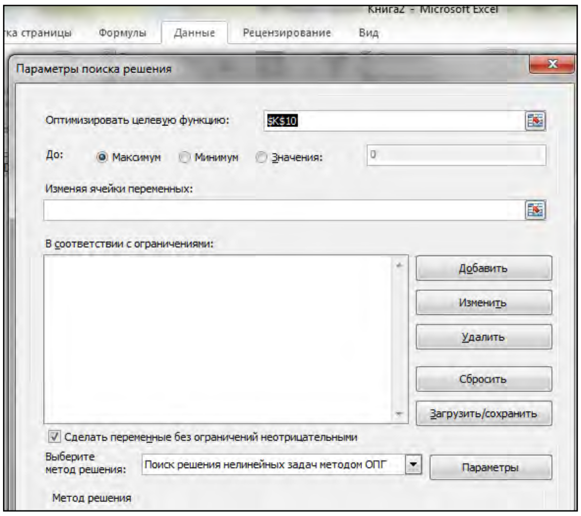


Рис. 4.12

Разберем решение ЗЛП с помощью функции **Поиск решения** на примере нашей задачи.

1. Создадим таблицу для ввода исходных данных: переменных, целевой функции, ограничений.

2. Введем начальные нулевые значения для x_1 и x_2.

3. Зададим целевую функцию в ячейке D6 и ограничения в ячейках F4, F5 и F6 (рис. 4.13).

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2	Решение ЗЛП с помощью встроенной функции Поиск решения						
3	Выпуск продукции		Прибыль - целевая функция		Ограничения		
4					=C5+C6		7
5	x1	0			=C5+2*C6		12
6	x2	0	=2*C5+3*C6		=3*C5+C6		15

Рис. 4.13

4. Выберем команду ***Данные/Поиск решения***, в открывшемся окне **Поиск решения** установим целевую ячейку D6, зададим условие отыскания максимального значения (рис. 4.14).

5. В поле ***Изменяя ячейки*** установим ссылку на ячейки C5 и C6, которые будут изменены (можно ввести адреса или имена ячеек с клавиатуры или указать диапазон ячеек на рабочем листе с помощью мыши).

6. Определим ограничения, для этого щелчком по кнопке ***Добавить*** откроем диалоговое окно **Добавление ограничения**. Введем ограничения для ячеек F4, F5, F6. Ограничения можно задать как для изменяемых ячеек, так и для целевой ячейки, а также для других ячеек, прямо или косвенно присутствующих в модели (рис. 4.14)

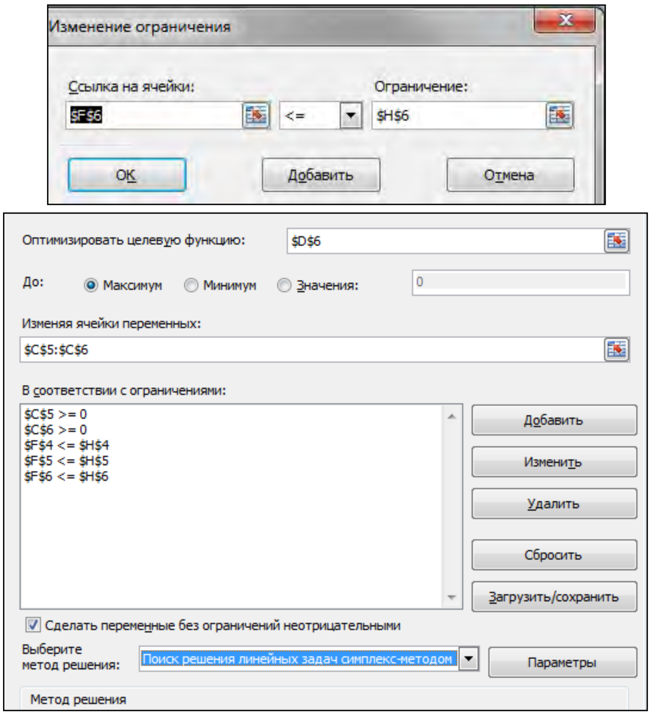


Рис. 4.14

8. После того как все параметры и ограничения заданы, запускаем поиск решения, щелкнув на кнопке ***Найти решение***. Когда поиск будет закончен, в таблицу будут внесены новые значения и на экране появится диалоговое *окно* ***Результаты поиска решения***, сообщающие о завершении операции (рис. 4.15).

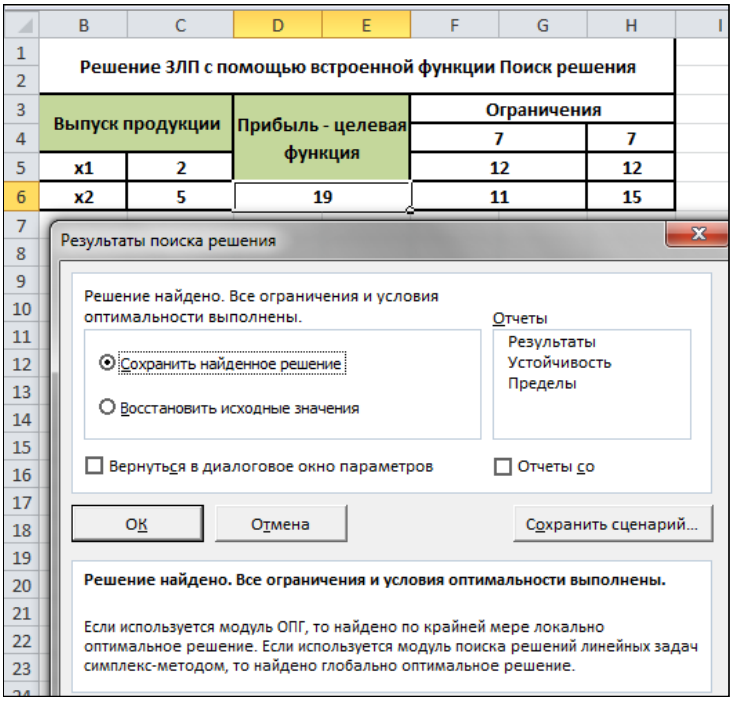


Рис. 4.15

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены. Сохраним найденное решение. В этом случае таблица будет обновлена. В случае необходимости всегда можно будет восстановить исходные данные с помощью отчета. Для выбора типа отчета достаточно выделить название нужного отчета в списке **Тип отчета** (или несколько названий, удерживая нажатой клавишу **Ctrl**). Они будут вставлены на отдельных листах в рабочую книгу перед листом с исходными данными.

Предлагаемые отчеты содержат следующую информацию:

- отчет **Результаты** содержит сведения о начальных и текущих значениях целевой ячейки и изменяемых ячеек, а также о соответствии значений заданным ограничениям;
- отчет **Устойчивость** отражает найденный результат, а также нижние и верхние предельные значения для изменяемых ячеек;
- отчет **Пределы** показывает зависимость решений от изменения формулы или ограничений.

Если планируется использовать созданную модель в дальнейшем, найденное решение можно сохранить как сценарий. Для этого в диалоговом окне ***Результаты поиска решения*** необходимо щелкнуть на кнопке ***Сохранить сценарий***.

4.3. Контрольные вопросы

1. Что означает составить математическую модель ЗЛП?
2. Из каких этапов состоит графический метод решения ЗЛП?
3. Какова геометрическая интерпретация решения системы линейных неравенств с двумя переменными?
4. Как определяется направление наискорейшего возрастания целевой функции?
5. Какое решение называется оптимальным решением ЗЛП?
6. В каком случае ЗЛП имеет множество решений?
7. При каких условиях ЗЛП может быть неразрешима?
8. Сформулируйте алгоритм симплекс-метода.

8\. Как установить модуль Поиск решения?

10\. Какие типы отчетов можно получить при решении ЗЛП с помощью встроенной функции «Поиск решения»?

4.4. Задания для самостоятельной работы

Составить математическую модель задачи. Решить **её** в табличном редакторе Microsoft Excel графическим методом, симплекс-методом и используя надстройку «Поиск решения»

Вариант 1.

Магазин планирует реализовать четыре вида товаров T_1, T_2, T_3, T_4. Известны затраты на реализацию единицы товара, оплата продавцов, ограничения на торговые площади и складские помещения, а также прибыль от реализации единицы того или иного товара.

Требуется определить плановый объем и структуру товарооборота, при котором прибыль магазина оказалась бы максимальной. Цифровые данные приведены в таблице.

Виды ресурсов	Стоимость единицы товара				Суммарный объем
	T_1	T_2	T_3	T_4	
Рабочее время продавцов (человеко-дни)	2	5	3	6	50
Торговая площадь ($м^2$)	6	2	9	8	200
Складские помещения ($м^2$)	4	8	6	5	40
Прибыль (руб.)	6	7	9	3	max

Вариант 2.

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина ($м^3$):			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-ч.)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вариант 3.

При производстве трех видов продукции используют три вида сырья. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли. Исходные данные приведены в таблице:

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
100	1	2	1
80	2	1	2
120	3	1	2
Прибыль (ден. ед.)	3	4	1

Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Вариант 4.

Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют соответственно 900, 400, и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (в кг), необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации, приведены в таблице:

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт. изделий	
	Свитера	Кофточки
Шерсть	4	2
Силон	2	1
Нитрон	1	1
Прибыль	6	5

Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Вариант 5.

В рационе животных используется два вида корма. Животные должны получать четыре вида питательных веществ. Составить рацион питания животных, обеспечивающий минимальные затраты, при исходных данных, заданных таблицей:

Необходимое количество питательного вещества	Норма (ед. массы)	Содержание питательного вещества в единице корма	
		Корм 1	Корм 2
Пит. вещ. № 1	20	1	5
Пит. вещ. № 2	24	3	2
Пит. вещ. № 3	32	2	4
Пит. вещ. № 4	2	1	0
Стоимость единицы корма (ден. ед.)		4	6

Вариант 6.

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при каждом способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов ($см^2$)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Вариант 7.

Для производства двух видов изделий *A* и *B* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч.) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч.)
	стол	шкаф	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб)	14	18	

Найти план выпуска изделий *A* и *B*, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант 8.

На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указано общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I II III	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной

Вариант 9.

При составлении суточного рациона кормления скота используют сено и силос. Рацион должен обладать определенной питательностью и содержать белка не менее 1 кг, кальция не менее 100 г и фосфора не менее 80 г. При этом количество питательного рациона должно быть не менее 60 кг. Содержание питательных компонентов в 1 кг сена и силоса приведено в таблице. В ней указана также стоимость единицы того или иного корма. Требуется определить оптимальный суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальную стоимость корма.

Название ингредиента	Норма (г)	Содержание ингредиента в 1 кг корма (г/кг)	
		Сено	Силос
Белок Кальций Фосфор	1000 100 80	40 1,25 2	10 2,5 1
Стоимость единицы корма (ден. ед.)		12	8

Вариант 10.

На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий шт. в сутки		Затраты на работу линий ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

Вариант 11.

При подкормке посева нужно внести на 1 га почвы не менее 8 ед. химического вещества А, 21 ед. – вещества Б, 16 ед. – вещества В. Сельскохозяйственное предприятие закупает комбинированные удобрения двух видов (I и II). В таблице указаны содержание химических веществ и цена на единицу массы каждого вида удобрений.

Химическое вещество	Содержание вещества в единице массы удобрения	
	I	II
А	1	5
Б	12	3
В	4	4
Цена	5	2

Минимизировать расходы по закупке необходимого количества удобрений.

Вариант 12.

Кондитерская фабрика для производства трёх видов карамели А, В и С использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т. карамели данного вида приведены в таблице.

В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1 т. карамели данного вида

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	–	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции (руб.)	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от её реализации.

Вариант 13

При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества А, не менее 50 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 9 денежных единиц, корма II вида – 12 денежных единиц и корма III вида – 10 денежных единиц.

ТЕМА 5.
ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Краткие теоретические сведения

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу тоже линейного программирования, которая получается из исходной задачи путем определенных преобразований и называется двойственной по отношению к данной исходной задаче.

Т.е. ЗЛП на максимум можно поставить в соответствие ЗЛП на минимум. Эти задачи называются симметричными или взаимно-двойственными.

Рассмотрим понятие двойственных задач на примере следующей задачи.

Задача 5.1. Предприятие, специализирующееся на производстве трикотажного полотна двух видов, использует для своего производства четыре вида сырья (шерстяную, хлопковую, вискозную, и акриловую нити), запасы которого на планируемый период составляют соответственно 80, 80, 260 и 410 бобин. В приведенной ниже таблице даны технологические коэффициенты, т.е. расход каждого вида сырья на производство одного метра каждого вида трикотажа.

Таблица 5.1

Виды сырья	Технологические коэффициенты		Запасы сырья
	I вид трикотажного полотна	II вид трикотажного полотна	
Шерсть	–	1	80
Хлопок	1	–	80
Вискоза	1	3	260
Акрил	4	3	410

Прибыль от реализации 1 м трикотажного полотна первого вида составляет 2 д. е., а трикотажного полотна второго вида 3 д. е. Необходимо определить оптимальный план выпуска трикотажного полотна первого и второго вида, чтобы обеспечить максимальную прибыль от их реализации.

Экономико-математическая модель задачи: найти максимум целевой функции (функции прибыли):

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при выполнении системы ограничений:

$$\begin{cases} x_2 \le 80 \\ x_1 \le 80 \\ x_1 + 3x_2 \le 260 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 410 \end{cases}$$

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы предприятия и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы y_1, y_2, y_3, y_4.

Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы (целевая функция Z) в количествах 80, 80, 260 и 410 д. е. по ценам y_1, y_2, y_3, y_4 были минимальны, т.е.

$$Z = 80y_1 + 80y_2 + 260y_3 + 410y_4 \to \min$$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию.

На изготовление 1 м трикотажного полотна I вида расходуется 0 д. е. первого ресурса (шерсти), 1 д. е. второго ресурса (хлопка), 1 д. е. третьего ресурса (вискозы) и 4 д. е. четвертого ресурса (акрила). Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении 1 м трикотажного полотна I вида по ценам y_1, y_2, y_3, y_4, должны быть не менее цены 1 м трикотажного полотна I вида (2 д. е.), т.е. $y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 2$.

Аналогично составим ограничение в виде неравенства по второму виду продукции (трикотажному полотну II вида):

$y_1 + 3y_3 + 3y_4 \geq 3$.

Таким образом, получили двойственную задачу относительно исходной (таблица 5.2).

Таблица 5.2

Исходная задача	Двойственная задача
$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при ограничениях $\begin{cases} x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 80 \\ x_1 + 3x_2 \leq 260 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 410 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$Z = 80y_1 + 80y_2 + 260y_3 + 410y_4 \to \min$ при ограничениях $\begin{cases} y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 2 \\ y_1 + 3y_3 + 3y_4 \geq 3 \end{cases}$ $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$
Матрица коэффициентов при переменных в системе ограничений $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	Матрица коэффициентов при переменных в системе ограничений $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

При этом цены ресурсов y_1, y_2, y_3, y_4 являются ***условными***, в отличие от «внешних цен» на продукцию, известных, как правило, до начала производства.

Цены ресурсов y_1, y_2, y_3, y_4 так же называются «внутренними» (или ***оценками*** ресурсов), т.к. они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи.

Исходную задачу можно рассматривать как двойственную по отношению к своей двойственной задаче, т.е. обе задачи являются взаимно двойственными.

Взаимно двойственные задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче определяется максимум целевой функции, в другой – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида "≤", а в задаче минимизации – все неравенства вида "≥".

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Алгоритм составления двойственной задачи

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному виду: если в исходной задаче ищут максимум целевой функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду "≤", а если минимум – к виду "≥". Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на (–1).

2. Составить расширенную матрицу системы ограничений исходной задачи – матрицу A, в которую включить строку коэффициентов при переменных в целевой функции.

3. Найти матрицу A_1, транспонированную к матрице A.

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A_1 и условия неотрицательности переменных.

Двойственная задача может быть решена симплекс-методом, а так же с помощью функции ***Поиск решения*** в табличном редакторе Microsoft Excel.

Если же исходная задача уже решена симплекс-методом, то решение двойственной задачи может быть найдено по формуле:

$$Y = C \cdot A^{-1}, \qquad (4.1)$$

где C – матрица-строка коэффициентов при базисных переменных целевой функции входящих в оптимальный базис исходной задачи (в первоначальном виде); A^{-1} – обратная матрица для матрицы A, являющейся матрицей коэффициентов при переменных, входящих в оптимальный базис (взятых из первоначальной системы ограничений исходной задачи).

5.2. Практическая часть

Вернёмся к задаче 5.1. Решим прямую задачу симплекс-методом.

Приведем ЗЛП к каноническому виду.

