Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой	Декан факультета
Катковская И. Н.	Трофименко Е. Е.
__ апреля 2013 г.	__ апреля 2013 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для специальностей:
1-40 01 01 – программное обеспечение информационных технологий,
1-40 01 02 – информационные системы и технологии,
1-53 01 01 – автоматизация технологических процессов и производств,
1-53 01 02 – автоматизированные системы обработки информации,
1-53 01 05 – автоматизированные электроприводы,
1-53 01 06 –промышленные роботы и робототехнические комплексы

Составители: Габасова О.Р., Зубко О. Л., Катковская И. Н., Кротов В. Г., Метельский А. В., Чепелев Н.И., Чепелева Т.И.

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета факультета информационных технологий
и робототехники 28 марта 2013 г., протокол № 7

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» состоит из четырех разделов:

– конспекта лекций по теории вероятностей и математической статистике;

– материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущей и итоговой аттестации;

– перечня учебно-методических пособий и справочных таблиц.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для изучения лекционного материала по учебной дисциплине в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы текущей и итоговой аттестации. Здесь представлены типовыми расчетами по темам учебной дисциплины и тестами. В разделе тестов приведен пример их решения и даны ответы ко всем тестам.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе и справочные таблицы для расчетов по теории вероятностей и математической статистике.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

ЭУМК состоит из четырех частей.

Теоретический раздел содержит конспект лекций по дисциплине, посвященных изложению основных определений и формул теории вероятностей, связанных с базовыми понятиями случайного события, вероятности, случайной величины и ее основных характеристик, а также их статистических аналогов, лежащих в основе математической статистики.

Практический раздел содержит практикум по дисциплине, состоящий из материалов для проведения 12 аудиторных занятий по теории вероятностей и 6 аудиторных занятий по математической статистике. Каждое занятие содержит задачи для домашней работы с ответами.

Раздел контроля знаний содержит типовые расчеты и тесты для организации текущего контроля знаний студентов и контрольные работы (30 вариантов) для студентов заочного отделения.

Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, перечень экзаменационных вопросов, список рекомендуемой литературы и набор специальных вспомогательных вероятностных таблиц, необходимых для решения задач.

Конспект лекций в ЭУМК представляет собой гипертекстовый pdf-документ, предоставляющий возможность навигации по содержанию документа и содержащий развитую систему гиперссылок на основные объекты конспекта (определения, теоремы, примеры, математические формулы). Все задачи в практикуме снабжены ответами, которые могут быть использованы для самоконтроля. В конце каждого раздела практикума предложены 30 вариантов типовых расчетов, предназначенных для самостоятельного выполнения. Тестовые задания при текущем контроле могут быть выполнены как в аудитории, так и в компьютерной системе тестирования.

Белорусский национальный технический университет
кафедра "Высшая математика №1"

ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

И.Н.Катковская, В.Г.Кротов

Минск 2013

Оглавление

Введение

Термин "случайно" в обыденном языке имеет много значений. Например, он может означать непреднамеренно, необязательно, неожиданно и т.д. Противоположное значение носит более однозначный характер — вполне определенно, обязательно, наверняка, так как должно, детерминированно.

В детерминированном мире случайность должна отсутствовать, он абсолютно подчинен закономерностям, которые однозначно определяют его состояние в любой момент времени. Противоположностью детерминированному миру был бы мир хаоса, в котором отсутствовали бы любые закономерности.

В окружающем нас реальном мире имеется огромное число явлений, в которых нет полной детерминированности и в то же время нет полной хаотичности. Живя в таком мире, при планировании своих действий мы обязаны задаваться важным вопросом — в какой степени мы можем доверять своей интуиции, оценивая случайность в будущих событиях. Как дать количественную оценку степени этого доверия.

Теория вероятностей ищет строгие детерминированные закономерности в мире случайностей и ее вполне можно было бы назвать "Законы случая".

Предметом теории вероятностей является математический анализ случайных явлений — эмпирических феноменов, которые при заданном комплексе условий характеризуются тем, что в них отсутствует детерминированная регулярность (наблюдения не всегда приводят к одним и тем же исходам), а, с другой стороны, они обладают статистической регулярностью (проявляющейся в статистической устойчивости частот появления).

Зародившись в первой половине 17 века как теория азартных игр, к середине 20 века теория вероятностей нашла применения во всем спектре естественных наук.

Значение теории вероятностей в настоящее время значительно возросло в связи с ее широким использованием в экономике, бизнесе и т.д. В последние десятилетия возникли новые прикладные разделы теории вероятностей — теория риска, финансовая математика, математика страхового дела (актуарная математика) и другие.

Установление законов, которым подчиняются массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных методами теории вероятностей.

Математическая статистика — это дисциплина, изучающая методы оценивания и сравнения распределений случайных величин и их характеристик по наблюдениям случайных величин.

Основными задачами математической статистики являются, во-первых, указание способов отбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или специально поставленных экспериментов, и, во-вторых, разработка методов анализа статистических данных, в том числе оценка неизвестной вероятности события, оценка функции распределения случайной величины, ее параметров, оценка зависимостей случайных величин, проверка статистических гипотез.

Предлагаемое пособие содержит вполне строгое и в то же время краткое изложение основ теории вероятностей и математической статистики на базе аксиоматики теории вероятностей А.Н.Колмогорова. Читатель сможет проследить логическую схему развития центральных понятий теории вероятностей (случайное событие, вероятность, случайная величина, независимость) вплоть до закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

Предельные теоремы теории вероятностей (теоремы Пуассона, Муавра-Лапласа, центральная предельная теорема) рассмотрены менее подробно, так как их доказательства требуют развитого аппарата математического анализа, который выходит за рамки программы курса высшей математики.

В конце пособия приведен минимальный список литературы по теории вероятностей и математической статистике. В указанных источниках читатель может найти много дополнительной информации.

В данном пособие даны основные определения и формулы теории вероятностей, связанные с базовыми понятиями случайного события, вероятности, случайной величины и ее основных характеристик, а также их статистических аналогов, лежащих в основе математической статистики.

Изложение материала построено на основе аксиоматики теории вероятностей А.Н.Колмогорова. Подробно рассматриваются простейшие следствия из аксиом, включая основные формулы теории вероятностей, свойства случайных величин и закон больших чисел. Асимптотические теоремы теории вероятностей и математической статистики требуют привлечения глубоких средств математического анализа, поэтому их рассмотрение менее подробно и ограничивается формулировками.

При такой схеме изложения материала пособие может служить базой для дальнейшего самостоятельного изучения современных прикладных разделов теории вероятностей и математической статистики.

Глава 1
Основные понятия теории вероятностей

§ 1. Комбинаторика

1.1. Правила комбинаторики

Для непосредственного вычисления вероятностей в классической схеме используется комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих заданным условиям, можно составить из заданных объектов.

При подсчетах числа возможных комбинаций используются следующие основные правила.

Правило суммы. *Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то один из этих элементов (или a, или b) можно выбрать $n+m$ способами.*

Правило произведения. *Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b — m способами, то пару (a, b) можно выбрать nm способами.*

1.2. Размещения

Определение 1.1 *Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из n данных элементов, называются* ***размещениями*** *из n элементов по k.*

Размещения могут отличаться как элементами, так и порядком.

Напомним определение факториала

$$0! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1,$$

которое будет сейчас использоваться.

Теорема 1.1 *Число всех размещений, выбираемых по k элементов из заданных n элементов, вычисляется по формуле*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство. Первый элемент размещения может быть выбран n способами. Для каждого из этих вариантов есть $n-1$ способов расположения одного из оставшихся элементов на втором месте. Следовательно, по правилу произведения имеется $n(n-1)$ различных способов выбора элементов на первых двух местах. Продолжая это рассуждение по индукции, получим требуемое.

Пример 1.1 Различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

Пример 1.2 Студентам надо сдать 3 экзамена за 8 дней. Найти количество различных расписаний сдачи экзаменов. Ответ: $A_8^3 = 336$.

1.3. Перестановки

В частном случае $k = n$ размещения имеют специальное название.

