УДК 539:374.002.62

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук; К.А. ГОРЕЛЫЙ, канд. техн. наук
С.В. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук; С.Н. ИВАНОВ
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ПРЕПРЕГОВ

Исследуются препреги на основе тканей гладкого переплетения, имеющих упорядоченное расположение волокон. Проведен расчет потенциальной энергии деформации каждого семейства нитей. Показано, что потенциальная энергия деформации достигает абсолютного минимума для поля действительных перемещений.

Ключевые слова: *деформация, потенциальная энергия, композит, ткань, препрег*

Рассматриваются препреги, представляющие ортотропную многослойную структуру на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон и пропитанных связующим в неотвержденном состоянии [1]. Предполагается присутствие давления p, которое представляет собой удельное давление оснастки на наружные поверхности препрега. Присутствие вязкого связующего в препреге в результате деформации может оказать влияние на изменение давления, и оно станет переменным. Однако арматура препрега представляет собой пористую среду, поэтому связующее, как несжимаемая жидкость, перетекает в зоны с меньшим давлением. По истечении некоторого времени внутрипоровое давление связующего в препреге выравнивается, и только после этого процесс деформирования препрега завершается. На этом основании считаем, что связующее не оказывает влияния на напряженное состояние в нитях препрега. Связующее выполняет роль смазки, уменьшая силы трения в узлах переплетения нитей. Таким образом, считаем, что в рассматриваемой модели препрега связующее отсутствует в явном виде и поэтому для построения математической модели используется линейно-упругая модель. На этом основании была установлена зависимость между компонентами деформаций и компонентами напряжений у семейств нитей (основа и уток) [1]

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}+\gamma_{11};\ \varepsilon_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}+\gamma_{22};$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{\sigma_{12}}{E_{12}}+\gamma_{12};\ \varepsilon_{21}=\frac{\sigma_{21}}{E_{21}}+\gamma_{21}. \tag{1}$$

Здесь индексы «$_{11}$» и «$_{22}$» характеризуют растяжение первого и второго семейств нитей тканого материала препрегов. Индексы «$_{12}$» и «$_{21}$» — поперечное сжатие первого и второго семейств нитей.

Получены уравнения равновесия семейств нитей [2]

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1}-\frac{R_1}{h_0}\tau_{12}^{\text{пр}}=0;\ h_0\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial R_1}-\frac{h_0}{R_1}\sigma_{11}+\tau_{21}\sin\alpha=0;$$
$$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{R_2}{h_0}\tau_{21}^{\text{пр}}=0;\ h_0\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial R_2}-\frac{h_0}{R_2}\sigma_{22}+\tau_{12}\sin\alpha=0, \tag{2}$$

где α_1 и R_1 — полярные координаты, характеризующие семейства нитей «1», а α_2 и R_2 — полярные координаты, характеризующие семейства нитей «2»; h_0 — толщина слоя ткани.

Останавливаясь на сжатии препрегов, необходимо отметить, что сжатие без потери устойчивости может быть осуществлено только совместно с растяжением второго семейства нитей. В результате сжатия, свободно скрещенные волокна нитей могут практически свободно скользить друг относительно друга, что приводит к возникновению сил трения между ними. Предельные значения таких сил определяются выражениями [3]

$$\tau_{12}^{\text{пр}}=(k_{11}\sigma_{11}+k_{12}\sigma_{22})\sin^2\alpha+\mu_1\rho;$$
$$\tau_{21}^{\text{пр}}=(k_{21}\sigma_{11}+k_{22}\sigma_{22})\sin^2\alpha+\mu_2\rho; \tag{3}$$

где α — угол между нитями семейств; τ_{12} и τ_{21} — силы трения, приложенные к нитям соответствующих семейств; p — давление оснастки на препрег. При этом следует иметь в виду, что все точки препрега, подвергнутые деформации, находятся в предсдвиговом состоянии. Это означает, что

$$\tau_{12}-\tau_{21}\cos\alpha=\tau_{12}^{\text{пр}};\ \tau_{21}-\tau_{12}\cos\alpha=\tau_{12}^{\text{пр}}.$$

