Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лабораторные работы № 3, 15

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лабораторные работы № 3, 15

Минск 2009

УДК 531.38(076.5)
ББК 22.213я7
И 32

Составители:
Д.С. Бобученко, Ю.А. Бумай, В.В. Красовский

Рецензенты:
П.Г. Кужир, И.А. Хорунжий

И 32 Изучение законов вращательного движения твердого тела: лабораторные работы № 3, 15 / сост.: Д.С. Бобученко, Ю.А. Бумай, В.В. Красовский. – Минск: БНТУ, 2009. – 32 с.

ISBN 978-985-525-246-8.

Издание содержит описание двух лабораторных работ, посвященных изучению законов вращательного движения твердого тела.

В работах рассмотрены наиболее важные характеристики вращательного движения, основной закон динамики вращательного движения, закон сохранения момента импульса, а также изложена теория гироскопического эффекта. Приведено описание лабораторных установок и заданий.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Механика» дисциплины «Общая физика».

УДК 531.38(076.5)
ББК 22.213я7

ISBN 978-985-525-246-8

Лабораторная работа № 3

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: изучение основных характеристик вращательного движения, законов вращательного движения твердого тела.

Задача работы: определить момент силы трения.

Кинематические и некоторые динамические характеристики вращательного движения

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения*** (рис. 3.1).

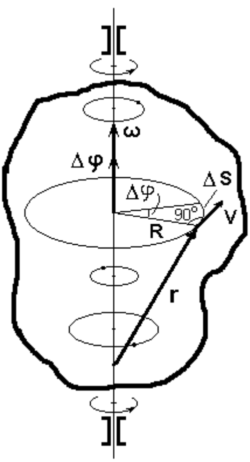


Рис. 3.1

Абсолютно твердое тело (***твердое тело***) – это тело, изменением размеров и формы которого можно пренебречь, т.е. расстояния между любыми частями тела остаются неизменными.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Пусть не-которая точка, движущаяся по окружности радиуса R (см. рис. 3.1), и за промежуток времени Δt переместилась на угол $\Delta\varphi$.

Элементарные (бесконечно малые) углы поворотов $\Delta\varphi$ (или $d\varphi$) можно рассматривать как векторы. Модуль вектора $\Delta\varphi$ равен значению угла поворота, а сам вектор $\Delta\varphi$ направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую ***правилом правого винта*** (т.е. его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения по окружности). Этот вектор не имеет определенных точек приложения: он может откладываться из любой точки на оси вращения. ***Угловой скоростью*** называется векторная величина, равная первой производной угла поворота по времени:

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта. Линейная скорость точки:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно записать как векторное произведение угловой скорости и радиуса-вектора точки $\boldsymbol{r}$ относительно любой точки на оси вращения:

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}].$$

Если вращение равномерное, т.е. $\omega = \mathrm{const}$, его можно характеризовать ***периодом вращения*** T – временем, за которое точка или тело совершает один полный оборот. Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном вращении за единицу времени называется ***частотой вращения***: $n = 1/T$.

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}.$$

Как видно из определения, направление углового ускорения совпадает с направлением изменения угловой скорости. Поэтому при ускоренном вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения сонаправлен с вектором угловой скорости, при замедленном – эти вектора направлены в разные стороны.

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная произведению силы на ее плечо. ***Плечо силы относительно оси*** – это кратчайшее расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила (линия действия силы).

Моментом M ***силы*** F ***относительно точки О*** называется векторная величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора r, проведенного из точки О в точку приложения силы (точка В), на силу F (рис. 3.2):

$$M = [r, F].$$

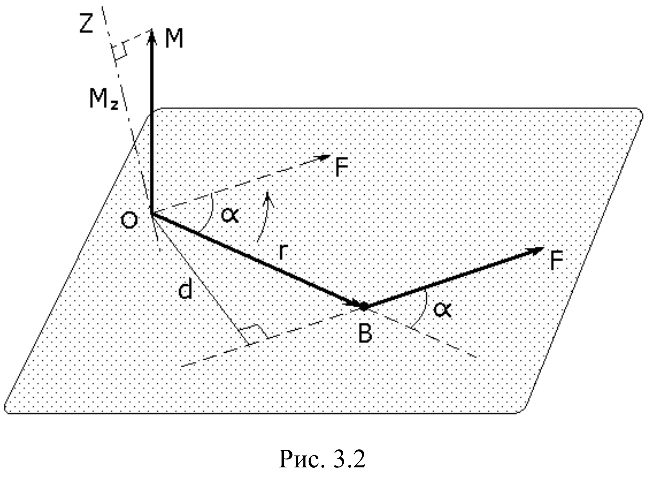


Рис. 3.2

Модуль вектора момента силы: $M = Fr\sin\alpha = Fd$, где α – угол между векторами r и F, $d = r{\cdot}\sin\alpha$ – плечо силы относительно точки – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O.