Определение 1.2 *Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из элементов заданного конечного множества, называются* ***перестановками*** *этого множества.*

Другими словами, перестановки из n элементов — это размещения из n по n элементов.

Теорема 1.2 *Число перестановок множества, состоящего из n элементов, вычисляется по формуле*

$$P_n = n!.$$

Доказательство. Конечно, эта теорема является частным случаем предыдущей при $k = n$.

Пример 1.3 Множество из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие перестановки $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Пример 1.4 Числа 0, 1, 2, 3 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек? Ответ: $4! - 3! = 18$.

1.4. Сочетания

Определение 1.3 *Неупорядоченные наборы из k элементов, взятых из данных n элементов, называются* ***сочетаниями*** *из n элементов по k.*

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Теорема 1.3 *Число сочетаний, выбираемых по k элементов из заданных n элементов, вычисляется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Доказательство. Все размещения из n элементов по k можно получить следующим способом: составить различные сочетания, а потом в каждом из C_n^k сочетаний осуществить $k!$ перестановок. По правилу произведения $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ и надо применить теорему 1.1 о числе размещений.

Пример 1.5 Для множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по два элемента будут $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$.

Пример 1.6 В шахматном турнире участвуют шесть шахматистов. Сколько партий сыграно в турнире? Ответ: $C_6^2 = 15$.

Коэффициенты C_n^k называются еще **биномиальными коэффициентами**, так как они участвуют в формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{1.1}$$

Они обладают следующими свойствами:
1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$,
2) $C_n^k = C_n^{n-k}$,
3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Для доказательства первого надо в формуле бинома Ньютона (1.1) взять $a = b = 1$. Второе и третье следуют непосредственно из теоремы 1.3.

Третье свойство позволяет вычислять биномиальные коэффициенты с помощью так называемого **треугольника Паскаля**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^1 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

в котором каждое число (кроме крайних единиц) равно сумме двух, расположенных над ним. В треугольнике Паскаля k-е число в n-й строке (нумерация элементов начинается с нуля) — это биномиальный коэффициент C_n^k.

Связь между числами перестановок, размещений и сочетаний выражается равенством

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k.$$

Пример 1.7 Сколько словарей надо издать, чтобы переводить с любого из пяти языков на любой другой из этих языков? ($A_5^2 = 20$).

Пример 1.8 Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой? Ответ:$C_8^2 - 2$.

Пример 1.9 Сколькими способами можно упорядочить множество

$$\{1, \ldots, 2n\},$$

чтобы четные числа стояли на четных местах? Ответ: $n!^2$.

Пример 1.10 Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если в алфавите 33 буквы. Ответ: $33^3 \cdot 10^4$.

Пример 1.11 Сколько различных слов можно составить из букв слова *КОЛОКОЛ*? Ответ: $C_7^3 \cdot C_4^2$.

Пример 1.12 Сколькими способами можно посадить за один стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом? Ответ:$2 \cdot 7!^2$.

§ 2. Случайные события

2.1. Случайный эксперимент

Как и всякая математическая теория, теория вероятностей абстрагируется от конкретного содержания случайных явлений и изучает их общие свойства. Для того чтобы сделать случайность предметом математического исследования, надо построить формальную систему, которая могла бы интерпретироваться реальными явлениями, в которых мы наблюдаем эту случайность.

В основе теории вероятностей лежит понятие случайного эксперимента.

Эксперимент считается **случайным**, если он может закончиться любым из некоторой совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента нельзя предсказать, каким именно. Различные результаты эксперимента будем называть исходами.

2.2. Пространство элементарных событий

Определение 1.4 *Множество всех взаимно исключающих исходов эксперимента — **пространство элементарных событий**. Исходы пространства элементарных событий называются **элементарными событиями**. Произвольное подмножество пространства элементарных событий будем называть **случайным событием** (или просто — событием).*

Взаимно исключающие исходы эксперимента — это те, которые не могут наступить одновременно.

Пространство элементарных событий будем обозначать буквой Ω, а элементарные события — буквой ω (с индексами или без них) или другими ясными из контекста символами.

Замечание 1.1 Мы будем отождествлять элементарное событие ω и множество $\{\omega\}$, состоящее из одного элемента ω (допуская тем самым вольность в обозначениях), однако, каждый раз будет ясно, о чем идет речь.

Сейчас мы введем несколько терминов, связанных с событиями, которыми будем пользоваться систематически.

Если эксперимент заканчивается одним из элементарных событий, входящих в случайное событие A, то говорят, что **наступило событие** A. Поэтому элементарные события, входящие в событие A, называются **благоприятствующими** этому событию.

Два случайных события имеют специальные названия: Ω называется **достоверным** событием (эксперимент обязательно заканчивается каким-то исходом), а $\varnothing$ — **невозможным** событием.

§ 3. Операции над случайными событиями

3.1. Операции над событиями

Случайные события может быть получено из элементарных событий довольно сложным образом. Сейчас мы определим правила, по котороым это может быть сделано.

Определение 1.5 ***Суммой событий*** *A и B называется событие $A+B$, состоящее из всех элементарных событий, входящих либо в A, либо в B, то есть*

$$A + B = A \cup B.$$

Другими словами, событие $A+B$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B.

Определение 1.6 ***Произведением событий*** *A и B называется событие AB, состоящее из всех элементарных событий, входящих и в A, и в B, то есть*

$$AB = A \cap B.$$

Другими словами, событие AB состоит в том, что события A и B произошли одновременно.

Определение 1.7 ***Разностью событий*** *A и B называется событие $A-B$, состоящее из всех элементарных событий, входящих в A, но не входящих в B, то есть*

$$A - B = A \setminus B.$$

Другими словами, событие $A - B$ состоит в том, что событие A произошло, а событие B не произошло.

Определение 1.8 *События A и B называются* ***несовместными****, если нет элементарных событий, входящих в A и B одновременно, то есть*

$$AB = \varnothing.$$

Это означает, что события не могут произойти одновременно.

Определение 1.9 *Событие $\overline{A}$, состоящее из элементарных событий, не входящих в A, называется* ***противоположным*** *к событию A, то есть*

$$\overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Другими словами, событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произошло.

Определение 1.10 *Говорят, что событие B* ***влечет*** *событие A (и в этом случае пишут $A \prec B$), если все элементарные события, входящие в A, содержатся также и в B, то есть*

$$A \subset B.$$

Другими словами, это означает, что при наступлении события B обязательно произошло и событие A.

Пример 1.13 Пусть при бросании игральной кости $A =$"выпало нечетное число", $B =$"выпало число, кратное трем", тогда

$$A + B = \{1, 3, 5\} + \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}, \quad AB = \{3\},$$
$$A - B = \{1, 5\}, \quad \overline{A} = \{2, 4, 6\}, \quad \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Пример 1.14 Исход эксперимента — результат шахматной партии. Определим события $W =$"выиграли белые", $B =$"выиграли черные" и $R =$"партия закончилась вничью"

Опишем события $\overline{B}$, $\overline{W} + \overline{B}$, $\overline{W} - B$, $\overline{B} - W$:
— $\overline{B}$ состоит в том, что выиграли белые или партия закончилась вничью,
— $\overline{W} + \overline{B}$ состоит в том, что возможен любой исход партии,
— $\overline{W} - B$ состоит в том, что партия закончилась вничью,
— $\overline{B} - W$ состоит в том, что партия закончилась вничью.

Пример 1.15 3) Пусть $A, B, C \subset \Omega$ — любые случайные события из произвольного пространства элементарных событий Ω. Найдем выражения для ряда событий:

произошло только A — $A\overline{BC}$,
произошли A и B, но не C — $AB\overline{C}$,
все три — ABC,
по крайней мере одно — $A + B + C$,
ровно одно — $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$,
ровно два — $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$,
ни одно не произошло — $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,
произошло не больше двух — $\overline{ABC}$.

