УДК 539.3

В.А. АКИМОВ, канд. физ.-мат. наук; С.В. ГОНЧАРОВА
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

РЕШЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ИМ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Анализ объемного напряженно деформируемого состояния в точке упругого изотропного тела является одной из ключевых тем в курсе сопротивления материалов и теории упругости. В свою очередь при изучении этой темы большое значение имеют задачи нахождения по заданному тензору напряжений главных площадок и действующих в них главных напряжений, а также нахождение напряжений на наклонной площадке. Авторы этой работы назвали эти задачи прямыми и поставили своей целью решить обратные им задачи, т. е. конечный результат решенных задач взять за исходные данные и восстановить по ним заданный тензор напряжений. В результате, в данной работе построены решения двух прямых и обратных им задачи теории упругости для объемного напряженного состояния, способствующие проведению более подробного анализа объемного напряженного состояния в точке деформируемого твердого тела. Решения обратных задач замыкают поставленную проблему и придают ей дополнительную стройность и завершенность, что принесет несомненную пользу всем специалистам, работающим в данном направлении. Приведенные при их решении выкладки носят оригинальный характер.

Ключевые слова: *теория упругости, объемное напряженное состояние в точке, две задачи*

Вначале рассмотрим первую прямую задачу теории упругости для напряженного состояния упругой изотропной среды. Ее условие заключается в том, что по заданному напряженному состоянию найти главные напряжения и расположения главных площадок. Решение этой задачи известно и поэтому приведем ее решение на конкретном примере.

Итак, пусть напряженное состояние в точке задано тензором напряжений

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\text{МПа}. \qquad (1)$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0.$$

Коэффициентами этого уравнения служат инварианты тензора напряжений:

а) линейный инвариант

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=2+4+4=10\,\text{МПа};$$

б) квадратичный инвариант

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=2\cdot4+4\cdot4+4\cdot2-(-\sqrt{3})^2-0^2-0^2=29\,(\text{МПа})^2;$$

в) кубический инвариант

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2=2\cdot4\cdot4+2\cdot(-\sqrt{3})\cdot0-2\cdot0^2-4\cdot0^2-4\cdot(-\sqrt{3})^2=20(\text{МПа})^3.$$

Так как все три инварианта отличны от нуля, значит это объемное напряженное состояние.

При таких значениях инвариантов кубическое уравнение принимает вид

$$\sigma^3-10\sigma^2+29\sigma-20=0.$$

Корни этого уравнения равны $\sigma_1=5$ МПа, $\sigma_2=4$ МПа, $\sigma_3=1$ МПа.

Это и есть главные напряжения, рассматриваемые в порядке убывания, то есть $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$.

Направляющие косинусы главных площадок определяются из уравнений:

$$\begin{cases}(\sigma_x-\sigma_i)l_i+\tau_{xy}m_i+\tau_{xz}n_i=0;\\ \tau_{yx}l_i+(\sigma_y-\sigma_i)m_i+\tau_{yz}n_i=0;\\ \tau_{xz}l_i+\tau_{zy}m_i+(\sigma_z-\sigma_i)n_i=0;\\ l_i^2+m_i^2+n_i^2=1,\quad i=1,2,3.\end{cases}$$

Для первой площадки $i=1$, $\sigma_1=5$ МПа, получим

$$\begin{cases}-3l_1-\sqrt{3}m_1=0;\\ -\sqrt{3}l_1-m_1=0;\\ -n_1=0;\\ l_1^2+m_1^2+n_1^2=0.\end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_1=1/2$, $m_1=-\sqrt{3/2}$, $n_1=0$, т. е. вектор нормали равен $\vec{n}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

Для второй площадки $i=2$, $\sigma_2=4$ МПа, получим

$$\begin{cases}-2l_2-\sqrt{3}m_2=0;\\ -\sqrt{3}l_2=0;\\ 0=0;\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2=0.\end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_2=0$, $m_2=0$, $n_2=1$, т. е. вектор нормали равен $\vec{n}_2=(0,0,1)$.

Для третьей площадки $i=3$, $\sigma_3=1$ МПа, будем иметь

$$\begin{cases}-3l_3-\sqrt{3}m_3=0;\\ -\sqrt{3}l_3+3m_3=0;\\ 3n_3=0;\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2=0.\end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $l_3=\sqrt{3/2}$, $m_3=1/2$, $n_3=0$, т. е. вектор нормали равен $\vec{n}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что выполняются соотношения для ортогональности площадок

$$\begin{cases}l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;\\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0;\\ l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0.\end{cases}$$

Решим теперь обратную задачу: в данной точке твердого тела главные напряжения и главные направления имеют вид

$$\sigma_1 = 5 \text{ МПа};\ \sigma_2 = 4 \text{ МПа};\ \sigma_3 = 1 \text{ МПа};$$

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right);\ \vec{n}_2 = (0,0,1),\ \vec{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Требуется найти исходный тензор напряжений $T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$ в данной точке.