Вектор M перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы r и F. Направление вектора M совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F по кратчайшему расстоянию, как показано на рисунке.

Момент силы относительно оси также равен проекции на эту ось вектора момента силы M, определенного относительно произвольной точки на этой оси. Значение момента силы относительно оси не зависит от выбора положения точки на оси.

Кинетическая энергия вращающего тела. Момент инерции

Рассмотрим вращательное движение твердого тела относительно неподвижной и проходящей через него оси. Разобьем это тело на множество элементов – элементарных объемов, – масса каждого из которых равна Δm_i и радиус вращения r_i (рис. 3.3).

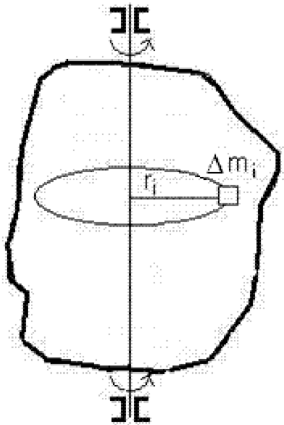


Рис. 3.3

Кинетическая энергия i-го элемента равна

$$E_i = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2}. \qquad (3.1)$$

Кинетические энергии различных элементов будут разными, т.к. различны их линейные скорости. Чтобы рассчитать полную энергию вращательного движения твердого тела, необходимо просуммировать энергии всех его элементов:

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} \qquad (3.2)$$

или

$$E = \sum_i \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2}, \qquad (3.3)$$

т.к. линейная скорость вращения связана с угловой скоростью $\upsilon_i = \omega r_i$.

Поскольку угловая скорость ω одинакова для всех элементов тела, ее можно вынести за знак суммы:

$$E = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 . \qquad (3.4)$$

Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ называется моментом инерции твердого тела, а $I_i = \Delta m_i r_i^2$ – моментом инерции одного элемента (материальной точки), размерами которого можно пренебречь по сравнению с его радиусом вращения. Момент инерции тела равен сумме моментов инерции элементов, составляющих это тело:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 . \qquad (3.5)$$

Тогда формула для кинетической энергии вращательного движения твердого тела принимает вид

$$E = \frac{I\omega^2}{2} . \qquad (3.6)$$

Момент инерции не зависит от скорости вращения тела и характеризует инертность тела при вращательном движении: чем больше I, тем большую энергию надо затратить для достижения заданной угловой скорости. Это следует из формулы (3.6). Значение момента инерции определяется не только массой тела, но и ее распределением относительно оси вращения. Для тонкостенного полого цилиндра (толщина которого много меньше его радиуса R) момент инерции, согласно (3.5), будет равен

$$I = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2 \,. \tag{3.7}$$

В случае непрерывного распределения массы формула (3.5) сводится к интегралу

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \mathrm{d}V \,, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{d}m$ – масса материальной точки тела;

ρ – плотность в определенной точке тела;

$\mathrm{d}V$ – элементарный объем.

Интегрирование производится по всему объему тела.

В качестве примера рассчитаем момент инерции сплошного цилиндра высотой h относительно его геометрической оси. Для этого разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины $\mathrm{d}r$ с внутренним радиусом r (рис. 3.4).

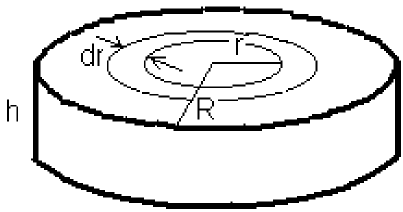


Рис. 3.4

Так как радиусы точек бесконечно тонкого цилиндра равны между собой, то его момент инерции можно рассчитать по формуле

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m \,, \tag{3.9}$$

где $\mathrm{d}m$ – масса всего элементарного цилиндра.

Выразим массу полого элементарного цилиндра через его объем $\mathrm{d}V$ и плотность ρ

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho 2\pi r h \mathrm{d}r \,. \tag{3.10}$$

Следовательно, момент инерции элементарного цилиндра равен

$$dI = 2\pi h\rho r^3 dr\,, \tag{3.11}$$

а всего цилиндра

$$I = \int dI = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr\,, \tag{3.12}$$

где R – радиус цилиндра.

Произведя интегрирование и подставив пределы, получим:

$$I = \frac{\pi h\rho R^4}{2}. \tag{3.13}$$

Так как $\pi h R^2$ – объем цилиндра, а его масса $m = \rho V = \pi h\rho R^2$, то его момент инерции равен

$$I = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.14}$$

Без расчета приведем формулы моментов инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \tag{3.15}$$

и для однородного стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{1}{12} ml^2\,, \tag{3.16}$$

где l – длина стержня;
R – радиус шара;
m – массы этих тел.

