Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики №2

ЗАДАЧНИК ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов энергетических специальностей БНТУ

Электронный учебный материал

М и н с к 2 0 1 8

УДК 519.21 (075.8)

Автор: *П.Г. Ласый*

Рецензент:

Н.И. Чепелев, доцент кафедры высшей математики №2 БНТУ, кандидат физико-математических наук, доцент

Данное методическое пособие представляет собой сборник задач по теории вероятностей, который состоит из четырнадцати пунктов по 15 задач в каждом. Приводится решение последней задачи каждого пункта. В сборник включены также 15 вариантов контрольной работы по теории вероятностей (по 5 задач в каждом варианте). Более удобным использование сборника делает имеющееся в нем приложение с таблицей функции ошибок.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, оно может быть также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по курсу теории вероятностей.

Белорусский национальный технический университет
Пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017)2928273
E-mail: kafvm2@bntu.by
http://www. bntu.by/ef-vm2
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-70.2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Замечательно, что науке, начинавшейся с рассмотрения азартных игр, суждено было стать важнейшим объектом человеческого знания ...

П. Лаплас

... истинной логикой для этого мира является исчисление вероятностей, занимающееся нахождением величин вероятностей, которые ... должен учитывать любой здравомыслящий человек.

Дж. Максвелл

Традиционно считается, что возникновение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с именами Б. Паскаля, П. Ферма, Я. Бернулли. По крайней мере в это время в переписке Б. Паскаля и П. Ферма обсуждались задачи, требовавшие оценки шансов в азартных играх (особенно в игре в кости, имевшей в то время большое распространение). Именно в результате анализа этих задач сформировалось такое важнейшее понятие, как вероятность в ее классическом понимании.

По мере развития естествознания активно развивались, углублялись и совершенствовались методы теории вероятностей. Современная теория вероятностей – раздел математики, который развивается в тесной взаимосвязи с другими абстрактными областями математики, такими как алгебра и анализ. Существенный вклад в развитие теории вероятностей на различных этапах ее становления внесли такие гиганты математики, как П. Лаплас, К. Гаусс, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, А.Н. Колмогоров.

Теория вероятностей и ее аппарат с успехом применяются в физике, химии, биологии, технических науках, экономике, демографии, страховании – практически в любой сфере человеческой деятельности, где требуется действительно научный подход. И здесь уместно вспомнить, что нередко Нобелевские премии по экономике по праву присуждались математикам – специалистам по оптимизации и математической статистике.

Настоящий сборник задач написан в соответствии с программой по математике для энергетического факультета БНТУ. Он состоит из четырнадцати пунктов, каждый из которых предваряется лаконичным теоретическим введением по соответствующей теме и содержит 15 задач разного уровня сложности (всего 210 задач), приведены решения последних, пятнадцатых, задач каждого пункта.

В сборнике размещены также 15 вариантов контрольной работы по теории вероятностей, каждый из которых состоит из пяти задач.

Завершает сборник приложение с таблицей функции ошибок, что, несомненно, делает его использование более удобным.

При подготовке данного методического пособия были использованы учебники [1– 5] и задачники [6–8]. Часть задач (около 15%) – авторские.

1. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Обозначения, определения и формулы

Везде под $\Omega = \{\omega\}$ мы будем понимать множество *элементарных событий* ω, а его подмножества $A \subseteq \Omega$ называть *событиями*. В частности, Ω – *достоверное событие*, $\varnothing$ – *невозможное событие*.

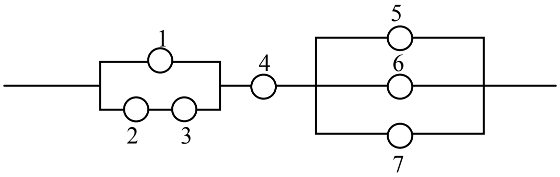
Через $A \bigcup B,\ A \bigcap B,\ A \setminus B$ мы будем обозначать соответственно *объединение, пересечение и разность событий* A и B в их теоретико-множественном понимании. В частности, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ – *противоположное событие*, если же $A \bigcap B = \varnothing$, то события A и B называются *несовместными*.

События $B_1, B_2, ..., B_n$ образуют *полную группу событий*, если они попарно несовместны, а их объединение – достоверное событие.

Задачи

1. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа, каждое из которых больше двух. События: A = {выбрано хотя бы одно простое число}, B = {хотя бы одно из чисел – четное}. Что означают события $A \bigcap B,\ A \bigcup B$?

2. Имеется фрагмент электрической цепи, элементы которой работают независимо друг от друга:



Обозначим через B_k событие, состоящее в том, что элемент с номером k = = 1, 2, …, 7 исправен. Записать событие A = {цепь замкнута} через события B_k.

3. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k, $k = 1, 2, ..., 10$, причем $r_1 < r_2 < ... < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k, $k = 1, 2, ..., 10$. Что означают события

$$B=\bigcup_{k=1}^{6} A_k,\ C=\bigcap_{k=5}^{10} A_k,\ D=\overline{A}_3 \cap A_7,\ E=A_{10} \setminus A_8\ ?$$

4. События *A*, *B* и *C* означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере по три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты *s*, а из второго *k* томов. Что означают события:

$$\text{а) } A\cup B\cup C;\ \text{б) } A\cap B\cap C;\ \text{в) } A_1\cup B_3;$$
$$\text{г) } A_2\cap B_2;\ \text{д) } (A_1\cap B_3\cup A_3\cap B_1)\cap C?$$

5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие *A* = ={выбранное число кратно пяти}, событие *B* = {выбранное число оканчивается нулем}. Выяснить: а) что означают события $A\setminus B$ и $A\cap\overline{B}$? б) верно ли, что всегда $A\setminus B=A\cap\overline{B}$?

6. Событие *A* – хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие *B* – бракованных изделий среди них не меньше двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

7. Пусть *A*, *B*, *C* – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из *A*, *B*, *C*: 1) произошло только *A*; 2) произошли *A* и *B*, *C* не произошло; 3) все три события произошли; 4) произошло по крайней мере одно из событий; 5) произошло одно и только одно событие; 6) ни одно событие не произошло; 7) произошло не более двух событий.

8. Монета подбрасывается *n* раз. Событие A_i – выпадение герба при *i*-м подбрасывании, *i* = 1, 2, ..., *n*. Записать события *B* = {герб выпал единственный раз}, *C* = {герб выпал по крайней мере один раз}.

9. Упростить событие $(A\setminus C)\cap(B\setminus\overline{C})$.

10. Упростить событие $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$.

11. Найти случайное событие *X* из равенства $\overline{X\cup A}\cup\overline{X\cup\overline{A}}=B$.

12. Доказать, что события $A, \bar{A}\bigcap B, \overline{A\bigcup B}$ образуют полную группу событий.

13. Студенту на экзамене предлагаются два вопроса и три задачи. Рассмотрим события A_i={студент отвечает на i-й вопрос}, $i = 1, 2$; B_j={студент решает j-ю задачу}, $j = 1, 2, 3$. Экзамен будет сдан, если студент ответит на оба вопроса и решит по крайней мере одну задачу. Выразить событие C = {студент сдал экзамен} через события A_i и B_j.

14. На отрезке $[a, b]$ наудачу ставятся две точки. Пусть x и y – координаты этих точек. Изобразить на плоскости Oxy области, соответствующие событиям $\Omega, A, B, A\bigcap B, A\setminus B, A\bigcup B,$ где A = {вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая точка к правому концу}, B = {расстояние между точками меньше половины длины отрезка}.

15. На столе рубашками вверх лежат четыре туза. Случайным образом выбираются и переворачиваются два из них. Ввести соответствующие обозначения и записать множество элементарных событий Ω. Выразить через элементарные исходы следующие события: A = {перевернутые тузы – разноцветные}, B = {среди перевернутых тузов нет трефового}.

Решение. Пусть $T_\heartsuit$, $T_\diamondsuit$, $T_\clubsuit$, $T_\spadesuit$ – тузы соответствующих мастей. Элементарными событиями здесь являются всевозможные пары тузов из имеющихся четырех. Следовательно, пространство элементарных событий состоит из шести пар:

$$\Omega = \{\{T_\heartsuit, T_\diamondsuit\}, \{T_\heartsuit, T_\clubsuit\}, \{T_\heartsuit, T_\spadesuit\},\{T_\diamondsuit, T_\clubsuit\}, \{T_\diamondsuit, T_\spadesuit\}, \{T_\clubsuit, T_\spadesuit\}\}.$$

В событиях A и B выбор происходит соответственно из разноцветных тузов и всех тузов, кроме трефового. Поэтому эти события состоят из четырех и трех пар соответственно:

$A = \{\{T_{\heartsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\spadesuit}\}\}$, $B = \{\{T_{\heartsuit}, T_{\diamondsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\spadesuit}\}\}$.

Ответ. $\Omega = \{\{T_{\heartsuit}, T_{\diamondsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\clubsuit}, T_{\spadesuit}\}\}$;

$$A = \{\{T_{\heartsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\clubsuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\spadesuit}\}\};$$

$$B = \{\{T_{\heartsuit}, T_{\diamondsuit}\}, \{T_{\heartsuit}, T_{\spadesuit}\}, \{T_{\diamondsuit}, T_{\spadesuit}\}\}.$$

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Обозначения, определения и формулы

Пусть множество элементарных событий Ω *конечно* и все элементарные исходы *равновозможны*. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:*)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Классическая вероятностная схема является математической моделью случайных явлений, для которых элементарные исходы в некотором смысле симметричны, и поэтому предположение об их равновозможности является вполне естественным.

При решении задач комбинаторного типа часто приходится использовать различные выборки из конечных множеств. В зависимости от характера решаемой задачи эти выборки подразделяются на *сочетания* (в выборке не учитывается порядок следования элементов) и *размещения* (порядок следования учитывается). Если выборка состоит из n элементов, а множество, из которого происходит выбор, содержит m элементов, то общее число различных сочетаний вычисляется по формуле

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!},$$

а число размещений равно

$$A_m^n = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Число различных *перестановок* в m-элементном множестве равно $m!$.

---

*) $|M|$ – мощность, т.е. в данном случае число элементов множества M.

Задачи

1. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность событий: A = {число является палиндромом, т.е. перевертышем}; B = {число состоит из нечетных цифр}?

2. Из ящика, содержащего 4 билета с номерами 1, 2, 3, 4, вынимают по одному все билеты. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

3. На пустую шахматную доску случайным образом ставят две ладьи – белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга ?

4. Из полного набора домино наудачу выбирают две кости. С какой вероятностью они сыграют ?

5. Из урны, содержащей 13 шаров, среди которых 6 белых, наудачу извлекаются 4 шара. Найти вероятности следующих событий: A = {среди выбранных шаров 3 белых}; B = {по крайней мере один из шаров – белый}.

