

РАЗДЕЛ VI. МЕХАНИКА ГРУНТОВ, ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ

УДК 624.15

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ ОСНОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ГИБКОЙ СТЕНКИ

¹ДМИТРИЕВА К. В., ²КОЗУНОВА О. В.

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный университет транспорта
Минск, Беларусь

Задача о совместной работе деформируемого основания и заглубленной в него конструкции является сложной контактной задачей, способы решения которой в общей постановке современный математический аппарат не разработан [1]. Распределение контактных напряжений в такой задаче зависит от жесткости, формы и размеров контактирующего сооружения, а также от неоднородности и податливости основания, и может быть найдено точно лишь при решении сложных интегро-дифференциальных уравнений.

Известны решения для стенок, заглубленных в упругом основании с прямолинейной границей, в которых исследования проводились без учета разрыва сплошности упругого основания. Также практически отсутствуют публикации, связанные с расчетом конструкций в упругом основании с учетом физической нелинейности материала конструкции [4, 5]. Законы нелинейно-упругого деформирования конструкционного материала в перечисленных работах и в наиболее популярных программных комплексах, таких как Лира и Plaxis, представлены в виде экспоненциальной или кусочно-линейной зависимостей.

В настоящей работе предлагается численно-аналитический метод расчета нелинейно-упругой гибкой стенки, находящейся в неоднородном основании с ломаным несимметричным очертанием внешнего контура, позволяющий определить параметры напряженно-деформированного состояния системы «нелинейно-упругая

гибкая стенка в физически-нелинейной полуплоскости с ломаным контуром с усредненными параметрами упругости».

Расчет ведется в конструктивно-нелинейной постановке, с использованием нелинейной зависимости «изгибающий момент-кривизна в сечениях стенки», построенной путем аппроксимации соответствующей диаграммы, полученной экспериментальным путем для реального напряженно-деформированного состояния конструкции.

Постановка задачи. В работе поставлена и решена задача о расчете стенки произвольной гибкости в нелинейно-упругой полуплоскости (рис. 1). При расчете гибкой стенки в упругом основании вводятся следующие гипотезы и допущения:

- стенка в упругом основании работает в условиях плоской деформации; в качестве модели основания принимается нелинейно-упругая неоднородная полуплоскость со сложным, ломаным очертанием внешнего контура;

- касательные напряжения на контакте стенки и упругого основания не учитываются;

- на расчетной схеме стенка представляется в виде вертикальной балочной плиты, учитывающей физическую нелинейность материала, в качестве закона деформирования которого выбрана нелинейно-упругая функциональная зависимость, связывающая изгибающий момент и кривизну для нормального сечения этой плиты;

- физическая нелинейность упругого основания описывается связью интенсивности напряжений и деформаций послойно через функцию гиперболический тангенс в законе нелинейно-упругого деформирования основания [3] и усредняется в пределах рассматриваемой расчетной области. Модуль упругости в нелинейных расчетах – переменный, коэффициент Пуассона – постоянный.

При изгибе стенки происходит отрыв стенки от основания, так как в упругом неоднородном основании, моделирующем реальные свойства грунтового основания, возникновение растягивающих напряжений невозможно. Размеры контактной зоны заранее неизвестны, следовательно, поставленная задача имеет конструктивно-нелинейную расчетную схему (рис. 2). Расчет ведется в предположении возникновения двух точек раздела граничных условий на контакте между стенкой и основанием.

Указанные предпосылки позволяют при расчете системы «гибкая нелинейно-упругая стенка – нелинейно-упругое основание» от аналитического расчета перейти к биитерационному численному решению.

В качестве внешнего алгоритма для уточнения параметров контактной зоны используется метод дискретного представления области контакта, где для определения перемещений в неоднородном основании в силу нелинейности расчета используется метод упругих решений А.А. Ильюшина [2].