Для расчета момента инерции тела относительно оси, не проходящей через его центр масс, нужно воспользоваться ***теоре-***

мой Штейнера, которая формулируется следующим образом: *момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:*

$$I = I_0 + md^2 . \tag{3.17}$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Для вывода уравнения динамики вращательного движения твердого тела используем ***теорему о кинетической энергии:*** *работа результирующей всех сил, действующих на тело, идет на приращение кинетической энергии:* $dA = dE_k$.

Пусть к телу, закрепленному на оси *O*, в горизонтальной плоскости приложена внешняя сила F (рис. 3.5).

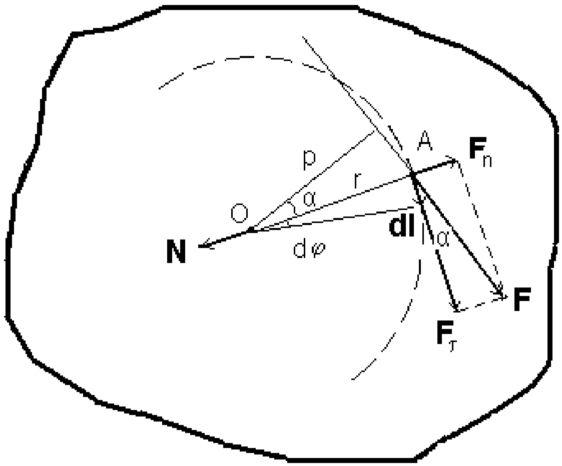


Рис. 3.5

Напомним, что *элементарной работой* dA *силы* F *называется скалярное произведение силы* F *на бесконечно малое перемещение* dl:

$$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{l}) = Fdl\cos\alpha = F_\tau dl\,, \tag{3.18}$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения.

Отметим, что нормальная составляющая силы F_n (в отличие от тангенциальной F_τ) и сила реакции опоры N работы не совершают, т.к. они перпендикулярны направлению перемещения.

Элемент $dl = rd\varphi$ при небольших углах поворота $d\varphi$ (r – радиус-вектор элемента тела). Тогда работа этой силы записывается следующим образом:

$$dA = Fr\cos\alpha d\varphi\,. \tag{3.19}$$

Выражение $Fr\cos\alpha$ является моментом силы (произведение силы F на плечо $p = r\cos\alpha$):

$$M = Fr\cos\alpha\,. \tag{3.20}$$

Тогда работа равна

$$dA = Md\varphi\,. \tag{3.21}$$

Эта работа затрачивается на изменение кинетической энергии вращения

$$Md\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right). \tag{3.22}$$

Если $I = \mathrm{const}$, то после дифференцирования правой части получим:

$$Md\varphi = I\omega d\omega$$

или, т.к. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$,

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I\beta\,, \tag{3.23}$$

где $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Выражение (3.23) является ***уравнением динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси***, которое лучше из-за причинно-следственных связей представить как

$$\beta = \frac{M}{I}. \tag{3.24}$$

Угловое ускорение тела определяется алгебраической суммой моментов внешних сил относительно оси вращения, деленной на момент инерции тела относительно этой оси.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Масса m	Момент инерции I
Скорость $\boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt}$	Угловое ускорение $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$
Сила F	Момент силы M или M_z
Основное уравнение динамики: $a = \dfrac{F}{m}$	Основное уравнение динамики: $\beta = \dfrac{M}{I}$
Работа $dA = F_s ds$	Работа $dA = M_Z d\varphi$
Кинетическая энергия $E_k = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$

Динамика поступательного движения твердого тела полностью определяется силой и массой как мерой их инертности. При вращательном движении твердого тела динамика движения определяется не силой как таковой, а ее моментом, инертность – не массой, а ее распределением относительно оси вращения. Тело не приобретает углового ускорения, если сила приложена, но ее момент будет равен нулю.

Методика выполнения работы

Принципиальная схема лабораторной установки представлена на рис. 3.6. Она состоит из диска массой m_d, закрепленных на нем четырех стержней массами m_2, и четырех грузов массами m_1, расположенных симметрично на стержнях. На диск намотана нить, к которой подвешен груз массой m.

