УДК 539:374.002.62

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук; К.А. ГОРЕЛЫЙ, канд. техн. наук
С.В. САХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук; С.Н. ИВАНОВ
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НЕУПРУГИМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ДЕФОРМАЦИИ ТЕКСТИЛЬНОГО КАРКАСА КОМПОЗИТА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СОСТОЯНИИ ПРЕПРЕГА

При изготовлении изделий из армированных композиционных материалов на стадии их формования из препрега необходимо знать деформационные характеристики еще неотвержденного материала. Указанная информация необходима для качественного изготовления изделий, в частности, чтобы не образовывались гофры, складки и подобные не желательные дефекты. Рассмотрено сжатие препрега, которое осуществляется без потери устойчивости армирующего материала. Найдена зависимость между относительными коэффициентами неупругих удлинений при растяжении и сжатии текстильного каркаса в состоянии препрега.

Ключевые слова: *препрег, деформация, сжатие препрега, текстиль, неупругость, нагружение, напряженно-деформированное состояние*

Неупругость препрегов может проявляться в силу ряда причин, включающих:
- неупругое поведение материала матрицы;
- неупругое поведение материала наполнителя (элементарные нити в составе комплексной нити недоуплотнены);
- диссипация энергии из-за трения между волокнами и нитями;
- проскальзывание нитей в точке их переплетения;
- расслоение и проскальзывание по границе раздела «нить – матрица». Сопротивлением такому проскальзыванию становятся силы трения. В момент проскальзывания они достигают максимального значения, остаются такими же после остановки движения и установления равновесия. Таким образом, при рассмотрении условий равновесия нитей структурного элемента эти силы должны учитываться [1].

В результате неупругость, обусловленную причинами, отличными от диссипации энергии деформирования в точках пересечения нитей, можно рассматривать в рамках выбранного структурного элемента. С целью упрощения изучаемой проблемы игнорируется любая нелинейность свойств нитей, а неупругость матрицы и неупругость, вызванная расслоением по границе раздела «нить – матрица», моделируется с помощью линейно-упругой работы процесса упрочнения. Такой материал характеризуется начальной неупругой деформацией, а в дальнейшем — упругой. Поскольку нелинейность материала связана с неупругим поведением только нитей, характеризующихся в дискретной модели матрицы, смоделируем эти неупругие перемещения как мгновенные деформации при условии приложения внешней нагрузки. Экспериментальные исследования показали справедливость такого утверждения: совсем небольшая нагрузка способствует завершению стадии неупругих деформаций. Это экспериментально установлено в условиях растяжения и в условиях сжатия тканого материала в состоянии препрега [2].

Рассмотрим случай нагружения препрегов, который характеризует сжатие. Сжатие без потери устойчивости может быть осуществлено только совместно с растяжением. Это эквивалентно случаю, когда одно семейство нитей растягивается, а второе — сжимается в поперечном направлении, например, при поперечном перемещении одного семейства нитей вдоль второго. Таким образом, получается, что в одном и том же материале в одном направлении возникают и растягивающие и сжимающие усилия. Это изменяет привычные представления о напряженно-деформированном состоянии. Чтобы устранить такое противоречие, необходимо рассматривать равновесие каждого семейства нитей ткани в отдельности. Связь между ними устанавливается посредством сил трения (касательные усилия). При этом следует учитывать, что силы трения, приложенные к нитям разных семейств, равны по модулю, но имеют противоположные направления. Если в результате такого нагружения касательные усилия превосходят предельные силы трения, то между нитями семейств происходит сдвиг. Это длится до момента установления предельного равновесия. Необходимо также отметить, что сжатие нитей препрега может образовываться и другим путем — в результате поворота одного семейства нитей относительно второго. Оба вида таких сжатий имеют неупругую составляющую и упругость.

Отметим, что тканый материал представляет собой мозаичную структуру, состоящую из большого числа повторяющихся элементов. Эти элементы будем называть ячейками ткани. Конфигурация ячейки повторяется в структуре ткани путем ее переноса и отражения. Предполагаем, что ячейки идентичны и однородно распределены по всей поверхности ткани. Типичная ячейка ткани с гладким переплетением состоит только из одной основной и одной уточной нитей, контактирующих в общей точке переплетения без жесткой связи. Рисунок переплетений симметричен относительно срединной плоскости ткани. Обычно форма ячейки, размер и длины искривленных участков каждой нити — известные геометрические параметры.