Для этого приведем систему неравенств к системе уравнений путем введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 80 \\ x_1 + x_4 = 80 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 260 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 = 410 \end{cases}$$

Определение первоначального допустимого базисного решения.

Т.к. каждая дополнительная переменная входит в уравнение с тем же знаком, что и свободный член, стоящий в правой части уравнения, то в качестве базисных переменных можно взять дополнительные x_3, x_4, x_5, x_6 и при этом получим допустимое базисное решение.

Замечание: *Базисные переменные* – это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и при этом имеют коэффициент, равный единице.

Полагая, что свободные переменные x_1, x_2 равны 0, получим первое базисное решение: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 & 80 & 260 & 410 \end{pmatrix}$. Данное базисное решение является допустимым, т.к. оно неотрицательно.

Составление симплекс-таблицы.

Получено первоначальное допустимое базисное решение, целевая функция содержит только свободные переменные, переходим к составлению первой симплекс-таблицы (таблица 5.3):

Таблица 5.3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	Оценочное отношение
x_3	0	1	1	1	0	0	80	80
x_4	1	0	0	1	0	0	80	
x_5	1	3	0	0	1	0	260	$86\frac{2}{3}$
x_6	4	3	0	0	0	1	410	$136\frac{2}{3}$
F	–2	$\underline{-3}$	0	0	0	0	0	

Переход к основному алгоритму симплекс-метода.

I шаг.

1. Проверка критерия оптимальности.

Полученное на I шаге базисное решение (опорный план) не является оптимальным, т.к. в индексной строке есть отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве разрешающего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, т.к. ей соответствует наибольший по модулю отрицательный коэффициент (–3).

3. **Определение новой свободной переменной.**

Вычислим оценочные отношения для строк соответствующих базисным переменным x_3, x_5, x_6 как частное от деления b_i / a_{i2}: (т.к. эти строки содержат положительные коэффициенты в разрешающем столбце). Выберем из полученных значений наименьшее:

$$\min\left\{\frac{80}{1}, \frac{260}{3}, \frac{410}{3}\right\} = \min\left\{80, 86\frac{2}{3}, 136\frac{2}{3}\right\} = 80$$

Следовательно, первая строка (соответствующая базисной переменной x_3) является разрешающей. Разрешающий элемент – 1, который находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

В столбце базисных переменных записываем новый базис: вместо базисной переменной x_3 – переменную x_2.

В столбцах, соответствующих базисным переменным проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» базисной переменной; 0 – против «чужой» базисной переменной; 0 – в последней индексной строке для всех базисных переменных.

Все остальные элементы новой симплекс-таблицы (включая элементы индексной строки) находим по правилу «прямоугольника».

После преобразований получаем новую таблицу (таблица 5.4).

Таблица 5.4

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Оценочное отношение
x_2	0	1	1	0	0	0	80	80
x_4	1	0	0	1	0	0	80	
x_5	1	0	–3	0	1	0	20	$86\frac{2}{3}$
x_6	4	0	–3	0	0	1	170	$136\frac{2}{3}$
F	–2	0	3	0	0	0	240	

Базисное решение: $X_2 = (0 \quad 80 \quad 0 \quad 80 \quad 20 \quad 170)$. $\quad F(X_2) = 240$

II шаг.

1. Проверка критерия оптимальности.

Полученное на II шаге базисное решение (опорный план) не является оптимальным, т.к. в индексной строке есть отрицательный коэффициент (–2).

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве разрешающего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, т.к. ей соответствует отрицательный коэффициент (–2).

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим оценочные отношения для строк соответствующих базисным переменным x_4, x_5, x_6 как частное от деления b_i / a_{i1} (т.к. эти строки содержат положительные коэффициенты в разрешающем столбце). Выберем из полученных значений наименьшее:

$$\min\left\{\frac{80}{1}, \frac{20}{1}, \frac{170}{4}\right\} = \min\{80, 20, 42.5\} = 20$$

Следовательно, третья строка (соответствующая базисной переменной x_5) является разрешающей. Разрешающий элемент 1, который находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

В столбце базисных переменных записываем новый базис.

Разрешающий элемент – 1. В столбцах, соответствующих базисным переменным проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» базисной переменной; 0 – против «чужой» базисной переменной; 0 – в последней индексной строке для всех базисных переменных. Все остальные элементы новой симплекс-таблицы (включая элементы индексной строки) находим по правилу «прямоугольника».

После преобразований получаем новую таблицу (таблица 5.5).

Таблица 5.5

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	1	1	0	0	0	80
x_4	0	0	3	1	–1	0	60
x_1	1	0	–3	0	1	0	20
x_6	0	0	9	0	–4	1	90
F	0	0	–3	0	2	0	280

Базисное решение $X_3 = (20 \quad 80 \quad 0 \quad 60 \quad 0 \quad 90)$, $F(X_3) = 280$

III шаг.

1. Проверка критерия оптимальности.

Полученное на II шаге базисное решение (опорный план) не является оптимальным, т.к. в индексной строке есть отрицательный коэффициент (–3).

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве разрешающего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, т.к. ей соответствует отрицательный коэффициент (–3).

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим оценочные отношения для строк соответствующих базисным переменным x_2, x_4, x_6 как частное от деления: b_i / a_{i3} (т.к. эти строки содержат положительные коэффициенты в разрешающем столбце). Выберем из полученных значений наименьшее:

$$\min\left\{\frac{80}{1}, \frac{60}{3}, \frac{90}{9}\right\} = \min\{80, 20, 10\} = 10$$

Следовательно, четвертая строка (соответствующая базисной переменной x_6) является разрешающей. Разрешающий элемент 9, который находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

В столбце базисных переменных записываем новый базис.

Каждый элемент разрешающей строки (которая в новой симплекс таблице будет уже соответствовать переменной x_3) делим на разрешающий элемент (РЭ=9).

Таблица 5.6

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Оценочное отношение
x_2	0	1	1	0	0	0	80	80
x_4	0	0	3	1	–1	0	60	20
x_1	1	0	–3	0	1	0	20	
x_6	0	0	$\underline{1}$	0	–4/9	1/9	10	10
F	0	0	–3	0	2	0	280	

На месте разрешающего элемента получаем 1. В столбцах, соответствующих базисным переменным проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» базисной переменной; 0 – против «чужой» базисной переменной; 0 – в последней индексной строке для всех базисных переменных.

Все остальные элементы новой симплекс-таблицы (включая элементы индексной строки) находим по правилу «прямоугольника»

После преобразований получаем новую таблицу.

Таблица 5.7

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	1	0	0	4/9	–1/9	70
x_4	0	0	0	1	1/3	–1/3	30
x_1	1	0	0	0	–1/3	1/3	50
x_3	0	0	1	0	–4/9	1/9	10
F	0	0	0	0	2/3	1/3	310

Базисное решение $X_4 = (50 \quad 70 \quad 10 \quad 30 \quad 0 \quad 0)$

Полученное базисное решение (опорный план) является оптимальным, т.к. в индексной строке нет отрицательных коэффициентов.

Таким образом, оптимальным будет решение:

$$\begin{cases} x_1 = 50 \\ x_2 = 70 \\ x_3 = 10 \\ x_4 = 30 \end{cases}$$

при котором $F_{max} = 2 \cdot 50 + 3 \cdot 70 = 310$. Т.е. для получения максимальной прибыли от реализации трикотажного полотна в размере 310 д. е. предприятие должно выпустить за планируемый период соответственно 50 и 70 метров трикотажного полотна первого и второго вида.

Рассмотрим последний шаг решения прямой задачи. Составим матрицу A из коэффициентов при переменных, входящих в оптимальный базис (взятых из первоначальной системы ограничений исходной задачи)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 80 \\ x_1 + x_4 = 80 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 260 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 = 410 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_4 & x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} в табличном редакторе Microsoft Excel с помощью встроенной функции МОБР().

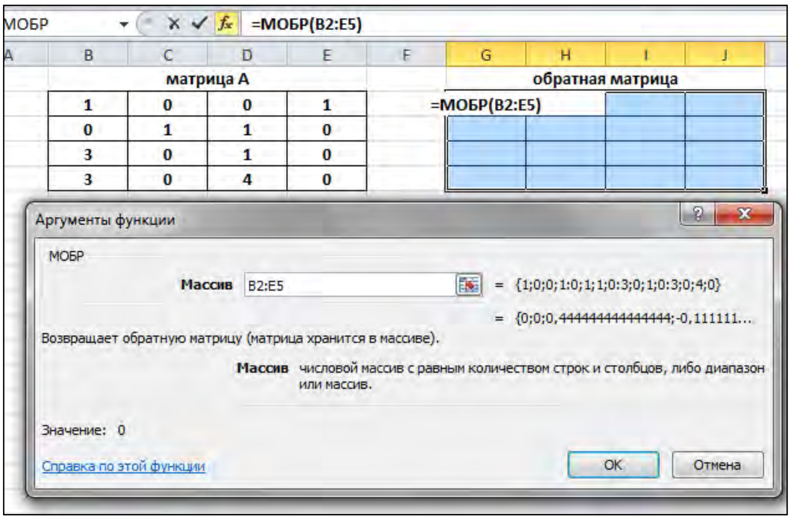


Рис. 5.1

Для этого необходимо:
1) Выделить область для вывода обратной матрицы;
2) Вызвать функцию =МОБР() (рис. 5.1);
3) После выделения диапазона исходных данных одновременно нажать комбинацию клавиш CTRL-SHIFT-ENTER.

В результате получим (рис. 5.2):

B	C	D	E	F	G	H	I	J
матрица A					обратная матрица			
1	0	0	1		0	0	4/9	- 1/9
0	1	1	0		0	1	1/3	- 1/3
3	0	1	0		0	0	- 1/3	1/3
3	0	4	0		1	0	- 4/9	1/9

Рис. 5.2

То есть:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & -4/9 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$Y = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Или, применяя встроенную функцию МУМНОЖ (рис. 5.3):

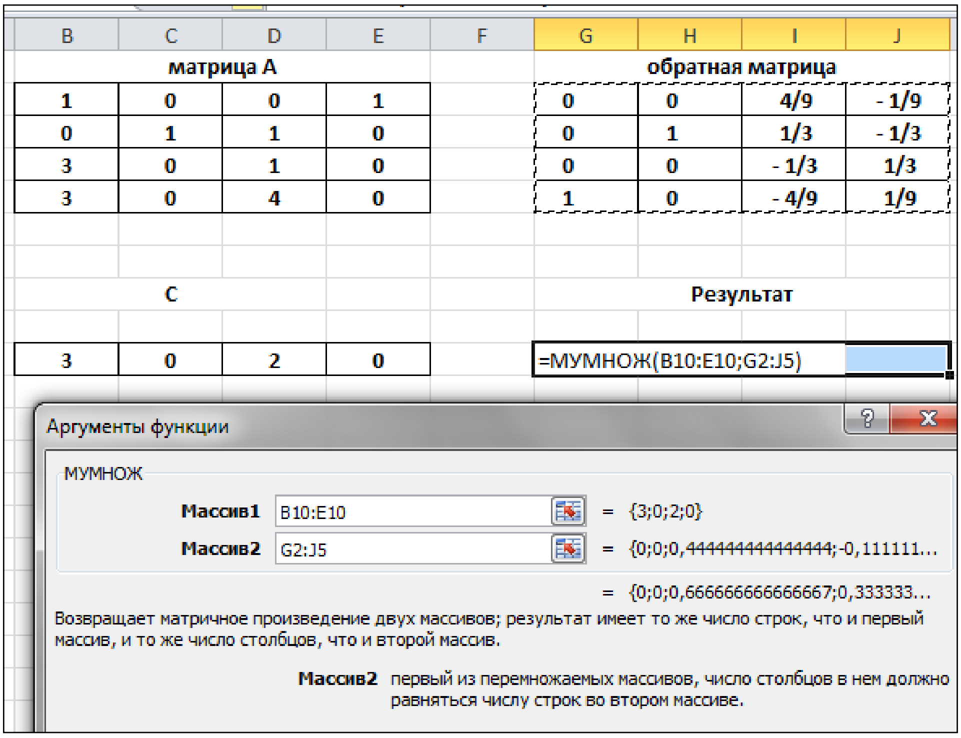


Рис. 5.3 (а)

матрица A					обратная матрица			
1	0	0	1		0	0	4/9	- 1/9
0	1	1	0		0	1	1/3	- 1/3
3	0	1	0		0	0	- 1/3	1/3
3	0	4	0		1	0	- 4/9	1/9
	C				Результат			
3	0	2	0		0	0	2/3	1/3

Рис. 5.3 (б)

Т.е. оптимальный план двойственной задачи равен:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2/3 \\ y_4 = 1/3 \end{cases}$$

$$Z(Y) = 80 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 260 \cdot 2/3 + 410 \cdot 1/3 = 310 .$$

5.3. Контрольные вопросы

1. Каковы свойства взаимно двойственных задач?
2. Каков алгоритм составления математической модели двойственной задачи?

3. Как найти решение двойственной задачи, если исходная (прямая задача) уже решена симплекс-методом?

4. В каком виде должна быть записана модель ЗЛП для решения симплекс-методом?

5.4. Задания для самостоятельной работы

1. Составить математическую модель двойственной ЗЛП. Из решения прямой задачи получить решение двойственной. Расчеты выполнить на листе Microsoft Excel, используя функции МОБР(), МУМНОЖ(). Варианты взять из занятия 4.

2. Составить двойственную задачу к следующей ЗЛП:

$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,3}$$

Решив одну из них, найти оптимальное решение другой. Провести анализ полученных результатов.

ТЕМА 6. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

6.1. Краткие теоретические сведения. Анализ экономико-математической модели двойственной задачи.

Рассмотрим симплексный алгоритм, который основан на соотношениях между прямой и двойственной задачами. Этот алгоритм эффективно решает определенный класс задач линейного программирования.

В двойственном симплекс-методе решение задачи линейного программирования начинается с недопустимого, но лучшего, чем оптимальное решения. Последовательные итерации этого метода приближают решение к области допустимости без нарушения оптимальности промежуточных решений. Когда будет достигнута область допустимых решений, процесс вычислений заканчивается, так как последнее решение будет оптимальным.

В двойственном симплекс-методе начальная симплекс-таблица обязательно должна иметь в базисном решении недопустимую (т.е. отрицательную) переменную. Для реализации двойственного симплекс-метода разработаны следующие два условия, выполнение которых гарантирует оптимальность последовательных промежуточных решений и приближение их к области допустимых решений.

Двойственное условие допустимости. В качестве исключаемой переменной x_r выбирается базисная переменная, имеющая наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение. Если таких переменных несколько, то выбор произволен. Если все базисные переменные неотрицательные, процесс вычислений заканчивается.

Двойственное условие оптимальности. Вводимая в базис переменная определяется как переменная, на которой достигается следующий минимум:

$$\min_{\text{небазисные } x_j} \left\{ \left| \frac{F_j}{\alpha_{rj}} \right|, \alpha_{rj} < 0 \right\}$$

где α_{rj} – коэффициент из симплекс-таблицы, расположенный на пересечении ведущей строки (соответствующей исключаемой переменной x_r) и столбца, соответствующего переменной x_j. При наличии нескольких альтернативных переменных, выбор делается произвольно.

6.2. Практическая часть

Задача 6.1.

Дана задача линейного программирования:
Минимизировать $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$
При ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Начальная симплекс-таблица имеет вид:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	–3	–2	1	0	0	–3
x_4	–4	–3	0	1	0	–6
x_5	1	1	0	0	1	3
F	–3	–2	0	0	0	0

Среди дополнительных переменных этой задачи x_3 и x_4 являются избыточными, а x_5 – остаточной. Умножим каждое равенство, соответствующее избыточным дополнительным переменным, на –1; в результате правые части этих равенств непосредственно указывают на базисные переменные, которые являются недопустимыми ($x_3 = -3$, $x_4 = -6$, $x_5 = 3$). Этот подход всегда используется при реализации двойственного симплекс-метода.

Поскольку элементы в индексной строке отрицательны для всех $j = 1,...,5$, начальное базисное решение является оптимальным (но не допустимым). Таким образом, приведенная таблица удовлетворяет требованиям начальной таблицы двойственного симплекс-метода, а именно – оптимальности и недопустимости.

Двойственное условие допустимости указывает на переменную $x_4 = -6$ как на исключаемую из базиса. Теперь применим двойственное условие оптимальности для определения переменной, вводимой в базис. Для этого используем следующую таблицу.

Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
F-строка	–3	–2	0	0	0
x_4-строка, α_{4i}	–4	–3	0	1	0
Отношение $\left\lvert \dfrac{F_j}{\alpha_{4j}} \right\rvert$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	–	–	–

Приведенные отношения показывают, что вводимой в базис переменной будет x_2.

Следующая таблица получена с помощью известных операций над строками, применяемых в прямом симплекс-методе.

