УДК 621.762.4

А.И. ДУДЯК, д-р техн. наук; Ж.Г. ДИКАН
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Рассмотрено плоское сечение, состоящее из двух различных материалов, отличающихся модулями продольной упругости. Предложен порядок расчета геометрических характеристик такого сечения. Представлены результаты расчета.

Ключевые слова: *неоднородный материал, жесткость сечения, сечение переменной жесткости*

Введение. В курсе сопротивления материалов основным изучаемым объектом является стержень, материал которого является однородным и изотропным, это означает, что в любом объеме и в любом направлении свойства материала одинаковы.

Однако в данное время широко начали применять композиционные материалы, в которых основу материала стержня армируют большим количеством стержней из другого материала, отличающегося от основного материала физико-механическими характеристиками. Типичным примером могут быть железобетонные балки. Сечение такой балки составлено из двух материалов с соотношением модулей продольной упругости $E_1 \neq E_2$.

При решении задач о прочности, жесткости и устойчивости приходится проводить сечение стержня плоскостью и рассматривать некоторые новые геометрические характеристики сечений [1–3]. К таким характеристикам следует отнести статические моменты и моменты инерции плоских фигур.

Сечение стержня из двух разнородных материалов. Если стержни изготавливаются из нескольких материалов, то такие геометрические характеристики как статические моменты и моменты инерции плоских фигур в расчетах использовать нельзя. Для получения геометрических характеристик такого сечения рассмотрим плоское сечение произвольной формы, составленное из двух материалов, отличающихся модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рисунок 1).

Формулы для статических моментов площади относительно осей X и Y, известные из курса «Сопротивление материалов» имеют вид:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \tag{1}$$

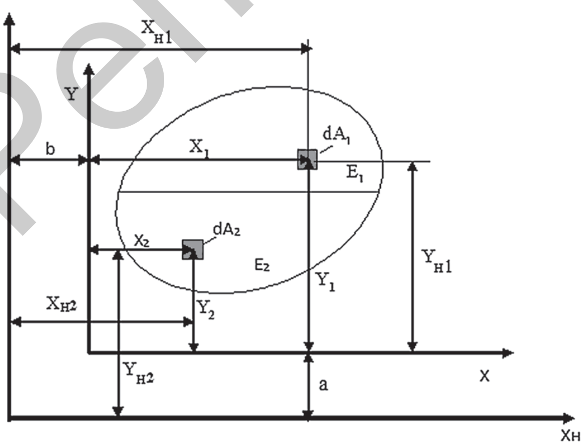

Рисунок 1 — Осевое сечение стержня произвольной формы, состоящее из прочно соединенных между собой стержней

По аналогии статические моменты жесткости сечения, состоящего из двух материалов относительно тех же осей можно представить в виде:

$$ES_x = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2; \tag{2}$$

$$ES_y = E_1 \int_{A_1} x_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2, \tag{3}$$

где ES_x и ES_y — статические моменты жесткости сечения относительно осей X и Y соответственно.

$$S_{x_1} = \int_{A_1} y_1 dA_1; \; S_{x_2} = \int_{A_2} y_2 dA_2; \; S_{y1} = \int_{A_1} x_1 dA_1; \; S_{y2} = \int_{A_2} x_2 dA_2$$

— статические моменты площадей A_1 и A_2 относительно осей X и Y.

В соответствии со знаком координат статический момент жесткости может быть больше или меньше нуля. Поэтому для любого подобного сечения стержня можно определить местоположение координатных осей, относительно которых суммарный статический момент жесткости сечения будет равен нулю. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения $x_ж$ и $y_ж$ относительно принятых осей x и y. В этом случае статические моменты жесткости сечения ES_x и ES_y можно представить в виде:

$$ES_x = (E_1 A_1 + E_2 A_2) y_ж; \tag{4}$$

$$ES_y = (E_1 A_1 + E_2 A_2) x_ж. \tag{5}$$

Рассматривая совместно выражения (2), (3), (4) и (5), получим выражение для определения местоположения центра жесткости сечения:

$$x_ж = \frac{E_1 S_{y_1} + E_2 S_{y_2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}; \tag{6}$$

$$y_ж = \frac{E_1 S_{x_1} + E_2 S_{x_2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \tag{7}$$