В работах [1, 2] показано, что для тканей гладкого переплетения связь между нагрузкой и деформациями при растяжении армирующего материала определяется зависимостями

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}+\gamma_{11},\ \gamma_{11}=\begin{cases}0, \text{ если } \sigma_{11}=0;\\ \gamma_{11}>0, \text{ если } \sigma_{11}>0;\end{cases}$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E_{22}}+\gamma_{22},\ \gamma_{22}=\begin{cases}0, \text{ если } \sigma_{22}=0;\\ \gamma_{22}>0, \text{ если } \sigma_{22}>0.\end{cases} \quad (1)$$

Для сжатия такие зависимости имеют вид

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \gamma_{12}, \gamma_{12} = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma_{12} = 0; \\ \gamma_{12} > 0, \text{ если } \sigma_{12} > 0; \end{cases}$$
$$\varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} + \gamma_{21}, \ \gamma_{21} = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma_{21} = 0; \\ \gamma_{21} > 0, \text{ если } \sigma_{21} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

где ε_{11}, ε_{22} и σ_{11}, σ_{22} — относительные деформации и напряжения при растяжении армирующего материала; ε_{12}, ε_{21} и σ_{12}, σ_{21} — относительные деформации и напряжения при поперечном сжатии армирующего материала; E_{11}, E_{22} и E_{12}, E_{21} — модули упругости при растяжении и сжатии армирующего материала; γ_{11}, γ_{22} и γ_{12}, γ_{21} — неупругие составляющие растяжения и сжатия соответствующих семейств нитей. Заметим, что для удобства исследований относительные деформации сжатия и напряжения сжатия представлены положительными величинами.

Рассматриваем препреги из тканых материалов, у которых нити утка и нити основы образуют взаимноперпендикулярные семейства нитей. При плоском напряженном состоянии точки соприкосновения нитей расходятся, и поэтому будут находиться в одной плоскости, но в разных местах. На этом основании следует рассматривать перемещения нитей каждого семейства.

В работах [3, 4] под величинами u_1 и ν_1 предложено понимать проекции вектора перемещения нити семейства «1» на нормаль и касательную к линии, совпадающей с нитью после деформирования, в рассматриваемой точке. Аналогично, u_2 и ν_2 означают проекции вектора перемещения точек нити семейства «2». При этом показано, что

$$u_1 = c_{11}\sin\alpha_1 - c_{12}\cos\alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left[Z_{11}R_1\sin\alpha_1 - R_1\sin(\alpha_1 - \alpha)\right]d\alpha;$$
$$\nu_1 = c_{12}\sin\alpha_1 + c_{11}\cos\alpha_1 - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left[Z_{11}R_1\cos\alpha_1 - R_1\cos(\alpha_1 - \alpha)\right]d\alpha; \quad (3)$$

$$u_2 = c_{21}\sin\alpha_2 + c_{22}\cos\alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \left[Z_{22}R_2\cos\alpha_2 - R_2\sin(\alpha_2 - \alpha)\right]d\alpha;$$
$$\nu_2 = c_{22}\sin\alpha_2 - c_{21}\cos\alpha_1 - \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \left[Z_{22}R_2\sin\alpha_2 + R_2\cos(\alpha_2 - \alpha)\right]d\alpha, \quad (4)$$

где произвольные постоянные c_{11} и c_{12} являются функциями от переменной y; постоянные c_{21} и c_{22} являются функциями от переменной x; x и y — координаты пересечения нитей рассматриваемых семейств в исходном состоянии до деформации; направление интегрирования совпадает с положительным направлением при обходе вдоль нити семейства (против хода часовой стрелки); R_1 и R_2 — радиусы кривизны нитей в рассматриваемой точке; α_1 и α_2 — углы, которые образуют касательные к кривой с осью Оx

$$\frac{1}{Z_{11}} = 1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}; \ \frac{1}{Z_{12}} = 1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}};$$
$$\frac{1}{Z_{22}} = 1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}; \ \frac{1}{Z_{21}} = 1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}}. \quad (5)$$