3.2. Свойства операций

Теорема 1.4 (свойства операций) *Для любых событий* $A, B, C \subset \Omega$ *справедливы соотношения*

1) $A + B = B + A$,
2) $AB = BA$,
3) $A + \overline{A} = \Omega$,
4) $A\Omega = A$,
5) $A + \varnothing = A$,
6) $AB \prec A$,
7) $A\overline{A} = \varnothing$,
8) $\overline{\overline{A}} = A$,
9) $A - B = A\overline{B}$,
10) $(A + B)C = AC + BC$,
11) $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$,
12) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Доказательства этих свойств операций над событиями непосредственно вытекают из соответствующих свойств операций над множествами.

§ 4. Общее определение вероятности

4.1. Алгебра и σ-алгебра событий

Пусть Ω — произвольное пространство элементарных событий и $\mathcal{A}$ — некоторая система случайных событий (подмножеств из Ω).

Определение 1.11 $\mathcal{A}$ *называется* ***алгеброй событий****, если выполнены следующие условия:*

1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
2) если $A \in \mathcal{A}$ *и* $B \in \mathcal{A}$, *то* $\overline{A} \in \mathcal{A}$, $AB \in \mathcal{A}$, $A + B \in \mathcal{A}$.

Другими словами, алгебра содержит достоверное событие, и обычные операции над событиями не выводят за ее пределы. Ясно, также, что операции над элементами алгебры, примененные конечное число раз, также не выводят из алгебры.

Отметим еще, что разность элементов алгебры также принадлежит ей. Это следует из свойства 9) операций над событиями.

При рассмотрении некоторых задач теории вероятностей приходится иметь дело с бесконечными последовательностями событий, например, когда пространство элементарных событий бесконечно.

Определение 1.12 *Алгебра событий* $\mathcal{A}$ *называется* σ*-алгеброй, если дополнительно выполнено условие*

3) если $A_i \in \mathcal{A}$ при $i \in \mathbb{N}$, то $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ и $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Отметим, что в случае, когда Ω — конечное множество, понятия алгебры и σ-алгебры совпадают.

4.2. Вероятность

Пусть Ω — произвольное пространство элементарных событий и $\mathcal{A}$ — некоторая система случайных событий (подмножеств из Ω).

Определение 1.13 *Числовая функция $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называется* ***вероятностью****, если выполнены следующие условия*

1) $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий,

2) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для любого события $A \in \mathcal{A}$,

3) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ (нормировка вероятности),

4) если события $A, B \in \mathcal{A}$ несовместны, то $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ (аддитивность вероятности).

Если множество Ω бесконечно, то дополнительно требуется условие

5) если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, то $\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = 0$ (непрерывность вероятности).

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ называется ***вероятностным пространством****.*

Вероятность не определяется однозначно указанной системой аксиом — на одном и том же пространстве элементарных событий вероятность можно определить различными способами. Выбор вероятностной модели осуществляется на основе дополнительных соображений с привлечением проверки практикой и опытом.

В задачах теории вероятностей (на практических занятиях или в приложениях непосредственно на практике, в реальной жизни) часто приводится только описание опыта или явления, но не дается математическая формулировка. Поэтому решение задачи обычно состоит из двух частей:

1) выбор вероятностной модели для описания опыта,

2) решение соответствующей математической задачи.

Теория вероятностей занимается, в основном, разработкой правил пересчета одних вероятностей в другие в предположении, что исходные вероятности даны. Выяснению численных значений вероятностей в различных конкретных экспериментах посвящена другая математическая дисциплина — математическая статистика.

§ 5. Классическое определение вероятности

Рассмотрим возможные способы определения вероятности для случая, когда пространство элементарных событий является конечным множеством.

5.1. Равновероятные исходы

Рассмотрим возможные способы определения вероятности для случая, когда пространство элементарных событий является конечным множеством. Сначала рассмотрим так называемый случай равновероятных исходов. Он является наиболее простым.

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно, то есть

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},$$

и $\mathcal{A}$ — множество **всех** подмножеств Ω.

Определение 1.14 *Определим вероятность события следующим образом: если событие $A \in \mathcal{A}$ содержит k элементарных исходов, то*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

В таком случае $\mathbf{P}$ — вероятность и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Проверка этого не составит труда, однако, рекомендуется сделать это самостоятельно.

Другими словами, вероятность события в классической схеме с равновероятными исходами равна отношению числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу исходов.

Название "случай равновероятных исходов" объясняется тем, что все элементарные события имеют одинаковые вероятности

$$\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

5.2. Неравновероятные исходы

Часто необходимо рассматривать ситуацию, когда элементарные события не являются равновероятными. Пусть снова пространство элементарных событий — конечное множество, то есть

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\},$$

$\mathcal{A}$ — множество *всех* подмножеств Ω и задан набор чисел $\{p_i\}_{i=1}^n$ со свойствами

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i > 0.$$

Определение 1.15 *Определим вероятность события*

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$$

равенством

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{m} p_{i_k}.$$

Другими словами, каждому элементарному событию ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ ставится в соответствие число p_i и вероятность любого случайного события равна сумме чисел, соответствующих элементарных исходам, входящим в это событие.

В таком случае $\mathbf{P}$ — вероятность и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство.

Сейчас элементарные исходы уже имеют различные вероятности и числа p_i являются вероятностями элементарных исходов:

$$\mathbf{P}(\omega_i) = p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Конечно, если все числа p_i равны то мы снова получаем случай равновероятных исходов. Тогда обязательно

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n \quad .$$

Это вытекает из условия (1.2).

Пример 1.16 При бросании монеты $\Omega = \{A, B\}$ (A — выпал герб, B — выпала решка) естественно считать, что все элементарные события имеют одинаковые вероятности $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$.

Пример 1.17 При бросании игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\mathbf{P}(i) = \frac{1}{6}$.

Пример 1.18 При рождении одного ребенка в семье $\Omega = \{B, G\}$ (B — родился мальчик, G — родилась девочка) $\mathbf{P}(B) = 0,517$, $\mathbf{P}(G) = 0,483$ (так показывают статистические данные ЮНЕСКО).

Пример 1.19 В урне 4 белых и 6 черных шаров.

Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар — белый?

Из урны извлекаются два шара. Какова вероятность того, что оба они белые, различного цвета?

Пример 1.20 На шести одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, С, М, О. Карточки перемешиваются и располагаются в ряд случайным образом. Какова вероятность того, что будет выложено слово МОСКВА?

Из десяти деталей семь стандартных. Какова вероятность того, чо из взятых наудачу 6 деталей 4 будут стандартными?

§ 6. Геометрические вероятности

Под пространством в этом разделе будем понимать прямую, плоскость или трехмерное пространство, а мерой множества A в пространстве будем называть соответственно его длину, площадь или объем (и обозначать $m(A)$).

Можно показать, что понятие меры можно распространить на весьма широкий класс множеств так, что совокупность множеств, имеющих меру, будет являться σ-алгеброй. Такое обобщение понятий длины, площади и объема носит название меры Лебега. Ее подробное изучение далеко выходит за рамки наших задач, и мы его не рассматриваем. Ниже нам придется иметь дело только с множествами, для которых вычисление меры не составит трудностей.

Пусть в пространстве задана некоторая область Ω и случайный эксперимент состоит в случайном выборе точки из этой области. Случайными событиями в этом эксперименте будем считать подмножества в Ω, имеющие меру.

Предположим, что по каким-то соображениям (обычно связанным с однородностью) выбор любой точки области равновозможен (все точки области равноправны с этой точки зрения). Тогда естественным является следующий способ определения вероятности.

Определение 1.16 *Определим вероятность события $A \subset \Omega$ равенством*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Вероятности, заданные таким образом, называются ***геометрическими****.*

Пример 1.21 Наудачу выбираются два числа из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность того, что их произведение меньше $\frac{1}{2}$?

Множество

$$A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : xy < \frac{1}{2}\}$$

составляет случайное событие, вероятность которого надо найти:

$$m(A) = \frac{1}{2} + \int_{0.5}^{1} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}(1+\ln 2).$$

Ясно, что $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}(1+\ln 2)$, так как $m(\Omega) = 1$.

Пример 1.22 Два человека в течение промежутка времени T случайным образом приходят к месту встречи и ждут время $t < T$. Какова вероятность встречи?