Если поперечное сечение стержня состоит из «*n*» материалов, отличающихся между собой продольными модулями упругости, то выражение для определения координат жесткости сечения можно представить в виде:

$$x_ж = \frac{E_1 S_{y_1} + E_2 S_{y_2} + \ldots + E_n S_{yn}}{(E_1 A_1 + E_2 A_2 + \ldots + E_n A_n)}; \tag{8}$$

$$y_ж = \frac{E_1 S_{x_1} + E_2 S_{x_2} + \ldots + E_n S_{xn}}{(E_1 A_1 + E_2 A_2 + \ldots + E_n A_n)}. \tag{9}$$

Анализируя выражения (8) и (9), приходим к выводу, что это выражение будет полностью соответствовать формулам сопротивления материалов для определения центра тяжести сечения из однородного материала, если $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$.

Из курса «Сопротивление материалов» известно, что осевыми моментами инерции для плоских сечений из однородного материала называются интегралы произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до соответствующих осей [1–3] и их можно представить в виде:

$$I_x = \int_A y^2 dA;\ I_y = \int_A x^2 dA. \qquad (10)$$

Центробежный момент инерции представляет собой интеграл вида:

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \qquad (11)$$

Полярный момент инерции – это интеграл вида:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \qquad (12)$$

где ρ — расстояние от начала координат до элементарной площадки dA.

В случае расчета на прочность и жесткость при изгибе и устойчивости стержней, сечения которых состоят из двух или более различных материалов и жестко соединенных между собой, следует использовать момент инерции жесткости сечения. Для определения момента инерции жесткости сечения рассмотрим стержень, состоящий из двух разнородных материалов. Такое сечение показано на рисунке 1. В этом случае момент инерции жесткости сечения относительно осей *X* и *Y* можно представить в виде:

$$(EI_x)_ж = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2; \qquad (13)$$

$$(EI_y)_ж = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \qquad (14)$$

Центробежный момент инерции жесткости сечения можно выразить следующим образом:

$$(EI_{xy})_ж = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \qquad (15)$$

Выражения (13), разделенное на выражение (15), с учетом выражения (10), разделенного на выражение (12), можно представить в виде:

$$(EI_x)_ж = E_1 I_{x_1} + E_2 I_{x_2}; \qquad (16)$$

$$(EI_y)_ж = E_1 I_{y_1} + E_2 I_{y_2}; \qquad (17)$$

$$(EI_{xy})_ж = E_1 I_{x_1 y_1} + E_2 I_{x_2 y_2}. \qquad (18)$$

Если стержень состоит из «*n*» разнородных материалов, то моменты инерции жесткости такого сечения будут иметь вид:

$$(EI_x)_ж = E_1 I_{x_1} + E_2 I_{x_2} + \ldots + E_n I_{xn}; \qquad (19)$$

$$(EI_y)_ж = E_1 I_{y_1} + E_2 I_{y_2} + \ldots + E_n I_{yn}; \qquad (20)$$

$$(EI_{xy})_ж = E_1 I_{x_1 y_1} + E_2 I_{x_2 y_2} + \ldots + E_n I_{xnyn}; \qquad (21)$$

Величины осевых моментов инерции жесткости всегда будут положительны. В зависимости от положения осей *X* и *Y* центробежный момент жесткости сечения может быть положительным и отрицательным, а также равен нулю.

Рассмотрим особые свойства моментов жесткости плоских сечений. Установим формулы связи между моментами жесткости при параллельном переносе осей. Оси $X_н$ и $Y_н$ параллельны первоначальным осям *X* и Y. Статические моменты жесткости сечения относительно осей $X_н$ и $Y_н$ можно представить в виде:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} y_{н_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{н_2} dA_2; \qquad (22)$$

$$ES_{yн} = E_1 \int_{A_1} x_{н_1} dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{н_2} dA_2. \qquad (23)$$

Так как $y_{н1} = y_1 + a$; $y_{н2} = y_2 + a$, то выражение (22) можно представить в виде:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} (y_1 + a) dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + a) dA_2. \qquad (24)$$

Раскрывая круглые скобки после некоторых математических преобразований и с учетом того, что величина «*a*» расстояние между осями *X* и $X_н$ постоянная, получим:

$$ES_{xн} = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2 + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot a. \qquad (25)$$

С учетом выражения (2) окончательно выражение (25) примет вид:

$$ES_{xн} = ES_x + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot a. \qquad (26)$$