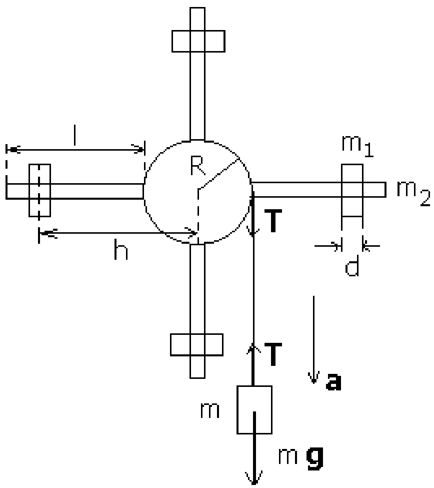


Рис. 3.6

Уравнение поступательного движения груза m без учета сил трения согласно второму закону Ньютона:

$$ma = mg + T \qquad (3.25)$$

или в скалярном виде, т.е. в проекции на направление движения имеет вид:

$$ma = mg - T\,. \tag{3.26}$$

Откуда

$$T = mg - ma\,, \tag{3.27}$$

где T – сила натяжения нити.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (3.24), момент силы T, под действием которой система тел m_d, m_1, m_2 совершает вращательное движение, равен произведению момента инерции I этой системы на ее угловое ускорение β:

$$M = I\beta \text{ или } TR = I\beta\,, \tag{3.28}$$

где R – плечо этой силы равное радиусу диска.

Выразим силу натяжения нити из (3.28)

$$T = I\,\frac{\beta}{R} \tag{3.29}$$

и приравняем правые части (3.27) и (3.29)

$$mg - ma = I\,\frac{\beta}{R}\,. \tag{3.30}$$

Линейное ускорение связано с угловым следующим соотношением: $a = \beta R$, следовательно

$$mgR^2 - maR^2 = Ia\,. \tag{3.31}$$

Откуда ускорение груза m без учета сил трения в блоке равно:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{mR^2}}. \qquad (3.32)$$

Рассмотрим динамику движения системы с учетом сил трения, которые действуют в системе. Они возникают между стержнем, на котором закреплен диск и неподвижной частью установки (внутри подшипников), а также между подвижной частью установки и воздухом. Все эти силы трения мы будем учитывать с помощью момента сил трения.

С учетом момента сил трения уравнение динамики вращения записывается следующим образом:

$$M - M_{\text{тр}} = I\beta = I\frac{a'}{R}, \qquad (3.33)$$

где a' – линейное ускорение при действии сил трения;

$M_{\text{тр}}$ – момент сил трения.

Вычитая уравнение (3.33) из уравнения (3.28), получим:

$$M - M + M_{\text{тр}} = I\frac{a}{R} - I\frac{a'}{R},$$

$$M_{\text{тр}} = I\frac{a - a'}{R}. \qquad (3.34)$$

Ускорение без учета силы трения a можно рассчитать по формуле (3.32). Ускорение груза массой m с учетом сил трения можно рассчитать из формулы для равноускоренного движения, измерив пройденный путь S и время t:

$$a' = \frac{2S}{t^2}. \qquad (3.35)$$

Зная значения ускорений (a и a'), по формуле (3.34) можно определить момент сил трения. Для расчетов необходимо знать величину момента инерции системы вращающихся тел, которая будет равен сумме моментов инерции диска, стержней и грузов.

Момент инерции диска согласно (3.14) равен:

$$I_d = \frac{m_d R^2}{2}. \tag{3.36}$$

Момент инерции каждого из стержней (см. рис. 3.6) относительно оси О согласно (3.16) и теореме Штейнера равен

$$I_c = I_{oc} + m_2 a_c^2 = \frac{l}{12} m_2 l^2 + m_2 (\frac{l}{2} + R)^2, \tag{3.37}$$

где $a_c = l/2 + R$;

R – радиус диска;

l – длина стержня;

I_{oc} – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Аналогично рассчитываются моменты инерции грузов:

$$I_r = I_{0r} + m_1 h^2 = \frac{l}{3} m_1 d^2 + m_1 h^2, \tag{3.38}$$

где h – расстояние от центра масс груза до оси вращения О;

d – длина груза;

I_{0r} – момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр масс.

Сложив моменты инерции всех тел, получим формулу для вычисления момента инерции всей системы:

$$I = I_d + 4I_c + 4I_r = \frac{m_d R^2}{2} + 4m_2 \left[\frac{l^2}{12} + \left(\frac{l}{2} + R \right)^2 \right] + 4m_1 \left[\frac{d^2}{3} + h^2 \right]. \tag{3.39}$$

Задания

1. По формулам (3.39) и (3.32) рассчитать момент инерции системы I для положения грузов m_1 на стержнях $h = 0{,}1$ м, а также ускорение a груза m для расстояния $S = 0{,}4$ м.
2. Для этого же расстояния измерить время падения груза с заданной высоты S. По формуле (3.35) рассчитать ускорение груза a' при присутствии сил трения.
3. По формуле (3.34) рассчитать момент силы трения.
4. Рассчитать погрешность измерений момента силы трения.
5. Повторить пункты 1–4 для положения грузов m_1 на стержнях $h = 0{,}2$ м.
6. Сравнить результаты.