Базис	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$x_3 \rightarrow$	–5/3	0	1	–1/3	0	–1
x_2	4/3	1	0	–1/3	0	2
x_5	–1/3	0	0	1/3	1	1
F-строка	–1/3	0	0	–2/3	0	–4
Отношение	1/5	–	–	2	–	

Последняя таблица показывает, что из базиса исключается переменная x_3 и вводится x_1. В результате получаем следующую симплекс-таблицу.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	–3/5	1/5	0	3/5
x_2	0	1	4/5	–3/5	0	6/5
x_5	0	0	–1/5	2/5	1	6/5
F-строка	0	0	–1/5	–3/5	0	21/5

Решение, представленное в последней таблице, допустимо (и оптимально), поэтому вычисления заканчиваются. Это решение имеет вид $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$, $F = 21/5$.

На рис. 6.1 показана последовательность шагов двойственного симплекс-метода при решении этой задачи.

Алгоритм начинается в крайней точке **A** (которой соответствует недопустимое, но «лучше, чем оптимальное» решение), затем он переходит к точке **B** (которой также соответствует недопустимое, но «лучше, чем оптимальное» решение) и заканчивается в точке **C**, уже принадлежащей области допустимых решений.

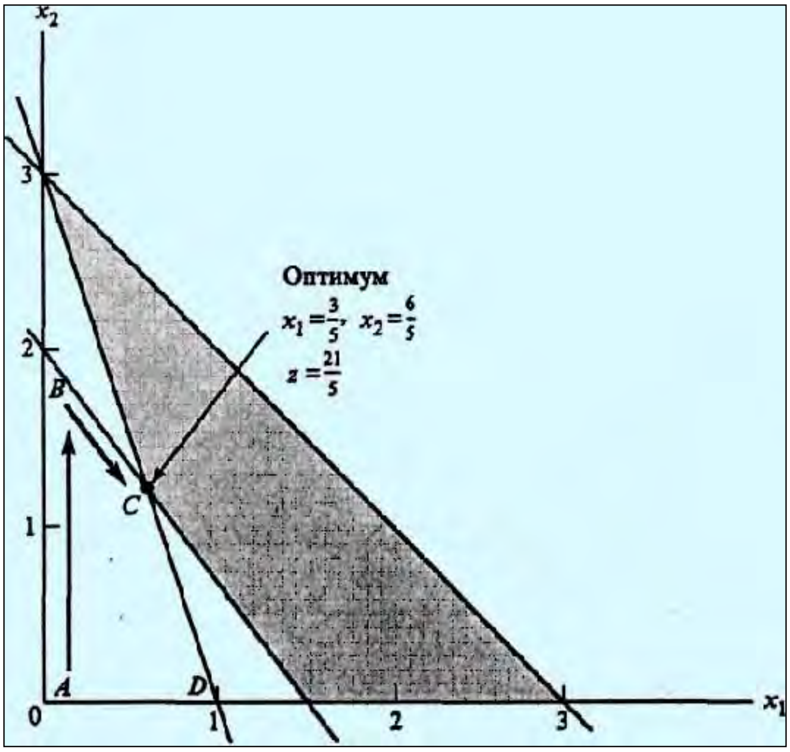


Рис. 6.1

Задача 6.2.

На предприятии имеется возможность выпуска трех видов продукции $П_j$, $j=\overline{1,3}$. При её изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами B_1, B_2, B_3. Расход ресурса i-го вида на единицу продукции j-го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции i-го вида равна C_i.

Требуется:

1. Найти план продукции, обеспечивающий предприятию максимальный доход.
2. Сформулировать в экономических терминах двойственную задачу, составить математическую модель двойственной задачи и решить её.
3. Используя решение исходной и двойственных задач, а также соответствие между двойственными переменными, провести анализ плана, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он имеется.

$$B_1 = 200, B_2 = 220, B_3 = 480, C_1 = 25, C_2 = 28, C_3 = 27, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть x_j – это количество единиц продукции соответственно $П_j$, планируемой к выпуску, а F – величина прибыли от реализации этой продукции.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Учитывая значение прибыли от единицы продукции, запишем суммарную величину прибыли – целевую функцию – в следующем виде.

$$F = 25x_1 + 28x_2 + 27x_3 \to \max$$

Переменные x_j должны удовлетворять ограничениям, накладываемым на расход ресурсов, имеющихся в распоряжении предприятия:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 200 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 220 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 480 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные должны быть неотрицательными:

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,3}$$

Решаем задачу в MS Excel. Составим следующую таблицу:

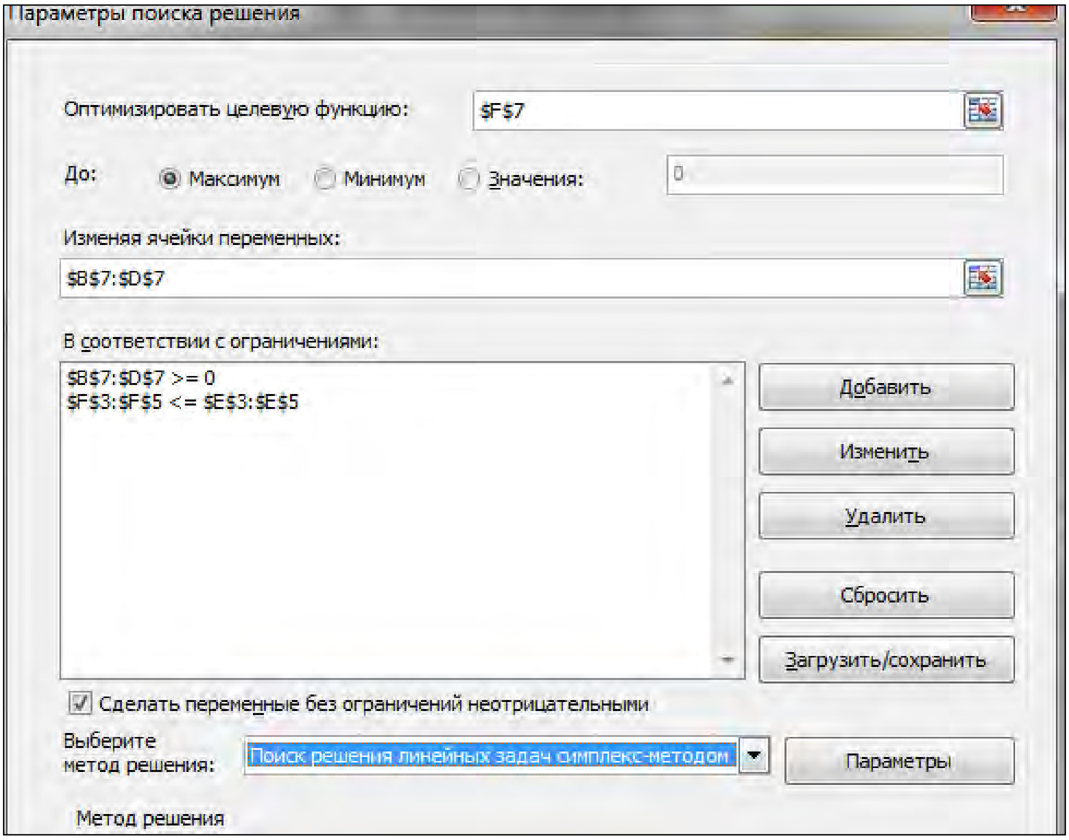
	A	B	C	D	E	F	G
1	Ресурс	Продукция			Запас ресурса	Расход ресурса	Остаток от производства
2		П1	П2	П3			
3	Р1	2	3	6	200	0	200
4	Р2	5	4	6	220	0	220
5	Р3	5	5	2	480	0	480
6	Доходность	25	28	27			
7	План производства	0	0	0	Прибыль	0	

Формулы использовали следующие:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ресурс	Продукция			Запас ресурса	Расход ресурса	Остаток от производства
2		П1	П2	П3			
3	Р1	2	3	6	200	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$7:$D$7)	=E3-F3
4	Р2	5	4	6	220	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;$B$7:$D$7)	=E4-F4
5	Р3	5	5	2	480	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$7:$D$7)	=E5-F5
6	Доходность	25	28	27			
7	План производства	0	0	0	Прибыль	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;B7:D7)	

Выполняем последовательность команд: Данные – Поиск решения.

Поля в появившемся окне заполняем следующим образом:



Нажимаем кнопку «**Найти решение**», получаем результат:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ресурс	Продукция			Запас	Расход	Остаток от
2		П1	П2	П3	ресурса	ресурса	производства
3	Р1	2	3	6	200	165	35
4	Р2	5	4	6	220	220	0
5	Р3	5	5	2	480	275	205
6	Доходность	25	28	27			
7	План производства	0	55	0	Прибыль	1540	
8							

Т.о., по оптимальному плану следует изготовить 55 ед. продукции второго вида, продукцию первого и третьего вида – не выпускать. Останутся неиспользованными 35 ед. первого ресурса и 205 ед. третьего ресурса. Прибыль при этом будет максимальна и составит 1540 ден. ед.

Составим экономико-математическую модель двойственной задачи.

Пусть y_i – цена единицы ресурса P_i, Z – суммарная стоимость ресурсов. Требуется минимизировать затраты покупающего ресурсы предприятия, при этом нашему предприятию продажа должна быть менее выгодна, чем производство продукции.

Двойственная задача:

$$Z = 200y_1 + 220y_2 + 480y_3 \to \min$$

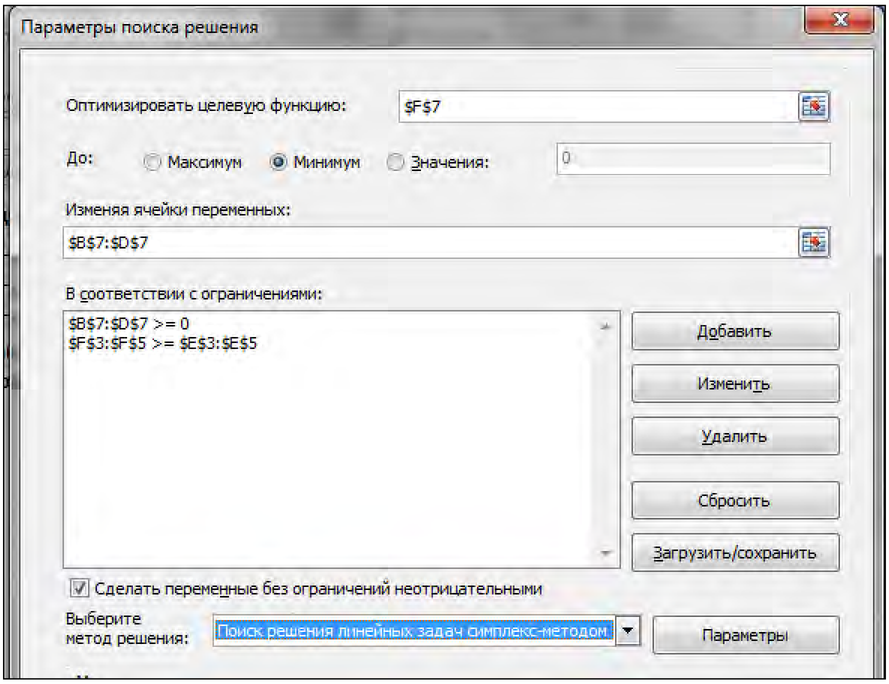
$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 25 \\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 28 \\ 6y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 27 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$$

Решаем задачу в MS Excel. Первоначальная таблица:

F11 f_x

	A	B	C	D	E	F
1	Продукция	Ресурсы			Доходность	Себестоимость
2		Р1	Р2	Р3		
3	П1	2	5	5	25	0
4	П2	3	4	5	28	0
5	П3	6	6	2	27	0
6	Запас	200	220	480	Целевая	
7	План расхода	0	0	0	ячейка	0
8						



Результаты:

F7 f_x =СУММПРОИЗВ(B6:D6;B7:D7)

	A	B	C	D	E	F
1	Продукция	Ресурсы			Доходность	Себестоимость
2		Р1	Р2	Р3		
3	П1	2	5	5	25	35
4	П2	3	4	5	28	28
5	П3	6	6	2	27	42
6	Запас	200	220	480	Целевая	
7	План расхода	0	7	0	ячейка	1540
8						

Соответствие между переменными:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3

Запишем оптимальный план двойственной задачи:

$$Y^* = (0 \quad 7 \quad 0), \quad Z^*_{\min} = 1540 .$$

Так как $y_2^* > 0$, то второй ресурс дефицитен, первый и третий ресурсы являются избыточными для них $y_1^* = y_3^* = 0$. При увеличении использования второго ресурса на единицу прибыль увеличиться на 7 денежных ед., первого и третьего – прибыль не изменится.

6.3. Контрольные вопросы

1. Каков алгоритм двойственного симплекс-метода?
2. Как выглядит двойственное условие допустимости?
3. Как выглядит двойственное условие оптимальности?
4. Какова экономико-математическая модель двойственной задачи?
5. Какова экономическая интерпретация основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач?
6. Как определить границы изменения ресурсов, в пределах которых сохраняется устойчивость двойственных оценок?

6.4. Задания для самостоятельной работы.

Задача 1.

Решить задачу, используя алгоритм двойственного симплекс-метода.

1. $F = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$	2. $F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$
3. $F = 3x_1 + 4x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,2}$	4. $F = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 8 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$
5. $F = 2x_1 + 3x_2 + 5/2\,x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$	6. $F = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$
7. $F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}$	8. $F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}$
9. $F = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$	10. $F = -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 15 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 \ge 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6 \end{cases}$ $x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3}$

Задача 2.

На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции $П_j\,(j=\overline{1,n})$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2 и P_3. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами B_1, B_2 и B_3. Расход ресурса i-го $(i=\overline{1,3})$ вида на единицу продукции j-го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции j-го вида равна c_j ден. ед.

Требуется:

1. Найти план продукции, обеспечивающий предприятию максимальный доход.
2. Сформулировать в экономических терминах двойственную задачу, составить математическую модель двойственной задачи и решить её.
3. Используя решение исходной и двойственных задач, а также соответствие между двойственными переменными, провести анализ плана, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он имеется.

№ варианта	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**A**
1	97	81	53	14	21	20	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
2	59	64	74	23	18	18	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
3	91	98	63	11	18	12	$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
4	57	58	57	13	19	20	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
5	53	97	97	28	11	18	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

6	58	95	68	17	29	21	$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
7	63	72	86	27	20	20	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}$
8	70	96	80	18	28	21	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 9 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
9	58	66	57	14	21	17	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
10	80	89	73	23	24	27	$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
11	300	190	180	15	20	10	$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 12 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

ТЕМА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

7.1. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим **одноразовую** реализацию игры. В этом случае результат игры однозначно определяется после двух ходов игроков: I игрок выбирает i-ю стратегию, II игрок – j-ю стратегию, причем выбор стратегий производится при отсутствии информации о выборе второго игрока. Результат игры характеризуется скалярной величиной a_{ij}, интерпретируемой как плата первому игроку вторым, если $a_{ij} > 0$ (если $a_{ij} < 0$, то I игрок платит II игроку сумму $|a_{ij}|$) Стратегии при одноразовой реализации игры называются **чистыми**.

Итак, игра задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (7.1)$$

Строки матрицы (7.1) соответствуют стратегиям i игрока I, столбцы – стратегиям j игрока II. Матрица (7.1) называется **матрицей игры** или **платежной матрицей**. Элемент a_{ij} матрицы (7.1) есть выигрыш игрока I, если он выбрал стратегию i, а игрок II выбрал стратегию j. Если игрок I выбрал стратегию i, то в наихудшем случае он получит выигрыш, равный $\min_{i} a_{ij}$. Поэтому игрок I должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш α.

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij} = a_{i_1 j} \qquad (7.2)$$

Величина α, определяемая формулой (7.2), называется **нижней ценой** игры, а стратегия i_1, обеспечивающая получение нижней цены игры, называется **максиминной**.

Игрок при выборе некоторой стратегии j исходит из того, чтобы его проигрыш не превосходил максимального из значений j-го столбца матрицы (8.1), т.е. был меньше или равен $\max_{i} a_{ij}$. Игрок II будет стремиться выбрать такую стратегию j_2, при которой его максимальный проигрыш β был бы минимален, т.е. был бы равен:

$$\beta = \min_{i} a_{ij} \max_{j} = a_{i_1 j_2} \qquad (7.3)$$

Величина β, определяемая формулой (7.3), называется **верхней ценой** игры, а соответствующая верхней цене стратегия j_2 называется **минимаксной**.

Всегда имеет место соотношение $\alpha \geq \beta$. При разумных действиях игроков фактический выигрыш игрока I заключен между величинами α и β.