Обозначим через x и y время прихода первого и второго соответственно. Тогда $\Omega = [0,T] \times [0,T]$. Событие $A =$"они встретятся" можно задать как

$$A = \{(x,y) \in [0,T]^2 : |x-y| < t\}.$$

Нетрудно подсчитать, что $m(A) = T^2 - (T-t)^2$ и

$$\mathbf{P}(A) = \frac{T^2-(T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Глава 2

Основные формулы теории вероятностей

§ 1. Свойства вероятностей

1.1. Простейшие свойства

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Свойства вероятности, собранные в следующей теореме, являются почти непосредственными следствиями определения. На свойства вероятности из определения 1.13 мы будем ссылаться как на аксиомы вероятности.

Теорема 2.1 *Вероятность* $\mathbf{P}$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ *(вероятность невозможного события равна нулю),*

2) если события $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *попарно несовместны, то есть* $A_i A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

(свойство конечной аддитивности вероятности),

3) если события $A_i \in \mathcal{A}, \quad i \in \mathbb{N}$ *попарно несовместны, то*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

(свойство счетной аддитивности вероятности),

4) если $A \prec B$, *то* $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ *(свойство монотонности вероятности),*

5) $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$ *для любого события* $A \in \mathcal{A}$,

6) для любого события $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Доказательство. Так как $\Omega = \Omega + \varnothing$ и $\Omega \cdot \varnothing = \varnothing$, то по аксиоме 4

$$1 + \mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\Omega + \varnothing) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

и свойство 1) доказано.

Свойство 2) получается из аксиомы 4) по индукции.

Для доказательства 4) используется непрерывность вероятности (аксиома 5)). Пусть

$$B_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i,$$

тогда $B_{n+1} \prec B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\prod_{n=0}^{\infty} B_n = \varnothing.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0$.

Далее воспользуемся тем, что события $\sum_{i=1}^{n} A_i$ и B_n несовместны при любом $n \geqslant 1$, следовательно, по свойству 3)

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i + B_n\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbf{P}(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_n)$$

и надо перейти к пределу при $n \to \infty$.

Для доказательства 4) воспользуемся тем, что из условия $A \prec B$ вытекает, что $B = (B - A) + A$. Кроме того, события $B - A$ и A являются несовместными. Применяя аксиому 4), получим

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B - A) + \mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(A)\,.$$

Левое неравенство в свойстве 5) следует из аксиомы 2), правое — из свойства 4), так как $A \prec \Omega$ для любого события A.

Наконец, свойство 6) следует из того, что $A + \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$:

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$$

в силу аксиомы 4).

1.2. Формула сложения

Аксиома аддитивности вероятности 4) и свойства 3) и 4) в теореме предыдущего раздела дают возможность вычислять вероятность суммы несовместных событий. Следующая теорема показывает, как это делать в общем случае.

Теорема 2.2 (формула сложения вероятностей) *Для любых событий* $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)\,.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$A + B = A + (B - A), \quad B = AB + (B - A)$$

и слагаемые события в правых частях несовместны. Поэтому в силу аксиомы аддитивности

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - A)\,, \quad \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(B - A)\,.$$

Исключая из этих равенств вероятность $\mathbf{P}(B - A)$, получаем формулу сложения вероятностей.

Пример 2.1 Производится пять выстрелов по мишени. Пусть событие A_i ($i = 0, \ldots, 5$) означает, что мишень поражена i-раз. Найти вероятности следующих событий: "мишень поражена не более двух раз", "мишень поражена не менее трех раз", "мишень поражена ровно один раз".

Пример 2.2 Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Минске, 8 — в Гомеле, 7 — в Витебске. Какова вероятность два определенных студента попадут в один город?

Пример 2.3 В мастерской два мотора работают независимо друг от друга. Вероятности того, что мотор не потребует внимания мастера равна 0,9 для первого мотора и 0,85 — для второго. Какова вероятность того, что ни один из моторов не потребует внимания мастера?

§ 2. Условная вероятность, независимость событий

2.1. Условная вероятность

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $A, B \in \mathcal{A}$ — случайные события.

Определение 2.1 ***Условной вероятностью*** *события A при условии, что произошло событие B с $\mathbf{P}(B) > 0$, называется число*

$$\mathbf{P}_B(A) \equiv \mathbf{P}(\,A|\,B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Формальный смысл условной вероятности состоит в том, что если $\mathcal{A}_B = \{AB : A \in \mathcal{A}\}$, то тройка $(B, \mathcal{A}_B, \mathbf{P}_B)$ является вероятностным пространством, и для непосредственного вычисления условной вероятности мы переходим к этому вероятностному пространству. В частности, условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности.

2.2. Формула умножения

Непосредственно из определения вытекает

Теорема 2.3 (формула умножения) *Для любых событий $A, B \in \mathcal{A}$ справедливо равенство*

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\,A|\,B)\,. \tag{2.1}$$

Пример 2.4 Из урны с m белыми и n черными шарами наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что оба шара — белые?

Рассмотрим события A — 1-й шар белый, B — 2-й шар белый. Тогда ясно, что $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{m+n}$ и $\mathbf{P}(B|\, A) = \frac{m-1}{m+n-1}$ и по формуле умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B|\, A) = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

Пример 2.5 В урне 9 белых шаров и 1 черный. Какова вероятность того, что из трех вынутых шаров все три белые?

2.3. Независимость событий

Событие $A \in \mathcal{A}$ называется **независимым от события** $B \in \mathcal{A}$ с $\mathbf{P}(B) > 0$, если

$$\mathbf{P}(A|\, B) = \mathbf{P}(A)\,.$$

Другими словами, это означает, что вероятность наступления события A не зависит от того, произошло B или нет.

Покажем теперь, что если событие A не зависит от события B, то и наоборот — событие B не зависит от A. В самом деле, дважды используя определение 2.1, получаем

$$\mathbf{P}(B|\, A) = \frac{\mathbf{P}(A|\, B)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B)\,.$$

При этом

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|\, B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,.$$

Это равенство дает новое симметричное определение независимости событий, которое позволяет использовать его и в случае события с нулевыми вероятностями.

Определение 2.2 *События $A, B \in \mathcal{A}$ называются* ***независимыми****, если*

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,. \tag{2.2}$$

Это означает, в частности, что одновременно A не зависит от B и B не зависит от A.

Пример 2.6 Бросили монету и игральную кость. Зависимы ли события "выпал герб" и "выпало четное число очков"? (Независимы).

Пример 2.7 Брошены последовательно три монеты. Зависимы ли события "первым выпал герб" и "хоть один раз выпала решка"? (Зависимы.)

§ 3. Формула полной вероятности

3.1. Полная группа событий

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение 2.3 *Набор событий $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{A}$ называется **полной группой событий**, если выполнены следующие условия:*
1) события H_i попарно несовместны,
2) $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$.

Иначе это означает, что каждое событие происходит обязательно вместе с одним из событий $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{A}$, причем только с одним.

Простой и ясный пример полной группы событий представляет собой пара $\{A, \quad \overline{A}\}$, где $A \subset \Omega$ — любое случайное событие.

3.2. Формула полной вероятности

Теорема 2.4 (формула полной вероятности) *Если $\{H_i\}_{i=1}^n$ — полная группа событий, то для любого события $A \in \mathcal{A}$*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i)\, \mathbf{P}(A|\, H_i)\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Так как

$$A = A\Omega = A \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i=1}^n AH_i$$

и события справа попарно несовместны, то в силу аддитивности вероятности (свойство 2) в теореме 2.1)

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n AH_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(AH_i)$$

и осталось применить формулу умножения вероятностей (2.1).

Пример 2.8 В урне 15 шаров, из них 10 белых. Один шар вынули из урны и, никому не показывая, удалили. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

Пример 2.9 Пусть в урне есть три белых шара и три черных. Из урны взяли два шара наугад, белые окрасили в черный цвет и снова положили в урну. Какова теперь вероятность достать из урны два белых шара?