Контрольные вопросы

1. Какое движение является вращательным? Что такое ось вращения?
2. Какое тело называется абсолютно твердым?
3. Определение угловой скорости. Направление вектора угловой скорости. Связь линейной и угловой скорости при вращательном движении.
4. Дать определение момента силы относительно точки и момента силы относительно оси.
5. Определение момента инерции материальной точки.
6. Как рассчитать момент инерции твердого тела относительно заданной оси?
7. Сформулировать теорему Штейнера.
8. Как рассчитывается кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси?
9. Записать и сформулировать уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т.1: Механика. Молекулярная физика. – 432 с.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2003. – 541 с.

Лабораторная работа № 15

ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

Цель работы: изучение законов вращательного движения, изучение движения гироскопа под действием момента сил.

Задача работы: вычислить величину момента импульса и момента инерции гироскопа.

Основные понятия. Основной закон вращательного движения

Моментом импульса L ***материальной точки относительно точки O*** называется векторное произведение радиуса-вектора этой точки на вектор ее импульса p:

$$L = [r, p] = [r, mv],$$

где r – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A, расположения материальной точки;

$p = mv$ – импульс материальной точки.

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = mvr\sin\alpha = pl\ ,$$

где α - угол между векторами r и p;

l – плечо вектора p относительно точки О.

Вектор L, согласно определению векторного произведения, перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы r и p (или v), его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к p по кратчайшему расстоянию, как показано на рис. 15.1.

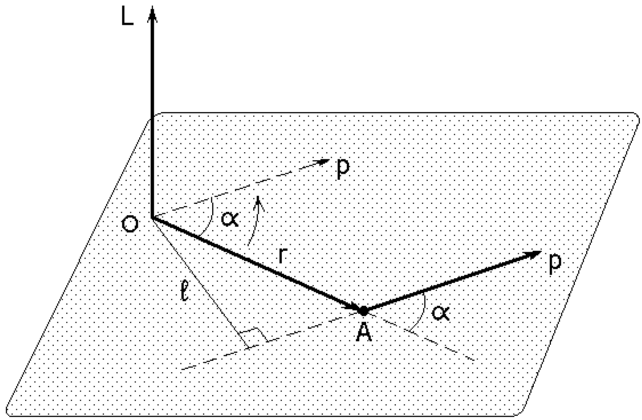


Рис. 15.1

Моментом импульса относительно оси называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки на этой оси.

Моментом силы M ***материальной точки относительно точки О*** называется векторная величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора r, проведенного из точки О в точку приложения силы В, на силу F: $M = [r, F]$.

Модуль вектора момента силы:

$$M = Fr\sin\alpha = Fd\ ,$$

где α – угол между векторами r и F;

$d = r{\cdot}\sin\alpha$ – плечо силы – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой О.

Вектор M перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы r и F, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F по кратчайшему расстоянию, как показано на рис. 15.2.

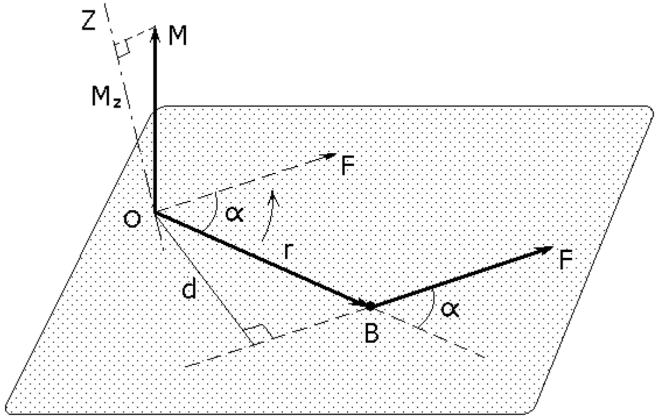


Рис. 15.2

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы M. определенного относительно произвольной точки на этой оси.

Основной закон динамики вращательного движения

Для выяснения назначения приведенных выше понятий рассмотрим систему из двух материальных точек (частиц) и затем обобщим результат на систему из произвольного числа частиц (т.е. на твердое тело). Пусть на частицы с массами m_1, m_2, импульсы которых p_1 и p_2, действуют внешние силы F_1 и F_2. Частицы также взаимодействуют друг с другом внутренними си-лами f_{12} и f_{21} (рис. 15.3).