Отмечено также [3], что постоянные c_{11}, c_{12} и c_{21}, c_{22} удовлетворяют следующим зависимостям:

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial y} = \frac{Z_{11}R_1}{Z_{12}R_1^0} + \frac{\sin\alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0}\cos\alpha_1 +$$
$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \left(\frac{\partial}{\partial y}(Z_{11}R_1) + \frac{\cos\alpha}{Z_{12}}\right)d\alpha + \frac{\partial\alpha_{01}}{\partial y}(Z_{11}R_1 - R_1\cos\alpha_1)\Big|_{\alpha_1=\alpha_{01}};$$
$$\frac{\partial c_{12}}{\partial y} = 1 - \frac{R_1}{Z_{12}R_1^0}\sin\alpha_1 - \frac{\cos\alpha_1}{Z_{12}} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} \frac{\sin\alpha}{Z_{12}}d\alpha - \frac{\partial\alpha_{01}}{\partial y}(R_1\sin\alpha_1)\Big|_{\alpha_1=\alpha_{01}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial x} = -\frac{Z_{22}R_2}{Z_{21}R_2^0} + \frac{\cos\alpha_2}{Z_{21}} - \frac{R_2}{Z_{21}R_2^0}\sin\alpha_2 -$$
$$- \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(Z_{22}R_2) - \frac{\sin\alpha}{Z_{21}}\right)d\alpha + \frac{\partial\alpha_{02}}{\partial x}(Z_{22}R_2 + R_2\sin\alpha_2)\Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}};$$
$$\frac{\partial c_{21}}{\partial x} = \frac{R_2\cos\alpha_2}{Z_{21}R_2^0} + \frac{\sin\alpha_2}{Z_{21}} + 1 - \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} \frac{\cos\alpha}{Z_{21}}d\alpha - \frac{\partial\alpha_{02}}{\partial x}(R_2\cos\alpha_2)\Big|_{\alpha_2=\alpha_{02}}, \quad (7)$$

где R_1^0 и R_2^0 — радиусы линий сжатия, которые перпендикулярны в рассматриваемых точках к линиям растяжения.

Препреги относятся к материалам с подвижной структурой, поэтому, в отличие от упругих тел, перемещения отдельных точек в них могут достигать конечных значений. Рассматриваются такие перемещения, которые осуществляются без потери устойчивости армирующего материала. Такие перемещения в отдельных случаях превращают область деформирования из односвязной в многосвязную. Например, при проколе отверстий в препрегах образуются дыры. Следует отметить, что такие перемещения армирующего материала не всегда приводят к его разрушению. Поэтому технологи используют это свойство композиционного материала, чтобы формовать основные и свободные поверхности данной геометрии в процессе изготовления изделий.

По-прежнему предполагаем, что препреги являют собой ортотропные многослойные структуры на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон. Все слои сориентированы в одном направлении. Эта система пропитана полимерным связующим, которое находится в вязком состоянии, т. е. незаполимеризовано. Будем рассматривать такие задачи, которые приводят к тому, что внешняя граница зоны деформирования устанавливается произвольным образом.

Внешняя граница отличается от обычного представления. На самом деле это полоса переменной ширины. Внутренняя граница такой полосы состоит из точек, в которых наблюдается переход от неупругих деформаций сжатия нитей к упругим, либо к сдвигу нитей в направлении растяжения. Внешняя граница этой полосы характеризуется нулевыми деформациями.

Отсюда во внутренних точках внешней границы выполняются следующие соотношения

$$\frac{1}{Z_{11}} = \frac{1}{Z_{11}^0} = 1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}^0}{E_{11}}; \ \frac{1}{Z_{12}} = \frac{1}{Z_{12}^0} = 1 - \gamma_{12};$$
$$\frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{Z_{22}^0} = 1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}^0}{E_{22}}; \ \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1}{Z_{21}^0} = 1 - \gamma_{21}. \quad (8)$$

Зависимости (8) показывают, что в периферийных точках границы напряженное состояние одинаково. На этом основании следует предположить, что деформации в этих точках также одинаковы. В таком случае должны быть постоянными следующие геометрические характеристики

$$\alpha_1 = \alpha_{01}; \ \alpha_2 = \alpha_{02}; \ R_1, \ R_2, \ R_1^0, \ R_2^0.$$

По той же причине должны быть постоянными на внешней границе и функции u_1, ν_1, u_2 и ν_2. Это означает, что компоненты перемещений, по крайней мере, не должны зависеть от координат x и y.