Рассматривая аналогично выражение (23) получим величину $ES_{yн}$, которая примет вид:

$$ES_{yн} = ES_y + (E_1 A_1 + E_2 A_2) \cdot b. \qquad (27)$$

Если поперечное сечение стержня состоит из «*n*» материалов, отличающихся между собой продольными модулями упругости, формулы для определения статического момента жесткости при параллельном переносе осей будут иметь вид:

$$ES_{xн} = ES_x + a \sum_{i=1}^{n} E_i A_i; \qquad (28)$$

$$ES_{yн} = ES_y + a \sum_{i=1}^{n} E_i A_i, \qquad (29)$$

где $E_i A_i$ — жесткости соответствующих частей сечения при растяжении или сжатии; ES_x и ES_y — статические моменты жесткости сечения относительно первоначальных осей *X* и *Y*.

Геометрические характеристики при параллельном переносе осей. Аналогично определяем свойства моментов инерции жесткости при параллельном переносе осей в соответствии с рисунком 1.

Моменты инерции жесткости сечения относительно осей $x_н$ и $y_н$, используя выражения (13) и (14) представим в виде

$$(EI_x)_{жн} = E_1 \int_{A_1} y_{н_1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_{н_2}^2 dA_2; \qquad (30)$$

$$(EI_y)_{жн} = E_1 \int_{A_1} x_{н_1}^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_{н_2}^2 dA_2. \qquad (31)$$

Выражение (30) с учетом того, что $y_{н1} = y_1 + a$; $y_{н2} = y_2 + a$ можно представить в виде

$$(EI_x)_{жн} = E_1 \int_{A_1} (y_1 + a)^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} (y_2 + a)^2 dA_2. \qquad (32)$$

После ряда математических преобразований получим:

$$(EI_x)_{жн} = E_1 I_{y_1} + E_2 I_{y_2} + 2a(\int_{A_1} y_1 dA_1 + \int_{A_2} y_2 dA_2) + a^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2]. \qquad (33)$$

С учетом выражений (2) и (16) выражение (33) можно представить в виде

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_ж + 2a(ES_x) + a^2 [E_1 A_1 + E_2 A_2]. \qquad (34)$$

Аналогично рассматривая выражение (31), получим

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_{жн} + 2b(ES_y) + \\ + b^2[E_1A_1 + E_2A_2]. \quad (35)$$

Центробежный момент инерции жесткости сечения относительно осей $x_н$ и $y_н$, используя выражение (15), получим:

$$(EI_{xy})_{жн} = E_1\int_{A_1} x_{н_1} y_{н_1} dA_1 + E_2\int_{A_2} x_{н_2} y_{н_2} dA_2. \quad (36)$$

Подставив значения $x_{н1}$, $x_{н2}$, $y_{н1}$, $y_{н2}$, выраженные через координаты относительно первоначальных осей x и y с учетом расстояний между новыми осями a и b получим

$$(EI_{xy})_{жн} = E_1\int_{A_1}(x_1 + b)(y_1 + a)dA_1 + \\ + E_2\int_{A_2}(x_2 + b)(y_2 + a)dA_2. \quad (37)$$

После ряда математических преобразований выражение (37) имеет вид:

$$(EI_{xy})_{жн} = E_1\int_{A_1} x_1y_1dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2y_2dA_2 + \\ + a[E_1\int_{A_1} x_1dA_1 + E_2\int_{A_2} x_2dA_2] + b[E_1\int_{A_1} y_1dA_1 + \\ + E_2\int_{A_2} y_2dA_2] + ab\left[E_1A_1 + E_2A_2\right]. \quad (38)$$

С учетом выражений (2), (3) и (15), выражение (38) окончательно примет следующий вид:

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a(ES_y) + \\ + b(ES_x) + a\cdot b[E_1A_1 + E_2A_2]. \quad (39)$$

Центральными осями жесткости назовем оси, проходящие через центр жесткости сечения, координаты которых определяют из выражений (8) и (9). Очевидно, это статические моменты жесткости относительно этих осей ES_x и ES_y будут равны нулю. Если за оси отсчета взять центральные оси жесткости, то выражения (34), (35) и (39) примут следующий вид:

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_{ж} + a^2[E_1A_1 + E_2A_2]; \quad (40)$$

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_{ж} + b^2[E_1A_1 + E_2A_2]; \quad (41)$$