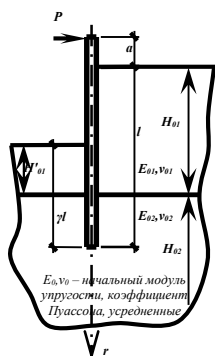


Рис. 1. Горизонтально нагруженная гибкая стенка в неоднородном основании (с усредненными упругими параметрами)

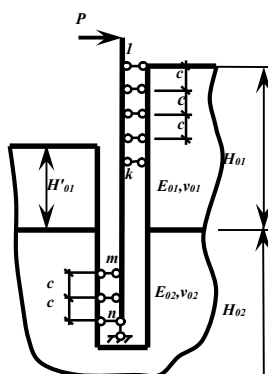


Рис. 2. Расчетная схема стенки в упругой среде

В качестве внутреннего алгоритма для уточнения жесткостных параметров используется деформационная модель стенки в виде аналитической зависимости между изгибающими моментами и кривизной нормального сечения стенки. Для решения дифференциального уравнения изгиба стенки и дифференциальных уравнений в частных производных, полученных через минимизацию функционала полной потенциальной энергии деформируемого упругого основания согласно принципа Лагранжа, используется метод конечных разностей.

При нелинейном расчете неоднородное основание заменяется прямоугольной расчетной областью [3, 9]. Граничные условия задачи: на границах расчетной области перемещения $u = 0$, $v = 0$;

в контактной зоне гибкой стенки справедливо равенство горизонтальных перемещений основания прогибам вертикальной гибкой стенки.

Расчет делится на два этапа: линейный расчет и нелинейный расчет.

Расчет стенки ведется методом конечных разностей (МКР). С этой целью область контакта между стенкой и упругой средой разбивается на участки длиной c (за исключением двух крайних участков, длина которых равна $c/2$). На каждом участке жесткость будет принимать свое значение, отличное от значений жесткости на других участках. В данном случае необходимо рассматривать три области по длине стенки:

Ω_1 – область стенки, контактирующая с правой стороной щели в упругой полуплоскости с ломаным контуром;

Ω_2 – область стенки, контактирующая с левой стороной щели в упругой полуплоскости с ломаным контуром;

Ω_3 – область стенки, не контактирующая ни с одной из сторон щели в упругой полуплоскости с ломаным контуром.

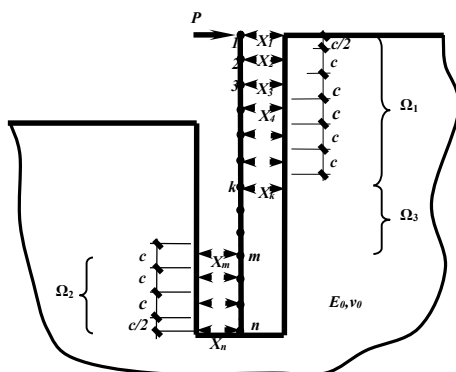


Рис. 3. Расчетная схема стенки по МКР

Решение задачи.

I. Линейный расчет.

Исходными данными для линейного этапа являются:

- линейные размеры стенки и данные по ее армированию;
- значение начального модуля упругости бетона стенки E_b ;
- упругие характеристики основания E_0, ν_0 (начальные, усредненные);

- соотношение длин правой и левой граней γ ;
- величина внешней горизонтальной сосредоточенной силы P ;
- a – плечо силы P .

Алгоритм расчета стенки на первом этапе следующий. Гибкая стенка разбивается по длине на $(n+1)$ участок и задается начальный массив жесткостей $B_i^{(0)} = I_y \cdot E_b (i = 1, n+1)$, где I_y – приведенный момент инерции сечения стенки шириной 1 метр. Затем дифференциальное уравнение изгиба стенки переменной жесткости

$$\frac{d}{dx^2} \left(B_i \left(\frac{d^2 Y_i}{dx^2} \right) \right) = -p_i(x) \quad (1)$$

записывается в конечных разностях для каждого узла.