Рассмотрим события A — "достали два белых шара" и H_i — "сейчас в урне i белых шаров" ($i = 1, 2, 3$). Эти события образуют полную группу событий. Используя комбинаторные формулы, вычислим вероятности

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{3 \cdot 3}{C_6^2} = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\mathbf{P}(\,A|\,H_1) = 0, \quad \mathbf{P}(\,A|\,H_2) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad \mathbf{P}(\,A|\,H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности (2.3), теперь находим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}.$$

§ 4. Формула Байеса

Можно поставить и обратную задачу — какова вероятность какого-то из событий H_k, образующих полную группу событий, если известно, что произошло некоторое событие A? Ответ на этот вопрос содержит следующая теорема.

Теорема 2.5 (формула Байеса) *Пусть* $\{H_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ *— полная группа событий и* $A \in \mathcal{A}$, $\quad \mathbf{P}(A) > 0$. *Тогда для любого* $k = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{P}(\,H_k|\,A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(\,A|\,H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(\,A|\,H_i)} \tag{2.4}$$

Доказательство. По определению 2.1 условной вероятности

$$\mathbf{P}(\,H_k|\,A) = \mathbf{P}(H_k A)\,/\mathbf{P}(A)\,,$$

а по формуле умножения вероятностей (2.1)

$$\mathbf{P}(H_k A) = \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(\,A|\,H_k)\,.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\,H_k|\,A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(\,A|\,H_k)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Подставляя сюда выражение для $\mathbf{P}(A)$ из формулы полной вероятности (2.3), получим формулу Байеса (2.4).

Пример 2.10 В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень из винтовки с оптическим прицелов — 0,95, а без прицела — 0,8. Стрелок поразил мишень из винтовки, взятой наудачу. Что вероятнее — стрелок взял для стрельбы винтовку с оптическим прицелом или без него?

Пример 2.11 Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана, вероятность попадания равна соответственно $0,8$ и $0,4$. Кабан убит одним из выстрелов. Как делить кабана?

Естественно делить пропорционально условным вероятностям попадания каждого при условии, что попал только один из них. Рассмотрим события:
A — "попал только один",
H_1 — "попал первый",
H_2 — "попал второй",
H_{00} — "не попал ни первый , ни второй",
H_{10} — "попал первый, но не попал второй",
H_{01} — "первый не попал, а второй попал",
H_{11} — "попали оба".

Последние четыре события образуют полную группу (определение 2.3). Найдем вероятности, необходимые для применения формулы Байеса

$$\mathbf{P}(A|\,H_{00}) = 0, \quad \mathbf{P}(A|\,H_{10}) = 1, \quad \mathbf{P}(A|\,H_{01}) = 1, \quad \mathbf{P}(A|\,H_{11}) = 0.$$

Далее по формуле умножения вероятностей (2.1)

$$\mathbf{P}(H_{10}) = \mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}\big(\overline{H_2}\big) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48,$$

$$\mathbf{P}(H_{01}) = \mathbf{P}\big(\overline{H_1}\big)\,\mathbf{P}(H_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

По формуле Байеса (2.4) находим

$$\mathbf{P}(H_{10}|\,A) = \frac{0,48}{0,48+0,08} = \frac{6}{7}, \quad \mathbf{P}(H_{01}|\,A) = \frac{0,08}{0,48+0,08} = \frac{1}{7}.$$

§ 5. Схема испытаний Бернулли

5.1. Схема Бернулли

Схема Бернулли состоит в том, что проводятся n последовательных независимых одинаковых экспериментов (испытаний), в каждом из которых с одинаковой вероятностью p может произойти событие A. Вероятность противоположного события обозначим $q = 1 - p$. Наступление события A будем называть успехом, а наступление $\overline{A}$ — неудачей. Другими словами, мы имеем дело с вероятностным пространством, состоящим из двух элементов A и $\overline{A}$, происходящих соответственно с вероятностями p и q.

Рассмотрим теперь другое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, определенное по классической схеме, в котором элементарные исходы

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

— упорядоченные наборы из n результатов ω_i ("успех" или "неудача") экспериментов в схеме Бернулли.

Если ω содержит ровно m успехов (и $n-m$ неудач), то вероятность каждого такого элементарного события ω естественно (из соображений независимости испытаний) считать равной

$$\mathbf{P}(\omega) = p^m q^{n-m}.$$

Число таких элементарных исходов, в которых ровно m успехов, равно C_n^m. Отметим, что по формуле бинома Ньютона (1.1)

$$1 = (p + 1 - p)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m},$$

поэтому $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ является вероятностным пространством и справедливо следующее утверждение.

5.2. Формула Бернулли

Теорема 2.6 (формула Бернулли) *Вероятность случайного события "в n испытаниях m успехов" равна*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.5}$$

Пример 2.12 Вероятность появления события A в схеме Бернулли — 0,3. Найти вероятности того, что в пяти испытаниях событие A появится ровно два раза, менее двух раз, не менее двух раз.

Пример 2.13 Вероятность того, что расход электроэнергии в течение суток не превысит норму равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит норму.

5.3. Наивероятнейшее число событий

Число наступлений события A, которому отвечает наибольшая вероятность, называется **наивероятнейшим** числом наступления A.

Теорема 2.7 *Наивероятнейшее число наступлений события A в схеме Бернулли заключено между числами $np-q$ и $np+p$.*

Доказательство. Пусть m_0 — наивероятнейшее число наступлений A, тогда

$$P_n(m_0 - 1) \leqslant P_n(m_0), \quad P_n(m_0 + 1) \leqslant P_n(m_0).$$

Подставляя сюда выражения для $P_n(m)$ из теоремы 2.6, получим требуемое.

Отметим, что разность между числами $np-q$ и $np+p$ равна 1. Кроме того, наивероятнейших чисел два или одно в зависимости от того, является ли $np-q$ целым числом или нет.

Теорема 2.8 *Пусть $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant n$, тогда вероятность события "число успехов в n испытаниях не меньше m_1 и не больше m_2" равна*

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы 2.7, а также из аддитивности вероятности (свойство 2) из теоремы 2.1)

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k).$$

§ 6. Предельные теоремы для схемы Бернулли

6.1. Формула Стирлинга

Комбинаторные формулы в теоремах предыдущего раздела неудобны, когда число испытаний велико. В таких ситуациях удобно использовать приближенные формулы для вычисления факториала. Наиболее распространенная из таких формул называется **формулой Стирлинга**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1. \qquad (2.6)$$

Из нее вытекает приближенное равенство

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Часто в таких случаях используются также приближенные формулы, в основе которых лежат асимптотические теоремы, приводимые ниже в том параграфе.

6.2. Формула Пуассона

Теорема 2.9 (Пуассон) *Пусть $\lambda > 0$ и $np = \lambda$, тогда для любого фиксированного m*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Эта теорема применяется в случаях, когда речь идет о большом числе испытаний, в которых происходит редкое событие A (то есть вероятность его появления в каждом испытании p мала). В такой ситуации она приводит к приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

6.3. Локальная теорема Муавра–Лапласа

В следующей теореме дано асимптотическое выражение для $P_n(m)$, когда число успехов m растет вместе с числом испытаний n.

Теорема 2.10 (локальная теорема Муавра-Лапласа) *Если последовательность* $\{m_n\}$ *такова, что*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{m_n - np}{\sqrt{npq}} = x,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{npq} P_n(m_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Эта теорема дает приближенное равенство

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

которое эффективно при значениях p, близких к $0,5$.

6.4. Глобальная теорема Муавра–Лапласа

Подобная теорема верна и для вероятностей $P_n(m_1, m_2)$.

Теорема 2.11 (глобальная теорема Муавра-Лапласа) *Пусть две последовательности* $\{m_n^i\} \quad (i = 1, 2)$ *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} m_n^i = \infty \quad (i = 1, 2)$$

и

$$a_n = \frac{m_n^1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b_n = \frac{m_n^2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left[P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right] = 0.$$

Отметим, что последнее равенство удобно записывать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \left[P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{2} \left(\Phi\left(b_n\right) - \Phi\left(a_n\right)\right) \right] = 0$$

с помощью функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad \text{, где} \quad x \geqslant 0,$$

которая подробно рассматривается в следующей главе. Для функции Лапласа в большинстве книг по теории вероятностей имеются таблицы значений.