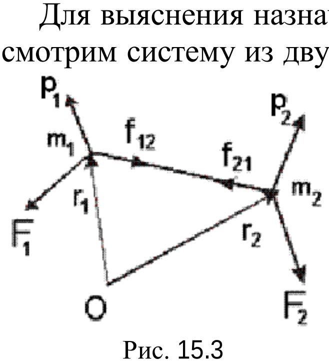


Рис. 15.3

Запишем второй закон Ньютона для каждой из частиц, а также вытекающую из третьего закона Ньютона связь между внутренними силами:

$$\frac{dp_1}{dt} = f_{12} + F_1, \tag{15.1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = f_{21} + F_2, \tag{15.2}$$

$$f_{12} = -f_{21}. \tag{15.3}$$

Умножим векторно уравнение (15.1) на r_1, а уравнение (15.2) – на r_2 и сложим полученные выражения:

$$\left[r_1, \frac{dp_1}{dt}\right] + \left[r_2, \frac{dp_2}{dt}\right] = [r_1,\ f_{12}] + [r_2,\ f_{21}] + [r_1, F_1] + [r_2, F_2]. \tag{15.4}$$

Преобразуем левые части уравнения (15.4), учитывая, что

$$\frac{d}{dt}[r_i,\ p_i] = \left[\frac{dr_i}{dt},\ p_i\right] + \left[r_i, \frac{dp_i}{dt}\right], \quad i = 1, 2.$$

Векторы $\frac{dr_i}{dt}$ и $p_i = m_i \frac{dr_i}{dt}$ параллельны и их векторное произведение равно нулю, поэтому можно записать

$$\left[r_i, \frac{dp_i}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[r_i,\ p_i] = \frac{dL_i}{dt}. \tag{15.5}$$

Первые два слагаемых справа в (15.4) равны нулю, т.е.

$$[r_1,\ f_{12}] + [r_2,\ f_{21}] = [r_1 - r_2,\ f_{12}], \tag{15.6}$$

поскольку $f_{21} = -f_{12}$, а вектор $r_1 - r_2$ направлен по одной и той же прямой, что и вектор f_{12}.

Учитывая (15.5) и (15.6) из (15.4) получим

$$\frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} = M_1 + M_2$$

$$\text{или} \quad \frac{dL}{dt} = M\ , \qquad (15.7)$$

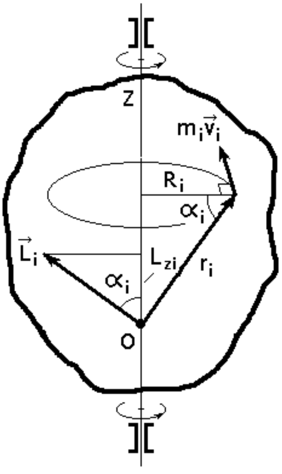
где $L = L_1 + L_2$; $M = M_1 + M_2$.

Обобщая результат на систему из n частиц, мы можем записать $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \sum\limits_{i=1}^{n} L_i$; $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$.

Уравнение (15.7) является математической записью ***основного закона динамики вращательного движения***: *скорость изменения момента импульса системы равна сумме действующих на нее моментов внешних сил*. Этот закон справедлив относительно любой неподвижной или движущейся с постоянной скоростью точки в инерциальной системе отсчета. Отсюда же следует закон ***сохранения момента импульса***: *если момент внешних сил* M *равен нулю, то момент импульса системы сохраняется* ($L = const$).

Момент импульса абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z. Твердое тело можно представить как систему из n материальных точек (частиц). При вращении некоторая рассматриваемая точка тела (обозначим ее индексом i, причем $i = 1 \ldots n$) движется по окружности постоянного радиуса R_i с линейной скоростью v_i вокруг оси z (рис. 15.4).



Ее скорость v_i и импульс $m_i \upsilon_i$ перпендикулярны радиусу R_i. Поэтому модуль момента импульса частицы тела относительно точки О, расположенной на оси вращения:

$$L_i = m_i r_i \upsilon_i ,$$

где r_i – радиус-вектор, проведенный от точки О к частице.

Используя связь между линейной и угловой скоростью $\upsilon_i = \omega R_i$, где R_i – расстояние частицы от оси вращения, получим

$$L_i = m_i r_i \omega R_i .$$

Проекция этого вектора на ось вращения z, т.е. момент импульса частицы тела относительно оси z, будет равна:

$$L_{zi} = L_i \cos\alpha_i = m_i (r_i \cos\alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega .$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульсов всех частей тела

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z \omega . \qquad (15.8)$$

Величина I_z, равная сумме произведений масс частиц тела на квадраты их расстояний до оси z, называется моментом инерции тела относительно данной оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 .$$

Из выражения (15.8) следует, что момент импульса тела не зависит от положения точки О на оси вращения, поэтому говорят о моменте импульса тела относительно некоторой оси вращения, а не относительно точки

Свободные оси и главные оси инерции тела

Для того чтобы сохранить фиксированное в пространстве положение оси вращения твердого тела, ее механически закрепляют, используя обычно подшипники, т.е. воздействуют внешними силами. Однако существуют такие оси вращения тел, которые не изменяют своей ориентации в пространстве без действия на них внешних сил. Эти оси называются ***свободными***. Можно доказать, что у любого тела имеются три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр масс, которые являются свободными. Эти оси называются также ***главными осями инерции тела***.