6. Из колоды карт в 52 листа извлекаются наудачу 3 карты. Найти вероятность того, что в выборке окажутся: а) тройка, семерка, туз; б) не менее двух карт трефовой масти.

7. Группа, состоящая из восьми человек, занимает места за круглым столом в случайном порядке. Какова вероятность того, что при этом три определенных лица окажутся сидящими рядом ?

8. Десять студентов первой группы и столько же студентов второй группы рассаживаются в ряду, в котором двадцать мест. Вычислить вероятности следующих событий: A = {никакие два студента из одной группы не будут сидеть рядом}; B = {все студенты второй группы будут сидеть рядом}.

9. Десять вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятности

следующих событий: A = {варианты с номерами 1 и 10 останутся неиспользованными}; B = {будут распределены последовательные номера вариантов}.

10. К четырехстороннему перекрестку подъехали пять машин. Каждая машина с одинаковой вероятностью может поехать обратно, прямо, налево или направо. Через некоторое время все машины покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий: A = {все машины поедут по одной и той же улице}; B = {по определенной улице поедут ровно три машины}; C = {по крайней мере по одной из улиц не поедет ни одна машина}.

11. Что вероятнее, выиграть две партии из четырех или три из шести? Игра проходит с равносильным противником и без ничьих.

12. Для уменьшения числа игр двенадцать футбольных команд, среди которых два призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы по шесть команд каждая. Какова вероятность того, что обе команды-призеры попадут в разные подгруппы?

13. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из семи цифр и всевозможные номера равновероятны, найти вероятности следующих событий: A = {четыре последние цифры телефонного номера одинаковы}; B = {все цифры различны}; C = {номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}.

14. Из множества $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ наугад и последовательно выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением?

15. Семь яблок, три апельсина и пять лимонов раскладываются случайным образом в три пакета, но так, чтобы в каждом было одинаковое количество фруктов. Найти вероятности следующих событий: A = {в каждом из пакетов по одному апельсину}; B = {случайно выбранный пакет не содержит апельсинов}.

Решение. Элементарные события здесь – три группы по пять фруктов в каждой. Первую группу можно сформировать C_{15}^{5} способами, вторую – C_{10}^{5}

способами, в третью попадают оставшиеся пять фруктов. Следовательно, $|\Omega| = C_{15}^5 C_{10}^5$. Рассуждая аналогично, получаем:

$$|A| = (C_3^1 C_{12}^4)(C_2^1 C_8^4), \ |B| = C_{12}^5 C_{10}^5.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{91}; \ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{24}{91}.$$

Ответ. $P(A) = 25/91$; $P(B) = 24/91$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Обозначения, определения и формулы

Предположим, что в отличие от классической вероятностной модели число “равновозможных” исходов бесконечно и, более того, *несчетно*. Будем интерпретировать элементарные события как точки на прямой, плоскости или в пространстве. Тогда множество элементарных событий Ω представляет собой подмножество соответствующего пространства, которое мы будем предполагать ограниченным и измеримым, т.е. имеющим *конечную геометрическую меру* (длину, площадь или объем). Все события $A \subseteq \Omega$ мы также будем предполагать измеримыми. В этих условиях вероятность события A можно считать пропорциональной мере множества A и, следовательно, вычислять ее по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(M)$ – мера множества M.

Задачи

1. Интервал движения автобуса – 10 минут. С какой вероятностью пассажир, пришедший на остановку, будет ожидать автобуса не более трех минут?

2. В точке A, положение которой на телефонной линии длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка A удалена от одного из концов линии на расстояние, не превосходящее l ($l \le L/2$).

3. На перекрестке установлен светофор, на котором, чередуясь, горит одну минуту зеленый свет и полминуты – красный. В случайный момент времени к светофору подъехал автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки ?

4. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 см и 8 см. Найти вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

5. На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними меньше kl, где $0 < k < 1$.

6. Найти вероятности событий A и B из задачи 14 п.1.

7. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| \le 1,\ |b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий: A = {корни уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ действительны}; B = {корни уравнения положительны}.

8. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросается монета диаметра d, в результате чего установлено, что в 40 % случаев монета не пересекает ни одной стороны квадрата. Оценить размер ячеек сетки.

9. Из отрезка $[-1, 2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше, а произведение меньше единицы?

10. На отрезке наудачу ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. С какой вероятностью из трех получившихся частей отрезка нельзя построить треугольник?

11. На окружности произвольно выбраны две точки. Какова вероятность того, что дуга окружности между этими точками стягивает угол, не превосходящий α ?

12. Даны две концентрические окружности радиусов $r < R$. На большей окружности наудачу ставятся две точки. С какой вероятностью отрезок, соединяющий эти точки не пересечет меньшую окружность?

13. В случайный момент времени $x \in [0, T]$ появляется радиосигнал продолжительностью $t < T$. Также случайно в момент времени $y \in [0, T]$ включается мгновенно настраивающийся приемник на время $\tau < T$. Найти вероятность обнаружения радиосигнала.

14. Какова вероятность того, что сумма длин трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит a, будет не меньше a?

15. Стержень длиной 200 мм наудачу ломается на четыре части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня между точками излома будет не более 10 мм.

Решение. Пусть x, y, z – расстояния от одного из концов стержня до точек излома, причем будем считать, что $x \le y \le z$. Тогда пространство элементарных событий Ω представляет собой пирамиду с вершинами в точках

$$O(0, 0, 0),\ O_1(0, 0, 200),\ O_2(0, 200, 200),\ O_3(200, 200, 200).$$

Пусть событие A = {хотя бы одна часть стержня между точками излома не более 10 мм}. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ составляют точки пирамиды Ω, для которых $y - x > 10,\ z - y > 10$, и, следовательно, $\overline{A}$ также является пирамидой, которая вырезается из Ω плоскостями $y - x = 10,\ z - y = 10$. Так как $\mu(\overline{A}) = V_{\overline{A}} = \frac{1}{6} \cdot 180^3$, $\mu(\Omega) = V_\Omega = \frac{1}{6} \cdot 200^3$, то $P(\overline{A}) = \frac{V_{\overline{A}}}{V_\Omega} = 0{,}9^3 = 0{,}729$ и, стало быть, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}271$.

Ответ. 0,271.

4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначения, определения и формулы

Если $P(B) > 0,$ то под *условной вероятностью* события A, если событие B произошло, понимают по определению число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad (1)$$

которое хорошо согласуется с интуитивным представлением об условной вероятности. Естественно также считать событие A *не зависящим* от события B, если $P(A \mid B) = P(A).$

Из формулы (1) следует *теорема умножения* вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Для *независимых* событий

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Задачи

1. Пусть событие A влечет за собой событие B, причем $3P(A) = P(B) > 0.$ Вычислить условные вероятности $P(A \mid B),$ $P(B \mid A)$ и установить, зависимы события A и B или нет.

2. Показать, что если условная вероятность $P(A \mid B)$ больше вероятности $P(A),$ то и условная вероятность $P(B \mid A)$ больше вероятности $P(B).$

3. Пусть события A и B несовместны, причем $P(A)P(B) \neq 0.$ Доказать, что они зависимы. Следует ли отсюда, что элементарные события в классической вероятностной модели зависимы?

4. События A и B зависимы. Следует ли из этого, что они несовместны? Привести пример.

5. Пусть события A и B независимы. Показать, что тогда независимы также события $\overline{A}$ и $\overline{B}.$

6. Каждый из 100 студентов, находящихся в аудитории, изучает по крайней мере один из трех иностранных языков. 50 человек изучают английский язык, 40 – французский и 35 – немецкий. Английский и французский языки изучают 15 студентов, английский и немецкий – 8, французский и немецкий – 5. Все три языка изучают 3 человека. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим следующие события: E = вышедший изучает английский язык}; F ={вышедший изучает французский язык}; D = {вышедший изучает немецкий язык}. Есть ли независимые пары данных событий ?

7. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что будут извлечены 4 шара, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

8. Вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний событие A произойдет хотя бы один раз, равна 0,5. Найти вероятность появления события в одном испытании, если она во всех испытаниях остается неизменной.

9. Из полной колоды карт в 52 листа наудачу извлекается одна карта. События: A = {вынутая карта – туз}; B = {вынутая карта черной масти}; F = ={вынутая карта является фигурой, т.е. валетом, дамой или королем}. Требуется: а) установить, зависимы или независимы следующие пары событий: A и B, A и F, F и B; б) вычислить вероятности событий $A \cap F$, $B \cap F$ и $A \cap B \cap F$ по формуле классической вероятности и пользуясь теоремой умножения вероятностей.

10. На шахматную доску наудачу ставятся два слона – белый и черный. Какова вероятность того, что слоны не побьют друг друга при условии, что белый слон находится на одном из крайних полей доски?

11. Из множества чисел {1, 2, …, 50} последовательно без возвращения выбирают три числа. Найти условную вероятность того, что третье число

находится между первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

12. Выбрасываются три игральные кости. Наблюдаемые события: A = {на всех костях выпадут различные цифры}; B = {хотя бы на одной из костей выпадет шестерка}. Вычислить условные вероятности $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$.

13. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки – независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка – мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

14. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу выбираются два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета, при условии, что не извлечен синий шар.

15. Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин – дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

Решение. I. Рассмотрим события A = {выбранное лицо – мужчина}, B = {выбранное лицо – дальтоник}. Пусть на обследование прибыли n мужчин и n женщин. Тогда по формуле классической вероятности

$$P(A \cap B) = \frac{0{,}05n}{2n} = 0{,}025; \;\; P(B) = \frac{0{,}05n + 0{,}0025n}{2n} = 0{,}02625,$$

и, следовательно, $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{20}{21}$.

II. Так как среди прибывших на обследование людей число мужчин-дальтоников равно $0{,}05n$, а число женщин-дальтоников составляет $0{,}0025n$, то по формуле классической вероятности $P(A \mid B) = \dfrac{0{,}05n}{0{,}05n + 0{,}0025n} = \dfrac{20}{21} \approx 0{,}952$.

Ответ. $20/21 \approx 0{,}952$.

5. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначения, определения и формулы

Для любых событий A и B справедлива интуитивно прозрачная *теорема сложения* вероятностей:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Для *несовместных* событий $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$

Для трех и большего числа событий формула сложения вероятностей сильно усложняется:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le n}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Задачи

1. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?

2. Вероятность попадания в корзину при одном броске для первого баскетболиста равна 0,8, для второго баскетболиста эта вероятность равна 0,7. Баскетболисты произвели по одному броску в корзину. Считая попадания в корзину для отдельных баскетболистов событиями независимыми, найти вероятности следующих событий: A = {по крайней мере одно попадание в корзину}; B = {ровно одно попадание в корзину}.