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a\cdot b[E_1A_1 + E_2A_2]. \quad (42)$$

Если сечение представлено в виде «n» разнородных материалов, то выражение (40), разделенное на выражение(42) можно представить в виде:

$$(EI_x)_{жн} = (EI_x)_{ж} + a^2\sum_{i=1}^{n} E_iA_i; \quad (43)$$

$$(EI_y)_{жн} = (EI_y)_{ж} + b^2\sum_{i=1}^{n} E_iA_i; \quad (44)$$

$$(EI_{xy})_{жн} = (EI_{xy})_{ж} + a\cdot b\sum_{i=1}^{n} E_iA_i. \quad (45)$$

Из выражений (43) и (44) следует, что осевой момент инерции жесткости сечения относительно произвольной оси равен осевому моменту инерции жесткости этой фигуры относительно центральной оси жесткости плюс произведение суммы жесткостей отдельный частей сечения при осевом растяжении или сжатии на квадрат расстояния между соответствующими осями.

Пример. Для сечения, показанного на рисунке 2, состоящего из стальной, медной и алюминиевых пластин, определить место положения центральных осей жесткости $x_ж$ и $y_ж$, а также момент инерции жесткости относительно этих осей. Сталь $E_1 = 2\cdot 10^5$ МПа, медь $E_2 = 1{,}2\cdot 10^5$ МПа, алюминий $E_3 = 0{,}7\cdot 10^5$ МПа.

Ось Y является осью симметрии сечения, и поэтому она является центральной осью жесткости сечения, где a_1, a_2, a_3 — расстояния от оси отсчета x до центра тяжести сечений из стали, меди и алюминия соответственно.

Используя выражение (9), находим координату $y_ж$, которая определяет место положения центральной оси жесткости x

$$y_ж = \frac{E_1S_{x_1} + E_2S_{x_2} + E_3S_{x_3}}{E_1A_1 + E_2A_2 + E_3A_3}.$$

Так как статический момент площади S_x — это произведение площади на расстояние от оси отсчета до центральной оси отдельной фигуры, то будем иметь

$$y_ж = \frac{E_1A_1a_1 + E_2A_2a_2 + E_3A_3a_3}{E_1A_1 + E_2A_2 + E_3A_3}.$$

Подставив численные значения в полученное выражение будем иметь:

$$y_ж = \frac{2\cdot10^5\cdot30\cdot120 + 1{,}2\cdot10^5\cdot30\cdot120\cdot45}{2\cdot10^5\cdot30\cdot120 + 1{,}2\cdot10^5\cdot30\cdot120 + 0{,}7\cdot10^5\cdot30\cdot120\cdot45} + \\ + \frac{0{,}7\cdot10^5\cdot30\cdot120\cdot15}{2\cdot10^5\cdot30\cdot120 + 1{,}2\cdot10^5\cdot30\cdot120 + 0{,}7\cdot10^5\cdot30\cdot120\cdot45} = 55\text{мм}.$$

На рисунке 3 показано сечение с полученными центральными осями жесткости сечения.

Проверим правильность определения места положения центральной оси жесткости. Относительно оси $X_ж$ статический момент жесткости сечения должен быть равен нулю

$$EI_{Xж} = E_1A_1m_1 + E_2A_2(-m_2) + E_3A_3(-m_3).$$

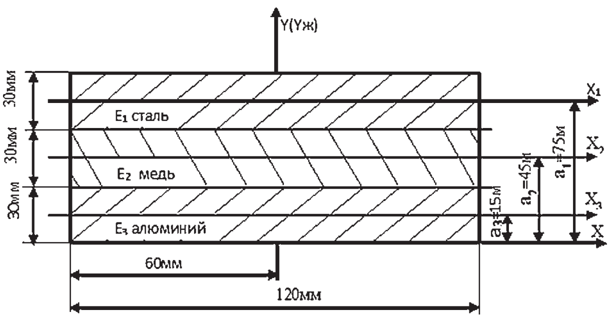

Рисунок 2 — Осевое сечение стержня, состоящее из стального, медного и алюминиевого стержней