Гироскопы

В настоящее время к гироскопам относят широкий класс приборов, в которых используются более ста различных явлений и физических принципов. В данной лабораторной работе изучается классический гироскоп, в дальнейшем просто гироскоп.

***Гироскопом* (*или волчком*)** *называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии*. Эту ось мы будем называть осью гироскопа. Она является одной из главных осей инерции (свободной осью). Момент импульса гироскопа в таком случае направлен вдоль оси и равен $L = I\omega$.

Рассмотрим горизонтально ориентированный уравновешенный гироскоп (центр тяжести которого находится над точкой опоры). Т.к. момент силы тяжести для него равен нулю, то согласно закону сохранения момента импульса $L = I\omega = \mathrm{const}$, т.е. направление его оси вращения не изменяет положения в пространстве.

При попытке вызвать поворот оси гироскопа наблюдается явление, называемое ***гироскопическим эффектом***. Суть эффекта: *под действием силы* F, *приложенной к оси вращающегося гироскопа, ось гироскопа поворачивается в плоскости, перпендикулярной этой силе*. Например, при действии вертикальной силы, ось гироскопа поворачивается в горизонтальной плоскости. На первый взгляд это кажется противоестественным.

Гироскопический эффект объясняется следующим образом (рис. 15.5). Момент M силы F направлен перпендикулярно его оси, т.к. $M = [r, F]$, r – радиус-вектор из центра масс гироскопа в точку приложения силы.

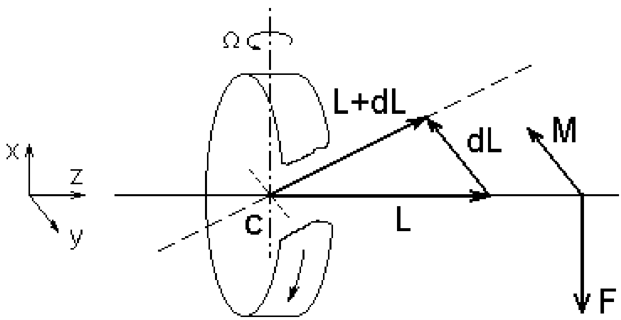


Рис. 15.5

За время $\mathrm{d}t$ момент импульса гироскопа L получит приращение $\mathrm{d}L = M \cdot \mathrm{d}t$ (в соответствии с основным законом вращательного движения), направленное в том же направлении, что и M и станет равным $L + \mathrm{d}L$. Направление $L + \mathrm{d}L$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось гироскопа повернется в плоскости, перпендикулярной силе F на некоторый угол $\mathrm{d}\varphi = |\mathrm{d}L|/L = M \cdot \mathrm{d}t/L$, с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L}. \qquad (15.9)$$

Угловая скорость поворота оси гироскопа Ω называется угловой скоростью прецессии, а такое вращательное движение оси гироскопа ***прецессией***.

Из (15.9) следует

$$M = \Omega L.$$

Векторы M, L, $\mathbf{\Omega}$ взаимно перпендикулярны, поэтому можно записать

$$M = [\mathbf{\Omega}, L].$$

Эта формула получена для сручая, когда векторы M, L, $\mathbf{\Omega}$ взаимно перпендикулярны, однако можно доказать, что справедлива в общем случае.

Отметим, что данные рассуждения и вывод формул справедлив в том случае, когда угловая скорость вращения гироскопа $\omega >> \Omega$.

Из формулы (15.9) следует, что скорость прецессии Ω прямо пропорциональна M и обратно пропорциональна моменту импульса гироскопа L. Если время действия силы мало, момент импульса L достаточно велик, то скорость прецессии Ω будет мала. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Практическое применение гироскопов

Описанные выше свойства гироскопа нашли разнообразное практическое применение. Одна из областей – нарезное оружие. После вылета из ствола орудия на снаряд действует сила сопротивления воздуха, момент которой может опрокинуть снаряд и изменить его ориентацию относительно траектории беспорядочным образом, что отрицательно влияет на дальность полета и точность попадания в цель. Винтовые нарезы в стволе орудия сообщают вылетающему снаряду быстрое вращение вокруг его оси. Снаряд превращается в гироскоп и внешний момент силы сопротивления воздуха вызывает лишь прецессию его оси вокруг направления касательной к траектории снаряда. При этом сохраняется определенная ориентация снаряда в пространстве.

Другой важной сферой применения гироскопов являются различные гироскопические приборы: гирогоризонт, гирокомпас и т.д. Уравновешенные гироскопы также применяются для поддержания заданного направления движения самолета (автопилот). Для этого крепление гироскопа осуществляют на карданной подвеске, которая уменьшает действие внешних моментов сил, возникающих при маневре самолета. Благодаря этому ось гироскопа сохраняет свое направление в пространстве независимо от движения самолета. При отклонении направления движения самолета от направления, заданного осью гироскопа, возникают автоматические команды, возвращающие самолет к заданному направлению.