Для узла “ i ” стенки

$$\frac{(B_{i-1} - 2 \cdot B_i + B_{i+1}) \cdot (Y_{i-1} - 2 \cdot Y_i + Y_{i+1})}{c^4} + \frac{B_i \cdot (Y_{i-2} - 4 \cdot Y_{i-1} + 6 \cdot Y_i - 4 \cdot Y_{i+1} + Y_{i+2})}{c^4} + \frac{(B_{i+1} - B_{i-1}) \cdot (-Y_{i-2} + 2 \cdot Y_{i-1} - 2 \cdot Y_{i+1} + Y_{i+2})}{2 \cdot c^4} = -\frac{X_i}{c}. \quad (2)$$

Граничные условия для 1-го узла

$$\frac{Y_0 - 2 \cdot Y_1 + Y_2}{c^2} = -\frac{P \cdot h}{B_1}, \quad (3)$$

$$\frac{-Y_{-1} + 2 \cdot Y_0 - 2 \cdot Y_2 + Y_3}{2 \cdot c^3} = -\frac{P}{B_1},$$

для $(n+1)$ -го узла

$$\frac{B_{n+1} \cdot (Y_n - 2 \cdot Y_{n+1} + Y_{n+2})}{c^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{B_{n+1} \cdot (-Y_{n-1} + 2 \cdot Y_n - 2 \cdot Y_{n+2} + Y_{n+3})}{2 \cdot c^3} = 0.$$

К уравнениям (2) добавляются уравнения совместности деформаций для областей Ω_1 и Ω_2 :

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n+1} F_{i,k} \cdot X_k. \quad (5)$$

Записав дифференциальные уравнения и уравнения совместности деформаций для каждого узла, получаем систему алгебраических уравнений для расчета стенки на линейном этапе, неизвестными в которой являются прогибы стенки Y_i и реактивные давления X_i для каждого участка. Здесь за неизвестные перемещения стенки принимаются $Y_i = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} y_i$, а коэффициенты $F_{i,k}$ ($i=1, n+1; k=1,$

$n+1$) представляют собой относительные перемещения i -тых точек граней полуплоскости от реактивных давлений X_k . Для определения перемещений границ выреза в упругом неоднородном основании, разбивочная сетка расчетной области которого показана на рис. 3, используется вариационно-разностный подход [9]. На линейном этапе примем усредненные характеристики E_0, ν_0 . Решение контактной задачи строится в перемещениях и численно реализуется заменой дифференциальных уравнений линейными конечно-разностными аппроксимациями. В результате система дифференциальных уравнений заменяется системой линейных алгебраических уравнений. Статические граничные условия расчетной области удовлетворяются автоматически. Для численной реализации вариационно-разностного метода используется компьютерная программа МАТНЕМАТИСА.

Для учета нелинейного поведения упругого основания, согласно теории малых упругопластических деформаций Ильюшина А.А., расчет становится биитерационным [2]. На каждой итерации модуль упругости центра j -й сеточной ячейки основания изменяется (рис. 4), и при вычислениях используется переменный (касательный) модуль упругости.

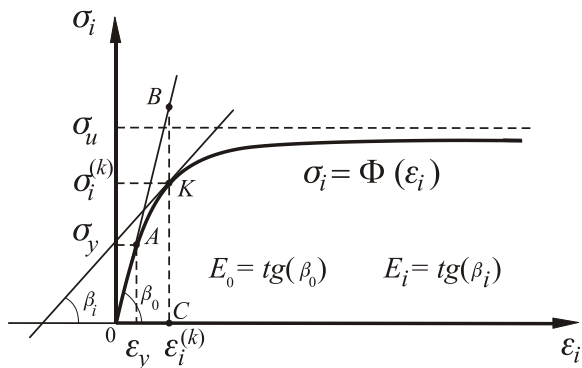


Рис. 4. Переменный модуль упругости, гиперболический тангенс

II. Нелинейный расчет.

Полученные результаты линейного расчета (перемещения и реактивные давления для каждого участка) являются исходными данными для расчета на нелинейном этапе. Известным также считается нелинейный закон деформирования, связывающий изгибающие моменты и кривизны нормальных сечений стенки, выраженный аналитически в виде произведения экспоненты на полином 5-й степени от кривизны [7]:

$$M(1/\rho) = B_0 \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + e^{-k \frac{\rho_0}{\rho}} \cdot \left(B_1 \frac{\rho_0}{\rho} - B_3 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^3 + B_5 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^5 \right), \quad (6)$$

где $\rho_0 = 1\text{ м}$, а B_0 – начальная жесткость сечения стенки, кНм.

Например, для железобетонной стенки из бетона класса С25/30 с размерами сечения $b \times h = 1 \text{ м} \times 0.6 \text{ м}$ и армированием $10\varnothing 25 \text{ S500} + 10\varnothing 20 \text{ S500}$ хомуты $\varnothing 8 \text{ S245}$ получено: $B_0 = 86103 \text{ кНм}$, $B_1 = 767\,870 \text{ кНм}$, $B_3 = 6.91 \cdot 10^{10} \text{ кНм}$, $B_5 = 2.11 \cdot 10^{16} \text{ кНм}$, $k = 1000$.

На рис. 5 показана диаграмма ‘момент-кривизна’, построенная по указанной зависимости, которая отражает три стадии работы стенки: до образования трещин, с трещинами при упругой работе арматуры и при неупругих деформациях арматуры и бетона вплоть до достижения предельного состояния.

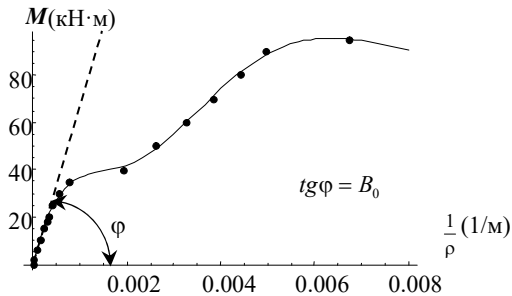


Рис. 5. Диаграмма зависимости изгибающего момента от кривизны, заданная рядом узловых точек, и график аналитической зависимости «момент–кривизна»

Расчет на втором этапе ведется итерационным путем. На стадии линейного расчета находятся значения изгибающих моментов на каждом участке из уравнений равновесия. На основании полученной диаграммы и значений изгибающих моментов на каждом участке, определенных на линейном этапе (предыдущей итерации), создается массив кривизн для каждого участка стенки при её расчете методом конечных разностей. Затем по полученному массиву кривизн и соответствующим значениям изгибающих моментов на каждом участке составляется массив жесткостей $B_i^{(k)}$ для нелинейного расчета

$$B_i^{(k)} = \frac{\partial M \left(\left(\frac{1}{\rho} \right) \right)^{(k)}}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)_i}, \quad (7)$$

где $i = (1, n+1)$ – номер участка стенки, $k = 1, 2, \dots$ – номер итерации нелинейного расчета.

Далее расчет ведется аналогично линейному расчету – составляется и решается система уравнений, такая же, как и на первом этапе (система уравнений (2) и (5), совместно с граничными условиями (3) и (4)), но при новом массиве жесткостей. Следует отметить, что дифференциальные уравнения изгиба для двух первых и двух последних узлов стенки составляются как для физически линейного материала, ввиду того, что значения изгибающих моментов, а, следовательно, и кривизн на краевых участках стенки стремятся к нулю. Полученные значения неизвестных этой системы будут являться исходными

данными на следующей итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения искомым узловых прогибов шпунтовой стенки $Y_i^{(k)}$ и реактивных давлений $X_i^{(k)}$ на двух соседних итерациях не совпадут в пределах допустимой точности.