Когда происходит плоская деформация препрегов, между слоями ткани отсутствует сдвиг, поэтому при рассмотрении напряженно-деформированного состояния можно обойтись рассмотрением одного слоя ткани. Пусть в какой-то точке ткани в результате деформации угол между семействами нитей стал равным α. Вырежем небольшой ромбик из ткани с длиной стороны a и гранями перпендикулярными к главным осям напряжений сжатия семейств нитей σ_{12} и σ_{21}. Предположим, что величины главных напряжений σ_{11}, σ_{12},σ_{21}, σ_{22} и главных деформаций ε_{11}, ε_{12}, ε_{21}, ε_{22} достигнуты в результате непрерывного нарастания, и промежуточные значения напряжений и деформаций соответственно равны $k\sigma_{11}$, $k\sigma_{12}$, $k\sigma_{21}$, $k\sigma_{22}$, $k\varepsilon_{11}$, $k\varepsilon_{12}$, $k\varepsilon_{21}$, $k\varepsilon_{22}$, где k изменяется от 0 до 1, а $\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\gamma_{ij}$ — относительная упругая деформация. Работа от неупругой относительной деформации $\gamma_{ij}(i, j = 1, 2)$ равна нулю. Тогда в любой стадии сила, приложенная, например, к нитям семейства «1» и растягивающая их будет равна $kh_0a\sigma_{11}\sin\alpha$, а упругое перемещение этих нитей в направлении σ_{11} при увеличении k до $k + dk$ будет равно $a\varepsilon_{11}dk$, так что полная работа, произведенная силами в направлении σ_{11}, в конечном итоге будет иметь вид

$$h_0\alpha^2\sigma_{11}\varepsilon_{11}\sin\alpha\int_0^1 k\,dk=\frac{1}{2}h_0\alpha^2\sigma_{11}\varepsilon_{11}\sin\alpha.$$

Работа при сжатии вырезанного тела в направлении напряжения σ_{12} равна работе при сжатии параллелепипеда размером $h_0\times a\times a\sin\alpha$. В этом случае сжимающая сила $h_0a\sigma_{12}k$ на упругом перемещении, равном $a\varepsilon_{12}\sin\alpha dk$, производит работу

$$\frac{1}{2}h_0\alpha^2\sigma_{12}\varepsilon_{12}\sin\alpha.$$

Аналогичные выражения можно получить и относительно других направлений. Сложим их вместе и разделим на объем вырезанного тела $h_0 a^2 \sin\alpha$. В результате получим

$$W = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\varepsilon_{21}\right], \qquad (4)$$

где W является удельной внутренней работой деформации. Необходимо также отметить, что конечная величина накопленной энергии независима от характера нагружения и линейное выражение нагрузки в данном случае выбрано лишь для простоты расчета.

Выражение для удельной внутренней работы может быть представлено в другой форме. Используя выражения (1), можно получить

$$W = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \sigma_{22}\frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \sigma_{12}\frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \sigma_{21}\frac{\sigma_{21}}{E_{21}}\right].$$

Таким образом, удельная внутренняя работа деформации является положительно определенной величиной. Здесь работу от неупругих деформаций γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22} считаем равной нулю.

Рассмотрим теперь первое семейство нитей в отдельности от второго, заменив их взаимодействие силами трения τ_{12} и τ_{21}. Вырежем из этого слоя параллелепипед высотой h_0 и основанием размером $a \times a$, где a — достаточно малая величина. Грани параллелепипеда перпендикулярны к главным осям напряжений и деформаций σ_{11}, σ_{12}, ε_{11}, ε_{12}. Величины главных напряжений σ_{11}, σ_{12} и главных деформаций ε_{11}, ε_{12} достигнуты в результате непрерывного нарастания. Тогда, так же как и в предыдущем случае, работы, произведенные силами в направлениях σ_{11} и σ_{12}, будут соответственно равны

$$\frac{1}{2}\sigma_{11} h_0 \alpha^2 \varepsilon_{11};\ \frac{1}{2}\sigma_{12} h_0 \alpha^2 \varepsilon_{12}.$$