Если выражения (7.2) и (7.3) равны между собой, т.е.

$$\alpha = \beta = \nu, \tag{7.4}$$

то величина ν, определяемая выражением (7.4), называется **значением (ценой) игры**. Цена игры ν равна элементу матрицы $a_{i_0 j_0}$, который минимален в строке i_0 и одновременно максимален в столбце j_0. Элемент $a_{i_0 j_0}$ называют **седловым элементом**, пара чистых стратегий (i_0, j_0) – **седловой точкой**, а сама игра – **игрой с седловой точкой**. Седловая точка (i_0, j_0) определяет оптимальные стратегии игроков, являющие **решением** игры. Итак, если матрица игры имеет седловой элемент, то оптимальное решение игры определяется этим седловым элементом.

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как игра.

Для I игрока задача записывается в виде:

$$F(\bar{x}) = V \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \geq V, \quad j = \overline{1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

Задачу линейного программирования можно упростить, разделив все $(n+1)$ ограничений на ν. Это возможно при $\nu > 0$. Если $\nu < 0$, то надо сменить знаки неравенств. При $\nu = 0$ деление недопустимо, этот случай можно обойти, прибавив положительное число κ ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения модифицированной игры. Истинное значение игры получается вычитанием из модифицированного значения числа k. Полагая $\nu > 0$, ограничения можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \frac{x_1}{V} + a_{21} \cdot \frac{x_2}{V} + \ldots + a_{m1} \cdot \frac{x_m}{V} \geq 1 \\ a_{12} \cdot \frac{x_1}{V} + a_{22} \cdot \frac{x_2}{V} + \ldots + a_{m2} \cdot \frac{x_m}{V} \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \cdot \frac{x_1}{V} + a_{2n} \cdot \frac{x_2}{V} + \ldots + a_{mn} \cdot \frac{x_m}{V} \geq 1 \\ \frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} + \ldots + \frac{x_n}{V} = \frac{1}{V} \end{cases}$$

Положим $X_i = \frac{x_i}{V}$, так как $\max V = \min \frac{1}{V}$.

Задача примет вид:

$$F(\overline{X}) = X_1 + X_1 + \ldots + X_m \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} \cdot X_1 + a_{21} \cdot X_2 + \ldots + a_{m1} \cdot X_m \geq 1 \\ a_{12} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \ldots + a_{m2} \cdot X_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \cdot X_1 + a_{2n} \cdot X_2 + \ldots + a_{mn} \cdot X_m \geq 1 \\ X_i \geq 0 \qquad i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Для II игрока задачу можно записать в виде

$$Z(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} \cdot Y_1 + a_{12} \cdot Y_2 + \ldots + a_{1n} \cdot Y_n \leq 1 \\ a_{21} \cdot Y_1 + a_{22} \cdot Y_2 + \ldots + a_{2n} \cdot X_n \leq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot Y_1 + a_{m2} \cdot Y_2 + \ldots + a_{mn} \cdot Y_n \leq 1 \\ Y_j \geq 0 \qquad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$Z(\overline{Y}) = \frac{1}{V}, \quad Y_j = \frac{y_j}{V}$.

7.2. **Практическая часть**

Задача 7.1.

Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 3 объекта. Стратегии отраслей: i- я стратегия состоит в финансировании i- го объекта ($i = 1,2,3$). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли – представленная игра может рассматриваться как игра двух игроков с нулевой суммой.

Решение.

Решим матричную игру в MS Excel, записав ее как задачу линейного программирования

Рассмотрим игрока A. Будем искать оптимальную смешанную стратегию игрока A:

$$X^* = (p_1, p_2, p_3),$$

где p_i – частота (вероятность) использования игроком A своей i-ой стратегии. Обозначим цену игры (средний выигрыш) – ν.

Чтобы свести матричную игру для игрока A к задаче линейного программирования преобразуем платежную матрицу так, чтобы все ее элементы были больше нуля – прибавим ко всем элементам матрицы число 4. Получаем преобразованную платежную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Средний выигрыш A должен быть не меньше цены игры при любом поведении игрока B. Так, если игрок в использует свою первую стратегию, то средний выигрыш игрока A составит $3p_1 + 9p_2 + 2p_3$, получаем неравенство $3p_1+9p_2+2p_3 \ge \nu$. Аналогично, записав неравенства для стратегий B_2 и B_3, получаем систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} 3p_1+9p_2+2p_3 \ge \nu \\ 5p_1+6p_2+8p_3 \ge \nu \\ 10p_1+p_2+9p_3 \ge \nu \end{cases}$$

Из условия $p_1+p_2+p_3=1$, разделив обе части уравнения на $\nu>0$ (цена игры больше нуля, так как все элементы преобразованной матрицы больше нуля), получаем целевую функцию $F=\frac{p_1}{\nu}+\frac{p_2}{\nu}+\frac{p_3}{\nu}=\frac{1}{\nu}$. Цель игрока A – получить максимальный средний выигрыш, т.е. $\nu \to \max$, а значит $\frac{1}{\nu} \to \min$.

Если обозначить $\frac{p_i}{\nu}=x_i \left(i=\overline{1,3}\right)$, то целевая функция примет следующий вид:

$$F=x_1+x_2+x_3 \to \min$$

Перейдём в системе ограничений к переменным x_i, разделив каждое неравенство на $\nu>0$:

$$\begin{cases} 3x_1+9x_2+2x_3 \ge 1 \\ 5x_1+6x_2+8x_3 \ge 1 \\ 10x_1+x_2+9x_3 \ge 1 \end{cases}$$

Таким образом, *для нахождения оптимальной стратегии игрока A необходимо решить задачу линейного программирования.*

Найти значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих системе ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1+9x_2+2x_3 \ge 1 \\ 5x_1+6x_2+8x_3 \ge 1 \\ 10x_1+x_2+9x_3 \ge 1 \end{cases}$$

и условию $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$, при котором функция $F=x_1+x_2+x_3$ принимает минимальное значение.

Решим задачу средствами табличного редактора MS Excel.
1. Оформим расчётную таблицу, как показано ни рис. 7.1:
– ячейки B2, B3, B4 играют роль переменных x_1, x_2, x_3;
– в ячейке B8 вычисляется значение целевой функции;
– в ячейках B12, B13, B14 вычисляются левые части ограничений.

	A	B	C
1	**Переменные**		
2	x1=		
3	x2=		
4	x3=		
5			
6			
7	**Целевая функция**		
8	F=	=B2+B3+B4	
9			
10	**Система ограничений**		
11		левая часть	правая часть
12		=3*B2+9*B3+2*B4	1
13		=5*B2+6*B3+8*B4	1
14		=10*B2+B3+9*B4	1

Рис. 7.1.

2. В меню ДАННЫЕ выбираем команду ПОИСК РЕШЕНИЯ.
3. В окне ПОИСК РЕШЕНИЯ введем необходимые параметры (см. рис. 7.2):

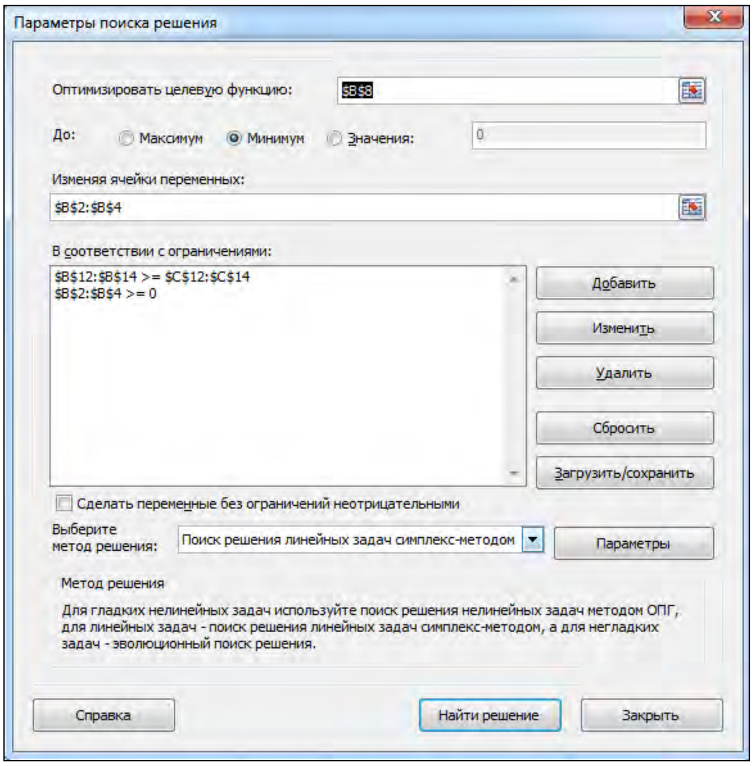


Рис. 7.2.

– укажем целевую ячейку (B8) – та, в которой вычисляется значение целевой функции;

– выберем переключатель МИНИМУМ (целевую функцию необходимо минимизировать);

– в поле ИЗМЕНЯЯ ЯЧЕЙКИ укажем диапазон, который играет роль переменных, т.е. B2:B4;

– введем систему ограничений, нажав кнопку ДОБАВИТЬ. При этом появится диалоговое окно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ.

Первое ограничение:

– в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ вводим диапазон, где вычислены левые части неравенств из системы ограничений задачи (все три неравенства можно ввести сразу, так как они одного смысла – больше или равно) – B12:B14; в открывающемся списке выбираем знак неравенства;

– в поле ОГРАНИЧЕНИЕ указываем диапазон, где хранятся правые части неравенств системы ограничений задачи – C12:C14;

– нажимаем кнопку ДОБАВИТЬ (при этом окно не исчезнет и можно будет ввести новое ограничение).

Второе ограничение (условие неотрицательности переменных):

– в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ вводим диапазон ячеек, которые играют роль переменных – B2:B4;

– выбираем знак неравенства;

– в поле ОГРАНИЧЕНИЕ вводим с клавиатуры ноль;

– нажимаем кнопку ОК.

4. Осталось в окне ПОИСК РЕШЕНИЯ нажать кнопку НАЙТИ РЕШЕНИЕ и увидеть результат решения задачи (см. рис. 7.3):

	A	B	C
1	**Переменные**		
2	x1=	**0,0787172**	
3	x2=	**0,08163265**	
4	x3=	**0,01457726**	
5			
6			
7	**Целевая функция**		
8	F=	0,17492711	
9			
10	**Система ограничений**		
11		левая часть	правая часть
12		1	1
13		1	1
14		1	1
15			

Рис. 7.3.

Получили $F(0{,}0787;0{,}0816;0{,}0146)=0{,}1749$. Так как $\nu=\dfrac{1}{F}$ и $p_i=x_i\nu$, то $\nu=5{,}7167$; $p_1=0{,}45$; $p_2=0{,}47$; $p_3=0{,}08$ – это решение для игры, заданной матрицей B (преобразованной матрицы). Для матрицы A: компоненты смешанной стратегии не меняются, а цена игры меньше на число, которое прибавляли ко всем элементам матрицы A, т.е. на 4.

Окончательный результат: $p^* = (0,45; 0,47; 0,08)$ $\nu = 1,72$.

Для игрока B получена следующая задача линейного программирования:

найти значения переменных y_1, y_2, y_3, *удовлетворяющих системе ограничений*

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + 10y_3 \le 1 \\ 9y_1 + 6y_2 + y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 8y_2 + 9y_3 \le 1 \end{cases}$$

и условию $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$, *при котором функция* $Z = y_1 + y_2 + y_3$ *принимает максимальное значение.*

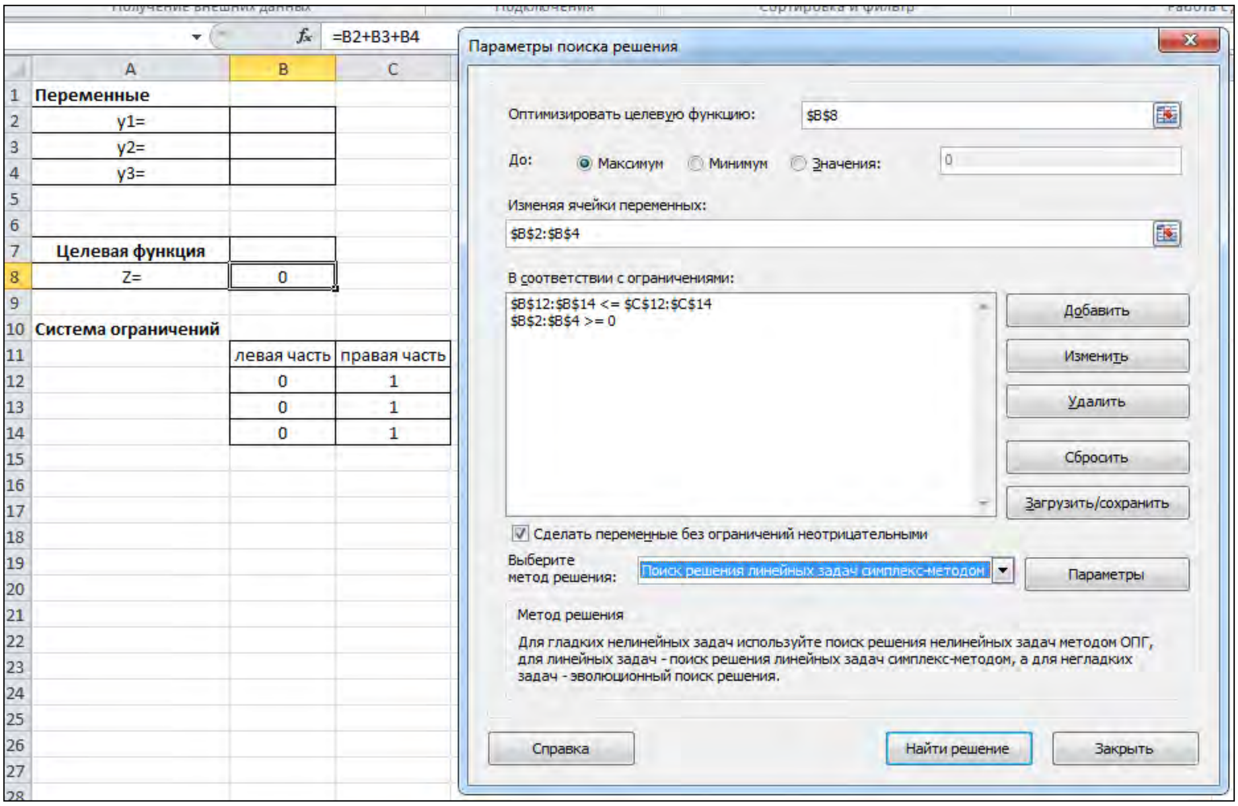
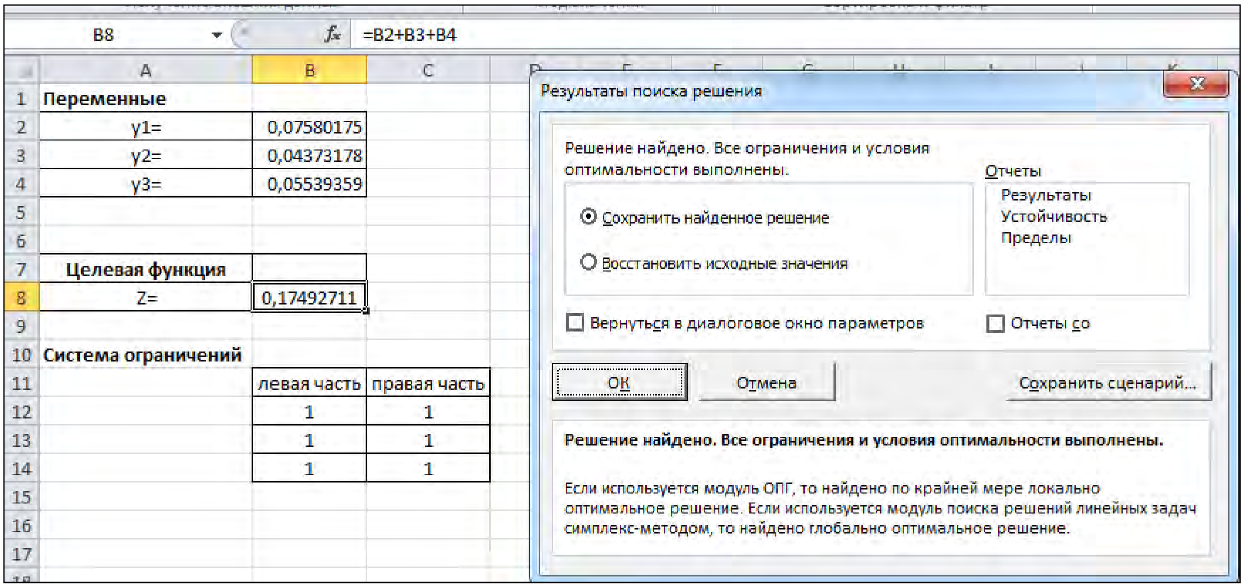


Рис. 7.4

Результаты поиска решения:



Для игрока B: $q^* = (0{,}43; 0{,}25; 0{,}32)$ $\nu = 1{,}72$.