Каждая точка на периферийном участке границы характеризуется координатами (x, y). Изменения этих координат в пределах их области изменения позволяют обойти все точки периферийного участка границы. Таким образом, на этом участке границы координаты x и y не являются постоянными.

С учетом полученных зависимостей рассмотрим выражения для u_1, ν_1, u_2 и ν_2 в периферийных точках границы. Для этого положим в (3) и (4) $\alpha_1 = \alpha_{01}$, $\alpha_2 = \alpha_{02}$. В результате получим

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}\sin\alpha_{01} - c_{12}\cos\alpha_{01};\\ v_1 &= c_{12}\sin\alpha_{01} + c_{11}\cos\alpha_{01};\\ u_2 &= c_{22}\sin\alpha_{02} + c_{21}\cos\alpha_{02};\\ v_2 &= c_{21}\sin\alpha_{02} - c_{22}\cos\alpha_{02}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражения (9) выполняются во внутренних точках рассматриваемой полосы на границе области деформирования. Поэтому, с учетом того, что компоненты перемещений u_1, v_1, u_2 и v_2 постоянны здесь, следует независимость произвольных постоянных c_{11}, c_{12} и c_{21}, c_{22} от координат x и y.

Независимость постоянных c_{11}, c_{12} и c_{21}, c_{22} от координат x и y позволяет установить следующие соотношения (они вытекают из равенств (6) и (7))

$$\frac{R_1}{R_1^0} = \frac{Z_{12} - \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1};\ \frac{R_2}{R_2^0} = -\frac{Z_{21} + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_2};$$
$$Z_{11} = \frac{Z_{12}\cos\alpha_1 - 1}{Z_{12} - \cos\alpha_1};\ Z_{22} = -\frac{Z_{21}\sin\alpha_2 + 1}{Z_{21} + \sin\alpha_2}. \tag{10}$$

Учитывая, что на периферийном участке границы должны выполняться условия (8), найдем:

$$Z_{22}^0 = Z_{22}\Big|_{\sigma_{22}=\sigma_{22}^0} = \frac{1}{1 + \gamma_{22} + \dfrac{\sigma_{22}^0}{E_{22}}} = -\frac{Z_{21}^0\sin\alpha_{02} + 1}{Z_{21}^0 + \sin\alpha_{02}}.$$

Отсюда можно найти значение угла α_{02}

$$\alpha_{02} = \arcsin\left(-\frac{Z_{22}^0 \cdot Z_{21}^0 + 1}{Z_{21}^0 + Z_{22}^0}\right) + 2\pi. \tag{11}$$

Равенство (11) будет непротиворечивым, если выполняются зависимости

$$0 < \frac{Z_{22}^0 \cdot Z_{21}^0 + 1}{Z_{21}^0 + Z_{22}^0} < 1. \tag{12}$$

При этом следует иметь в виду, что (следует из соотношений (5))

$$Z_{22}^0 > 1,\ 0 < Z_{21}^0 < 1. \tag{13}$$

Левая часть неравенства (12) очевидна. Докажем справедливость и правой части. Для этого предположим противное. Пусть выполняется соотношение

$$\frac{Z_{22}^0 \cdot Z_{21}^0 + 1}{Z_{21}^0 + Z_{22}^0} > 1.$$

Из этой формулы следует

$$(Z_{21}^0 - 1)(Z_{22}^0 - 1) > 0.$$

Последнее неравенство противоречит условиям (13). Следовательно, соотношения (12) справедливы.