3. Пусть в условиях предыдущей задачи известна вероятность события A = ={было по крайней мере одно попадание}, равная 0,96, и вероятность попадания для одного из баскетболистов, равная 0,6. Найти вероятность попадания для второго баскетболиста.

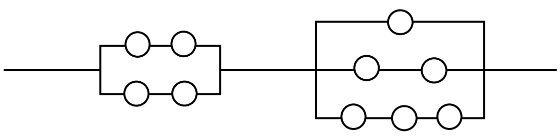
4. Радист трижды дает позывные. Вероятность того, что его услышат первый раз, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. Приемы позывных – события независимые. Найти вероятность того, что позывные радиста услышат не менее двух раз.

5. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз выпала пара шестерок? (Задача де Мере.)

6. В тире имеются мишени двух типов: мелкие и крупные. Стреляющий получает приз, если он из трех выстрелов по крайней мере дважды подряд поразит цель при условии не стрелять дважды подряд в мишень одного размера. С какой мишени – мелкой или крупной – следует начинать стреляющему ?

7. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью 0,9, а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает большинством голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение ?

8. Рассчитать надежность следующих электрических цепей: а) цепи, приведенной в задаче 2 п.1, если все элементы этой цепи работают независимо друг от друга и исправны с вероятностями $P(B_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, 7$; б) цепи



если все ее элементы работают независимо друг от друга и неисправны с одинаковой вероятностью 0,1. Найти также вероятность разрыва цепи.

9. Производится стрельба из зенитного орудия по воздушной цели. Попадания при отдельных выстрелах независимы и имеют вероятность 0,1. Если снаряд попал в цель, то она поражается с вероятностью 0,8. Боевой запас орудия – 50 снарядов. Стрельба ведется до поражения цели или до израс-

ходования всего боезапаса. Найти вероятность того, что не весь боезапас будет израсходован.

10. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

11. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. С какой вероятностью оба шара будут одного цвета?

12. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать три попытки.

13. Игрок A поочередно играет с игроками B и C по две партии. Вероятность выигрыша первой партии для B и C равны 0,1 и 0,2 соответственно; во второй партии соответствующие вероятности равны 0,3 и 0,4. Определить вероятность того, что а) первым выиграет B; б) первым выиграет C.

14. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков.

15. Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n, последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Найти вероятность того, что вторым будет извлечен шар с номером 2.

Решение. Введем события A = {вторым извлечен шар с номером 2}, B = ={первым извлечен шар с номером 1}. Тогда, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, получим:

$$P(A)=P(A\bigcap B)+P(A\bigcap \overline{B})=P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n^2-n+1}{n^2(n-1)}.$$

Ответ. $\dfrac{n^2-n+1}{n^2(n-1)}$.

6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Обозначения, определения и формулы

Если событие A может произойти одновременно с одним из событий (*гипотез*) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих *полную группу* (см. п.1), то для вычисления вероятности этого события можно использовать следующую *формулу полной вероятности*:

$$P(A) = P(A | H_1)P(H_1) + P(A | H_2)P(H_2) + ... + P(A | H_n)P(H_n),$$

которая часто оказывается полезной при решении задач. При использовании этой формулы большое значение имеет удачный выбор гипотез, связанных с данным событием.

Задачи

1. Для контроля продукции наудачу выбирается одна из трех партий деталей и затем из нее также наудачу извлекается для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии каждая десятая деталь бракованная, а в двух других – 85% деталей без брака?

2. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров знает 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. Какова вероятность того, что наудачу вызванный студент сдаст экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

3. Производятся 10 независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд с вероятностью 0,2 попадает в резервуар. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламенится с вероятностью 0,9, если два снаряда – наверняка. Найти вероятность того, что горючее воспламенится.

4. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых. Для игры наудачу выбирают два мяча, которые после игры возвращаются обратно. Для второй игры также наудачу извлекаются два мяча. Какова вероятность, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

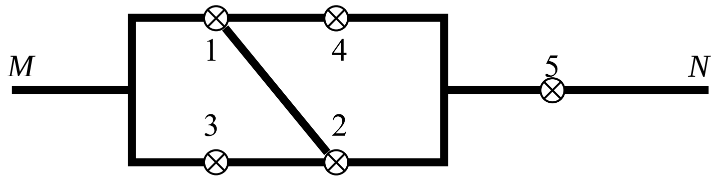
5. Шесть шаров, среди которых три белых, распределяются по двум урнам. Наудачу выбирается урна, а из нее – шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность события A = {вынутый шар – белый}, была максимальной? Чему равна эта максимальная вероятность?

6. Имеются две урны, в каждой из которых находятся по 6 белых и 5 черных шаров. Из первой урны наудачу извлечены и переложены во вторую урну 2 шара, после чего из второй урны также наудачу извлечены 2 шара. С какой вероятностью оба шара, извлеченные из второй урны, белые?

7. На шахматной доске стоит белый слон. С какой вероятностью он побьет черного слона, поставленного на ту же доску?

8. Студент Иванов знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы Иванова получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

9. Вода подается из пункта M в пункт N по следующей водопроводной системе с пятью кранами, которые работают независимо друг от друга:



Каждый из кранов может быть закрыт с вероятностью, которая вычисляется по формуле:

$$p_k = 0{,}3 + 0{,}05(k-1),\ k = \overline{1,5}.$$

С какой вероятностью потребитель получит воду в пункте N?

10. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны наугад удалили по одному шару, а

оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, окажется белым.

11. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наудачу извлекают 2 шара и добавляют в урну 1 белый шар. Найти вероятность того, что все пять шаров, извлеченных после этого из урны последовательно и с возвращением, белого цвета.

12. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,9, и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.

13. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить либо кровь той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7 % имеют первую, 37,5 % – вторую, 20,9 % – третью и 7,9 % – четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

14. В двух урнах находятся соответственно m_1 и m_2 белых и n_1 и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность того, что этот шар белый?

15. Для поисков пропавшего самолета выделено восемь вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе поиска самолет с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым

вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поисков.

Решение. Пусть событие $A = \{$пропавший самолет обнаружен$\}$. Используем очевидную систему гипотез: H_1 – самолет находится в первом районе, H_2 – самолет находится во втором районе. Пусть в первый район отправлены n вертолетов. Тогда

$$P(A\,|\,H_1) = 1 - 0{,}8^n;\; P(A\,|\,H_2) = 1 - 0{,}8^{8-n}$$

и по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) =$$
$$= 0{,}8(1 - 0{,}8^n) + 0{,}2(1 - 0{,}8^{8-n}).$$

Осталось подобрать n так, чтобы вероятность $P(A)$ была наибольшей. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 0{,}8(1 - 0{,}8^x) + 0{,}2(1 - 0{,}8^{8-x}).$$

Ее производная равна

$$f(x) = \ln 0{,}8 \cdot (-0{,}8^{x+1} + 0{,}2 \cdot 0{,}8^{8-x}),$$

и, следовательно, максимум этой функции достигается при

$$x = 3{,}5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}8} \approx 7{,}106.$$

Так как $f(7) \approx 0{,}672;\; f(8) \approx 0{,}665,$ то вероятность $P(A)$ достигает максимального значения при $n = 7$ и

$$P_{\max}(A) = f(7) \approx 0{,}672.$$

Ответ. 7 вертолетов следует отправить в первый район, 1 вертолет – во второй, при этом вероятность обнаружения самолета равна $P(A) \approx 0{,}672$.

7. АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ (ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА)

Обозначения, определения и формулы

Пусть в эксперименте с системой гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ произошло событие *A*. Каковы послеопытные (апостериорные) вероятности гипотез? На вопрос отвечает *формула Бейеса*:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k)P(H_k)}{P(A)}, \; k = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез, если поступила новая информация относительно наступления некоторых событий.

Задачи

1. Однотипные изделия выпускаются тремя заводами в количественном отношении 2 : 5 : 3, причем вероятности выпуска бракованной продукции для этих заводов равны, соответственно, 0,1; 0,3; 0,2. Наудачу выбранное изделие оказалось без брака. Найти вероятность того, что это изделие произведено вторым заводом.

2. Четыре электрические цепи работают независимо друг от друга. Вероятности разрыва для них равны p_1, p_2, p_3, p_4, соответственно. Случайно выбранная цепь оказалась замкнутой. Найти вероятность того, что замкнутой оказалась третья цепь.

3. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90 % (т.е. 10 % носителей туберкулеза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулез, составляет 1 %. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,1 %. Какова вероятность того, что человек, признанный больным, здоров?

4. Батарея состоит из 10 орудий, причем для первой группы из шести орудий вероятность попадания в цель для каждого орудия равна 0,5, а каждое из остальных четырех орудий попадает в ту же цель с вероятностью 0,8. Наудачу выбранное орудие произвело три выстрела по цели, причем было зафиксировано два попадания. Найти вероятность того, что стрельба велась из орудия первой группы.

5. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков, соответственно, равны 0,7; 0,6; 0,8. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?

6. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовлены хорошо, 5 – удовлетворительно, 3 человека подготовлены плохо. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные – 20, подготовленные удовлетворительно – 15, плохо подготовленные – 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен хорошо или отлично.

7. В ящике находятся пять шаров белого и(или) черного цвета, причем все предположения по количеству шаров определенного цвета равновозможны. Два шара, наудачу извлеченные из ящика, оказались разноцветными. Какая из гипотез о первоначальном составе шаров наиболее вероятна? Чему равна апостериорная вероятность этой гипотезы?

8. В условиях задачи 9 п.6 стало известно, что потребитель получил воду. С какой вероятностью кран 1 открыт, а кран 2 закрыт?

9. Имеется 10 миллионов монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты – стандартные. Наугад выбранная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она выпадает гербом кверху. Какова вероятность

того, что выбрана монета с двумя гербами? (Республиканская студенческая олимпиада по математике, 2003 г., группа Б.)

10. По каналу связи передается одна из последовательностей букв *AAAA*, *BBBB*, *CCCC* с вероятностями p_1, p_2, p_3. Каждая передаваемая буква передается правильно с вероятностью q и с равными вероятностями $0{,}5(1-q)$ принимается за каждую из двух других букв. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано *AAAA*, если принято *ABCA*.

11. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

12. В урне имеются три шара, причем цвет каждого из них с равной вероятностью может быть белым или черным. Извлекаются последовательно два шара, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне только белые шары, если черные шары не извлекались?

13. Два стрелка поочередно стреляют в мишень, причем первым с равной вероятностью может стрелять любой из них. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0,05. Какова вероятность того, что первым произвел выстрел первый стрелок, если попадание в мишень произошло лишь при пятом выстреле?