Задача 7.2.

Игра задана платежной матрицей. Определить оптимальные стратегии игроков, стратегию первого определить геометрически, а стратегию второго – при помощи симплекс-метода.

A_1	1	4	6	3	7
A_2	3	1	2	4	3
A_3	2	3	4	3	5
A_4	0	1	5	2	6
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5

Решение.

Выясним, есть ли тут седловая точка.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min(A_i)$
A_1	1	4	6	3	7	1
A_2	3	1	2	4	3	1
A_3	2	3	4	3	5	2
A_4	0	1	5	2	6	0
$\max(B_i)$	3	4	6	4	7	2 \ 3

Нижняя цена игры $\underline{\nu} = \max(1, 1, 2, 0) = 2$.

Верхняя цена игры $\overline{\nu} = \min(3,4,6,4,7) = 3$.

Т.к. нижняя цена не равна верхней цене, то седловой точки нет, т.е. решение матричной игры нужно искать в смешанных стратегиях.

Исследуем матрицу с точки зрения доминирования.

Стратегия B_5 доминирует над стратегией B_2, т.к. все элементы пятого столбца больше соответствующих элементов второго столбца. Уберем пятый столбец.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	4	6	3
A_2	3	1	2	4
A_3	2	3	4	3
A_4	0	1	5	2

Стратегия B_3 доминирует над стратегией B_2.

	B_1	B_2	B_4
A_1	1	4	3
A_2	3	1	4
A_3	2	3	3
A_4	0	1	2

Стратегия B_4 доминирует над стратегией B_1.

	B_1	B_2
A_1	1	4
A_2	3	1
A_3	2	3
A_4	0	1

Стратегия A_4 строго доминируется стратегией A_3.

	B_1	B_2
A_1	1	4
A_2	3	1
A_3	2	3

Получили матрицу выигрышей, где у игроков A и B нет доминирующих стратегий.

Сначала найдем оптимальную стратегию игрока B.

Заметим, что $\nu \geq \overline{\nu} > 0$ и решим следующую задачу линейного программирования:

Максимизировать функцию $Z = y_1 + y_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ 3y_1 + y_2 \leq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Т.к. переменных всего две, то эту задачу линейного программирования проще всего решить графическим способом. Построим множество допустимых решений, т.е. область, описываемую этими неравенствами и ограниченную прямыми:

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 = 1 \\ 3y_1 + y_2 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 = 1 \\ y_1 = 0;\ y_2 = 0 \end{cases}$$

По оси абсцисс будем откладывать y_1, а по оси ординат y_2. Область допустимых значений закрашена серым цветом на рисунке 7.5.

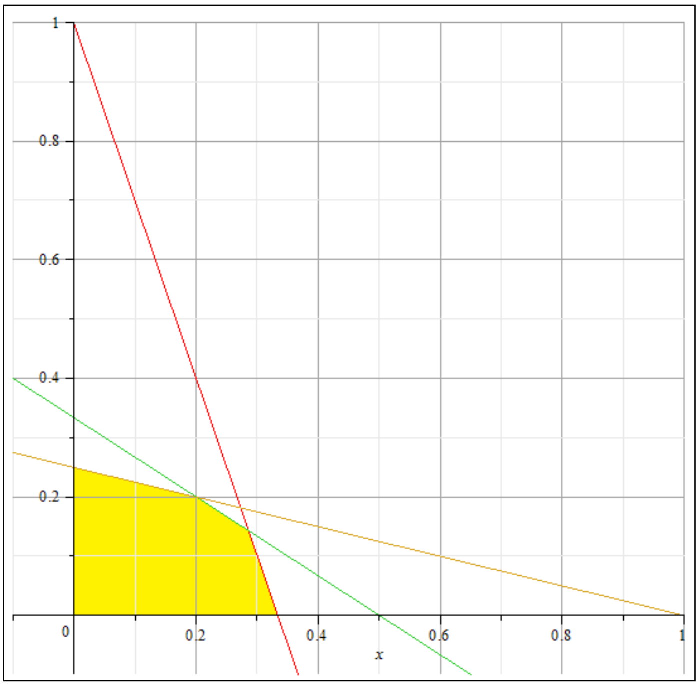


Рис.7.5

Строим линии уровня $Z = y_1 + y_2$, которые имеют вид $y_1 + y_2 = C$, где C – произвольная постоянная. Для увеличения C прямая должна занимать максимально «высокое» положение, но имея с областью допустимых решений хотя бы одну точку, как показано на рисунке 7.6.

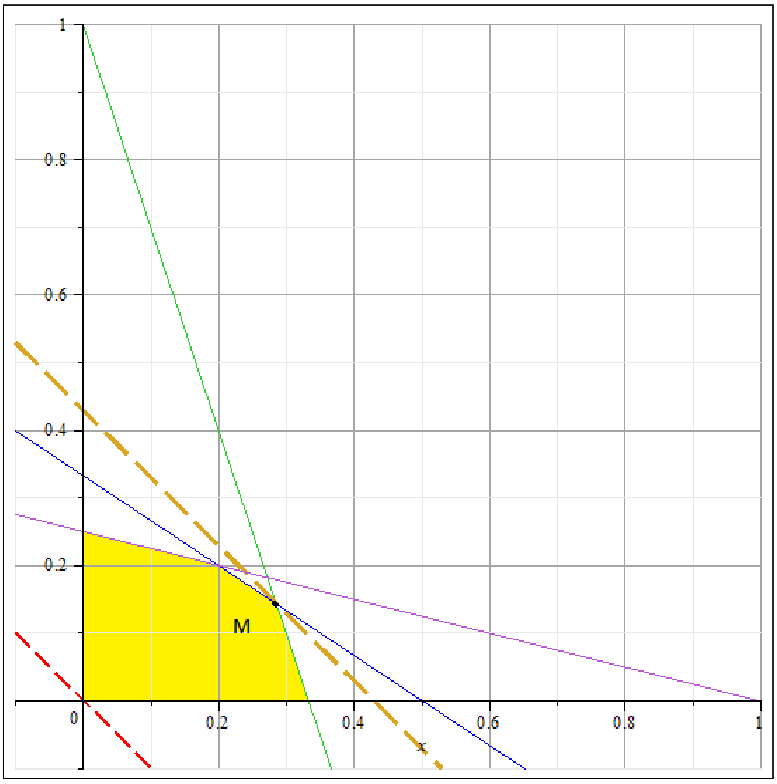


Рис.7.6

Такое положение прямой – проходящее через точку M.
Найдем её координаты как пересечение двух прямых.

$$\begin{cases} y_2 = -3y_1 + 1 \\ y_2 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -3y_1 + 1 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -9y_1 + 3 = -2y_1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7y_1 = -2 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{7};\ y_2 = -3 \cdot \frac{2}{7} + 1 = -\frac{6}{7} + 1 = \frac{1}{7}$$

Получили $y_1 = \frac{2}{7};\ y_2 = \frac{1}{7}$, тогда $\nu' = \dfrac{1}{y_1 + y_2} = \dfrac{1}{\frac{2}{7} + \frac{1}{7}} = \dfrac{7}{3}$

и $q_1 = y_1 \cdot \nu' = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2}{3};\quad q_2 = y_2 \cdot \nu' = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока в имеет вид

$$q^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$$

Для нахождения оптимальной стратегии игрока Е решаем следующую задачу линейного программирования:

Минимизировать функцию $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Для решения этой задачи применим симплекс-метод.

Запишем систему ограничений в каноническом для симплекс-метода виде:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -1 \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные такие, что неравенства преобразуются в равенства

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Первый опорный план: $X_1 = \{0,0,0,-1,-1\}$ и целевая функция $F = 0 + 0 + 0 = 0$.

Занесем данные в симплекс – таблицу:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	–1	<u>–3</u>	–2	1	0	–1
x_5	–4	–1	–3	0	1	–1
$F(x)$	–1	–1	–1	0	0	0

Значение базисных переменных отрицательны, нас такая ситуация не устраивает. Выберем среди значений базисного столбца наибольший по модулю. Оба таких значения равны 1, выберем первую строку (делим элементы целевой строки на элементы выбранной):

$$\min\left(\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-3}; \frac{-1}{-2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Это значение соответствует второму столбцу, т.е. в базисе x_4 следует вывести, а x_2 – ввести. Разрешающий элемент (–3), стоящий на пересечении первой строки и второго столбца. Пересчитаем элементы таблицы по методу Жордана-Гаусса:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	$1/3$	1	$2/3$	$1/3$	0	$1/3$
x_5	$-4+1/3$	0	$-3+1/3$	$-1/3$	1	$-1+1/3$
$F(x)$	$-1+1/3$	0	$-1+1/3$	$0-1/3$	0	$0+1/3$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	$1/3$	1	$2/3$	$1/3$	0	$1/3$
x_5	$-1/3$	0	$\underline{-7/3}$	$-1/3$	1	$-2/3$
$F(x)$	$-2/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	0	$1/3$

Среди значений базисных переменных присутствуют отрицательные значения, план не является оптимальным. Максимальное значение столбца базисных переменных (по модулю) $2/3$, это соответствует второй строке, $\min\left(\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{11}{3}};\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}};\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}\right)=\min\left(\frac{2}{11};\frac{1}{7};1\right)=1/7$ – что соответствует третьему столбцу, т.е. выводим из базиса x_5 и вводим туда x_3. Пересчитываем

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	$-5/7$	1	0	$-3/7$	$2/7$	$1/7$
x_3	$11/7$	0	1	$1/7$	$-3/7$	$2/7$
$F(x)$	$-1/7$	0	0	$-2/7$	$-1/7$	$3/7$

Среди значений базисного столбца нет отрицательных переменных, т.е. получен оптимальный план:

$$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{7},\ x_3=\frac{2}{7},\quad F=0+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}.$$

Тогда $\nu=\dfrac{1}{x_1+x_2+x_3}=\dfrac{7}{7}$; $\quad p_2=x_2\nu=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{1}{3}$; $\quad p_3=x_3\nu=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Следовательно, оптимальная смешанная стратегия игрока A имеет вид:

$$p^*=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right).$$

7.3. Контрольные вопросы

1. Какое основное назначение теории игр?
2. Что называется стратегией игры?
3.В чем суть чистых и смешанных стратегий и каковы их свойства?
4. Каковы понятия максиминной и минимаксной стратегий?
5. В чем заключается приведение матричной игры к задаче линейного программирования?
6.Каков способ нахождение оптимальной стратегии игрока с помощью пакета MS Excel?
7. Что означает оптимальная смешанная стратегия игрока?
8. Как определить оптимальные стратегии игроков геометрически и с помощью симплекс-метода?

7.4. Задания для самостоятельной работы

Решить матричные игры, имеющие платежные матрицы вида:

1. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & -13 & -1 \\ 13 & 0 & -13 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$	5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	8. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	9. $\begin{pmatrix} 203 & 403 & 103 \\ 303 & 3 & 103 \\ 3 & 103 & 303 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 1 \\ 15 & 2 & -11 \\ 3 & 15 & 2 \end{pmatrix}$	11. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} 16 & 0 & 14 \\ 6 & 6 & 16 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

Матричную игру решить с помощью симплекс-метода и пакета MS Excel.

ТЕМА 8. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА (ТЗ)

8.1. Краткие теоретические сведения

Одним из частных случаев задач линейного программирования является ***транспортная задача***. Цель данной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок, при котором минимальной была либо стоимость перевозок, либо минимальным было время доставки груза.

В общем виде транспортную задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеется однородный груз в количествах, соответственно, $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах, соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Стоимость перевозки 1 ед. груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.

Требуется составить план перевозок так, чтобы:

1. мощности (запасы) всех поставщиков были реализованы;
2. заказы всех потребителей были удовлетворены;
3. суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы 8.1

Таблица 8.1

Заказы / Запасы		B_1	B_2	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Виды транспортных задач

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза у поставщиков и суммарными потребностями в нем потребителей транспортные задачи делятся на два вида: ***закрытые*** и ***открытые***.

Определение 8.1. Если сумма запасов груза у поставщиков равна суммарной потребности в нем потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8.1}$$

то транспортная задача называется ***закрытой***.

Определение 2. Если условие (8.1) не выполняется, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортная задача называется ***открытой***.

Теорема 8.1 (необходимое и достаточное условие разрешимости ТЗ). Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. чтобы выполнялось равенство (8.1).

8.1.1. Математическая модель закрытой транспортной задачи

Рассмотрим закрытую транспортную задачу.

1. Неизвестными транспортной задачи являются x_{ij} – объёмы перевозок от каждого i – го поставщика каждому j – му потребителю. Эти переменные так же можно записать в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Так как произведение $c_{ij} x_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$. Т.е. ***целевая функция*** будет иметь вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

3. Система ограничений транспортной задачи состоит из двух групп уравнений.

Первая группа состоит из m уравнений и описывает тот факт, что запасы всех поставщиков $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ вывозятся полностью, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m} \qquad (8.2)$$

Вторая группа состоит из n уравнений и выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей: $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1,n} \qquad (8.3)$$

Кроме того, переменные x_{ij} должны быть неотрицательны:

$$x_{ij} \geq 0; \; i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,n}.$$

4. Оптимальным решением транспортной задачи является матрица размерности $m \times n$, удовлетворяющая системе ограничений и обеспечивающая минимум целевой функции.

Особенности экономико-математической модели ТЗ

1. Система ограничений представляет собой систему уравнений (т.е. ТЗ задана в канонической форме);
2. Коэффициенты при переменных системы ограничений равны единице или нулю;
3. Каждая переменная входит только в два уравнения системы ограничений.

Число переменных x_{ij} в ТЗ с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно $m \cdot n$, а число уравнений в системах (8.2) и (8.3) равно $m + n$. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (8.1), то число линейно независимых уравнений равно $m + n - 1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи, может иметь не более $m + n - 1$ отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля неизвестных равно $m + n - 1$, то план является **невырожденным**, а если меньше – то **вырожденным**.

8.1.2. Открытая транспортная задача (транспортная задача с нарушенным балансом)

В открытой ТЗ сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, поэтому для решения открытой ТЗ ее сводят к закрытой ТЗ.

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарный запас груза поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то в задачу вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель с потребностью равной разности объемов за-

паса и потребления $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ и стоимостью перевозок $c_{i,n+1}=0, i=\overline{1,m}$.

2. Если $\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j$, т.е. объем потребления превышает объем запасов, то вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасом $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$ и стоимостью перевозок $c_{m+1,j}=0, \quad j=\overline{1,n}$.

После добавления фиктивного потребителя или фиктивного поставщика ТЗ становится закрытой, а, следовательно, и разрешимой.

Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплекс-методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения данного класса задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

1. Нахождение исходного опорного решения;
2. Проверка полученного решения на оптимальность;
3. Переход от одного опорного решения к другому до достижения оптимального значения (минимума) целевой функции.

При решении ТЗ ее условие и исходное опорное решение записывается в распределительную таблицу. Клетки, в которых записан объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю называются ***занятыми***, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные, незанятые клетки называются ***пустыми*** и им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки записывается тариф перевозки груза от данного i-го поставщика к j-му потребителю.

При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m+n-1$ (в случае вырожденной транспортной задачи). В этом случае недостающее их число заполняется клетками с ***нулевыми поставками***, такие клетки называют ***условно занятыми***. Нулевую поставку помещают в свободную клетку с наименьшим тарифом, причем чтобы в каждой строке и столбце было не менее одной занятой клетки.

Для определения исходного опорного плана ТЗ существует несколько методов. Рассмотрим на примере два из них: метод «северо-западного угла» и метод минимального элемента (метод наименьшей стоимости).

8.2. Практическая часть

Задача 8.1.

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Построить первоначальный допустимый опорный план закрепления потребителей за поставщиками. Найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей C в денежных единицах.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем исходные данные задачи в виде таблицы 8.2

Поставщики	**Запасы поставщиков**	**Потребители и их спрос**		
		B_1	B_2	B_3
		140	300	160
A_1	90	2	5	2
A_2	400	4	1	5
A_3	110	3	6	8

Математическая модель задачи

Матрица перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=90 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=110 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=140 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=300 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=160 \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}$$

Целевая функция:

$$F=2x_{11}+5x_{12}+2x_{13}+4x_{21}+1x_{22}+5x_{23}+3x_{31}+6x_{32}+8x_{33}\to \min$$

$\sum\limits_{i=1}^{3}a_i=90+400+110=600$ $\sum\limits_{j=1}^{3}b_j=140+300+160=600\Rightarrow$ данная ТЗ является закрытой, необходимое и достаточное условие разрешимости задачи выполнено.

