

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ДВУМЯ РЕЖИМАМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Цвирко И.В.

Научный руководитель – Крук Ю.С., к.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания, состоящую из  $N$  узлов. В сети циркулируют  $M$  заявок. Все заявки, циркулирующие в сети, подразделяются на активные (обыкновенные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями  $\nu_i$  и  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Информационный сигнал, поступивший в  $i$ -ый узел с интенсивностью  $\nu_i$ , уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в  $i$ -ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в  $i$ -ый узел с интенсивностью  $\varphi_i$ , уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в  $i$ -ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что  $i$ -ый узел может находиться в одном из двух режимов функционирования  $\mathbf{e}_i = \overline{0, 1}, i = \overline{1, N}$ . Состояние сети в момент времени  $t$  описывается вектором  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$ , где  $z_i(t) = (n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$  – состояние  $i$ -го узла в момент времени  $t$ . Здесь  $n_i(t)$ ,  $n'_i(t)$  – число активных и соответственно неактивных заявок в  $i$ -ом узле в момент времени  $t$ ,  $l_i(t)$  – режим функционирования  $i$ -го узла. Пространство состояний случайного процесса  $z_i(t)$  имеет вид

$$Z_i = \left\{ z_i = \mathbf{e}_i, n'_i, l_i \mid n_i, n'_i \geq 0, l_i = \overline{0, 1}, \sum_{i=1}^M (n_i + n'_i) = M \right\}.$$

Нумерация активных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в  $i$ -ом узле находится  $n_i$  активных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер  $n_i$ , а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди  $i$ -го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер  $n'_i$ . Поступающий в узел  $i$  сигнал  $\nu_i$

воздействует на активную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером  $n'_i + 1$ . Сигнал  $\varphi_i$  воздействует на неактивную заявку, имеющую номер  $n'_i$ , которая становится активной заявкой под номером 1.

Нулевой режим функционирования узла будем считать основным режимом работы, соответствующим максимальной степени работоспособности узла. С повышением режима работоспособность узла снижается. Время работы узла, находящегося в состоянии  $z_i = \langle n'_i, l_i \rangle$ , в режиме  $l_i \in \overline{0, 1}, i = \overline{1, N}$  имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью  $\tau_i$  ( $\tau_i > 0$ )  $i$ -ый узел переходит в 1-ый режим, а с интенсивностью  $\rho_i$  ( $\rho_i > 0$ ) – в нулевой режим. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром  $\mu_i(l_i) \in \overline{1, N}$ . Заявки обслуживаются в порядке поступления.

Каждая заявка после завершения обслуживания в  $i$ -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в  $j$ -ый узел с вероятностью  $p_{ij}$ . Не ограничивая общности рассуждений, будем считать  $p_{ii} = 0, i = \overline{1, N}$ .

Предполагается, что матрица вероятностей переходов  $\langle p_{ij} : i, j = \overline{0, N} \rangle$ , где  $p_{00} = 0$ , неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j p_{ji}.$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное с точностью до постоянного множителя решение  $\langle \varepsilon_i, i = \overline{1, N} \rangle$  [2].

Процесс  $z_i(t)$  – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_N$ , где  $Z_i$  – пространство состояний  $i$ -го узла.

Обозначим через  $\langle n'_i, l_i \rangle \in N$ -мерный вектор  $\tilde{z} \in Z$ , у которого все координаты, кроме  $i$ -ой, совпадают с координатами вектора  $z \in Z$ , а  $i$ -ая координата равна  $\langle n'_i, l_i \rangle \in Z_i$ . Через  $\langle n'_i, l_i \rangle, \langle n'_j, l_j \rangle$  обозначим  $N$ -мерный вектор  $\tilde{z} \in Z$ , у которого все координаты, кроме  $i$ -ой и  $j$ -ой, совпадают с координатами вектора  $z \in Z$ , а  $i$ -ая координата равна  $\langle n'_i, l_i \rangle \in Z_i$ ,  $j$ -ая координата равна  $\langle n'_j, l_j \rangle \in Z_j$ . Если  $q(x, y)$  – интенсивность перехода процесса  $z(t)$  из состояния  $x \in Z$  в состояние  $y \in Z$ ,  $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$  – интенсивность выхода из состояния  $x$ , то интенсивности переходов процесса  $z(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
q \in \mathbb{K}_i - 1, n'_i + 1, l_i &\rightrightarrows v_i I_{\{i \neq 0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i + 1, n'_i - 1, l_i &\rightrightarrows \varphi_i I_{\{i \neq 0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i, n'_i, l_i - 1 &\rightrightarrows \rho_i I_{\{i=1\}} \\
q \in \mathbb{K}_i, n'_i, l_i + 1 &\rightrightarrows \tau_i I_{\{i=0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i - 1, n'_i, l_i &\rightrightarrows \mathbb{K}_j + 1, n'_j, l_j \rightrightarrows \mu_i \mathbb{P}_{ij} I_{\{i \neq 0\}} \\
i, j = \overline{1, N}, z \in Z.
\end{aligned}$$

Для всех остальных состояний  $y \in Z$   $q(x, y) = 0$ .

Для рассмотренной модели сети доказана эргодичность, составлена и решена система уравнений глобального равновесия с целью нахождения стационарного распределения вероятностей состояний сети.

Запланирована разработка программного средства для компьютерного моделирования рассмотренной сети массового обслуживания.

### Литература

1. Jackson, J.R. Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. №1. P. 131 □ 142.
2. Gordon, W.J. Closed Queueing Nnetworks with Exponential Servers / W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. 1967. No 15. P. 252 □ 267.
3. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.
43. Tsitsiashvili, G. Sh. Distributions in stochastic network models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. NY : Nova Publishers Incorporated, 2008. 75 p.
5. Крук, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с неактивными заявками / Ю. С. Крук, Ю. Е. Дудовская // Минск : БНТУ, 2016. – 131 с.