14. На числовой прямой в точке $x = 2$ находится шарик, который с одинаковой вероятностью может скатиться в одну из соседних с ним целочисленных точек. В новом положении с ним происходит то же самое и т.д. Если он окажется в точке $x = 0$, то оттуда он уже не может перемещаться. Найти

вероятность того, что первый раз он переместился в точку $x = 3$, если через некоторое число шагов он оказался в точке $x = 0$.

15. Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие *B* происходит с вероятностью 0,2. Вероятность наступления другого события *A* зависит от числа появлений события *B*: при однократном появлении события *B* эта вероятность равна 0,1, при двукратном появлении равна 0,3, при трехкратном появлении равна 0,7; если событие *B* не произошло ни разу, то событие *A* невозможно. Определить наиболее вероятное число появлений события *B*, если событие *A* произошло.

Решение. Рассмотрим систему гипотез H_i = {событие *B* произошло $i - 1$ раз}, $i = 1, 2, 3, 4$. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, найдем вероятности этих гипотез:

$$P(H_1) = 0{,}8^3 = 0{,}512;\ P(H_2) = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384;$$
$$P(H_3) = 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}096;\ P(H_4) = 0{,}2^3 = 0{,}008.$$

Условные вероятности события *A* заданы:

$$P(A \mid H_1) = 0;\ P(A \mid H_2) = 0{,}1;$$
$$P(A \mid H_3) = 0{,}3;\ P(A \mid H_4) = 0{,}7.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = 0 + 0{,}0384 + 0{,}0288 + 0{,}0056 = 0{,}0728,$$

и, следовательно, вероятности гипотез, вычисленные по формулам Бейеса, равны:

$$P(H_1 \mid A) = 0;$$
$$P(H_2 \mid A) \approx 0{,}527;$$
$$P(H_3 \mid A) \approx 0{,}395;$$
$$P(H_4 \mid A) \approx 0{,}076.$$

Таким образом, вероятность второй гипотезы максимальна.

Ответ. Наиболее вероятно одно появление.

8. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Обозначения, определения и формулы

Числовая функция, определенная на множестве элементарных событий, называется *случайной величиной*.

Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x) = P(X < x),\ x \in R.$$

Ее свойства:

$$1)\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ 2)\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$$

$$3)\ F(x_1) \geq F(x_2),\ \text{если}\ x_1 > x_2;$$

$$4)\ \lim_{y\to x-0} F(y) = F(x),\ x \in R.$$

Случайная величина считается *непрерывной*, если существует неотрицательная, интегрируемая (возможно, в несобственном смысле) на всей числовой оси функция $p(x)$ (*плотность распределения вероятностей*), первообразная которой совпадает с функцией распределения данной случайной величины, т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(s)ds.$$

Мы будем предполагать, что $p(x)$ кусочно-непрерывна на любом конечном промежутке числовой оси.

Функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна на всей действительной оси. С ее помощью можно вычислить вероятность попадания непрерывной случайной величины на любой промежуток действительной прямой:

$$P(X \in (a, b)) = F(b) - F(a).$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1;$

б) $F'(x) = p(x),$ везде, где $p(x)$ непрерывна;

в) $P(X \in (a,b)) = \int\limits_a^b p(x)dx.$

Основные *числовые характеристики* непрерывного распределения вычисляются по формулам:

математическое ожидание (*среднее значение*):

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx;$$

дисперсия:

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2) - M^2(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - M^2(X);$$

среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Реже используются:

мода (обозначение $Mo(X)$) – точка на числовой прямой, в которой достигается максимум или верхняя грань множества значений плотности $p(x)$;

медиана (обозначение $Me(X)$) – точка на действительной оси, для которой

$$P(X < Me(X)) = P(X \geq Me(X))$$

и, значит, медиана является корнем уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Задачи

1. Функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом, имеет вид (закон Парето)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq x_0 \quad (\alpha > 0); \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей этой случайной величины; б) размер годового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5; в) при каких значениях параметра α существует среднее значение этой случайной величины.

2. Дана функция распределения случайной величины X (закон Коши):

$$F(x) = a + b \cdot \operatorname{arcctg} x.$$

Найти постоянные a, b; плотность распределения вероятностей и вероятность $P(X \in (-1,\ 1/\sqrt{3}))$.

3. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} a, & x < 1; \\ b\ln x + c, & 1 \le x \le e; \\ d, & x > e. \end{cases}$$

Определить постоянные a, b, c, d. Найти среднее значение, дисперсию и медиану этой случайной величины.

4. Дана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x < 0; \\ \dfrac{1}{2}(x+1), & x \in [0,\ 1]; \\ b, & x > 1. \end{cases}$$

Определить константы a, b и среднее значение этой случайной величины.

5. При каком значении a функция $p(x) = \dfrac{ax^2}{1+x^6}$ является плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины? Найти функцию распределения этой случайной величины и вероятность $P(X \in (1,\ \sqrt[6]{3}))$.

6. Плотность распределения вероятностей случайной величины равна

$$p(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-kx},\ k > 0, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислить коэффициент a, найти функцию распределения и вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(0,\ \frac{1}{k}\right)$.

7. Скорость молекул идеального газа, находящегося в равновесии при определенной температуре, является случайной величиной, распределенной по закону Максвелла с плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\beta^{3/2}x^2e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

где параметр $\beta>0$ определяется температурой и массой молекул. Определить среднее значение скорости молекул.

8. Плотность распределения вероятностей случайной величины задана функцией

$$p(x)=\begin{cases}-xe^{x}, & x<0;\\ 0, & x\ge 0.\end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины, ее моду и вероятность попадания в интервал $(-\ln 2,\ 1000)$.

9. Случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}, & x\ge 0.\end{cases}$$

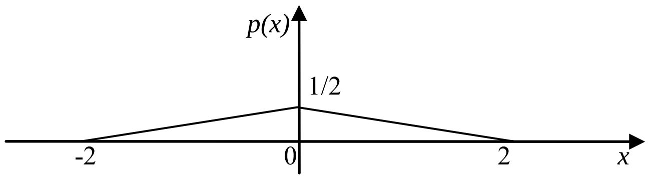
Найти константу a и функцию распределения этой случайной величины.

10. Найти среднее квадратичное отклонение для распределения Лапласа

$$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

11. Определив предварительно константу a, найти математическое ожидание случайной величины, имеющей в интервале $(0,\ \pi)$ плотность распределения вероятностей $p(x)=a\sin^2 x$. Вычислить вероятность $P(X\in(-100,\ \pi/4))$.

12. Случайная величина распределена по закону Симпсона в интервале (–2, 2), т.е. график ее плотности распределения вероятностей имеет вид:



Записать аналитическое выражение для плотности $p(x)$ и найти дисперсию этой случайной величины.

13. Непрерывная случайная величина имеет на отрезке $[-1,1]$ плотность распределения вероятностей $p(x) = \frac{1}{\pi}\arccos x$. В каком отношении среднее значение этой случайной величины разбивает отрезок $[-1,1]$?

14. По данным одной переписи населения, плотность вероятности возраста научных работников имеет вид: $p(t) = k(t - 22{,}5)(97{,}5 - t)^5$, t – время в годах, $22{,}5 \le t \le 97{,}5$. Найти: а) коэффициент k; б) средний возраст научных работников; в) определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

15. Плотность распределения вероятностей случайной величины равна

$$p(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^{x}}.$$

Найти константу a и вероятность того, что значения этой случайной величины не превосходят единицы.

Решение. Неизвестную константу найдем из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$ В данном случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{de^x}{e^{2x}+1} = a\cdot \operatorname{arctg} e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$ и, следовательно, $a=\frac{2}{\pi}$. Найдем теперь вероятность попадания этой случайной величины на полуось $(-\infty, 1]$.

$$P(X\le 1) = \int_{-\infty}^{1} p(x)dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x\Big|_{-\infty}^{1} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e \approx 0{,}776.$$

Ответ. $a=\frac{2}{\pi}$; $P(X\le 1)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e\approx 0{,}776$.

9. РАВНОМЕРНОЕ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначения, определения и формулы

а) *Равномерное* на отрезке $[a, b]$, $a < b$ распределение:

$$p(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{2}(a+b),\ D(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2,\ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},$$

$$Mo(X) = x \in [a, b],\ Me(X) = \frac{1}{2}(a+b).$$

б) *Экспоненциальное* распределение:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ \lambda > 0, & x > 0; \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, Mo(X) = 0, Me(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

в) *Нормальное* (*гауссово*) распределение:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

$$M(X) = m;\ D(X) = \sigma^2, \sigma(X) = \sigma, Mo(X) = Me(X) = m;$$

$$P(X \in [a, b]) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-s^2/2} ds$ – *функция ошибок* (*интеграл вероятностей*);

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение, так как оно является предельным для некоторых других важных распределений (см. п.12).

Задачи

1. Найти распределение случайного времени ожидания пассажиром автобуса, если интервал движения автобуса 15 минут. С какой вероятностью пассажир будет ждать автобус не менее трех минут?

2. Шкала стрелочного секундомера имеет цену делений 0,2 с. Найти распределение случайной ошибки отсчета времени, если отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность совершить ошибку, превышающую 0,05 с?

3. Время безотказной работы некоторого прибора является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти вероятность того, что прибор не откажет за время, не превышающее средний срок его службы.

4. Время ожидания у колонки АЗС является случайной величиной T, имеющей экспоненциальное распределение со средним временем ожидания, равным $\overline{T}$. Найти следующие вероятности: $P(0{,}5\overline{T} \le T \le 1{,}5\overline{T})$, $P(T \ge 2\overline{T})$.

5. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой $P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$. Определить вероятность того, что судно будет найдено за время, не превышающее утроенное среднее время его поиска.

6. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднюю квадратичную ошибку 75 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м, если она подчинена нормальному закону распределения?

7. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная ошибка нормально распределена и имеет среднее квадратичное

отклонение 75 м. Для полета самолету отведен коридор высотой 100 м. Чему равны вероятности того, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора?

8. Систематическая ошибка измерения дальности радиолокатором отсутствует, и известна вероятность того, что ошибка не превосходит по абсолютной величине 25 м, равная 0,5. Найти дисперсию ошибок измерения дальности и вероятность ошибки, лежащей в пределах от –10 м до +20 м в предположении, что ошибка измерения имеет нормальное распределение.

9. Высотомер не имеет систематической ошибки, а случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднюю квадратичную ошибку должен иметь высотомер, чтобы с вероятностью 0,9 ошибка измерения высоты по абсолютной величине была меньше 10 м? С какой вероятностью ошибка измерения будет превосходить 3 м?