Определим работу, совершаемую силами трения. Рассмотрим на расстоянии t от края плоскости $a \times a$, в направлении которого действует сила $\tau_{12}^{\text{пр}}$, полосу шириной dt. Тогда сила $k\alpha\tau_{12}^{\text{пр}}dt$ совершит работу равную $\alpha k t \tau_{12}^{\text{пр}}\varepsilon_{11} dk dt$. Аналогичные рассуждения имеют место и для работы, совершаемой силой трения $\tau_{21}\sin\alpha$ в направлении σ_{12}. Полная работа в направлении σ_{11} в конечном состоянии будет равна

$$\int_0^a \alpha k t \tau_{12}^{\text{пр}} \varepsilon_{11} dk dt = \frac{1}{4}\tau_{12}^{\text{пр}}\varepsilon_{11}\alpha^3.$$

В направлении σ_{12} сила трения $\tau_{21}\sin\alpha$ совершает работу

$$\frac{\alpha^3}{4}\tau_{12}\varepsilon_{12}\sin\alpha.$$

Сложив их вместе и разделив на объем параллелепипеда $a^2 h_0$, следует рассматривать полученную сумму при $a \to 0$. Таким образом

$$W_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}\right]. \qquad (5)$$

Для семейства нитей «2» имеет место аналогичное равенство

$$W_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{21}\varepsilon_{21}\right]. \qquad (6)$$

При выводе формул (5) и (6) предполагалось, что нагрузки, приложенные к препрегу, возрастают очень медленно от нулевых до своих окончательных значений и остаются в этом конечном состоянии без изменений. Допускалось, что тепло, выделяемое в процессе этого медленного деформирования, отводится так, что термодинамический процесс можно считать изотермическим. Исключается возникновение источников тепла и нагревание поверхности. В частности, тепло, вырабатываемое силами трения, выводится полностью в окружающую среду. На этом основании объясняется отсутствие влияния сил трения на удельные внутренние работы деформации семейств нитей. Другими словами, работу сил трения на соответствующих перемещениях при выводе энергетических зависимостей для физической системы следует полагать равной нулю.

Очевидно, удельная внутренняя работа деформации препрега должна быть равна сумме удельных внутренних работ деформаций семейства нитей «1» и семейства нитей «2». Суммируя (5) и (6) убеждаемся, что полученная сумма равна величине W, определяемой формулой (4).

Из зависимостей (5) и (6) с учетом (1) следует, что

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{11}} = \sigma_{11};\ \frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon_{12}} = \sigma_{12};\ \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_{22}} = \sigma_{22};\ \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon_{21}} = \sigma_{21}. \qquad (7)$$

Будем рассматривать удельную внутреннюю работу деформации первого семейства нитей. В работе [4] компоненты перемещения семейства нитей «1» представлены как нормальная u_1 и касательная v_1 составляющие к кривой, совпадающей с нитью семейства после деформации. Они имеют функциональные зависимости от обобщенных координат(α_1, y). Однако, имеется и другая обобщенная система координат (α_1, R_1), через которую, например, выражаются напряжения σ_{11}и σ_{12} [2]. Имеется связь между этими системами. На этом основании будем считать, что перемещения также выражаются в цилиндрических координатах (α_1, R_1).

Между деформациями и перемещениями существуют зависимости

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial \nu_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1};\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial R_1}. \qquad (8)$$

Соотношения (8) справедливы, если их правые части достаточно малы. Для тканей гладкого переплетения ε_{11} и ε_{12} достаточно малы и поэтому выражения (8) справедливы. Дадим перемещениям u_1 и v_1 виртуальные перемещения δu_1 и δv_1, следствием которых являются виртуальные деформации $\delta\varepsilon_{11}$ и $\delta\varepsilon_{12}$. Предполагаем, что вариации δu_1 и δv_1 достаточно малы и не влияют на равновесие внешних сил и внутренних напряжений, и совместимы с условиями закрепления на границах. Это означает, что они кинематически допустимые функции, т. е. $\delta u_1 = 0$ и $\delta v_1 = 0$ на S_u (на границе S_u заданы перемещения, а на границе S_σ — напряжения).