Решение этой задачи базируется на соотношениях, получаемых из векового уравнения

$$\begin{cases} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 = \sigma_1 l_1; \\ \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1 = \sigma_1 m_1; \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z n_1 = \sigma_1 n_1; \\ \sigma_x l_2 + \tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} n_2 = \sigma_2 l_2; \\ \tau_{yx} l_2 + \sigma_y m_2 + \tau_{yz} n_2 = \sigma_2 m_2; \\ \tau_{zx} l_2 + \tau_{zy} m_2 + \sigma_z n_2 = \sigma_2 n_2; \\ \sigma_x l_3 + \tau_{xy} m_3 + \tau_{xz} n_3 = \sigma_3 l_3; \\ \tau_{yx} l_3 + \sigma_y m_3 + \tau_{yz} n_3 = \sigma_3 m_3; \\ \tau_{zx} l_3 + \tau_{zy} m_3 + \sigma_z n_3 = \sigma_3 n_3. \end{cases}$$

Вводя обозначения $\sigma_x = x_1$, $\tau_{xy} = x_2$, $\tau_{xz} = x_3$, $\sigma_y = x_4$, $\tau_{yz} = x_5$, $\sigma_z = x_6$, перепишем эту систему в более привычном виде

$$\begin{cases} x_1 l_1 + x_2 m_1 + x_3 n_1 = \sigma_1 l_1; \\ x_2 l_1 + x_4 m_1 + x_5 n_1 = \sigma_1 m_1; \\ x_3 l_1 + x_5 m_1 + x_6 n_1 = \sigma_1 n_1; \\ x_1 l_2 + x_2 m_2 + x_3 n_2 = \sigma_2 l_2; \\ x_2 l_2 + x_4 m_2 + x_5 n_2 = \sigma_2 m_2; \\ x_3 l_2 + x_5 m_2 + x_6 n_2 = \sigma_2 n_2; \\ x_1 l_3 + x_2 m_3 + x_3 n_3 = \sigma_3 l_3; \\ x_2 l_3 + x_4 m_3 + x_5 n_3 = \sigma_3 m_3; \\ x_3 l_3 + x_5 m_3 + x_6 n_3 = \sigma_3 n_3. \end{cases}$$

Полученные девять уравнений содержат шесть неизвестных, потому что в вековых уравнениях только два уравнения из каждых трех являются неизвестными. Поэтому, например, третье, шестое, девятое уравнение можно удалить, но мы их оставим для проверки правильности решения, т. к. они должны тождественно обратиться в нуль. Подставляя численные значения, перепишем нашу систему в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 = \frac{5}{2}; \\ \frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_4 = -\frac{5\sqrt{3}}{2}; \\ x_3 = 0; \\ x_5 = 0; \\ x_6 = 4; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_4 = -\frac{1}{2}; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_2 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет решение $x_1 = 2$, $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$, т. е. исходный тензор имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{МПа}.$$

Таким образом, круг замкнулся — ответом обратной задачи явилось исходное условие прямой задачи.

Теперь рассмотрим еще одну прямую и обратную задачи.

Первая задача заключается в нахождении компонент вектора полного напряжения, действующего в наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l, m, n)$, по известному тензору напряжений (1).

Приводим известное решение этой задачи [1, с. 79].

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_{nx}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_{ny}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = p_{nz}. \end{cases} \qquad (2)$$

Обратная задача, очевидно, звучит так: по известным компонентам полного напряжения (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}), действующего на наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l, m, n)$, найти компоненты тензора деформаций (1).

Решение такой задачи приводится впервые. Оно основано на составлении шести уравнений равновесия тетраэдра. Первые три из них содержаться в формуле (2). Оставшиеся три уравнения моментов относительно координатных осей составим по аналогии с [1, с. 80].

$$\begin{aligned} &-\sigma_x \frac{dz}{3} S_{\Delta OBC} - \tau_{xy} \frac{dz}{3} S_{\Delta OAB} + \\ &+ p_{nx} \frac{dz}{3} S_{\Delta ABC} + \sigma_z \frac{dx}{3} S_{\Delta OAC} = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

С учетом $S_{\Delta OBC} = S_{\Delta ABC} l$, $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} m$, $S_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC} n$