10. Проводятся два независимых измерения прибором, имеющим среднюю квадратичную ошибку 30 м и систематическую ошибку +10 м. Какова вероятность того, что обе ошибки измерений, имея разные знаки, по абсолютной величине превзойдут 10 м? (Ошибки измерения нормально распределены.)

11. Какое наибольшее расстояние допустимо между двумя рыболовецкими судами, идущими параллельными курсами, чтобы вероятность обнаружения косяка рыбы, находящегося посередине между ними, была не менее 0,5, если дальность обнаружения косяка для каждого из судов является независимой нормально распределенной случайной величиной со средним значением 3,7 км и средним квадратичным отклонением 1,1 км ?

12. Измеряемая случайная величина нормально распределена с параметрами $m = 10,\ \sigma = 5$. Найти серединную ошибку ее измерения, т.е. симметричный относительно среднего значения интервал, в который с вероятностью 0,5 попадает измеренное значение.

13. Для нормально распределенной случайной величины 15% ее значений меньше 15 и 40% больше 40. Найти параметры этого распределения.

14. Деталь, изготовленная автоматом, считается стандартной, если отклонение ее размера от номинала не превышает 10 мм. Случайные ошибки отклонения нормально распределены с параметрами $m = 0$ мм, $\sigma = 5$ мм. Вычислить, во-первых, процент стандартных деталей для данного автомата; во-вторых, количество деталей, которые необходимо изготовить, чтобы с вероятностью не менее 0,95 среди них оказалась хотя бы одна бракованная.

15. Нормально распределенная случайная величина имеет нулевое математическое ожидание. Определить ее среднее квадратичное отклонение, при котором вероятность $P(X \in (a, b))$ была бы наибольшей $(0 < a < b)$.

Решение. $P(\sigma) = P(X \in (a, b)) = \Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$. Так как

$$P'(\sigma) = \Phi'\left(\frac{b}{\sigma}\right)\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) - \Phi'\left(\frac{a}{\sigma}\right)\left(-\frac{a}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left(ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} - be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right),$$

то искомое значение σ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left(ae^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} - be^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right) = 0$

и, следовательно, $\sigma = \sqrt{(b^2 - a^2)\Big/\left(2\ln\frac{b}{a}\right)}$.

Ответ. $\sqrt{(b^2 - a^2)\Big/\left(2\ln\frac{b}{a}\right)}$.

10. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Обозначения, определения и формулы

Случайная величина X считается *дискретной*, если множество ее возможных значений не более чем счетно. Дискретная случайная величина задается своим рядом распределения, в котором указываются ее возможные значения x_k, $k = 1, 2, \ldots$, и вероятности $p_k = P(X = x_k)$, с которыми случайная величина принимает эти значения, причем $\sum\limits_k p_k = 1$.

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ дискретной случайной величины является ступенчатой со скачками, равными вероятностям p_k.

Числовые характеристики дискретной случайной величины:

$$M(X) = \sum_k x_k p_k,\ D(X) = \sum_k x_k^2 p_k - M^2(X),\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Мода дискретной случайной величины X (обозначение $Mo(X)$) – это ее *наиболее вероятное значение*, т.е. значение, которому соответствует наибольшая вероятность.

Задачи

1. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти ряд распределения для случайного числа проведенных опытов, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,6. Рассмотреть два случая: а) число опытов не превосходит трех; б) число опытов может быть неограниченно большим.

2. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до тех пор, пока один из них не попадет, причем вероятность попадания для первого стрелка при каждом выстреле равна 0,4, а для второго – 0,6. Найти: а) распределение случайного числа выстрелов, произведенных обоими стрелками; б) во сколько

раз вероятность попадания для первого стрелка больше аналогичной вероятности для второго.

3. Мишень состоит из круга A и двух концентрических колец, обозначенных буквами B (внутреннее кольцо) и C (внешнее кольцо). Попадание в круг A дает 10 очков, в кольцо B дает 5 очков, в кольцо C дает (–1) очко. Вероятности попадания в круг A и кольца B и C, соответственно, равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы выбитых очков в результате двух попаданий, а также найти ее среднее значение и моду.

4. Имеется n заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна p. Найти ряд распределения случайного числа заготовок, оставшихся после изготовления первой стандартной детали.

5. Из сосуда, содержащего 5 черных и 10 белых шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращался обратно.

6. Составить ряд распределения отношения числа выпадений герба к увеличенному на единицу числу выпадений решки при трехкратном подбрасывании монеты. Найти функцию распределения этой случайной величины и ее среднее квадратичное отклонение.

7. Производятся два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получена любая десятичная цифра. Построить ряд распределения случайной суммы полученных цифр. Найти моду этой случайной величины.

8. В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1, m_2 – стоимостью $k_2, \ldots, m_n$ – стоимостью k_n. Всего билетов N. Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

9. Один раз брошены три одинаковые игральные кости. Случайная величина принимает значение 1, если хотя бы на одной игральной кости выпадет цифра 6; принимает значение 0, если шестерка не выпала ни на одной грани, но хотя бы на одной из граней выпала цифра 5, и принимает значение –1 в остальных случаях. Найти распределение этой случайной величины и ее среднее значение.

10. Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается вдвое. Произведено три выстрела. Найти распределение числа промахов и дисперсию этой случайной величины.

11. Прибор состоит из трех элементов, каждый из которых работает независимо от остальных и отказывает за некоторое время T с вероятностью $p_k = 0{,}2 + 0{,}1k,\ k = 1, 2, 3.$ Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших за время T элементов.

12. Два равносильных шахматиста играют матч из пяти партий. Вероятность ничьей для каждого из шахматистов равна 0,6. Найти: а) среднее число ничьих; б) чему равна вероятность того, что результативных партий будет сыграно больше?

13. Случайная величина X принимает целые положительные значения с вероятностями $p_k = \dfrac{a}{k(k+2)},\ k \in \boldsymbol{N}.$ Найти константу a и вероятность $P(X \geq 3).$

14. В первой из трех урн 7 белых и 5 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров и в третьей – 2 белых и 3 черных шара. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Найти распределение случайного числа X белых шаров среди извлеченных и вероятность того, что среди них будет больше белых шаров, чем черных.

15. Случайная величина X может принимать целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Выбрать первый

элемент и знаменатель прогрессии так, чтобы среднее значение величины X было равно 10, и вычислить при этом условии вероятность $P(X \le 10)$.

Решение. Обозначим первый элемент прогрессии, т.е. вероятность p_1 через p, а знаменатель прогрессии через q. Тогда $p_k = pq^{k-1}$, $k \in \mathrm{N}$ и, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{p}{1-q} = 1 \Rightarrow p = 1-q$. С другой стороны,

$$M(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 10.$$

Таким образом, $p = 0{,}1$; $q = 1 - p = 0{,}9$; $P(X \le 10) = p\frac{1-q^{10}}{1-q} = 1 - q^{10} = 1 - 0{,}9^{10}$.

Ответ. $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$; $P(X \le 10) = 1 - q^{10} \approx 0{,}651$.

11. СХЕМА БЕРНУЛЛИ (БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

Обозначения, определения и формулы

Схема Бернулли или *биномиальное распределение* является математической моделью для конечной последовательности из n независимых однотипных экспериментов, в каждом из которых некоторое событие A происходит с одной и той же вероятностью p.

Обозначим через X случайное число экспериментов, в каждом из которых событие A произошло. Случайная величина X – схема Бернулли. Возможные значения для нее: 0, 1, 2, …, n, соответствующие им вероятности вычисляются по *формуле Бернулли*:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ q = 1 - p,\ k = 0, 1, 2,\ \ldots,\ n.$$

Для схемы Бернулли[*)]

$$M(X) = np,\ D(X) = npq,\ \sigma(X) = \sqrt{npq},\ \ Mo(X) = [(n+1)p].$$

Схема Бернулли имеет исключительно важное значение в теории вероятностей и ее приложениях уже хотя бы потому, что она является основой статистической (эмпирической) вероятности.

Задачи

1. Пара игральных костей бросается шесть раз. Какова вероятность следующих событий: A = {сумма очков, равная 6, выпадет дважды}; B = {сумма очков, равная 6, выпадет по крайней мере один раз}.

2. Два равносильных шахматиста играют матч из четного числа результативных партий. Ничьи не учитываются, и считается, что каждый из участников может выиграть очередную партию с вероятностью 0,5. Выигравшим матч считается тот, кто победит в большем числе партий. В каком матче больше

---

*) $[a]$ – целая часть числа a.

шансов выиграть любому из участников: в матче из 4 результативных партий или из 6?

3. Прибор состоит их восьми независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны p = 0,2. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы три элемента из восьми.

4. Шесть раз бросается правильная монета. Случайная величина X – модуль разности числа появлений герба и числа появлений решки. Вычислить среднее значение и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

5. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины содержит: а) цифру 5; б) две или более пятерки; в) ровно две пятерки.

6. Событие B наступает в том случае, если событие A наступит не менее трех раз. Определить вероятность наступления события B, если вероятность наступления события A в одном опыте равна 0,3 и произведено семь независимых опытов.

7. По мишени в тире произведено 200 независимых выстрелов в одинаковых условиях, которые дали 116 попаданий. Определить, какое значение вероятности попадания при одном выстреле более вероятно: 1/2 или 2/3, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

8. Построить график вероятности $P(p)$ хотя бы одного появления события A в десяти независимых опытах от вероятности p появления события A в каждом из них. Какое значение p соответствует вероятности $P=1/2$?

9. Вероятность хотя бы одного появления события в четырех независимых опытах равна 0,5904. Какова вероятность появления этого события в одном опыте, если в каждом опыте эта вероятность постоянна?

10. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина равны

соответственно 0,03 и 0,02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших лотерейных билетов.

11. Для прикуривания некий гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Какова вероятность того, что во второй коробке при этом k спичек, если вначале в каждой коробке было по n спичек? (Задача Банаха.)

12. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов необходимо испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 зарегистрировать не менее трех отказов?

13. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекается по одному шару, причем каждый раз шар возвращается обратно. Определить наименьшее количество извлечений, при котором вероятность появления хотя бы одного черного шара среди извлеченных больше 0,5.

14. Баскетболист шесть раз бросает мяч в корзину. Половина попаданий реализуется с вероятностью 0,27648. Найти вероятность попадания при одном броске, наиболее вероятное число бросков и соответствующую ему вероятность, если вероятность попадания при одном броске больше 0,5.

15. Определить число независимых повторных испытаний, которые нужно произвести для того, чтобы наиболее вероятное число появлений некоторого события равнялось 20, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,8. Чему при этом равна максимальная вероятность?