Предположение об абсолютной гибкости нитей позволяет сделать вывод о том, что на границе области нити совпадают по направлению с внешней растягивающей силой и перпендикулярны сжимающей силе. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$P_{11} = \sigma_{11};\ P_{12} = \sigma_{12}. \qquad (9)$$

Считаем массовые силы отсутствующими. Тогда работа поверхностных сил на виртуальных перемещениях выражается следующим образом

$$\delta A_1 = \delta A_{11} + \delta A_{12}, \qquad (10)$$

где

$$\delta A_{11} = h_0 \oint_{(R)} (P_{11}, \delta\nu_1) dR + \int_F (\tau_{12}, \delta\nu_1) dR\, dL + \int_F (\tau_{21}, \delta\nu_1) dR\, dL;$$

$$\delta A_{22} = h_0 \oint_{(L)} (P_{11}, \delta\nu_1) dL + \int_F (\tau_{12}, \delta\nu_1) dR\, dL + \int_F (\tau_{21}, \delta\nu_1) dR\, dL.$$

Здесь криволинейный интеграл, у которого переменной интегрирования является радиус R, вычисляется вдоль кривой L; (P_{11}, dv_1) — скалярное произведение соответствующих векторов; τ_{12} и τ_{21} — силы трения, распределенные по поверхности F семейства нитей «1». На боковой поверхности S_σ заданные поверхностные силы P_{11} и P_{12} постоянны вдоль ее высоты h_0. Если соответствующие векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. С учетом этого условия и зависимостей (9) виртуальные работы преобразуются к виду

$$\delta A_{11} = h_0 \oint\limits_{(R)} \sigma_{11}\delta\nu_1 dR - \int\limits_F \tau_{12}^{\text{пр}} \cos\alpha\ \delta\nu_1 dR\, dL;$$
$$\delta A_{22} = \oint\limits_{(L_\sigma)} \sigma_{12}\delta u_1 dL + \int\limits_F \tau_{21} \sin\alpha\ \delta u_1 dR\, dL. \qquad (11)$$

Аналогично, виртуальные работы внутренних сил определяются как работы действительных внутренних напряжений на возможных деформациях

$$\partial W_1 = \partial W_{11} + \partial W_{12};$$
$$\delta W_{11} = h_0 \int\limits_F \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} dR\, dL;\ \ \delta W_{12} = h_0 \int\limits_F \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} dR\, dL. \qquad (12)$$

С учетом зависимостей (8) справедливы равенства

$$\delta(\varepsilon_{11} - \gamma_{11}) = \delta\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\delta\nu_{1,1} + \frac{\delta u_1}{R_1};$$
$$\delta\varepsilon_{12} = \delta u_{1,2}, \qquad (13)$$

где выражения $\delta\nu_{1,1}$ и $\delta u_{1,2}$ определяются из равенств

$$\delta\nu_{1,1} = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\delta\nu_1);\ \delta\nu_{1,2} = \frac{\partial}{\partial R_1}(\delta u_1).$$

Покажем, что если семейство нитей находится в равновесии, то следует равенство работ δA_1 и δW_1. Для этого преобразуем первые слагаемые в формулах (11), используя формулы Грина в цилиндрических координатах

$$h_0 \oint\limits_{(R)} \sigma_{11}\delta\nu_1 dR = \int\limits_F (\sigma_{11}\delta\nu_1)_{,1} \frac{dR\, dL}{R_1};$$
$$h_0 \oint\limits_{(L_0)} \sigma_{12}\delta u_1 dL = \int\limits_F (\sigma_{12}\delta u_1)_{,2}\, dR\, dL.$$