Глава 3
Случайные величины

§ 1. Случайная величина, функция распределения

1.1. Случайная величина

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение 3.1 ***Случайной величиной*** *будем называть любую функцию $X : \Omega \to \mathbb{R}$, определенную на пространстве элементарных событий Ω и удовлетворяющую условию*

$$(X < x) \equiv \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Основным моментом в этом определении является то, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ событие $(X < x)$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{A}$, а это означает, что для этого события определена его вероятность.

1.2. Функция распределения

Итак, если X — случайная величина, то для любого $x \in \mathbb{R}$ определена вероятность $\mathbf{P}(X < x)$. Это, в свою очередь означает, что с каждой случайной величиной можно связать функцию, которая является наиболее важной характеристикой случайной величины.

Определение 3.2 *Функция*

$$F(x) \equiv F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

*называется **функцией распределения** случайной величины X (или ее распределением).*

Для любого элементарного исхода $\omega \in \Omega$ число $X(\omega)$ — реализация случайной величины при данном исходе. Таким образом, X принимает свои значения "случайно", в зависимости от исхода, которым закончился случайный эксперимент.

Подчеркнем следующее обстоятельство: если в математическом анализе при изучении конкретной функции f нам было важно знание закона соответствия $x \mapsto f(x)$, то при изучении случайной величины X соответствие $\omega \to X(\omega)$ не играет большой роли, гораздо более важным является знание функции распределения F_X, так как она позволяет вычислять (как сейчас будет показано) вероятности того, что случайная величина примет значение из заданного промежутка.

1.3. Свойства функции распределения

В следующей теореме собраны основные свойства функции распределения.

Теорема 3.1 *1) Для любых $a < b$ выполнено равенство*

$$\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

2) Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ (то есть функция распределения является неубывающей).

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$ *для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ (то есть F непрерывна слева в каждой точке).*

Доказательство. 1) Это свойство вытекает из аддитивности вероятности (свойство 2) в теореме 2.1). Так как

$$(X < b) = (X < a) + (a \leqslant X < b)$$

и события справа попарно несовместны, то в силу аддитивности и неотрицательности вероятности (свойства 2) и 5) в теореме 2.1)

$$F(b) = \mathbf{P}(X < b) = \mathbf{P}(X < a) + \mathbf{P}(a \leqslant X < b) =$$

$$= F(a) + \mathbf{P}(a \leqslant X < b)\,.$$

2) Это свойство вытекает из предыдущего и неотрицательности вероятности (свойство 5) в теореме 2.1).

3) Пусть x_k — произвольная убывающая последовательность,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty.$$

Тогда $\prod_{k=1}^{\infty}(X < x_k) = \varnothing$ и по аксиоме непрерывности вероятности (аксиома 5 в определении 1.13)

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(X < x_k) = 0.$$

Точно так же доказывается, что $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant x) = 0$, поэтому второе соотношение $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ следует из первого, так как

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = 1 - \mathbf{P}(X \geqslant x)\,.$$

4) Пусть x_k — произвольная возрастающая последовательность, причем $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Рассмотрим последовательность попарно несовместных событий $A_1 = (X < x_1), \quad A_k = (x_{k-1} \leqslant X < x_k)$ при $k \geqslant 2$. Тогда

$$(X < x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

и в силу счетной аддитивности вероятности (свойство 3) в теореме 2.1)

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(F(x_1) + \sum_{k=2}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1}]\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Можно показать, что свойства 2)–4) функции распределения являются характеристическими в том смысле, что если некоторая функция удовлетворяет этим условиям, то существует случайная величина, для которой она является функцией распределения.

§ 2. Виды случайных величин

Мы рассматриваем ниже случайные величины лишь двух специальных типов — дискретные и непрерывные.

2.1. Дискретные случайные величины

Определение 3.3 *Если множество значений случайной величины является конечным или счетным, то случайная величина называется* ***дискретной****.*

Если пространство элементарных событий Ω — конечное или счетное множество, то любая случайная величина на Ω будет дискретной.

Для дискретных случайных величин X функция распределения однозначно определяется вероятностями

$$p_k = \mathbf{P}(X = x_k)\ , \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ — набор всех значений, которые может принимать X. Действительно,

$$\mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}\left(\sum_{x_k < x} (X = x_k)\right) =$$

$$= \sum_{x_k < x} \mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Соответствие, которое каждому значению x_k дискретной случайной величины X сопоставляет вероятность p_k, с которой она его принимает, называется **законом распределения** дискретной случайной величины. Его удобно задавать в виде таблицы

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathbf{P}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Пример 3.1 В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Случайным образом отобраны 3 детали. Найти закон распределения дискретной случайной величины X — число стандартных деталей среди отобранных.

Пример 3.2 Найти функцию распределения дискретной случайной величины

X	-1	0	2	$2,5$
$\mathbf{P}$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

2.2. Непрерывные случайные величины

Определение 3.4 *Случайная величина называется* ***непрерывной****, если ее функция распределения непрерывна в каждой точке.*

Теорема 3.2 *Если X — непрерывная случайная величина, то*
1) $\mathbf{P}(X = x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
2) Для любых $a < b$

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) =$$
$$= \mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Доказательство. Первое свойство является непосредственным следствием свойства 3) функции распределения (см. теорему 3.1).

Для доказательства 2) используем неотрицательность и монотонность вероятности (свойства 4) и 5) в теореме 2.1), а также свойство 1) функции распределения (см. теорему 3.1)

$$0 \leqslant \mathbf{P}(X = x) \leqslant \mathbf{P}\left(x \leqslant X < x + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_X(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

в силу непрерывности функции распределения непрерывной случайной величины.

Последнее равенство в 3) непосредственно следует из свойства 1) функции распределения (см. теорему 3.1). Далее заметим, что

$$(a \leqslant X \leqslant b) = (a \leqslant X < b) + (X = b),$$

поэтому из аддитивности вероятности (свойство 2) в теореме 2.1) и уже доказанного свойства 2) следует

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(a \leqslant X < b) + \mathbf{P}(X = b) = \mathbf{P}(a \leqslant X < b)\,.$$

Точно так же получаются остальные равенства из 3).

Подчеркнем, что для непрерывной случайной величины вероятность принять любое конкретное значение равна нулю (свойство 2)). В этом состоит принципиальное отличие непрерывных и дискретных случайных величин.

2.3. Плотность распределения

Определение 3.5 *Пусть X — случайная величина и существует такая неотрицательная интегрируемая функция $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что функция распределения F_X представима в виде*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда функция p называется ***плотностью распределения*** *случайной величины.*

Из свойств интеграла с переменным верхним пределом следует, что если у случайной величины существует плотность, то эта случайная величина является непрерывной.

Далее, если плотность распределения является непрерывной в некоторой точке x, то

$$p(x) = F'(x).$$

Таким образом, суть плотности распределения в том, что она является производной функции распределения.

Отметим еще следующее свойство плотности распределения случайной величины

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1,$$

которое вытекает из свойства 3) функции распределения из теоремы 3.1 и определения несобственного интеграла.

Пример 3.3 Функция

$$p(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leqslant x > 2, \\ \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X. Найти все значения a, при которых это возможно и найти функцию распределения для X.

Пример 3.4 Функция

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \leqslant \pi \\ 0 & x > \pi. \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X. Найти функцию распределения для X и вероятность попадания значения случайной величины на интервал $(0, 1)$.

§ 3. Характеристики случайных величин

3.1. Математическое ожидание

В повседневной жизни мы часто мыслим "в среднем", оценивая величины, точные значения которых мы не можем предсказать. Математически эту роль усреднения выполняет следующая важнейшая характеристика случайной величины, выполняющая роль ее среднего значения.