Перепишем это уравнение в виде

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z \frac{dx}{dz} = p_{nx}.$$

Производя циклическую замену переменных, получим еще два таких уравнения. Выпишем эту систему уравнений

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z n \dfrac{dx}{dz} = p_{nx}; \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n - \sigma_x l \dfrac{dy}{dx} = p_{ny}; \\ \sigma_z n + \tau_{zx} l - \sigma_y m \dfrac{dz}{dy} = p_{nz}. \end{cases} \qquad (4)$$

Выражая площади треугольников, входящих в формулы (3), через $OA = dx$, $OC = dy$, $OB = dz$, получим систему уравнений вида

$$\begin{cases} 1 + \left(\dfrac{dz}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{l^2}; \\ 1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{m^2}; \\ 1 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{1}{n^2}. \end{cases} \qquad (5)$$

Решением этой системы являются искомые равенства

$$\frac{dx}{dz} = \frac{l}{m};\ \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n};\ \frac{dz}{dy} = \frac{n}{l}. \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяют соотношениям (5) в силу равенства $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Подставляя соотношения (6) в (4), перепишем (4) в виде

$$\begin{cases}\sigma_x lm + \tau_{xy} m^2 - \sigma_z nl = mp_{nx};\\ \sigma_y mn + \tau_{yz} n^2 - \sigma_x lm = np_{ny};\\ \sigma_z nl + \tau_{zx} l^2 - \sigma_y mn = lp_{nz}.\end{cases} \tag{7}$$

Из (7) получим

$$\tau_{xy} = \frac{mp_{nx} + \sigma_z nl - \sigma_x lm}{m^2};$$
$$\tau_{yz} = \frac{np_{ny} + \sigma_x lm - \sigma_y mn}{n^2}; \tag{8}$$
$$\tau_{zx} = \frac{lp_{nz} + \sigma_y mn - \sigma_z nl}{l^2}.$$

Подставляя эти соотношения в (2), с учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, после несложных преобразований получим

$$\begin{cases}\sigma_x l^2 m^2 + mn(n^2 - lm)\sigma_y = -lmnp_{ny};\\ \sigma_y m^2 n^2 + nl(l^2 - mn)\sigma_z = -lmnp_{nz};\\ \sigma_z n^2 l^2 + lm(m^2 - nl)\sigma_x = -lmnp_{ny}.\end{cases} \tag{9}$$

Решаем данную систему по формулам Крамера

$$\sigma_x = \Delta_x/\Delta_1,\ \sigma_y = \Delta_y/\Delta_1,\ \sigma z = \Delta_z/\Delta_1,$$

где

$$\Delta_x = -lmn\begin{vmatrix} p_{nz} & m^2n^2 & nl(l^2 - mn)\\ p_{nx} & 0 & m^2n^2\\ p_{ny} & mn(n^2 - lm) & 0\end{vmatrix} =$$
$$= l^2m^2n^2[n^2 l(n^2 - lm)p_{nz} - lmn^3 p_{ny} -$$
$$- n(n^2 - lm)(l^2 - mnp_{nx})];$$

$$\Delta_y = -lmn\begin{vmatrix} 0 & p_{nz} & nl(l^2 - mn)\\ lm(m^2 - nl) & p_{nx} & m^2n^2\\ l^2n^2 & p_{ny} & 0\end{vmatrix} =$$
$$= l^2m^2n^2[l^2 m(l^2 - mn)p_{nx} - mnl^3 p_{nz} -$$
$$- l(l^2 - mn)(m^2 - nlp_{nx})];$$

$$\Delta_z = -lmn\begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & p_{nz}\\ lm(m^2 - nl) & 0 & p_{nx}\\ l^2n^2 & mn(n^2 - lm) & p_{ny}\end{vmatrix} =$$
$$= l^2m^2n^2[m^2 n(m^2 - nl)p_{ny} - nlm^3 p_{ny} -$$
$$- m(m^2 - nl)(n^2 - lmp_{nz})];$$

$$\Delta_1 = -lmn\begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & nl(l^2 - mn)\\ lm(m^2 - nl) & 0 & m^2n^2\\ l^2n^2 & mn(n^2 - lm) & 0\end{vmatrix} =$$
$$= l^2m^2n^2[l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)].$$

В результате получим

$$\sigma_x = \frac{n}{\Delta}[-(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} -$$
$$- lmn^2 p_{ny} + nl(n^2 - lm)p_{nz}];$$
$$\sigma_y = \frac{l}{\Delta}[lm(l^2 - mn)p_{nx} -$$
$$- (l^2 - mn)(m^2 - nl)p_{ny} - mnp_{nz}]; \tag{10}$$
$$\sigma_z = \frac{m}{\Delta}[-nlm^2 p_{nx} + mn(m^2 - nl)p_{ny} -$$
$$- (m^2 - nl)(n^2 - lm)p_{nz}],$$

где $\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Отметим, что в системе (9) сокращения не производились с целью симметрии уравнений, т. е. мы как умножили первую, вторую и третью строчки, соответственно, на l, m, n. Результат будет тот же.