Воспользуемся равенством

$$(\sigma_{11}\delta\nu_1)_{,1} = \sigma_{11,1}\delta\nu_1 + \sigma_{11}\delta\nu_{1,1}$$

и подставим полученные преобразования в (11). В результате с учетом уравнений равновесия (2) и граничных условий (9) найдем

$$\delta A_{11} = h_0 \int\limits_F \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta\nu_{1,1} dF;$$
$$\delta A_{12} = h_0 \int\limits_F \sigma_{12}\delta u_{1,2} dF + \int\limits_F \frac{h_0}{R_1}\sigma_{11}\delta u_1 dF. \qquad (14)$$

С другой стороны, на основании (13) имеем

$$\delta W_{11} = h_0 \int\limits_F \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta\nu_{1,1} dF + h_0 \int\limits_F \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta u_1 dF;$$
$$\delta W_{12} = h_0 \int\limits_F \sigma_{12}\delta u_{1,2} dF. \qquad (15)$$

Сложив работы (14), убеждаемся, что результат равен сумме работ (15). Таким образом, имеем

$$\delta A_1 = \delta W_1. \qquad (16)$$

Покажем, что из равенства работ (16) следуют условия равновесия рассматриваемого семейства нитей «1». Для этого подынтегральные функции в правой части уравнений представим в виде

$$\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta\nu_{1,1} + \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta u_1 =$$
$$= \frac{1}{R_1}(\sigma_{11}\delta\nu_1)_{,1} - \frac{\sigma_{1,1}}{R_1}\delta\nu_1 + \frac{\sigma_{11}}{R_1}\delta u_1;$$
$$\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} = \sigma_{12}\delta u_{1,2} = (\sigma_{12}\delta u_1)_{,2} - \sigma_{12,2}\delta u_1.$$

Воспользовавшись формулой Грина и представлениями выше, уравнение (16) получим в виде

$$\int\limits_F \left(\frac{h_0}{R_1}\sigma_{11,1} - \tau_{12}^{\text{пр}}\right)\delta\nu_1 dF + \int\limits_F \left(h_0\sigma_{12,2} - \frac{h_0}{R_1}\sigma_{11} + \right.$$
$$\left. + \tau_{21}\sin\alpha\right)\delta u_1 dF + h_0 \oint\limits_{(R)} (P_{11} - \sigma_{11})\delta\nu_1 dR +$$
$$+ h_0 \oint\limits_{(L_\sigma)} (P_{12} - \sigma_{12})\delta\nu_1 dL = 0.$$

Так как вариации $\delta\nu_1$ и δu_1 произвольны, то для выполнения последнего равенства необходимо приравнять нулю подынтегральные выражения. В результате получим дифференциальное уравнение равновесия (2) и статические граничные условия в напряжениях (9). Символ δ означает, что варьируются только деформации и перемещения. Поэтому его можно вынести за знак интеграла. При этом результатом вариации для функции становится главная часть ее приращения, например, с учетом зависимостей (1) имеем

$$\delta W_{11} = \delta\left[\frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12})\right] = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}.$$

Тогда, приравнивая сумму работ (11) сумме работ (12), получаем

$$\delta\left[h_0 \int\limits_F \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) dF - h_0 \oint\limits_{(R)} P_{11}\nu_1\, dR - \right.$$
$$\left. - h_0 \oint\limits_{(L_\sigma)} P_{12} u_1 dL - \int\limits_F (\tau_{12}^{\text{пр}}\nu_1 + \tau_{21}\sin\alpha\, u_1) dF\right] = 0. \qquad (17)$$

