

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ДВУМЯ РЕЖИМАМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Цвирко И.В.

Научный руководитель – Крук Ю.С., к.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим замкнутую сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, циркулирующие в сети, подразделяются на активные (обыкновенные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i , $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i -ый узел с интенсивностью ν_i , уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i -ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i -ый узел с интенсивностью φ_i , уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i -ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i -ый узел может находиться в одном из двух режимов функционирования $\mathbf{e}_i = \overline{0, 1}, i = \overline{1, N}$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$ – состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_i(t)$, $n'_i(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i -ом узле в момент времени t , $l_i(t)$ – режим функционирования i -го узла. Пространство состояний случайного процесса $z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i = \left\{ z_i = \mathbf{e}_i, n'_i, l_i \mid n_i, n'_i \geq 0, l_i = \overline{0, 1}, \sum_{i=1}^M (n_i + n'_i) = M \right\}.$$

Нумерация активных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i -ом узле находится n_i активных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i , а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i -го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i . Поступающий в узел i сигнал ν_i

воздействует на активную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i , которая становится активной заявкой под номером 1.

Нулевой режим функционирования узла будем считать основным режимом работы, соответствующим максимальной степени работоспособности узла. С повышением режима работоспособность узла снижается. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = \langle n'_i, l_i \rangle$, в режиме $l_i \in \overline{0, 1}, i = \overline{1, N}$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью τ_i ($\tau_i > 0$) i -ый узел переходит в 1-ый режим, а с интенсивностью ρ_i ($\rho_i > 0$) – в нулевой режим. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(l_i) \in \overline{1, N}$. Заявки обслуживаются в порядке поступления.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -ый узел с вероятностью p_{ij} . Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{ii} = 0, i = \overline{1, N}$.

Предполагается, что матрица вероятностей переходов $\langle p_{ij} : i, j = \overline{0, N} \rangle$, где $p_{00} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j p_{ji}.$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное с точностью до постоянного множителя решение $\langle \varepsilon_i, i = \overline{1, N} \rangle$ [2].

Процесс $z_i(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_N$, где Z_i – пространство состояний i -го узла.

Обозначим через $\langle n'_i, l_i \rangle \in N$ -мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i -ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i -ая координата равна $\langle n'_i, l_i \rangle \in Z_i$. Через $\langle n'_i, l_i \rangle, \langle n'_j, l_j \rangle$ обозначим N -мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i -ой и j -ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i -ая координата равна $\langle n'_i, l_i \rangle \in Z_i$, j -ая координата равна $\langle n'_j, l_j \rangle \in Z_j$. Если $q(x, y)$ – интенсивность перехода процесса $z(t)$ из состояния $x \in Z$ в состояние $y \in Z$, $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$ – интенсивность выхода из состояния x , то интенсивности переходов процесса $z(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
q \in \mathbb{K}_i - 1, n'_i + 1, l_i &\rightrightarrows v_i I_{\{i \neq 0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i + 1, n'_i - 1, l_i &\rightrightarrows \varphi_i I_{\{i \neq 0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i, n'_i, l_i - 1 &\rightrightarrows \rho_i I_{\{i=1\}} \\
q \in \mathbb{K}_i, n'_i, l_i + 1 &\rightrightarrows \tau_i I_{\{i=0\}} \\
q \in \mathbb{K}_i - 1, n'_i, l_i &\rightrightarrows \mu_j \in \mathbb{K}_j + 1, n'_j, l_j \rightrightarrows \mu_i \in \mathbb{P}_{ij} I_{\{i \neq 0\}} \\
i, j &= \overline{1, N}, z \in Z.
\end{aligned}$$

Для всех остальных состояний $y \in Z$ $q(x, y) = 0$.

Для рассмотренной модели сети доказана эргодичность, составлена и решена система уравнений глобального равновесия с целью нахождения стационарного распределения вероятностей состояний сети.

Запланирована разработка программного средства для компьютерного моделирования рассмотренной сети массового обслуживания.

Литература

1. Jackson, J.R. Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. №1. P. 131 □ 142.
2. Gordon, W.J. Closed Queueing Nnetworks with Exponential Servers / W.J. Gordon, G.F. Newell // Oper. Res. 1967. No 15. P. 252 □ 267.
3. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.
43. Tsitsiashvili, G. Sh. Distributions in stochastic network models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. NY : Nova Publishers Incorporated, 2008. 75 p.
5. Крук, Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания с неактивными заявками / Ю. С. Крук, Ю. Е. Дудовская // Минск : БНТУ, 2016. – 131 с.