Определение 3.6 ***Математическим ожиданием*** *случайной величины* X *называется число:*

1) $\mathbf{M}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$, *если* X *— дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений* $x_1, \ldots, x_n$,

2) $\mathbf{M}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$, *если* X *дискретная случайная величина, принимающая счетное число значений* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, *причем предполагается абсолютная сходимость ряда,*

3) $\mathbf{M}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$, *если* X *— непрерывная случайная величина с плотностью распределения* p, *при этом предполагается, что интеграл сходится абсолютно.*

Подчеркнем, что математическое ожидание существует не у каждой случайной величины (в случаях 2) и 3) требуется соответственно абсолютная сходимость ряда и интеграла).

Пример 3.5 Найти математическое ожидание для суммы очков, выпадаемых при бросании двух игральных костей. Ответ: $\mathbf{M}(X) = 7$.

Пример 3.6 Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, наудачу-извлекают 3 шара. Найти математическое ожидание случайной величины X, равной числу вынутых черных шаров.

Пример 3.7 Случайная величина имеет следующую функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Пример 3.8 Промежуток между двумя поездами в метро равен 2 мин. Найти математическое ожидание времени ожидания поезда. Ответ: 1 мин.

Теорема 3.3 *1) Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой этой величине, то есть* $\mathbf{M}(C) = C$.

2) $\mathbf{M}(aX + bY) = a\mathbf{M}(X) + b\mathbf{M}(Y)$ *(свойство линейности).*

3) Если $X \geqslant 0$, *то* $\mathbf{M}(X) \geqslant 0$, *если* $X \leqslant Y$, *то* $\mathbf{M}(X) \leqslant \mathbf{M}(Y)$ *(свойство монотонности).*

Доказательство. Доказательство проведем для дискретных случайных величин. Первое свойство очевидно.

Докажем свойство 2). Если случайная величина X принимает значения x_i с вероятностями p_i $(i = 1, \dots, n)$, а Y принимает значения y_j с вероятностями q_j $(j = 1, \dots, m)$, то $aX + bY$ принимает значения $x_i + y_j$ с вероятностями $p_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$ $(i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m)$, причем в силу аддитивности вероятности (свойство 2) в теореме 2.1)

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}(aX + bY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (ax_i + by_j) p_{ij} =$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + b \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + b \sum_{j=1}^{m} y_j q_j =$$

$$a\mathbf{M}(X) + b\mathbf{M}(Y).$$

3) Неотрицательность математического ожидания неотрицательной дискретной случайной величины вытекает непосредственно из определения. Далее, если $X \leqslant Y$, то $Y - X \geqslant 0$ и по доказанному

$$0 \leqslant \mathbf{M}(Y - X) = \mathbf{M}(Y) - \mathbf{M}(X).$$

3.2. Дисперсия

Математическое ожидание является, в определенном смысле, центральным значением случайной величины и характеризует ее в среднем. Степень разброса случайной величины относительно ее "центра" характеризует другая важнейшая характеристика случайной величины — дисперсия.

Определение 3.7 ***Дисперсией*** *случайной величины X называется*

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}\big([X - \mathbf{M}(X)]^2\big).$$

В явном виде дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbf{M}(X))^2 p_k$$

для дискретной случайной величины с конечным числом значений (в случае счетного числа значений последняя сумма рассматривается как ряд) и

$$\mathbf{D}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}(X))^2 p(x)\, dx$$

для непрерывной случайной величины с плотностью p.

Как и математическое ожидание, дисперсия существует не у любой случайной величины X — дисперсия существует тогда, когда случайные величины X и $(X - \mathbf{M}(X))^2$ имеют математическое ожидание.

Теорема 3.4 (свойства дисперсии) *1) Для любой случайной величины X*

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}\big(X^2\big) - \mathbf{M}(X)^2 .$$

2) $\mathbf{D}(C) = 0$.
3) $\mathbf{D}(aX) = a^2\mathbf{D}(X)$.

Доказательство. 1) Используем определение и свойства математического ожидания из теоремы 3.3:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}\big((X - \mathbf{M}(X))^2\big) =$$
$$= \mathbf{M}\big(X^2 - 2\mathbf{M}(X)\,X + \mathbf{M}(X)^2\big) =$$
$$= \mathbf{M}\big(X^2\big) - 2\mathbf{M}(X)\,\mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(X)^2 =$$
$$= \mathbf{M}\big(X^2\big) - \mathbf{M}(X)^2 .$$

2) следует из того, что $\mathbf{M}(C) = C$, а 3) — вытекает из 1) и свойства 3) математического ожидания (см. теорему 3.3).

Пример 3.9 Найти дисперсию суммы очков, выпадаемых при бросании двух игральных костей.

Пример 3.10 Промежуток между двумя поездами в метро равен 2 мин. Найти дисперсию времени ожидания поезда.

Пример 3.11 Найти дисперсии случайных величин из примеров 3.6 и 3.7.

3.3. Среднеквадратичное отклонение

Часто используют следующую характеристику случайной величины, близкую к дисперсии.

Определение 3.8 *Число*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$$

называется ***среднеквадратичным отклонением*** *случайной величины X.*

Среднеквадратичное отклонение обладает свойством положительной однородности

$$\sigma(aX) = |a|\,\sigma(X) .$$

§ 4. Стандартные распределения

В этом параграфе будут приведены некоторые распределения, которые чаще всего используются на практике в вероятностных моделях окружающего мира.

4.1. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение — функция распределения дискретной случайной величины X="число успехов в схеме Бернулли". Это — случайная величина, закон распределения которой

$$p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь p и $q = 1 - p$ — соответственно вероятности успеха и неудачи в каждом из n независимых испытаний.

Теорема 3.5 *Математическое ожидание и дисперсия случайной велиыины X с биномиальным распределением вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = np, \quad \mathbf{D}(X) = npq. \tag{3.2}$$

Доказательство. Чтобы найти математическое ожидание этой случайной величины X, рассмотрим функцию[1]

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (xp)^m q^{n-m} = (xp+q)^n$$

и с ее помощью найдем $\mathbf{M}(X) = \psi'(1)$.

В самом деле, с одной стороны,

$$\psi'(x) = np(xp+q)^{n-1}, \quad \psi'(1) = np.$$

С другой стороны,

$$\psi'(x) = \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m (xp)^m q^{n-m}\right)' = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m x^{m-1} p^m q^{n-m},$$

поэтому

$$\psi'(1) = \mathbf{M}(X) = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\mathbf{D}(X) = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2,$$

из которого следует, что

$$\mathbf{D}(X) = np(n-1)p(p+q)^{n-2} + np - n^2p^2 = npq.$$

[1]Она называется производящей функцией

4.2. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона — функция распределения дискретной случайной величины, принимающей счетное число значений $m = 0, 1, \ldots$ и распределенной по закону

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Число $\lambda > 0$ называется параметром распределения. Это распределение является предельным для биномиального, когда $\lambda = np$ и $n \to \infty$.

По этому закону распределены, например, число вызовов на АТС, радиоактивный распад, изменение хромосом в клетках, число страховых случаев и т.д.

Теорема 3.6 *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с распределением Пуассона вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = \lambda, \quad \mathbf{D}(X) = \lambda. \tag{3.3}$$

Доказательство проходит аналогично тому, как это было сделано в предыдущей теореме 3.5, но с помощью производящей функции

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda} e^{\lambda(x-1)},$$

Действуя так же, как и в предыдущем случае, мы получим

$$\mathbf{M}(X) = \psi'(1) = \lambda, \quad \mathbf{D}(X) = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \lambda.$$

4.3. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение. Пусть проводится бесконечная серия независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с постоянной вероятностью p. Пусть X — случайная величина, равная числу испытаний до момента первого появления события A. Тогда закон распределения этой дискретной случайной величины

$$p_m = \mathbf{P}(X = m) = (1-p)^m p, \quad m = 0, 1, \ldots$$

называется **геометрическим**.

Теорема 3.7 *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с геометрическим распределением вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \mathbf{D}(X) = \frac{1-p}{p^2}. \tag{3.4}$$

Доказательство. В этом случае рассмотрим производящую функцию

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k (1-p)^k p = \frac{p}{1 - x(1-p)}$$

и аналогично предыдущему находим

$$\mathbf{M}(X) = \psi'(1) = \frac{1-p}{p},$$

$$\mathbf{D}(X) = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

4.4. Равномерное распределение

Равномерное распределение на $[a, b]$ — распределение непрерывной случайной величины с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$$

Примером равномерно распределенной на $[0, \Delta]$ случайной величины может служит ошибка измерения некоторой физической величины с помощью шкалы, цена, деления которой равна Δ.