Первый интеграл в скобках представляет собой потенциальную энергию деформации W, а остальные — потенциал внешних сил. Величину в квадратных скобках обозначим через Π и назовем потенциальной энергией семейства нитей «1». Тогда уравнению (17) можно придать вид

$$\delta\Pi = 0. \qquad (18)$$

Функционал Π принимает экстремальное значение. Покажем, что он достигает минимума. С этой целью сравним потенциальную энергию Π для поля перемещений u_1, ν_1 и потенциальную энергию Π для поля перемещений $u_1 + \delta u_1, \nu_1 + \delta\nu_1$. Предполагаем, что $\delta u_1 = 0$ и $\delta\nu_1 = 0$ на S_u. Поэтому имеем

$$\Pi' - \Pi = h_0 \int\limits_F (W_1' - W_1) dF - h_0 \oint\limits_{(R)} P_{11}\delta\nu_1 dR -$$
$$h_0 \oint\limits_{(L_\sigma)} P_{12}\delta u_1 dL - \int\limits_F \left(\tau_{12}^{\text{пр}}\delta\nu_1 + \tau_{21}\sin\alpha\delta u_1\right) dF. \qquad (19)$$

Разложим работу деформации $W_1'(\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} + \delta\varepsilon_{12})$ в ряд Тейлора, обрывая этот ряд на величинах второго порядка. В результате с учетом (7) получим

$$W_1'-W_1=\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{12}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{11}}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{12}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{12}}\delta\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12}=\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{11}}\left[\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{12}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{12}}\left[\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}\delta\varepsilon_{12}+\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}\delta\varepsilon_{12}\right].$$

С учетом (1) вторые слагаемые в квадратных скобках превращаются в ноль и тогда

$$W_1'-W_1=\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}+E_{11}(\delta\varepsilon_{11})^2+E_{12}(\delta\varepsilon_{12})^2.$$

Подставляя полученное выражение в (19), с учетом принципа виртуальных работ (17), найдем

$$\Pi'-\Pi=\frac{h_0}{2}\iint_F\left[E_{11}(\delta\varepsilon_{11})^2+E_{12}(\delta\varepsilon_{12})^2\right]dF.$$

Полученное выражение для $\Pi'-\Pi$ представляет работу деформаций при увеличении их на $\delta\varepsilon_{11}$ и $\delta\varepsilon_{12}$. Оно является положительной величиной, так как положительна подынтегральная функция. Это гарантирует существование абсолютного минимума для функционала Π.

Аналогичные рассуждения можно провести и для семейства нитей «2».

Выводы. 1. На основании проведенных исследований можно сформулировать следующее утверждение. Из всех перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, только действительные перемещения, отвечающие состоянию устойчивого равновесия, дают минимальное значение потенциальной энергии.

2. Обратная теорема, доказанная выше, гласит: если потенциальная энергия достигает абсолютного минимума для некоторого поля перемещений, удовлетворяющего граничным условиям $u_1=f_1$, $\nu_1=f_2$ на S_u, то это поле должно удовлетворять граничным условиям $P_{11}=\sigma_{11}$ и $P_{12}=\sigma_{12}$ на S_σ и уравнениям равновесия внутри тела.

Список литературы

1. Метод исследования напряженно-деформированного состояния неотвержденных композиционно-волокнистых материалов / В.И. Колганов [и др.]. — СПб, 2001. — Вып.4: Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий. — С. 125–134.
2. Василевич, Ю.В. Модель деформирования препрегов в условиях равновесия / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Машиностроение: межвед. науч.-технич. сб. — 2007. — № 22. — С. 134–142.
3. Сдвиговые перемещения нитей в неотвержденных тканых композитах под действием внешних нагрузок / М.А. Комков [и др.] // Вопросы оборонной техники. Серия 15: Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. — М.: Информтехника, 2004. — Вып. 1(134); 2(135). — С. 51–55.
4. Василевич, Ю.В. Конечная деформация препрегов в двух измерениях / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Машиностроение: межвед. науч.-технич. сб. — 2007. — № 22. — С. 142–149.

Vasilevich Yu.V., Gorelov K.A., Sakhonenko S.V., Ivanov S.N.

Calculation of the potential energy of deformation of the prepreg

We study prepregs based on plain weave fabrics, have-ing orderly arrangement of fibers. The calculation of strain energy of each family yarns. It is shown that the potential energy of deformation reaches an absolute minimum for actu-field displacements.

Поступил в редакцию 01.07.2015.