Решение. В данном случае

$$Mo(X) = [(n+1)p] = [0{,}8(n+1)] = 20$$

и, следовательно,

$$20 \le 0{,}8(n+1) < 21,$$

откуда

$$24 \le n < 25{,}25 \Rightarrow n = 24,\ n = 25.$$

Тогда по формуле Бернулли

$$P_{24}(20) = C_{24}^{20}\,0{,}8^{20}0{,}2^{4} = 10626 \cdot 0{,}8^{20}0{,}2^{4};$$
$$P_{25}(20) = C_{25}^{20}\,0{,}8^{20}0{,}2^{5} = 53130 \cdot 0{,}8^{20}0{,}2^{5} = 10626 \cdot 0{,}8^{20}0{,}2^{4}.$$

Таким образом, здесь

$$P_{24}(20) = P_{25}(20) = 10626 \cdot 0{,}8^{20}0{,}2^{4} \approx 0{,}196.$$

Ответ. $n = 24$ или $n = 25$ и $P_{24}(20) = P_{25}(20) \approx 0{,}196.$

12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА. ФОРМУЛЫ ЛАПЛАСА

Обозначения, определения и формулы

Случайная величина имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения – неотрицательные целые числа, а соответствующие им вероятности равны

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Для распределения Пуассона

$$M(X) = D(X) = \lambda, \ \sigma(X) = \sqrt{\lambda}, \ Mo(X) = [\lambda].$$

Распределение Пуассона можно получить из схемы Бернулли при $n \to \infty, \ p \to 0,$ считая, что $np = \lambda = \text{const}.$ Поэтому при n большом и p малом распределение Пуассона может использоваться для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли:

$$P_n(k) \approx P(k), \ \ \lambda = np.$$

Для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли, а также вероятности попадания случайной величины, распределенной по схеме Бернулли, в интервал используется нормальное распределение, которое является предельным для некоторых последовательностей случайных величин. В частности, для схемы Бернулли имеют место следующие две формулы Лапласа:

$P(k_1 \le X < k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right)$ – *интегральная формула Лапласа*;

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right),$ где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$ – *локальная формула Лапласа*.

Пользоваться формулами Лапласа следует с известной осторожностью, так как погрешность вычисления по этим формулам может быть сравнима с вычисляемой вероятностью. Они дают хорошее приближение для искомых вероятностей, когда n достаточно велико, а p и q не очень близки к нулю. Часто формулами Лапласа пользуются при $npq > 20$.

Из интегральной формулы Лапласа следует приближенная формула для вычисления вероятности отклонения статистической вероятности события, т.е. его относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p наступления события:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задачи

1. Некий агрегат состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных неисправен с вероятностью 0,0005. Найти вероятности событий: а) неисправны ровно три элемента; б) неисправен хотя бы один элемент.

2. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Считая число вызовов случайной величиной, имеющей распределение Пуассона, найти вероятность того, что за две секунды на АТС поступит не более двух вызовов.

3. При испытании легированной стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна 0,01. Считая применимым здесь распределение Пуассона, вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью превосходящей 0,95 указанный эффект наблюдался по крайней мере один раз.

4. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за 7,5 с испускало в среднем 3,87 α-частицы. Найти вероятность того, что за 1 с это вещество испустит хотя бы две α-частицы.

5. Корректура в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти, применив распределение Пуассона, вероятность того, что на странице имеются опечатки, но их количество не превосходит трех.

6. Известно, что вероятность четырех попаданий в цель при залпе в 5000 выстрелов в два раза больше вероятности двух попаданий. Найти, используя: а) распределение Пуассона; б) схему Бернулли, вероятность попадания в цель при одном выстреле.

7. Сколько маковых зернышек должна в среднем содержать булочка, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было утверждать, что в булочке есть хотя бы одно зернышко? Считать, что случайное число маковых зернышек в булочке имеет распределение Пуассона.

8. Вероятность рождения мальчика равна 0,512. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных: а) ровно 51 мальчик; б) мальчиков больше, чем девочек.

9. Известно, что в Минске в среднем 100 солнечных дней в году. Найти вероятность того, что такая погода будет наблюдаться не менее 90 и не более 110 дней в году.

10. Найти вероятность того, что шестерка при 12000 бросаниях игральной кости выпадет не менее 1950 и не более 2075 раз.

11. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0,7. Какова вероятность того, что при проведении ста двадцати опытов это событие произойдет не менее, чем в два раза чаще, чем не произойдет ?

12. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3:2. Проводятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением, причем каждый раз фиксируется цвет вынутого шара. Каково минимальное число

извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9948, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит 0,05?

13. Определить количество независимых опытов, обеспечивающих с вероятностью не меньшей 95%, нахождение искомой вероятности события, которое может произойти в каждом из опытов, с ошибкой, не превосходящей 0,01.

14. Имеется урна, в которой находятся 5 красных и 95 черных шаров. Опыт состоит в том, что из урны наугад извлекается один шар, который после извлечения возвращается в урну. Сколько потребуется опытов, чтобы с вероятностью, превосходящей 0,8, красный шар извлекался не менее чем 50 раз?

15. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно шесть раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок независимо от остальных. Какой наименьшей вместительностью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней? (Поезд ходит один раз в сутки.)

Решение. Используем здесь схему Бернулли, где $n = 2500$, $p = 6/30 = 0{,}2$. Обозначая через m искомую наименьшую вместительность поезда, приходим к необходимости решения неравенства $P(X > m) \le 0{,}01$. Использовав интегральную формулу Лапласа, получим

$$0{,}5 - \Phi\left(\frac{m-500}{20}\right) \le 0{,}01 \Rightarrow \Phi\left(\frac{m-500}{20}\right) \ge 0{,}49 \Rightarrow \frac{m-500}{20} \ge 2{,}33 \Rightarrow m > 547.$$

Ответ. 547.

13. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Обозначения, определения и формулы

Вектор, координатами которого являются случайные величины, называется случайным. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только двумерные случайные векторы.

Если множество значений случайного вектора не более чем счетно, то он называется *дискретным*. Распределение дискретного случайного вектора (X, Y) можно задать с помощью таблицы распределения, в которой указываются возможные значения (x_i, y_j) этого вектора и соответствующие им вероятности $p_{ij} = P((X, Y) = (x_i, y_j))$.

По таблице распределения легко записать функцию распределения $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ случайного вектора и ряды распределения его координат X и Y. Вероятности возможных значений координат случайного вектора вычисляются по формулам:

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \ i = 1, 2, \dots;$$

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}, \ j = 1, 2, \dots .$$

Если одна из координат случайного вектора принимает фиксированное значение, то можно записать ряд *условного распределения* другой координаты, причем вероятности условных распределений находятся по формулам:

$$p_{i|\cdot j} = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}};$$

$$p_{j|i\cdot} = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}.$$

Координаты случайного вектора *независимы* тогда и только тогда, когда для всех его возможных значений $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$.

Зависимость между координатами случайного вектора характеризуется с помощью *ковариации* (*корреляционного момента*):

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))) = \sum_{i,\,j} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y).$$

Степень *линейной* зависимости определяется *коэффициентом корреляции*:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Если $\rho(X, Y) = \pm 1,$ то X и Y линейно связаны, если же $\rho(X, Y) = 0,$ то по определению X и Y *некоррелированы*.

Задачи

1. Производятся два выстрела по мишени в неизменных условиях. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти распределение случайного вектора (X, Y), где X – число выстрелов до первого попадания и $X = 2,$ если попаданий не было, Y – число промахов. Вычислить вероятность $P(X = Y).$

2. В условиях задачи №1 выяснить, зависимы или независимы координаты случайного вектора (X, Y).

3. В условиях задачи №1 вычислить коэффициент корреляции $\rho(X, Y).$

4. Бросаются две игральные кости. Случайные величины: X – индикатор четности суммы выпавших очков, Y – индикатор четности произведения выпавших очков. Найти распределение случайного вектора (X, Y).

5. В условиях задачи №4 найти функцию распределения $F(x, y)$ случайного вектора (X, Y).

6. В условиях задачи №4 найти ковариацию cov(X, Y) случайного вектора (X, Y).

7. Число X выбирается случайным образом из множества $\{1, 2, 3\}$. Затем из того же множества выбирается наудачу число Y, не меньшее первого. Описать закон распределения случайного вектора (X, Y).

8. В условиях задачи №7 выяснить, зависимы или независимы координаты случайного вектора (X, Y). Построить условный закон распределения координаты X при условии, что координата Y приняла значение, равное 2.

9. В условиях задачи №7 вычислить коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.

10. Игральная кость бросается дважды. Найти распределение случайного вектора (X, Y), где X – число выпавших шестерок, Y – число выпавших нечетных цифр.

11. Являются ли независимыми координаты случайного вектора (X, Y) из предыдущей задачи?

12. Пусть

$$P(X=-1, Y=0)=P(X=1, Y=0)=P(X=0, Y=-1)=P(X=0, Y=1)=1/4.$$

Доказать, что координаты таким образом распределенного случайного вектора зависимы, но некоррелированы.

13. В зависимости от точности изготовления однотипные детали подразделяются по форме на круглые и овальные, а по весу – на легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наудачу деталь является круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны α, β, γ и $\delta=1-\alpha-\beta-\gamma$. Найти ковариацию между индикаторами округлости и легкости случайно выбранной детали.

14. Задано распределение дискретного случайного вектора:

$x_i \backslash y_j$	–1	0	1
–1	p_{11}	1/12	1/12
1	1/12	p_{22}	1/12

Найти p_{11} и p_{22}, если $\operatorname{cov}(X, Y)=1/4$.

15. Два баскетболиста A и B поочередно бросают мяч в корзину до первого попадания, причем начинает баскетболист A, который попадает при каждом

броске с вероятностью 0,8, и количество его бросков ограничено тремя, а баскетболист *B* попадает при одном броске с вероятностью 0,4, и количество его бросков может быть неограниченно большим. а) Найти распределение случайного вектора (*X*, *Y*), где *X* – число бросков, выполненных баскетболистом *A*, *Y* – число бросков, выполненных баскетболистом *B*. б) Верно ли, что *A* попадет со второй попытки с большей вероятностью, чем *B*, использовавший любое количество попыток?

Решение. а) Введем обозначения: $p_1 = 0{,}8;\ q_1 = 0{,}2;\ p_2 = 0{,}4;\ q_2 = 0{,}6.$ Возможные значения случайной величины *X*: 1, 2, 3; случайной величины *Y*: 0, 1, 2, … Если случайная величина *X* приняла значение 1, то случайная величина *Y* может принимать одно из двух значений 0 или 1 с вероятностями, указанными во второй строке нижеследующей таблицы. Аналогично, если случайная величина *X* приняла значение 2, то случайная величина *Y* может принимать одно из двух значений 1 или 2 с вероятностями, записанными в третьей строке таблицы. Наконец, если случайная величина *X* приняла значение 3, то случайная величина *Y* может принимать любое значение, не меньшее двух, причем соответствующие вероятности указаны в четвертой строке таблицы.