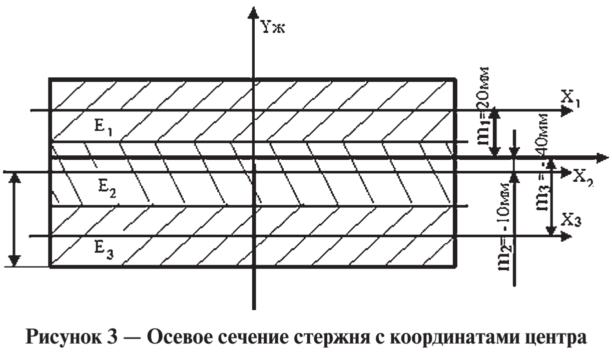

Рисунок 3 — Осевое сечение стержня с координатами центра жесткости сечения $X_ж$ и $Y_ж$

где m_1, m_2 и m_3 — расстояния от центральной оси жесткости до центральных осей отдельных фигур.

Подставив численные значения, получим:

$$EI_{x ж} = 2\cdot10^5\cdot30\cdot120\cdot20+1{,}2\cdot10^5\times$$
$$\times30\cdot120\cdot(-10)+0{,}7\cdot10^5 30\cdot120\cdot(-40)=$$
$$=144000\cdot10^5-43200\cdot10^5-$$
$$-100800\cdot10^5=144\cdot10^8-144\cdot10^8=0.$$

Полученное значение $EI_{xж}$ показывает, что местоположение центральной оси жесткости установлено правильно. Определим момент инерции жесткости сечения относительно оси $X_ж$, используя выражение (16), которое в расширенном виде представим:

$$(EI_x)_ж = E_1\left(\frac{b_1h_1{}^3}{12}+b_1h_1m_1^2\right)+$$
$$+E_2\left(\frac{b_2h_2{}^3}{12}+b_2h_2m_2^2\right)+E_3\left(\frac{b_3h_3{}^3}{12}+b_3h_3m_3^2\right),$$

где b_1, b_2, b_3 — ширина каждого сечения, равная 120 мм; h_1, h_2, h_3 — высота каждого сечения, равная 30 мм.

Подставив численные значения в последнее выражение, получим:

$$(EI_x)_ж = 2\cdot10^5\left[\frac{120*30^3}{12}+120\cdot30\cdot20^2\right]+$$
$$+1{,}2\cdot10^5\left[\frac{120*30^3}{12}+120\cdot30\cdot(-10)^2\right]+$$
$$+0{,}7\cdot10^5\left[\frac{120\cdot30^3}{12}+120\cdot30\cdot(-40)\right]=$$
$$=2\cdot10^5(27\cdot10^4+144\cdot10^4)+1{,}2\cdot10^5(27\cdot10^4+36\cdot10^4)+$$
$$+0{,}7\cdot10^5(27\cdot10^4+576\cdot10^4)=342\cdot10^9+75{,}6\cdot10^9+$$
$$+422\cdot10^9=839{,}7\cdot10^9\,\text{Н}\cdot\text{мм}^2.$$

Определим момент инерции жесткости сечения относительно оси $Y_ж$, используя выражение (17)

$$(EI_y)_ж = E_1Iy_1+E_2Iy_2+EIy_3.$$

Подставив значения Yx_1, Yx_2, Yx_3 последнее выражение, получим:

$$(EI_y)_ж = E_1\frac{h_1b_1{}^3}{12}+E_2\frac{h_2b_2{}^3}{12}+E_3\frac{h_3b_3{}^3}{12}.$$

Подставив численные значения в последнее выражение, получим:

$$(EI_y)_ж = 2\cdot10^5\cdot\frac{30\cdot120^3}{12}+1{,}2\cdot10^5\cdot\frac{30\cdot120^3}{12}+$$
$$+0{,}7\cdot10^5\cdot\frac{30\cdot120^3}{12}=$$
$$=3{,}9\cdot10^5\cdot\frac{30\cdot120^3}{12}=1684\cdot10^9\ \text{Н}\cdot\text{мм}^2.$$

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах на прочность такого стержня при изгибе, растяжении и сжатии, устойчивости и т. д.

Список литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. — М.: Наука, 1972. — 541 с.
2. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко [и др.]. — Киев: Техника, 1967. — 783 с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1972. — 559 с.

Dudyak A.I., Dikan Zh.G.
Geometrical plane section characteristics

The plane section consisting of two different materials that differ by the longitudinal elasticity modules is considered. The procedure for calculating the geometrical characteristics of the section is proposed. The calculation results are presented.

Поступил в редакцию 30.06.2015.