Запись математической модели данной транспортной задачи в табличном редакторе Microsoft Excel имеет вид (рис. 8.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Потребители и их спрос							
2	Поставщики	Запасы поставщиков	B1	B2	B3		Матрица распределения			Ограничения по запасам
3			140	300	160	=СУММ(C3:E3)				
4	A1	90	2	5	2		0	0	0	=СУММ(G4:I4)
5	A2	400	4	1	5		0	0	0	=СУММ(G5:I5)
6	A3	110	3	6	8		0	0	0	=СУММ(G6:I6)
7		=СУММ(B4:B6)	Матрица тарифов				=СУММ(G4:G6)	=СУММ(H4:H6)	=СУММ(I4:I6)	
8							Ограничения по потребностям			
9	Ц. ф. F=	=СУММПРОИЗВ(C4:E6;G4:I6)								
10										

Рис. 8.1 Табличная модель с формулами

1. Найдем исходное опорное решение методом «северо-западного угла»:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Потребители и их спрос							
2	Поставщики	Запасы поставщиков	B1	B2	B3		Матрица распределения			Ограничения по запасам
3			140	300	160	600				
4	A1	90	2	5	2		90	0	0	90
5	A2	400	4	1	5		50	300	50	400
6	A3	110	3	6	8		0	0	110	110
7		600	Матрица тарифов				140	300	160	
8							Ограничения по потребностям			
9	Ц. ф. F=	1810								
10										

Рис. 8.2 Исходное опорное решение методом «северо-западного угла»

В результате получен исходный опорный план, который является допустимым, так как все грузы (запасы поставщиков) вывезены, спрос потребителей удовлетворен, т.е. план соответствует системе ограничений ТЗ.

Число занятых клеток в таблице равно 5, $m+n-1=3+3-1=5$, т.е. условие невырожденности выполнено. Получим исходное опорное решение:

$$X=\begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 50 & 300 & 50 \\ 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции) при исходном опорном решении составляет:

$$F=2\cdot 90+4\cdot 50+1\cdot 300+5\cdot 50+8\cdot 110=1810 \text{ д.е.}$$

Метод минимального тарифа (элемента) (метод наименьших затрат)

Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij}. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а спрос всех потребителей не будет удовлетворен.

Найдем исходное опорное решение для примера 8.1 методом минимального элемента:

Возможны два варианта

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Поставщики	Запасы поставщиков	Потребители и их спрос							
2			B1	B2	B3		Матрица распределения			Ограничения по запасам
3			140	300	160	600				
4	A1	90	2	5	2		90	0	0	90
5	A2	400	4	1	5		0	300	100	400
6	A3	110	3	6	8		50	0	60	110
7		600	Матрица тарифов				140	300	160	
8							Ограничения по потребностям			
9	Ц. ф. F=	1610								
10										

Рис. 8.3 Исходное опорное решение методом минимального элемента (1)

Опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции):
$F = 2 \cdot 90 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 8 \cdot 60 = 1610$ д.е.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Потребители и их спрос							
2	Поставщики	Запасы поставщиков	B1	B2	B3		Матрица распределения			Ограничения по запасам
3			140	300	160	600				
4	A1	90	2	5	2		0	0	90	90
5	A2	400	4	1	5		30	300	70	400
6	A3	110	3	6	8		110	0	0	110
7		600	Матрица тарифов				140	300	160	
8							Ограничения по потребностям			
9	Ц. ф. F=	1280								
10										

Рис. 8.4 Исходное опорное решение методом минимального элемента (2)

Опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции):

$$F = 2 \cdot 90 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 70 + 3 \cdot 110 = 1280 \text{ д.е.}$$

Проверка оптимальности плана и перераспределение поставок с помощью метода потенциалов.

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые **потенциалами.**

Покажем, как нужно пользоваться методом потенциалов на примере первоначального плана, полученного выше по методу северо-западного угла (рис. 8.2).

Найдем потенциалы по базисным (загруженным) клеткам таблицы с помощью формул $u_i + v_j = c_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, положив $u_1 = 0$:

$$\begin{cases} u_1+v_1=2 \\ u_1+v_1=4 \\ u_2+v_2=1 \\ u_2+v_3=5 \\ u_3+v_3=8 \\ u_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ u_2=2 \\ u_3=5 \\ v_1=2 \\ v_2=-1 \\ v_3=3 \end{cases}$$

Вычисляем оценки $\Delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ свободных клеток:

$\Delta_{12}=c_{12}-u_1-v_2=5-0+1=6$; $\Delta_{13}=c_{13}-u_1-v_3=2-0-3=-1$;

$\Delta_{31}=c_{31}-u_3-v_1=3-2-5=-4$; $\Delta_{32}=c_{32}-u_3-v_2=6-5-1=0$.

Среди оценок имеются отрицательные, поэтому план не оптимален, его следует преобразовать в новый план.

Занесём оценки в таблицу. Получим:

Таблица 8.3

A_i \ B_j	140	300	160	u
90	2 90	5 6	2 –1	$u_1=0$
400	4 50	1 300	5 50	$u_2=2$
110	3 –4 +	6 9	8 110	$u_3=5$
v	$v_1=2$	$v_2=-1$	$v_3=3$	

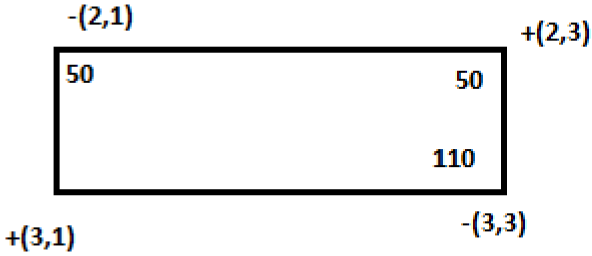
В левых нижних углах соответствующих клеток находятся оценки Δ_{ij}.

Чтобы улучшить план перевозок, необходимо для свободной клетки распределительной таблицы, имеющей отрицательную оценку, построить **цикл пересчёта (цик**л), который позволяет перераспределить занятые клетки так, чтобы получить новый план перевозок с меньшими суммарными затратами.

Цикл – совокупность клеток распределительной таблицы, из которых только одна клетка свободная, та, для которой строится цикл. Клетки, составляющие цикл, расположены в углах замкнутой ломаной линии, каждый отрезок которой лежит на одном и том же столбце распределительной таблицы.

Каждой клетке цикла поставим в соответствие знаки «+» и «–», которые при обходе цикла будут чередоваться. При этом свободную клетку (начальную клетку цикла) всегда считаем положительной.

Строим цикл с началом в клетке (3,1) с минимальной оценкой $\Delta_{31} = -4$, он будет включать в себя клетки (см. таблицу 8.4):



Величина груза, перемещаемая с помощью цикла равна **наименьшей** из величин, расположенных в отрицательных клетках:

$$\lambda = \min(110{,}50) = 50$$

Найденную величину прибавим в положительных клетках цикла и вычтем в отрицательных. Клетка (2,1) станет свободной. Получим новый план перевозок, который занесём в таблицу 8.4:

Таблица 8.4

B_j / A_i	140	300	160	u
90	2 90	5	2	$u_1 = 0$
400	4	1 300	5 100	$u_2 = -2$
110	3 50	6	8 60	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 7$	

Опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции):

$$F_1(X) = 2 \cdot 90 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ д.е.}$$

Построена таблица с новым планом, состоящим из старых поставок, не вовлечённых в цикл и новых – в вершинах рассмотренного цикла.

Проведём перерасчёт потенциалов u_i, v_j и оценок Δ_{ij}:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 5 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_3 = 8 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -2 \\ u_3 = 1 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \\ v_3 = 7 \end{cases}$$

Оценки для незанятых клеток:

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 3 - 0 = 2$; $\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 2 - 0 - 7 = -5$;
$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 + 2 - 2 = 4$; $\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 6 - 1 - 3 = 2$.

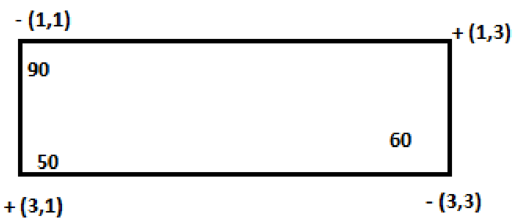
Наличие отрицательной оценки говорит о том, что данный план не является оптимальным.

Внесём данные в таблицу (таблица 8.5):

Таблица 8.5

B_j / A_i	140	300	160	u
90	2 90	5 2	2 –5 +	$u_1 = 0$
400	4 4	1 300	5 100	$u_2 = -2$
110	3 50	6 2	8 60	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 7$	

Строим цикл с началом в клетке (1,3) с оценкой $\Delta_{31} = -5$, он будет включать в себя клетки (см. таблицу 8.5):



Тогда $\lambda = \min(90, 60) = 60$.

Перераспределим груз по циклу, указанному в таблице 6.5 пунктиром на величину λ. Получим следующую распределительную таблицу:

Таблица 8.6

B_j / A_i	140	300	160	u
90	30 (2)	(5)	60 (2)	$u_1 = 0$
400	(4)	300 (1)	100 (5)	$u_2 = 3$
110	110 (3)	(6)	(8)	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 2$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	

Опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции):

$$F_2(X) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 60 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 110 = 1310 \text{ д.е.}$$

Проверим план на оптимальность.

Потенциалы:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_3 = 5 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 3 \\ u_3 = 1 \\ v_1 = 2 \\ v_2 = -2 \\ v_3 = 2 \end{cases}$$

Оценки для незанятых клеток:

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 + 2 - 0 = 7$; $\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 2 - 1 = 5$;
$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 2 - 3 = -1$; $\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 6 + 2 - 1 = 7$.

План не является оптимальным, так как $\Delta_{21} < 0$. Его нужно преобразовать в новый план, загрузив клетку (2,1).

Цикл (см. таблицу 8.7):

Таблица 8.7

B_j / A_i	140	300	160	u
90	2 30	5 7	2 60	$u_1 = 0$
400	4 –1 +	1 300	5 100	$u_2 = -2$
110	3 110	6 7	8 5	$u_3 = 1$
v	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 7$	

По этому контуру находим поставку $\lambda = \min(30{,}100) = 30$.

Прибавляем λ к элементам, стоящим у вершин со знаком (+) и вычитаем из элементов, стоящих у вершин со знаком (–). Получаем новое опорное решение (см. таблицу 8.8)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Стоимость перевозки (значение целевой функции):

$$F_2(X) = 2 \cdot 90 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 300 + 5 \cdot 70 + 3 \cdot 110 = 1280 \text{ д.е.}$$

Таблица 8.8

B_j / A_i	140	300	160	u
90	2	5	2 90	$u_1 = 0$
400	4 30	1 300	5 70	$u_2 = 2$
110	3 110	6	8	$u_3 = 2$

v	$v_1=1$	$v_2=-2$	$v_3=2$	

Исследуя этот план аналогично предыдущим, находим потенциалы (они приведены в таблице 8.8), и по ним – оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11}=2-1-0=1;\quad \Delta_{12}=5+2-0=5;\quad \Delta_{32}=6+2-3=5;$$
$$\Delta_{33}=8-2-2=4.$$

Отрицательных оценок нет, следовательно, в таблице содержится оптимальный план.

Табличная модель.

Вводим данные в таблицу Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1				План перевозок			
2	Поставщики	Потребители					
3		B1	B2	B3	Вывезено	Запасы	Остаток
4	A1	0	0	0	0	90	90
5	A2	0	0	0	0	400	400
6	A3	0	0	0	0	110	110
7	Получено	0	0	0			
8	Потребность	140	300	160			
9	Недополучено	140	300	160			
10							
11			Матрица тарифов				
12	Поставщики	Потребители					
13		B1	B2	B3			
14	A1	2	5	2			
15	A2	4	1	5			
16	A3	3	6	8			
17							
18	Затраты	0					
19							

Рис. 8.5. Табличное представление модели задачи

	A	B	C	D	E	F	G
1				План перевозок			
2	Поставщики	Потребители					
3		B1	B2	B3	Вывезено	Запасы	Остаток
4	A1	0	0	0	=СУММ(B4:D4)	90	=F4-E4
5	A2	0	0	0	=СУММ(B5:D5)	400	=F5-E5
6	A3	0	0	0	=СУММ(B6:D6)	110	=F6-E6
7	Получено	=СУММ(B4:B6)	=СУММ(C4:C6)	=СУММ(D4:D6)			
8	Потребность	140	300	160			
9	Недополучено	=B8-B7	=C8-C7	=D8-D7			
10							
11			Матрица тарифов				
12	Поставщики	Потребители					
13		B1	B2	B3			
14	A1	2	5	2			
15	A2	4	1	5			
16	A3	3	6	8			
17							
18	Затраты	=СУММПРОИЗВ(B4:D6;B14:D16)					
19							

Рис. 8.6. Табличная модель с формулами

Оптимизация. Данные ⇒ Поиск решения

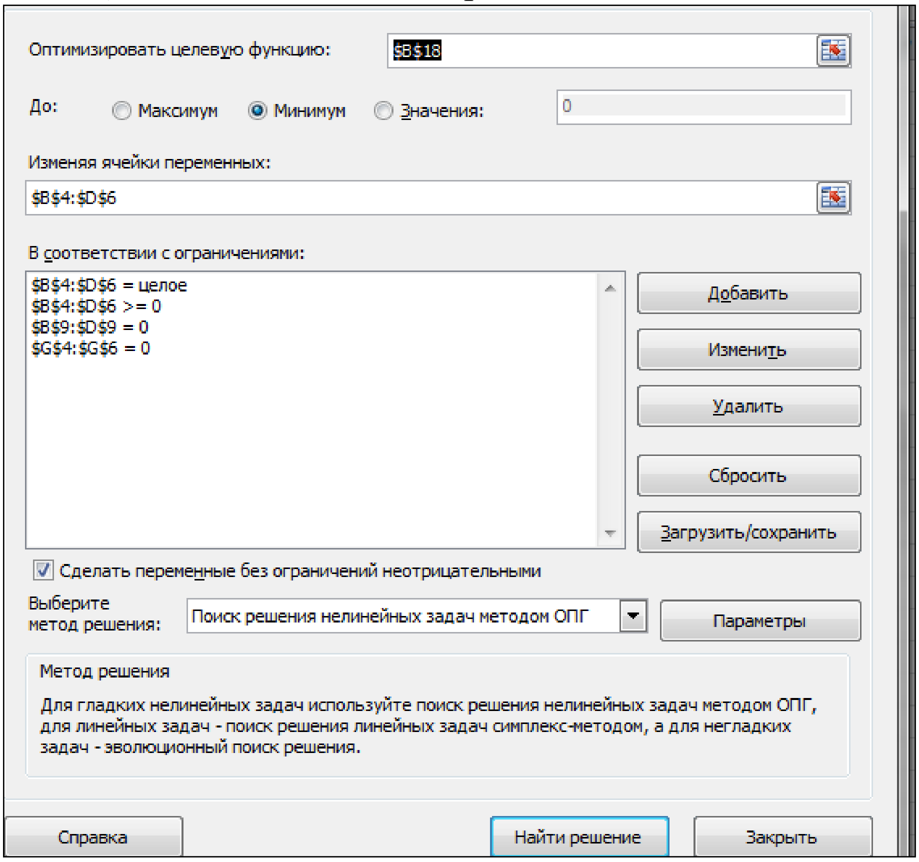


Рис. 8.7. Диалоговое окно надстройки Поиск решения

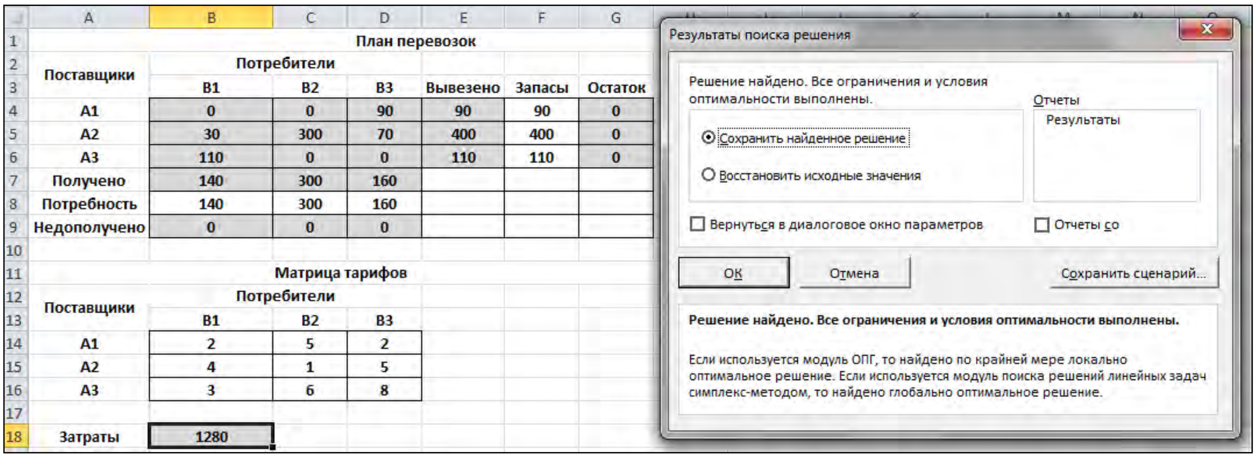


Рис. 8.8. Решение транспортной задачи

Вывод: Минимальные суммарные затраты на перевозку груза равны 1280 д.е. Они достигаются путем распределения поставок, представленных в ячейках [B4:D6]. Так, например, поставщик А1 должен доставить груз только потребителю В3 в количестве 90 единиц. Поставщик А2 должен поставить груз к потребителю В1 в количестве 30 ед., к потребителю В2 – 300 единиц и к потребителю В3 – 70 единиц.. Поставщик А3 должен доставить груз только потребителю В1 в количестве 90 ед. Поставщик А3 должен доставить груз только потребителю В1 в количестве 110 ед.