б) Верно, так как $p_{21} = 0{,}096 > 0{,}09248 = 1 - p_{10} - p_{21} - p_{32}$.

Ответ. а)

$x_i \backslash y_j$	0	1	2	3	…	n	…
1	p_1	$q_1 p_2$	0	0	…	0	…
2	0	$q_1 q_2 p_1$	$q_1^2 q_2 p_2$	0	…	0	…
3	0	0	$q_1^2 q_2^2 p_1$	$q_1^3 q_2^2 p_2$	…	$q_1^3 q_2^{n-1} p_2$	…

б) Верно.

14. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Обозначения, определения и формулы

По аналогии с одномерной случайной величиной случайный вектор (X, Y) является *непрерывным*, если существует неотрицательная, интегрируемая на всей плоскости функция $p(x, y)$ (*плотность распределения вероятностей*), через которую *функция распределения* данного случайного вектора выражается по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(s, t) ds dt.$$

Плотности распределения вероятностей для *координат* непрерывного случайного вектора:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx.$$

Плотности *условных* распределений вероятностей:

$$p_X(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}; \quad p_Y(y \mid x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}.$$

Уравнения линий регрессии:

$$x = M(X \mid Y = y); \quad y = M(Y \mid X = x).$$

Ковариацию для непрерывного случайного вектора можно вычислить по формуле

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y) dx dy - M(X)M(Y).$$

Коэффициент корреляции равен:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Координаты непрерывного двумерного случайного вектора *независимы*, если

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y).$$

Точка $(M(X), M(Y))$ называется *центром рассеивания* случайного вектора (X, Y).

Задачи

1. Плотность распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет следующий вид:

$$p(x,\ y) = \begin{cases} c(x + y), & 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Определить константу c и вычислить вероятность $P(X + Y < 1)$.

2. В условиях задачи №1 выяснить, являются ли координаты случайного вектора (X, Y) зависимыми.

3. В условиях задачи №1 найти центр рассеивания случайного вектора (X, Y).

4. Для случайного вектора (X, Y) из задачи №1 найти функции распределения $F_X(x),\ F_Y(y)$ его координат.

5. Найти ковариацию случайного вектора (X, Y) из задачи №1.

6. Для случайного вектора (X, Y) из задачи №1 найти уравнение регрессии $y = M(Y \mid X = x)$.

7. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в квадрате D со стороной $\sqrt{2}$ и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти плотность распределения вероятностей этого случайного вектора и плотности распределения вероятностей его координат.

8. Для случайного вектора (X, Y) из задачи №7 найти средние квадратичные отклонения его координат.

9. Доказать, что координаты случайного вектора (X, Y) из задачи №7 зависимы, но некоррелированы.

10. Два человека договорились о встрече между двенадцатью и часом ночи. Пусть X – случайное время прихода первого, Y – случайное время прихода второго, причем известно, что второй человек не может прийти на встречу позже первого. Найти функцию распределения случайного вектора (X, Y).

11. Для случайного вектора (X, Y) из задачи №10 найти уравнение регрессии $x = M(X \mid Y = y)$.

12. Найти вероятность попадания случайного вектора с плотностью

$$p(x,\ y) = \begin{cases} axye^{-x^2-2y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0; \\ \quad 0, \qquad x < 0 \text{ или } y < 0 \end{cases}$$

в квадрат $D = \{(x,\ y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$, найдя предварительно константу a.

13. Убедиться, что координаты случайного вектора (X, Y) из предыдущей задачи независимы.

14. Плотность распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет следующий вид:

$$p(x,\ y) = \begin{cases} c(2 - \sqrt{x^2 + y^2}),\ \ x^2 + y^2 \leq 4; \\ \quad 0, \qquad\qquad\quad x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Определить константу c и вычислить вероятность попадания случайного вектора в кольцо $D = \{(x,\ y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

15. Найти средние квадратичные отклонения координат непрерывного случайного вектора (X, Y) с плотностью

$$p(x,\ y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Решение. Из соображений симметрии следует, что $M(X) = M(Y) = 0$. Тогда

$$D(X) = D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x, y)dxdy = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Переходя в этом двойном интеграле к полярным координатам, получим после несложного интегрирования $D(X)=D(Y)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sigma(X)=\sigma(Y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\sigma(X)=\sigma(Y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант №1

1. Из полного набора домино извлекаются 3 кости. С какой вероятностью среди них окажется одна простая и два подходящих дубля?

2. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 2:3:7, причем вероятности брака для этих заводов равны соответственно 0,3, 0,2, 0,1. Наудачу взятый прибор оказался бракованным. Что вероятнее, первым или третьим заводом изготовлен этот прибор?

3. Имеется 200 семей, в каждой из которых 4 ребенка. Случайные величины: X – число семей из 200, имеющих одного мальчика и трех девочек, Y – число семей, имеющих двух мальчиков и двух девочек. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти средние значения данных случайных величин.

4. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,01. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12$ страховых, а в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000$. Найти вероятность того, что компания потерпит убыток.

5. Баскетболист дважды бросает мяч в корзину. Вероятность попадания при одном броске – 0,6. Найти распределение случайного вектора (X, Y), где X – число попаданий, Y – число промахов до первого попадания.

Вариант №2

1. Из колоды карт (36 листов) наудачу извлекаются 4 карты. С какой вероятностью в эту четверку попадут: а) 2 валета и 2 дамы; б) три карты трефовой масти и одна – бубновой; в) девятка , десятка, король, туз?

2. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся стандартным. Первоначальное количество бракованных изделий в партии

равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно? Чему равна соответствующая вероятность?

3. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X – числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна p.

4. Вероятность появления события в одном эксперименте равна 0,3. С какой вероятностью относительная частота наступления этого события в ста экспериментах отклонится по абсолютной величине от вероятности его наступления в одном эксперименте не больше чем на 0,05?

5. Непрерывный случайный вектор $(X,\ Y)$ имеет плотность распределения вероятностей $p(x,\ y) = a(x+2y)$ в области $D = \{(x,\ y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$. Найти константу a и проверить, являются ли координаты этого случайного вектора независимыми.

Вариант №3

1. Из полного набора домино извлекаются 4 кости. С какой вероятностью среди них окажутся 2 простых и 2 дубля?

2. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Система контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.

3. Некий агрегат испытывается на надежность до тех пор, пока не сломается. Общее число испытаний ограничено четырьмя попытками. Найти среднее значение случайного числа испытаний агрегата, если вероятность того, что он выдержит испытание, равна 0,9.

4. Сто станков работают независимо друг от друга в одинаковом режиме в течение восьми часов, причем каждый из станков оказывается включенным в среднем 6 ч 24 мин и состояние быть включенным для него равновозможно в

любой момент времени. Найти среднее число включенных станков, наиболее вероятное число включенных станков и соответствующую ему вероятность.

5. Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, случайным образом извлекаются 3 шара. Записать распределение случайного вектора (X, Y), где X – число белых шаров в выборке, Y – отношение числа черных шаров в выборке к величине $X+1$.

Вариант №4

1. Из колоды карт (52 листа) наудачу выбираются 2 карты. С какой вероятностью одна из карт побьет другую (козырей нет)?

2. В правом кармане имеются три денежные купюры по 5 byn и четыре купюры по 10 byn, а в левом – шесть по 5 byn и три по 10 byn. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять купюр. Найти вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания купюры в 5 byn.

3. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Найти закон распределения случайного числа бросков, производимых первым баскетболистом, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго – 0,6.

4. Вероятность выхода из строя одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 конденсаторов выйдут из строя от 14 до 26 конденсаторов. Найти также наиболее вероятное число вышедших из строя конденсаторов и соответствующую ему вероятность.

5. Известна плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора (X, Y):

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{b}{x^2y^3}, & x\ge 1,\ y\ge 1;\\ 0, & x<1 \text{ или } y<1.\end{cases}$$

Найти константу b и вероятность $P(XY\le 2)$.

Вариант №5

1. Телевизор имеет 10 каналов. Некто совершенно случайно переключается с канала на канал без повторений. Найти вероятность того, что требуемый канал будет найден не позже чем с третьей попытки.

2. В ящике находятся 15 воланов для игры в бадминтон, из которых 9 новых. Для первой игры наудачу берутся три волана, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наудачу взят один волан, который оказался играным. Найти вероятность того, что все воланы, взятые для первой игры, новые.

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} c\cos^2 x, & x \in [\pi/2, 3\pi/2]; \\ 0, & x \notin [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Найти константу c и функцию распределения этой случайной величины.

4. При изготовлении отливок получается 20% дефектных. Сколько необходимо запланировать отливок к изготовлению, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95 была обеспечена программа выпуска изделий, для выполнения которой необходимо не менее 50 бездефектных отливок?

5. Дано распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

x_i \ y_j	–1	0	5
–1	p_{11}	0,1	0,2
2	0,1	0,05	0,05
4	0,2	0,1	p_{33}

Известно, что $p_{1\cdot} = 0{,}35$. Найти вероятности p_{11}, p_{33} и распределение случайной величины Y.

Вариант №6

1. Из набора карт одной масти (от двойки до туза) наудачу извлекаются 3 карты. С какой вероятностью эти карты будут соседними по достоинству?

2. В сосуд, содержащий шесть шаров, опущен черный шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда два белых шара, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны.

3. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x) = \frac{ax}{(1+x^2)^2}, \quad x \geq 0.$$

Найти константу a и интервал $[1,\ b]$ на числовой оси, в который данная случайная величина попадает с вероятностью 0,25.

4. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,9, утверждать, что относительная частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

5. Непрерывный случайный вектор $(X,\ Y)$ имеет равномерное распределение в треугольнике

$$D = \{(x,\ y)\,|\,x \leq 0,\ y \leq 0,\ y + 2x \geq -2\}.$$

Найти среднее значение координаты X этого случайного вектора.

Вариант №7

1. Код двери состоит из трех различных цифр, набираемых в произвольном порядке из имеющихся десяти. На каждую попытку уходит 2 с. С какой вероятностью на поиск кода уйдет не более 1 мин?

2. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок наудачу извлекает 3 шара. Обратно он возвращает черный шар, если среди вынутых шаров больше черных, в противном случае возвращается белый шар. Второй игрок после этого извлекает один шар и по его цвету должен угадывать число

белых шаров среди трех шаров, извлеченных первым игроком. Найти вероятность того, что у первого игрока было 2 белых шара, если второй игрок вытащил белый шар.