Из третьего равенства зависимостей (10), с учетом (8), найдем

$$\alpha_{01} = 2\pi - \arccos\frac{Z_{11}^0 \cdot Z_{12}^0 + 1}{Z_{11}^0 + Z_{12}^0}. \tag{14}$$

Непротиворечивость зависимости (14) доказывается аналогичным образом.

Следует также иметь в виду, что найденные значения α_{01} и α_{02} должны удовлетворять равенству [1]

$$\left(\frac{R_1R_2}{R_1^0R_2^0} - 1\right)\sin\alpha + \left(\frac{R_2}{R_2^0} + \frac{R_1}{R_1^0}\right)\cos\alpha = 0,$$

где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

Подставим (10) и значения углов α_{01} и α_{02} в рассматриваемое равенство с учетом того, что

$$\cos\alpha_{01} = \frac{Z_{11}^0 \cdot Z_{12}^0 + 1}{Z_{11}^0 + Z_{12}^0};\ \sin\alpha_{01} = -\sqrt{1 - \left(\frac{Z_{11}^0 \cdot Z_{12}^0 + 1}{Z_{11}^0 + Z_{12}^0}\right)^2};$$

$$\sin\alpha_{02} = \frac{Z_{22}^0 \cdot Z_{21}^0 + 1}{Z_{21}^0 + Z_{22}^0};\ \cos\alpha_{02} = -\sqrt{1 - \left(\frac{Z_{22}^0 \cdot Z_{21}^0 + 1}{Z_{21}^0 + Z_{22}^0}\right)^2}.$$

В результате такой подстановки получим

$$(Z_{11} + Z_{12})(Z_{21} + Z_{22})\left(\frac{1}{Z_{11}^2} - 1\right)\left(\frac{1}{Z_{22}^2} - 1\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{Z_{12}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{Z_{21}^2}\right).$$

Для тканей гладкого переплетения

$$\gamma_{11} >> \frac{\sigma_{11}^0}{E_{11}^0};\gamma_{22} >> \frac{\sigma_{22}^0}{E_{22}^0}.$$

Поэтому последнее равенство с достаточной степенью точности предстанет в виде

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}\gamma_{22}(2+\gamma_{11}-\gamma_{12})(2+\gamma_{22}-\gamma_{21})(2+\gamma_{11})\times\\ &\times(2+\gamma_{22}) = \gamma_{11}\gamma_{21}(1+\gamma_{11})(1+\gamma_{22})(1-\gamma_{12})\times\\ &\times(1-\gamma_{21})(2-\gamma_{12})(2-\gamma_{21}). \end{aligned} \tag{15}$$

На основании изложенного следует вывод, что между неупругими составляющими растяжения и сжатия γ_{11}, γ_{22}, γ_{12}, γ_{21} у тканей гладкого переплетения существует зависимость, выраженная равенством (15).

Список литературы

1. Сахоненко, С.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния препрегов для нахождения максимальных напряжений вблизи проколотого круглого отверстия: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 6.03.09 / С.В. Сахоненко. — Минск, 2009. — 154 с.
2. Теоретические и экспериментальные исследования по определению неупругой составляющей сжатия ткани Т-13 / Ю.В. Василевич [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. — 2011. — № 4(17). — С. 63–65.
3. Василевич, Ю.В. Конечная деформация препрегов в двух измерениях / Ю.В. Василевич, В.М. Сахоненко, С.В. Сахоненко // Машиностроение: межвед. науч.-техн. сб. — 2007. — № 22. — С.142–149.
4. Сахоненко, С.В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / С.В. Сахоненко. — Минск: БГУ, 2004. — Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005. — № Д200576.

Vasilevich Yu.V., Goreliy K.A., Sahonenko S.V., Ivanov S.N.

Relation between inelastic strain components composite textile carcass in a state of prepregs

In the manufacture of products from reinforced composite mate-rials on the stage of forming the prepreg need to know the strain-tional characteristics still uncured material. Said information necessary for the production of quality products, in particular so that no corrugations, folds and similar unintentional defek-you. Considered the compression of the prepreg, which is carried out without loss of abutment-bility of reinforcing material. The dependence between the relative-coefficients inelastic elongation and compression tech stylish frame in a state of the prepreg.

Поступил в редакцию 01.07.2015.