8.3. Контрольные вопросы

1. Какая цель ставится при решении транспортной задачи? К чему стремится целевая функция транспортной задачи?
2. Что означают коэффициенты у неизвестных в целевой функции транспортной задачи?
3. Какая транспортная задача называется закрытой?
4. Какая транспортная задача называется открытой?
5. Как называется таблица, с помощью которой находится решение транспортной задачи?
6. Как найти опорный план транспортной задачи методом "северо-западного угла"?
7. Как найти опорный план транспортной задачи методом минимального элемента?
8. Из каких этапов состоит решение транспортной задачи?
9. Что называется циклом?
10. Сколько занятых клеток должно быть в таблице поставок?
11. Какой план поставок называется вырожденным?
12. Что называется потенциалом клетки?
13. Как посчитать потенциалы для занятых клеток?
14. Как методом потенциалов найти оценки незанятых клеток?
15. Как перераспределить поставку из занятой клетки в свободную?
16. Когда транспортная задача не имеет решения?
17. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма запасов превышает сумму потребностей?
18. Как находится решение открытой транспортной задачи для случая, когда сумма потребностей превышает сумму запасов?
19. В каком случае тарифы перевозок транспортной задачи назначаются равными нулю?
20. Как решить транспортную задачу с помощью табличного редактора Excel?
21. В каком виде должна быть записана числовая информация при решении задачи в Excel?
22. В каком виде выводится решение транспортной задачи при использовании табличного редактора Excel?

8.4. Задания для самостоятельной работы

Для задачи, соответствующей Вашему варианту:

1. Построить первоначальный допустимый опорный план с помощью метода «северо-западного угла» и метода минимального элемента.
2. Записать математическую модель задачи на листе Excel.

3. Найти оптимальное решение (оптимальный план перевозок) задачи с помощью метода потенциалов и в табличном редакторе Excel с помощью встроенной функции ***Поиск решения***.

Вариант 1.

Транспортная компания занимается перевозкой зерна специальными зерновозами от трех элеваторов к четырем мельницам. Возможности отгрузки зерна элеваторами (в зерновозах) составляет 15, 25, 10 соответственно, а потребности мельниц (так же в зерновозах) составляет 5, 15, 15, 15. Матрица стоимостей перевозок зерна одним зерновозом от i-го элеватора к j-ой мельнице имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 4 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Вариант 2.

Найти оптимальное распределение трёх видов механизмов, имеющихся в количествах 45, 20 и 35, между четырьмя участками работ, потребности которых равны соответственно 10, 20, 30 и 40, при следующей производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Нулевые элементы означают, что данный механизм не может быть использован на данном участке работы.

Вариант 3.

Имеются 3 пункта отправления однородного груза A_1, A_2, A_3 и 4 пункта назначения того же груза B_1, B_2, B_3, B_4.

Предполагается, что из любого пункта A_i $(i = 1,2,3)$ груз может быть доставлен в любой пункт B_j $(j = 1,2,3,4)$.

Требуется определить план перевозок груза из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы:

1) вывезти весь груз от отправителей A_i

2) удовлетворить потребность в грузе (спрос) каждого потребителя B_i

3) транспортные расходы были минимальными.

A\B	23	28	25	24
40	3	6	3	5
30	4	4	5	2
30	2	5	4	3

Вариант 4.

В городе имеются 4 хлебозавода, которые снабжаются мукой тремя мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в следующей таблице:

Мелькомбинат	**Хлебозавод**				Суточная производительность, т.
	№1	**№2**	**№3**	**№4**	
№1	4	2	4	7	25
№2	7	6	6	8	20
№3	2	2	3	6	35
Суточная потребность в муке, т.	30	20	12	18	

Вариант 5

Имеются три поставщика и четыре потребителя. Мощность поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары "поставщик — потребитель" сведены в таблицу поставок

A\B	25	20	35	20
32	3	7	4	5
26	6	2	3	5
42	4	3	5	6

Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик – потребитель» так, чтобы:

1) мощности всех поставщиков были реализованы;
2) опросы всех потребителей были удовлетворены;
3) суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Вариант 6

Три завода производят однородную продукцию в количестве 650, 850 и 700 единиц соответственно. Эта продукция требуется 4 потребителям в количествах 500, 800, 300 и 600 единиц каждому. Затраты на перевозку единицы продукции (тыс. руб.) от каждого завода к каждому потребителю заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 50 & 52 & 62 & 10 \\ 40 & 50 & 80 & 20 \\ 50 & 10 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

Требуется спланировать перевозку груза так, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными.

Вариант 7

Три склада (*A1-A3*) поставляют в три магазина (*B1-B3*) розничной сети некоторый товар. Запасы данного товара на складах (шт.), потребности в нем магазинов (шт.) и тарифы на перевозку (в расчете на 1 шт.) показаны в транспортной таблице ниже. Найдите оптимальный план грузоперевозок, обеспечивающий удовлетворение потребностей магазинов в товаре с минимальными издержками на его транспортировку.

Магазины\Склады	B_1	B_2	B_3	**Запасы**
A_1	6	2	3	20
A_2	3	1	4	30
A_3	5	7	2	50
Потребности	25	35	40	

ТЕМА 9. МОДЕЛИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

9.1. Краткие теоретические сведения

При рассмотрении целого ряда экономических задач линейного программирования необходимо учитывать требование получения целочисленного решения. Такие задачи называются *задачами целочисленного программирования*.

Принципиальное отличие задачи целочисленного линейного программирования от обычной ЗЛП состоит только в том, что в системе ограничений вводится дополнительное ограничение на целочисленность переменных, т.е. задача целочисленного линейного программирования формулируется следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (9.1)$$

при ограничениях

$$\sum_i a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (9.2)$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (9.3)$$

а также дополнительном ограничении:

$$x_j - \text{целые числа} \qquad (9.4)$$

Для решения задач целочисленного программирования используют *метод Гомори* (метод отсечений) и *метод ветвей и границ*.

Идея метода Гомори состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученное решение целочисленное, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

– оно должно быть линейным;

– должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

– не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется *правильным отсечением*.

Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т.д.

Алгоритм метода Гомори

1. С помощью симплекс-метода находят решение задачи (9.1) – (9.3) без учета требования целочисленности переменных. Если полученное решение целочисленное, то задача (9.1) – (9.4) решена. Если задача (9.1) – (9.3) неразрешима (т.е. не имеет конечного оптимума или условия ее противоречивы), то и задача (9.1) – (9.4) также неразрешима.

2. Если полученное решение нецелочисленное, то составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (9.1)–(9.3) имеет максимальную дробную часть, а в оптимальном плане задачи (9.1)–(9.4) должна быть целочисленной. Для составления дополнительного ограничения используется последняя симплекс-таблица. Ограничение имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \{\alpha_{kj}\} x_j \geq \{f_k\}, \tag{9.5}$$

где $\{\alpha_{ij}\}$ – дробная часть коэффициента при переменной x_j в k - той строке последней симплексной таблицы, $\{f_k\}$ – дробная часть значения базисной переменной x_k.

3. Неравенство (9.5) заменяют уравнением путем ввода дополнительной переменной и добавляют его к ранее решенной задаче, получают новую задачу. Решают ее симплексным методом, если оптимальный план новой задачи целочисленный, то исходная задача решена. В противном случае составляется новое дополнительное ограничение и т.д., пока не будет получено целочисленное решение задачи.

9.2. Практическая часть

Задача 9.1. На приобретение оборудования (станков) для участка цеха выделены 30 т. р. Производственная площадь участка – 70 м^2. Имеется возможность закупить станки двух видов: стоимостью 5 т. р. и 3 т. р. Станок первого вида требует для установки 12 м^2 и дает продукции на 8 т. р. в месяц. Станок второго вида требует 6 м^2 площади и дает продукции на 2 т. р. в месяц. Определить оптимальный план приобретения оборудования, при котором производительность участка цеха в месяц была бы максимальной.

Решение.

1. Составим математическую модель задачи:

x_1– количество станков первого вида;

x_2 – количество станков второго вида;

$F = 8x_1 + 2x_2 \to \max$ – целевая функция (производительность участка в месяц в ден. ед.).

Система ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 12x_1 + 6x_2 \le 70 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 \in Z,\ x_2 \in Z\ .$$

2. С помощью симплекс-метода найдем решение задачи без учета требования целочисленности переменных. Для этого приведем задачу к каноническому виду, т.е. в системе ограничений введем две дополнительные переменные x_3 и x_4:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 70 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

$$F = 8x_1 + 2x_2 \to \max$$

В качестве базисных переменных можем взять дополнительные переменные x_3 и x_4.

Составим симплексную таблицу (табл. 9.1):

I шаг.

Таблица 9.1

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	b	*Оценочное отношение*
x_3	5	3	1	0	30	6
x_4	<u>12</u>	6	0	1	70	<u>5 5/6</u>
F	–8	–2	0	0	0	

Полученное на I шаге базисное решение (опорный план) не является оптимальным, т.к. в индексной строке есть отрицательные коэффициенты.

В качестве разрешающего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, т.к. ей соответствует наибольший по модулю отрицательный коэффициент (–8).

Вычислим оценочные отношения для строк соответствующих базисным переменным.

Вторая строка (соответствующая базисной переменной x_4) является разрешающей (ей соответствует минимальное оценочное отношение 5,8).

Разрешающий элемент 12, который находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки.

II шаг.

Производим пересчет симплекс-таблицы (в табл. 9.2 приведён конечный результат).

Таблица 9.2

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	b	*Оценочное отношение*
x_3	0	1/2	1	– 5/12	5/6	
x_1	1	1/2	0	1/12	5 5/6	
F	0	2	0	2/3	46 2/3	

Полученный опорный план $X_2 = \left(\frac{35}{6}; 0; \frac{5}{6}; 0 \right)$ является оптимальным, т.к. индексная строка не содержит отрицательных элементов. $F_{\max} = \frac{140}{3}$.

Полученное решение нецелочисленное, поэтому составим дополнительное ограничение для переменной x_1, которая в оптимальном плане задачи должна быть целочисленной. Для составления дополнительного ограничения воспользуемся последней симплекс-таблицей. Выпишем уравнение, содержащее неизвестную x_1:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_4 = \frac{35}{6}$$

Дополнительное ограничение будет иметь вид:

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}x_2 + \left\{\frac{1}{12}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{35}{6}\right\}$$

(фигурные скобки обозначают дробную часть числа).

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_4 \geq \frac{5}{6}$$

С помощью дополнительной переменной преобразуем данное неравенство в уравнение:

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{12}x_4 - x_5 = \frac{5}{6}$$

и присоединим его к исходной системе ограничений, получим новую задачу. Для ее решения в последнюю симплекс-таблицу исходной задачи добавляем строку, соответствующую введенному ограничению (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	1/2	1	– 5/12	0	5/6
x_1	1	1/2	0	1/12	0	5 5/6
x_5	0	$\underline{-1/2}$	0	–1/12	1	–5/6
F	0	2	0	2/3	0	46 2/3
$-\frac{F_j}{a_{ij}}$	–	4	–	8	–	

План $\mathbf{X}_3$ =(35/6 , 0 , 5/6, 0,-5/6) недопустим, так как –5/6 < 0, зато F– строка (0, 2, 0, 2/3, 0) не содержит отрицательных чисел. Это означает, что нашу задачу можно решить двойственным симплекс методом.

При решении задачи двойственным симплекс методом за разрешающую принимается строка с максимальным по абсолютной величине отрицательным b_i. У нас это строка x_5. За разрешающий принимается столбец с минимальным значением $-\frac{F_j}{a_{ij}}$, где $a_{ij} < 0$ (столбец x_2). Разрешающий элемент выделяем в таблице (см. табл. 9.3) и делаем для него шаг Жордана-Гаусса:

Таблица 9.4

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	– 1/2	1	0
x_1	1	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	1/6	–2	1 2/3
F	1	0	0	1/3	4	43 1/3

План $X_4 = \left(5; \frac{5}{3}; 0; 0; 0\right)$ оптимален, но переменная x_2 не является целочисленной. Введем второе дополнительное ограничение, для этого из последней симплексной таблицы выпишем последнее уравнение:

$$x_2 + \frac{1}{6}x_4 - 2x_5 = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{6}x_4 \ge \frac{2}{3} \text{ или } \frac{1}{6}x_4 - x_6 = \frac{2}{3}$$

Это ограничение добавляем в последнюю симплексную таблицу и решаем новую задачу двойственным симплекс-методом.

Таблица 9.5

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	*- 1/2*	1	0	0
x_1	1	0	0	*1/12*	1	0	5
x_2	0	1	0	*1/6*	–2	0	1 2/3
x_6	*0*	*0*	*0*	*-1/6*	*0*	*1*	*–2/3*
F	1	0	0	*1/3*	4	0	43 1/3

За разрешающую принимаем строку с максимальным по абсолютной величине отрицательным b_i. У нас это строка x_6. За разрешающий принимается столбец с минимальным значением $-\frac{F_j}{a_{ij}}$, где $a_{ij} < 0$ (столбец x_4). Разрешающий элемент выделяем в таблице (см. табл. 9.5) и делаем для него шаг Жордана-Гаусса:

Таблица 9.6

Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	0	1	–3	2
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	0	–2	1	1
$\boldsymbol{X_4}$	0	0	0	1	0	–6	4
F	0	0	0	0	4	2	42

План $\mathrm{X}_5 = (5, 1, 2, 4, 0,\ 0)$ оптимален и является целочисленным, следовательно, оптимальное решение исходной задачи имеет вид:

$$\mathrm{X}^* = (5, 1) \qquad F_{\max} = 42.$$

Решение задачи целочисленной оптимизации в Microsoft Excel осуществляется командой **Поиск решения** из меню **Данные**. Но при решении целочисленных задач необходимо в форму представления данных ввести требование целочисленности переменных.

Вводим данные в таблицу Excel, как представлено на рисунке 9.1

	A	B	C	D	E	F
1	Количество станков		Производительность участка (в мес.) F=8x1+2x2	Ограничения		
2				0	30	
3	x1	0		0	70	
4	x2	0	0			

Рис. 9.1. Табличное представление модели задачи

D19					
	A	B	C	D	E
1	Количество станков		Производительность участка (в мес.) F=8x1+2x2	Ограничения	
2				=5*B3+3*B4	30
3	x1	5		=12*B3+6*B4	70
4	x2	1	=8*B3+2*B4		

Рис. 9.2. Табличная модель с формулами

Вызываем диалоговое окно **Поиск решения** и заносим в этом окне необходимые данные (рис. 9.3)

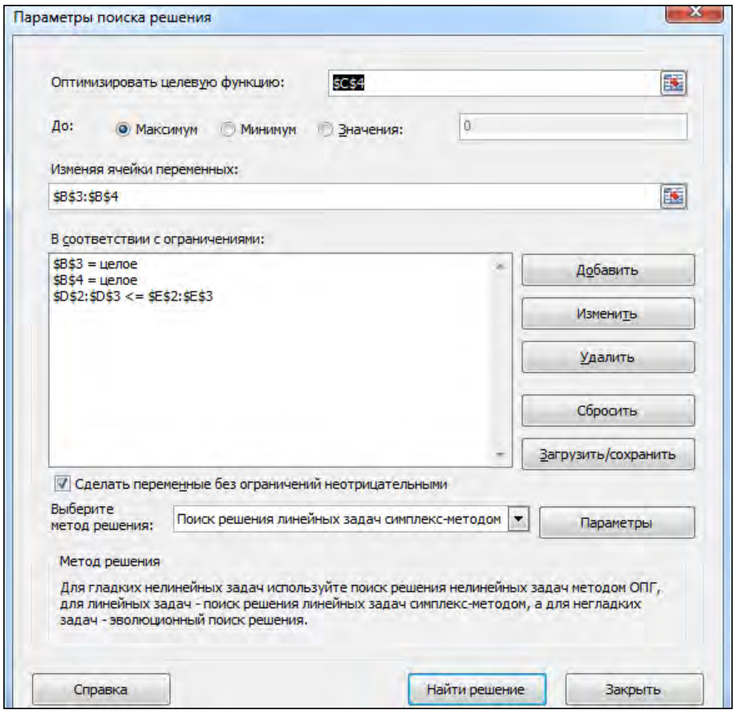


Рис. 9.3. Диалоговое окно надстройки **Поиск решения**

A	B	C	D	E
Количество станков		Производительность участка (в мес.) F=8x1+2x2	Ограничения	
			28	30
x1	5		66	70
x2	1	42		

Рис. 9.4 Решение задачи целочисленного программирования

Метод ветвей и границ

Задача 9.2.