Результаты. На основании выполненных исследований была разработана методика и составлена программа нелинейного расчета системы «гибкая стенка – упругое основание». Исходные данные для численного расчета: $l = 8\text{ м}$, $\gamma = 0.5$, $a = 0$, $P = 50\text{ кН}$, $E_0 = 20\text{ МПа}$, $\nu_0 = 0.33$.

Стенка по длине была разбита на 17 участков с длиной средних участков $c = l/n$. При этом крайние участки имеют длину $c/2$.

На рис. 7 показаны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, полученных на линейном этапе расчета.

В таблице 1 приведены результаты расчета нелинейно-упругой стенки в линейно-упругом неоднородном основании с усредненными начальными параметрами упругости: значения максимального изгибающего момента, максимального контактного напряжения и перемещений вершины на поверхности упругой среды в зависимости от показателя гибкости $\xi = \frac{E_0 \cdot l^3}{D}$ для $\gamma = 0.5$, $a = 0$.

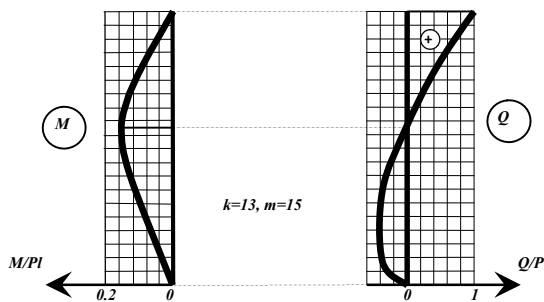


Рис. 6. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Таблица 1

Результаты нелинейного расчета гибкой стенки в упругом основании при различных показателях гибкости ξ

ξ	k / m	$\frac{M_{\max}}{P \cdot l}$	$\sigma_{\max} \frac{l}{P}$	$\frac{E_0 \cdot l}{P \cdot (1 - \nu_0^2)} \varphi_0$	$\frac{E_0}{P \cdot (1 - \nu_0^2)} u_0$
0	13 / 15	0.183	3.14	4.52	4.19
20	12 / 15	0.159	3.95	5.87	4.47
80	11 / 15	0.119	5.54	8.62	4.99
100	11 / 16	0.112	5.92	9.30	5.11

Выводы. Учет неоднородности основания в нелинейных расчетах системы «гибкая нелинейно-упругая стенка – нелинейно-упругое основание» позволяет оптимально проектировать фундаментные конструкции в соответствии с требованиями первой и второй групп предельных состояний, а также, расчетным путем определять предел несущей способности и поведение этих конструкций в эксплуатационной стадии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович, С. М. Механика контактных взаимодействий / С. М. Айзикович [и др.]; под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – 671 с.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990 – 400 с.
3. Босаков, С. В. Вариационно–разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета. Часть 1 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ – №1 – 2009 – С. 5–13.

4. Бурковский, В. Л. Численная реализация модели цилиндрического изгиба ортотропных плит переменной жесткости на упругом основании / В. Л. Бурковский, Н. Н. Некрасова // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 5, № 10. – С. 101–107.

5. Габриелян, Г. Е. Расчет амкнутой цилиндрической оболочки в упругой среде с учетом односторонних связей : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Г. Е. Габриелян ; Воронеж. гос. архитектур.-строит. акад. – Воронеж, 1998. – 19 с.

УДК 624

ОПТИМИЗАЦИЯ РАМЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ, МЕТОДОМ МАЛЫХ ВАРИАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

САБУК А. А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

При расчете и оптимизации конструкций и сооружений в компьютерной модели необходимо учитывать все факторы, которые существенно влияют на результат. От того, на каком грунтовом основании расположено сооружение, зависит распределение напряжений в стержнях, а также перемещения узлов. Учет совместной работы основания и сооружения позволяет вести расчет по наиболее приближенной к реальным условиям модели.

Рассмотрим оптимизацию двухэтажной рамы расположенной на упругом основании. Расчетная схема рамы представлена на рис. 1.