3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины имеет вид $p(x)=\dfrac{a}{x^2+2x+4}$. Найти коэффициент a, функцию распределения случайной величины и вероятность $P(X>0)$.

4. Будем считать, что изделие имеет высшее качество, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 мм. Случайные отклонения размеров от номинала подчиняются нормальному закону распределения со средним квадратичным отклонением, равным 3 мм. Найти вероятность того, что из четырех, взятых наудачу изделий, три будут иметь высшее качество.

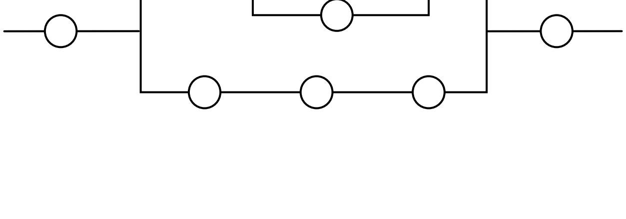
5. Дано распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

x_i \ y_j	1	3
–1	0,2	p_{12}
2	0,1	0,05
4	p_{31}	0,3

Известна вероятность $P(Y\geq X)=0{,}3$. Найти вероятности p_{12}, p_{31} и распределение случайной величины X.

<u>Вариант №8</u>

1. Найти вероятность разрыва электрической цепи



если все ее элементы работают независимо друг от друга и каждый из них может отказать с вероятностью 0,3.

2. Для контроля продукции наудачу выбраны две из трех партий деталей и из каждой взяты для испытания на надежность по одной детали, которые оказались стандартными. Известно, что в первой партии 2%, а во второй и третьей – 3% бракованных деталей. Какова вероятность того, что детали взяты из первой и третьей партий?

3. Вычислив предварительно константу a, найти правую границу интервала $(2, b)$, в который с вероятностью 0,25 попадает случайная величина, имеющая функцию распределения $F(x) = a\left(\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Заряд охотничьего ружья отвешивается на весах, имеющих среднюю квадратичную ошибку взвешивания 150 мг. Номинальный вес порохового заряда – 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда равен 2,5 г (ошибка взвешивания распределена нормально).

5. Непрерывный случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в полукруге $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$. Найти среднее значение координаты Y этого случайного вектора.

<u>**Вариант №9**</u>

1. Код сейфа состоит из шести цифр, каждая из которой может быть любой от 0 до 9. Владелец сейфа забыл половину цифр, а положения оставшихся он не помнит. С какой вероятностью он откроет сейф с третьей попытки?

2. В тире имеются три винтовки, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Начинающий ворошиловский стрелок наудачу выбрал две винтовки, произвел из них по выстрелу и оба раза промахнулся. Найти вероятность того, что выстрелы были произведены из второй и третьей винтовок.

3. Случайная величина имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} a\cos^3 x, x \in [0, \pi/2]; \\ 0, \qquad x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Найти константу a и функцию распределения этой случайной величины.

4. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на станке имеет среднее квадратичное отклонение, равное 5 мк. Найти вероятность того, что деталь не будет стандартной, если для стандартной детали допустимо отклонение размера от номинала на величину, не превышающую ±2 мк.

5. Из множества {2, 3, 4, 5, 6, 7} наудачу извлекаются два числа. Найти распределение случайного вектора (*X*, *Y*), где *X* – количество нечетных чисел среди извлеченных, *Y* – количество простых чисел среди извлеченных.

Вариант №10

1. Подбрасывается шесть игральных костей. С какой вероятностью на половине этих костей выпадет шестерка?

2. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на 2 вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

3. Сигналы на включение прибора подаются через каждые 5 с. Время от момента передачи сигнала до включения прибора – 13 с. Подача сигналов прекращается сразу после того, как прибор включится. Найти закон распределения случайной величины – числа поданных сигналов, если вероятность включения для прибора равна 0,7.

4. У нормально распределенной случайной величины 20% ее значений меньше 10 и 50% больше 30. Найти вероятность попадания этой случайной величины в интервал (20, 50).

5. Координаты X, Y непрерывного случайного вектора (X, Y) независимы и имеют соответственно равномерное на отрезке [–1, 1] и показательное с параметром $\lambda = 2$ распределения. Записать выражение для плотности распределения вероятностей $p(x, y)$ случайного вектора и найти вероятность его попадания в треугольник

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$$

Вариант №11

1. Из множества чисел {1, 2, …, 10} наудачу выбираются 2 числа. С какой вероятностью среди окажется хотя бы одно простое число?

2. Определить вероятность того, что 2 шара, извлеченные наудачу из урны, содержащей 20 шаров, окажутся белого цвета, если число шаров других цветов в урне равновозможно от 0 до 3.

3. Случайная величина задана своей плотностью распределения вероятностей $p(x) = \begin{cases} 2^{-x} a, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Найти константу a, а также среднее значение и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины.

4. Деталь, изготовленная автоматом, считается стандартной, если отклонение ее размера от номинала не превышает ±10 мм. Случайные отклонения размера подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 5 мм. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью, превосходящей 0,95, среди них оказалась хотя бы одна бракованная?

5. Три раза подбрасывается симметричная монета. Записать распределение случайного вектора (X, Y), где X – число выпадений герба, Y – абсолютная величина разности числа выпадений герба и решки.

Вариант №12

1. Участников некоторого теннисного турнира, в котором участвуют 16 теннисистов, в том числе первые три ракетки мира, случайным образом разделили на две подгруппы по 8 спортсменов в каждой. С какой вероятностью все три первые ракетки окажутся в одной подгруппе?

2. Имеется 10 одинаковых урн, в девяти из которых находятся по 2 черных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен шар, оказавшийся черным. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

3. Случайная величина задана своей плотностью распределения вероятностей $p(x)=\begin{cases} 3^{2-x}a, & x \ge 2; \\ 0, & x < 2. \end{cases}$ Найти константу a, а также дисперсию этой случайной величины.

4. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Найти вероятность того, что среди 200 новорожденных утроенное количество мальчиков больше удвоенного количества девочек.

5. Координаты X, Y непрерывного случайного вектора (X, Y) независимы и нормально распределены с одинаковыми параметрами $m=0,\ \sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Найти вероятность попадания этого случайного вектора в круг $x^2+y^2 \le 9.$

Вариант №13

1. Среди участниц небывалого конкурса красоты, в котором участвовали 12 блондинок, 13 брюнеток и 14 шатенок жюри не смогло выбрать трех самых красивых, и поэтому победительниц определил жребий. С какой вероятностью в число победительниц войдут блондинка, брюнетка и шатенка?

2. Определить вероятность того, что среди 3 помидоров, взятых наудачу из корзины, содержащей 20 помидоров, не окажется гнилых, если число гнилых помидоров в корзине равновозможно от 0 до 3.

3. Непрерывная случайная величина задана своей функцией распределения

$$F(x) = a(\operatorname{arctg} x^3 + b).$$

Найти константы a, b, а также плотность распределения вероятностей этой случайной величины.

4. Какова вероятность того, что среди 100 студентов, сидящих в аудитории, число студентов, родившихся зимой, заключено в пределах от 20 до 40?

5. Дано распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

x_i \ y_j	0	1	4
–5	0,1	p_{12}	0,2
1	0,05	0,15	0,2
2	0,05	0,05	0,1

Найти ковариацию этого случайного вектора.

Вариант №14

1. Предположим, что пароль некоторого почтового аккаунта состоит из девяти символов, четыре из которых известны, два известны, но неизвестно их положение, а три оставшихся – цифры, каждая из которых может быть любой от 0 до 9. С какой вероятностью этот аккаунт можно взломать простым перебором с первой попытки? Сколько в худшем случае на это уйдет времени, если на проверку каждого варианта уходит 5 с?

2. В первом ящике лежат 10 теннисных мячей, среди которых 5 новых, во втором – 10 новых. Для игры из каждого ящика наудачу извлекаются по 2 мяча, которые после игры возвращаются обратно. С какой вероятностью мяч,

наудачу извлеченный после этого из наудачу выбранного ящика, окажется новым?

3. Имеется 10 деталей, из которых 6 являются стандартными. Наудачу отбирают 5 деталей. Найти распределение случайного числа стандартных деталей среди отобранных. Найти вероятность того, что из отобранных деталей можно произвести сборку прибора, если для этого необходимо иметь 4 стандартных детали.

4. Размер детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 20 см и дисперсией 0,2 см^2. Какую относительную точность детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

5. Координаты X, Y непрерывного случайного вектора (X, Y) независимы и каждая из них имеет показательное распределение с параметрами $\lambda = 3$, $\lambda = 4$, соответственно. Найти вероятность попадания этого случайного вектора в полуплоскость $D = \{(x, y) \mid y \le x\}$.

<u>Вариант №15</u>

1. В городе Нью-Васюки Остап Бендер и Киса Воробьянинов организовали очередной межпланетный шахматный турнир, в котором согласились принять участие 10 международных гроссмейстеров со всей галактики и 2 местных одноглазых любителя. Участники случайным образом были разбиты на две подгруппы по 6 шахматистов. С какой вероятностью одноглазые нью-васюкинцы попадут в разные подгруппы?

2. В каждой из трех урн лежат по 2 белых и 2 черных шара. Из первой урны наудачу извлечен 1 шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны также случайным образом извлечен и переложен в третью урну 1 шар. Найти вероятность извлечения после всех этих процедур черного шара из третьей урны.

3. Непрерывная случайная величина имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x<0; \\ 0, & x\geq 0. \end{cases}$$

Чему равна константа a и какова длина отрезка $[b,\,0]$, в который с вероятностью 0,5 попадает данная случайная величина?

4. Предположим, что за некоторый промежуток времени из пруда можно выловить в среднем две рыбы. Считая применимым здесь распределение Пуассона, найти вероятность того, что за тот же промежуток времени из пруда удастся выловить не менее трех рыб.

5. На стол последовательно выставляются три кости домино. Найти распределение случайного вектора (X, Y), где X – индикатор дубля первой кости, Y – число костей среди выставленных, которые могут сыграть с первой костью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. – М.: Наука, 1969.
2. Севастьянов Б.А. *Курс теории вероятностей и математической статистики*. – М.: Наука, 1982.
3. Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей*. – М.: Наука, 1982.
4. Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. Ласый П.Г. *Лекции по математике для студентов энергетических специальностей БНТУ* (IV *семестр*) . – [Электронный ресурс]. – 2016. – Режим доступа: http://rep.bntu.by/handle/data/26457. – Дата доступа: 21.11.2016.
6. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. *Сборник задач по теории вероятностей*. – М.: Наука, 1989.
7. *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций* /Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
8. *Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы* /Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1984.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции ошибок $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-s^2/2} ds$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	6,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4563
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,56	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997