Методом ветвей и границ решить задачу

$$F = 7x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 - \text{целые}$$

Решение.

Найдём оптимальное решение этой задачи как непрерывной (симплекс-методом).

Сначала приведем исходную (основную) задачу к каноническому виду. Очевидно, что для получения канонического вида необходимо прибавить 2 дополнительные неотрицательные переменные x_3, x_4 соответственно к первому и второму неравенствам системы ограничений.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38 \end{cases}$$

Поэтому можно сразу обратиться к таблице Гаусса (табл.9.1) и заполнить соответствующие блоки.

Таблица 9.1

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b	**Оценочное отношение**
x_3	$\underline{5}$	2	1	0	20	$\underline{20/5=4}$
x_4	8	4	0	1	38	38/5=4,75
F	$\underline{-7}$	–3	0	0	0	
x_3	$\underline{1}$	2/5	1/5	0	4	
x_4	8	4	0	1	38	
F	–7	–3	0	0	0	
x_1	$\underline{1}$	2/5	1/5	0	4	
x_4	0	4/5	–8/5	1	6	*(5/4)
F	0	$\underline{-1/5}$	7/5	0	28	
x_1	$\underline{1}$	2/5	1/5	0	4	
x_4	0	$\underline{1}$	-2	5/4	15/2	
F	0	–1/5	7/5	0	28	
x_1	1	0	1	–1/2	1	
x_2	0	1	–2	5/4	15/2	
F	0	0	1	1/4	59/2	

Оптимальное решение задачи:

$$x_1^1 = 1;\ \ x_2^1 = 7{,}5;\ \ F^1 = 29{,}5.$$

Верхний индекс у переменных соответствует номеру задачи.

В полученном решении $x_2^1 = 7{,}5$ не удовлетворяет требованиям целочисленности.

В связи с этим для дальнейшего решения составим задачи с граничными условиями, исключающими возможность получения нецелочисленного значения $x_2^1 = 7{,}5$. Такими граничными условиями являются

$$x_2 \geq 8; \quad x_2 \leq 7$$

Граничное условие $x_2 \geq 8$ входит в *Задачу 2*, решение которой найдём в Excel, используя надстройку «*Поиск решения*».

1. Создадим таблицу для ввода исходных данных: переменных, целевой функции, ограничений.

2. Введем начальные нулевые значения для x_1 и x_2.

3. Зададим целевую функцию в ячейке F3 и ограничения в ячейках E6, E7 и E8 (рис. (9.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные				Целевая функция		
2		x1	x2			F		
3						=7*B3+3*C3		
4								
5			Ограничения				Правые части	
6		5	2		=B6*B3+C6*C3		20	
7		8	4		=B7*B3+C7*C3		38	
8			1		=C8*C3		8	
9								

Рис. 9.5. Исходные данные

4. Вызываем диалоговое окно *Поиск решения* (рис. 9.6)

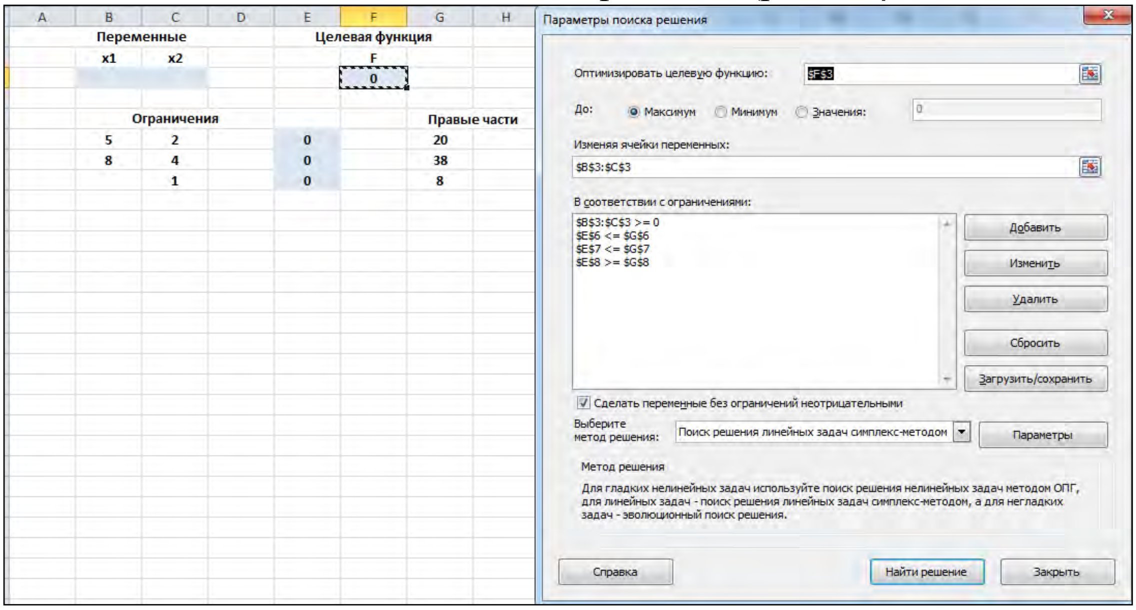


Рис. 9.6

После нажатия кнопки «Найти решение», получим результат решения задачи 2 (рис. 9.7):

A	B	C	D	E	F	G	H
	Переменные			Целевая функция			
	x1	x2			F		
	0,75	8			29,25		
		Ограничения				Правые части	
	5	2		19,75		20	
	8	4		38		38	
		1		8		8	

Рис. 9.7

Далее для исключения получения нецелочисленного значения $x_1^2 = 0{,}75$ введём дополнительные граничные условия и решим последовательно две задачи: *Задачу 3* – с условиями $x_1 \le 1, x_2 \le 7$ и *Задачу 4* – с условиями $x_1 \ge 1, x_2 \le 7$. Решения этих задач представлены, соответственно, на рис. 9.8 и рис. 9.9.

A	B	C	D	E	F	G	H
	Переменные			Целевая функция			
	x1	x2			F		
	1	7			28		
	Ограничения					Правые части	
	5	2		19		20	
	8	4		36		38	
	1			1		1	
		1		7		7	

Рис. 9.8 Решение *Задачи 3*

A	B	C	D	E	F	G	H
	Переменные			Целевая функция			
	x1	x2			F		
	2	5			29		
	Ограничения					Правые части	
	5	2		20		20	
	8	4		36		38	
	1			2		2	
		1		5		7	

Рис. 9.9 Решение *Задачи 4*

Схема решения всех этих задач приведена на рис. 9.10, а результат решения – в таблице 2

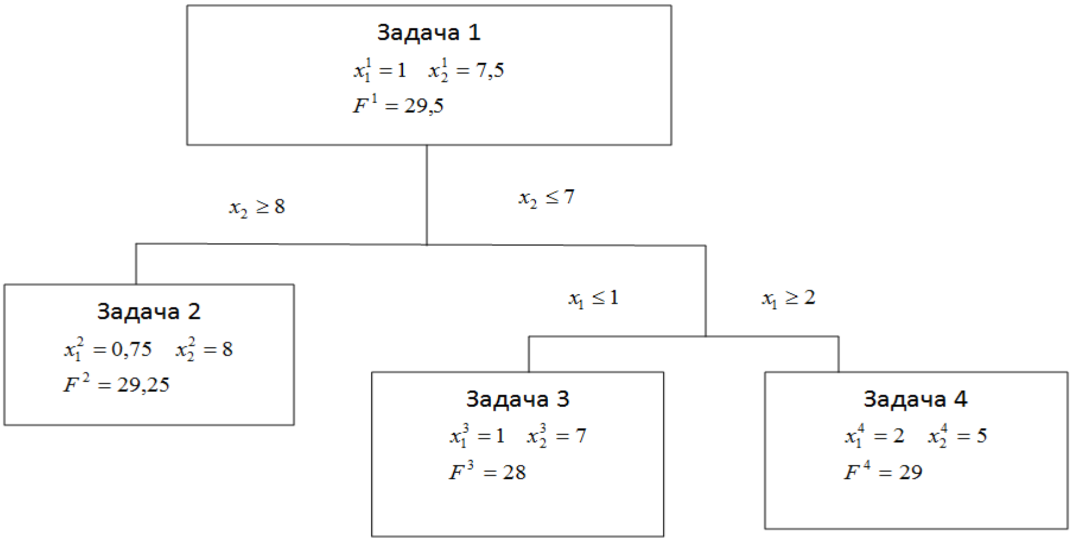


Рис. 9.10

Таблица 9.2

Величина	**Задача**			
	1	2	3	4
x_1	1	0,75	1	2
x_2	7,5	8	7	5
F	29,5	29,25	28	29

Из таблицы 2 видно, что решение *Задачи 3* наиболее близкое к непрерывному по значениям переменных (см. таблицу 1), не является оптимальным. Оптимальным же является решение *Задачи 4*, в котором значения переменных существенно отличаются от непрерывного решения. Приведённый пример наглядно показывает, что *округление оптимального решения непрерывной задачи может не обеспечить получения оптимального решения целочисленной задачи*.

9.3. Контрольные вопросы

1. Какая задача называется задачей целочисленного программирования?
2. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом Гомори.
3. Сформулируйте алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ.
4. Какие решения считаются оптимальными для задач целочисленного программирования?

5. Выполняются ли критерии оптимальности линейного программирования для оптимальных решений задач целочисленного программирования?

6. Как найти решение задачи целочисленного программирования средствами Excel?

9.4. Задания для самостоятельной работы заданий

Задача 1. Методом Гомори найти оптимальное решение следующих задач:

Вариант 1 $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$	**Вариант 2** $F = 3x_1 - x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$
Вариант 3 $F = x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 4** $F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 13 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$
Вариант 5 $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 \le 3 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$	**Вариант 6** $F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$
Вариант 7 $F = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$	**Вариант 8** $F = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$

Вариант 9 $F = x_1 - 2x_2 - 5x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$	**Вариант 10** $F = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,3}$

Задача 2. Найти оптимальное целочисленное решение задачи методом ветвей и границ.

Вариант 1 $F = 0.32x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2.32x_1 + 10x_2 \le 49.5 \\ 21x_1 + 8.4x_2 \le 95 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 2** $F = 5x_1 + 18x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le \frac{15}{2} \\ \frac{2}{9}x_1 + \frac{4}{5}x_2 \le 2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$
Вариант 3 $F = 4x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 2x_1 + 3x_2 \le \frac{27}{2} \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 4** $F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$
Вариант 5 $F = x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 6** $F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$

Вариант 7 $F = x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 8** $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$
Вариант 9 $F = x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$	**Вариант 10** $F = 2x_1 + 2x_2 + 10 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = \overline{1,2}$

10. 10. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО «МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ»

1. Предмет математического программирования (МП). Классификация методов МП.
2. Задачи линейного программирования (ЗЛП): задача о наилучшем использовании ресурсов, о выборе оптимальных технологий, о смесях.
3. Обыкновенные и модифицированные жордановы исключения.
4. Решение систем линейных уравнений (СЛУ) с помощью жордановых исключений.
5. Базисные решения СЛУ.
6. Способ отыскания опорных решений СЛУ.
7. Эквивалентные преобразования СЛУ и неравенств.
8. Различные формы записи ЗЛП. Свойства решений ЗЛП.
9. Переход от общей ЗЛП к канонической, симметричной форме записи.
10. Графический способ решения ЗЛП с двумя переменными.
11. Симплекс метод. Нахождение начального опорного плана.
12. Симплекс метод. Нахождение оптимального опорного плана. Понятие о вырождении.
13. Понятие о проблеме вырождения. Зацикливание. Алгоритм симплекс-метода.
14. Метод искусственного базиса.
15. Построение двойственных задач к задачам симметричного и канонического видов.
16. Соответствие между переменными пары взаимно двойственных задач. Основное неравенство теории двойственности. Теоремы двойственности.
17. Экономическое содержание оптимальных планов пары двойственных задач. Двойственный симплекс-метод.
18. Теорема об оценках. Свойства двойственных оценок и их экономическое содержание.
19. Постановка и математическая модель транспортной задачи (ТЗ) по критерию стоимости в матричной форме. Теорема о существовании допустимого плана ТЗ.
20. Закрытая и открытая модели ТЗ. Теорема о ранге матрицы ТЗ.
21. Построение исходного опорного плана ТЗ. Правило «северо-западного угла» и «минимального элемента».
22. Теорема о потенциалах. Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов.
23. Матричные игры с нулевой суммой.
24. Чистые и смешанные стратегии и их свойства.
25. Приведение матричной игры к задаче ЛП.
26. Типовые задачи дискретного программирования (задача о рюкзаке, о назначении, задача коммивояжера).

27. Основные понятия теории графов.
28. Матричные способы задания графов. Упорядочение элементов орграфа. Алгоритм упорядочения вершин и дуг.
29. Потоки на сетях. Постановка задачи о максимальном потоке.
30. Разрез на сети. Теорема Форда - Фалкерсона.
31. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке.
32. Приложения задачи о максимальном потоке.
33. Задачи целочисленного программирования. Метод Гомори.
34. Градиентные методы решения задач на безусловный экстремум.
35. Условный экстремум. Теорема Куна-Таккера.

11. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в примерах и задачах в двух частях (часть 1). –Москва, ОНИКС 21 век, Мир и Образование, 2003 год. –304 с.
2. И. Л. Калихман. Сборник задач по математическому программированию. – Москва, Высшая школа, 1975 год. –270 с.
3. А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. Руководство к решению задач по математическому программированию. –Минск, Выш. Шк., 2001 год. – 448 с.
4. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. –128 с.
5. И. Л. Акулич. Математическое программирование в примерах и задачах. – Москва, Высшая школа, 1986 год. –319 с.
6. Исследование операций в экономике. Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. – Москва: ЮНИТИ, 2002 год. –407 с.
7. Миненко С.Н. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учебное пособие для вузов. – М.: МГИУ, 2010. – 140 с.
8. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие. – 3-е изд., переработанное и доп. – М.: Вузовский учебник, 2012. – 365 с.
9. Казаков О.Л., Миненко С.Н., Смирнов Г.Б. Экономико-математическое моделирование: Учебно-методическое пособие. – М.: МГИУ, 2009. – 136 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Москва, Наука, 1981 год. –368 с.
11. Сборник задач и упражнений по математике: Мат. программирование: А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод и др.; Под общ. ред. А.В. Кузнецова, Р.А. Рутковского. – Мн.: Выш. шк, 2002. –447 с.
12. Корзников А.Д., Павлов В.В. Математическое программирование. Методические указания и задания к практическим занятиям для студентов экономических специальностей. – Минск.: БНТУ, 2009. – 33 с.
13. http: // www.miu-iv.ru/ftpgetfile.php?id=1959 .
14. Н. А. Кондратьева, Л.В. Бокуть, Н.К. Прихач. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» для студентов экономических специальностей второго курса обучения заочного отделения ПСФ в двух частях. Часть 2. Эл. ресурс. Библиотека БНТУ, Минск, 2016 г. БНТУ/ЭУМК-ПСФ85-285. –112 с.

12. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

27.01.01 (Экономика и организация производства)

Приборостроительный факультет

Кафедра «Инженерная математика»

Форма получения высшего образования – дневная	Форма получения высшего образования – заочная
Курсы – 1,2	Курсы – 1,2
Семестры – 1,2,3,4	Семестры – 1,2,3,4
Лекции – 187 часов	Лекции – 38 часов
Практические занятия – 221 час	Практические занятия – 30 часов
Всего аудиторных часов по дисциплине – 408 часов	Всего аудиторных часов по дисциплине – 68 часов
Всего часов по дисциплине – 408 часов	Самостоятельная работа -686 часов
Экзамены – 1,2,4 семестры	Экзамены – 1,2,4 семестры
Зачет-3 семестр	Зачет-3 семестр