Описанное поведение гироскопа также положено в основу прибора, называемого гироскопическим компасом (гирокомпасом), представляющим собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влиянием суточного вращения Земли ось гирокомпаса устанавливается в такое положение, при котором угол между его осью и осью вращения Земли оказывается минимальным. В этом положении ось гирокомпаса оказывается в меридиональной плоскости, т.е. указывает точно на географический север. Гироскопический компас выгодно отличается от компаса с магнитной стрелкой тем, что в его показания не надо вносить поправки на так называемое магнитное склонение (связанное с несовпадением географического и магнитного полюсов Земли), а также не надо принимать мер для компенсации воздействия магнитных наводок от корпуса и оборудования судна.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 15.6) состоит из следующих основных узлов:

1. Диск гироскопа.
2. Рычаг с метрической шкалой.
3. Груз, перемещением которого по рычагу *2* задается величина момента силы.
4. Диск с угловой шкалой для определения угла поворота оси гироскопа в горизонтальной плоскости при прецессии.
5. Блок измерений и управления.

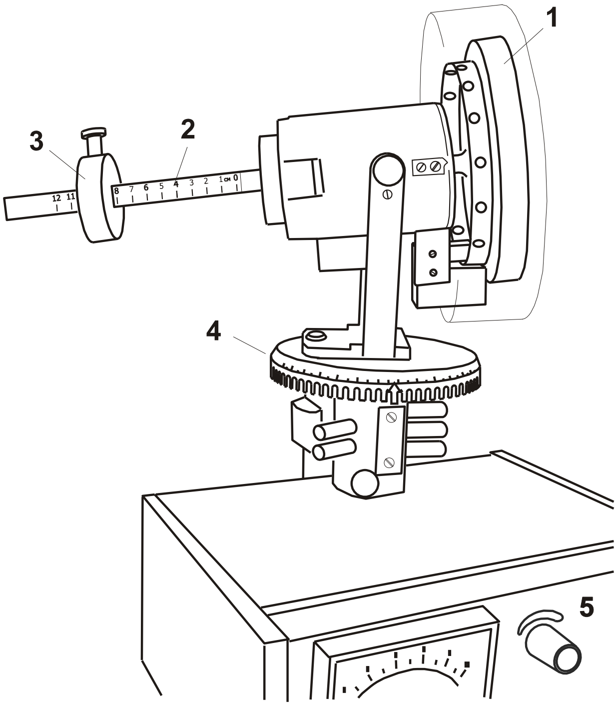


Рис. 15.6

Задания

1. Определить модуль момента силы тяжести для нескольких положений груза z на рычаге гироскопа:

$$\left|M\right| = mg\left|z - z_p\right|,$$

где m – масса груза;

z_p – координата груза по метрической шкале рычага, когда гироскоп уравновешен.

2. Для каждого положения груза определить время поворота оси гироскопа Δt на заданный угол $\Delta\varphi$ и вычислить угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

3. Вычислить величину момента импульса гироскопа для каждого из измерений:

$$L = \frac{\left|M\right|}{\Omega}.$$

4. Вычислить среднее значение момента импульса гироскопа:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N} L_i}{N},$$ где N – число измерений.

5. Вычислить момент инерции гироскопа по формуле $I = \overline{L}/\omega$ (ω – угловая скорость вращения гироскопа; $\omega = 2\pi\nu$, ν – число оборотов двигателя в единицу времени) и определить абсолютную и относительную ошибки в определении момента инерции гироскопа.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент импульса материальной точки относительно точки?
2. Что такое момент силы относительно точки?

3. Момент импульса абсолютно твердого тела.
4. Основной закон динамики вращательного движения.
5. Момент инерции твердого тела относительно данной оси.
6. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
7. Что такое гироскоп?
8. Что такое гироскопический эффект?
9. Что называется прецессией гироскопа и при каких условиях она наблюдается?
10. Чему равна угловая скорость прецессии?

Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т.1: Механика. Молекулярная физика. – 432 с.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2003. – 541 с.
3. Петровский, И.И. Механика / И.И. Петровский. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 352 с.
4. Сивухин, Д.В. Механика: учебное пособие для вузов: в 4 т. / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1989. – Т.1. – 576 с.

Содержание

Учебное издание

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лабораторные работы № 3, 15

Составители:
БОБУЧЕНКО Дмитрий Степанович
БУМАЙ Юрий Александрович
КРАСОВСКИЙ Василий Васильевич

Редактор Е.О. Коржуева
Компьютерная верстка Н.А. Школьниковой

Подписано в печать 08.12.2009.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 100. Заказ 1125.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.