Подставляя найденные значения (10) в (8), определяем:

$$\tau_{xy} = \frac{m}{\Delta}[(n^2 - lm)(l^2 - mn)p_{nx} +$$
$$+ lmn^2 p_{ny} + nl(n^2 - lm)p_{nz}];$$
$$\tau_{yz} = \frac{n}{\Delta}[-lm(l^2 - mn)p_{nx} - (l^2 - mn)\times$$
$$\times(m^2 - nl)p_{ny} - mnl^2 p_{nz}]; \tag{11}$$
$$\tau_{zx} = \frac{l}{\Delta}[nlm^2 p_{nx} - mn(m^2 - nl)p_{ny} +$$
$$+ (m^2 - nl)(n^2 - lm)p_{nz}].$$

где $\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2 - mn)(m^2 - nl)(n^2 - lm)$.

Сделаем проверку, подставляя (10) и (11) в (2). Проделав очевидные математические преобразования, убеждаемся в правильности полученных формул.

Приведем численный пример: $l = 2/3$, $m = 2/3$, $n = 1/3$, $p_{nx} = 1$, $p_{ny} = 2$, $p_{nz} = 3$. Непосредственно по формулам (10) и (11) находим

$$\sigma_x = -15;\ \sigma_y = 36;\ \sigma_z = 27;\ \tau_{xy} = 30;\ \tau_{yz} = 18;\ \tau_{zx} = -27.$$

Таким образом, нам удалось восстановить тензор напряжений в данной точке только по действующим на заданной наклонной площадке усилиям

$$T_\sigma = \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15 & 30 & -27\\ 30 & -36 & 18\\ -27 & 18 & 27\end{pmatrix}\text{МПа}. \tag{12}$$

Теперь окончательно убеждаемся, что формула (12) окончательно удовлетворяется в числах

$$-(15)\frac{2}{3} + 30\frac{2}{3} + (-27)\frac{1}{3} = 1;$$
$$-10 + 20 - 9 = 1;\ 1 = 1;$$

$$30\frac{2}{3} + (-36)\frac{2}{3} + 18\frac{1}{3} = 2;$$
$$20 - 24 + 6 = 2;\ 2 = 2;$$

$$-(27)\frac{2}{3} + 18\frac{2}{3} + 27\frac{1}{3} = 3;$$
$$-18 + 12 + 9 = 3;\ 3 = 3.$$

Итак, решены две прямые, и что наиболее важно, две обратные задачи теории упругости. Алгоритм решения обратных задач приводится впервые и его авторы уверены в том, что он принесет несомненную пользу всем специалистам, работающим в данном направлении. Более подробный, чем ранее, анализ объемного напряженно деформируемого состояния в точке позволяет более глубоко изучить прочностные свойства несущих элементов конструкций как в отдельных сечениях так и в целом. Отметим также то обстоятельство, что решение первой обратной задачи уже внедрено в учебный процесс и прошло апробацию в течение двух последних лет на строительном факультете Белорусского национального технического университета. Решение второй обратной задачи как бы замыкает поставленную проблему и придает ей дополнительную стройность и законченность.

Список литературы

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учеб. под ред. Г.С. Варданяна. — М.: Изд-во АСВ, 1995. — 568 с.

Akimov V.A., Goncharova S.V.

The solution of two direct and reverse their task in elasticity

Analysis of the volume of stress strain state in a point isotropic elastic body is one of the key topics in the course of resistance of materials and elasticity theory. In turn, the study of this subject of great importance for the problem of finding a given stress tensor major platforms and operating their principal stresses, as well as finding a stress on a sloping site. The authors of this paper call these tasks straight and made it our goal to solve the inverse problem to them, the final result of the decision to take over the tasks of the raw data and restore it at a given stress tensor. As a result, this paper built the two solutions of direct and inverse problems of the theory of elasticity them to surround the state of stress, promotes a more detailed analysis of volume stressed state at the point of deformable solids. The solution of inverse problems of the problem posed closes and gives it an extra harmony and perfection. These calculations in solving them are original character.

Поступил в редакцию 07.07.2015.