Теорема 3.8 *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с равномерным распределением вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{3.5}$$

Доказательство получается непосредственным вычислением.

4.5. Показательное распределение

Показательное распределение — распределение непрерывной случайной величины с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Число α называется параметром распределения.

Показательный закон используется в теории массового обслуживания. По нему распределены, например, время ремонта, время простоя в очереди, время обслуживания.

Теорема 3.9 *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с показательным распределением вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = \frac{1}{\alpha}, \quad \mathbf{D}(X) = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{3.6}$$

Доказательство также получается с помощью непосредственного вычисления.

4.6. Нормальное распределение

Нормальное распределение — распределение непрерывной случайной величины X с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где a и σ — параметры распределения. В таком случае будем писать , что $X \in \mathcal{N}(a, \sigma)$.

Вероятностный смысл параметров a и σ проясняет следующее утверждение.

Теорема 3.10 *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с нормальным распределением вычисляются по формулам*

$$\mathbf{M}(X) = a, \quad \mathbf{D}(X) = \sigma^2. \tag{3.7}$$

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашей книги. Оно обычно со всей полнотой излагается лишь студентам, обучающимся на математических специальностях.

Распределение класса $\mathcal{N}(0, 1)$ будем называть **стандартным нормальным распределением**.

По нормальному закону распределено огромное число случайных величин (например, рост и вес 20-летнего[2] мужчины, дальность полета снаряда, результат измерения длины, объема, времени и т.п.).

Таким образом, мы обязаны обратить внимание на то, что *результат измерения распределен нормально, а ошибка измерения распределена равномерно.*

Нормальный закон проявляется там, где в формировании значения случайной величины участвует большое число независимых факторов, причем каждый из них оказывает малое влияние на это значение. Ниже мы познакомимся с точной формулировкой этого принципа в центральной предельной теореме.

[2]Здесь важно, что мы имеем дело со сложившимся человеком, параметры которого не подвергаются большим колебаниям.

§ 5. Функция Лапласа

Определение 3.9 *Функция*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad , \text{ где } \quad x \geqslant 0,$$

называется ***функцией Лапласа****.*

Эта функция широко используется при работе с нормально распределенными случайными величинами, так как через нее легко выражаются различные характеристики нормальной случайной величины.

Теорема 3.11 *Если случайная величина $X \in \mathcal{N}(a, \sigma)$, то справедливы следующие равенства:*

1) при всех $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

2) при всех $x_1 < x_2$

$$\mathbf{P}(x_1 \leqslant X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right],$$

3) если $\varepsilon > 0$, то

$$\mathbf{P}(|X-a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Доказательство. 1) По определению

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

(была выполнена замена переменной $\frac{t-a}{\sigma} \to t$). Далее интеграл преобразуется так:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \int_{0}^{\frac{t-a}{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \int_{-\frac{t-a}{\sigma}}^{\frac{t-a}{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right].$$

2) получается из 1) и части 3) теоремы о свойствах функции распределения, а 3) получается из 2) при $x_1 = a - \varepsilon, \quad x_2 = a + \varepsilon$.

Рассмотрим частные некоторые случаи выбора ε:
1) при $\varepsilon = \sigma$ $\mathbf{P}(|X - a| < \sigma) = \Phi(1) \approx 0,6827$,
2) при $\varepsilon = 2\sigma$ $\mathbf{P}(|X - a| < 2\sigma) = \Phi(2) \approx 0,9545$,
3) при $\varepsilon = 3\sigma$ $\mathbf{P}(|X - a| < 3\sigma) = \Phi(3) \approx 0,9973$.

Событие, происходящее в вероятностью выше 0,9973 иногда называют "практически достоверным". Используя этот термин, последнее утверждение можно сформулировать так.

Правило 3σ. *Событие, состоящее в том, что нормально распределенная случайная величина принимает значение, отклоняющееся от ее математического ожидания менее чем на* 3σ*, является практически достоверным.*

§ 6. Независимость случайных величин

6.1. Совместная функция распределения

Определение 3.10 *Если* X *и* Y *— случайные величины, то*

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}((X < x)(Y < y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

называется ***совместной функцией распределения*** *случайных величин* X *и* Y.

Пусть X и Y — дискретные случайные величины, принимающие занчения $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ соответственно, то совместная функция распределения вычисляется по формуле

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{i:x_i<x} \sum_{j:y_j<y} \mathbf{P}((X = x_i)(Y = y_j))$$

Совместная функция распределения непрерывных случайных величин X и Y иногда представима в виде

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(s,t)\, dt\, ds,$$

где p — непрерывная неотрицательная функция на $\mathbb{R}^2$. Такую функцию p естественно назвать **совместной плотностью распределения** случайных величин X и Y.

Это будет так, если совместная функция распределения имеет непрерывные частные производные второго порядка (например, равные нулю вне некоторого круга), и тогда

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x,y).$$

6.2. Независимость

Определение 3.11 *Случайные величины X и Y называются* ***независимыми****, если*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y), \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Это означает, что случайные события $(X < x)$ и $(Y < y)$ являются независимыми при любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Если X и Y — дискретные случайные величины, то их независимость равносильна условию

$$\mathbf{P}((X = x)(Y = y)) = \mathbf{P}(X = x)\,\mathbf{P}(Y = y)$$

(для любых возможных значений x и y) и, таким образом, означает, что все свои значения случайные величины X и Y принимают независимо.

Если существует совместная плотность случайных величин X и Y, то свойство независимости равносильно условию

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y),$$

где p_X и p_Y — плотности распределения для X и Y соответственно.

6.3. Свойства независимых случайных величин

Теорема 3.12 *Если X и Y — независимые случайные величины, то справедливы следующие равенства:*
1) $\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}(X)\cdot\mathbf{M}(Y)$*,*
2) $\mathbf{D}(X \pm Y) = \mathbf{D}(X) + \mathbf{D}(Y)$*.*

Доказательство проведем только для случая дискретных случайных величин.

Если случайная величина X принимает значения x_i с вероятностями p_i $(i = 1,\ldots,n)$, а Y принимает значения y_j с вероятностями q_j $(j = 1,\ldots,m)$, то XY принимает значения x_iy_j с вероятностями $p_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_i\cdot q_j$ $(i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m)$, поэтому

$$\mathbf{M}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \sum_{j=1}^{m} y_jq_j = \mathbf{M}(X)\,\mathbf{M}(Y)\,.$$

Далее используем уже доказанное свойство 1)

$$\begin{gathered}
\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{M}\big((X+Y)^2\big) - \mathbf{M}(X+Y)^2 = \\
= \mathbf{M}\big(X^2 + 2XY + Y^2\big) - (\mathbf{M}(X) + \mathbf{M}(Y))^2 = \\
= \mathbf{M}\big(X^2\big) + 2\mathbf{M}(XY) + \mathbf{M}\big(Y^2\big) - \\
-\mathbf{M}(X)^2 - 2\mathbf{M}(X)\,\mathbf{M}(Y) - \mathbf{M}(Y)^2 = \\
= \mathbf{M}\big(X^2\big) - \mathbf{M}(X)^2 + \mathbf{M}\big(Y^2\big) - \mathbf{M}(Y)^2 = \\
= \mathbf{D}(X) + \mathbf{D}(Y)\,.
\end{gathered}$$

§ 7. Коррелированные случайные величины

7.1. Ковариация и коэффициент корреляции

Определение 3.12 ***Ковариацией*** *(или* ***корреляционным моментом****) случайных величин X и Y называется*

$$\mathbf{cov}(X,Y)=\mathbf{M}((X-\mathbf{M}(X))(Y-\mathbf{M}(Y)))\,.$$

Коэффициентом корреляции *двух случайных величин X и Y называется*

$$r(X,Y)=\frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}(X)\,\mathbf{D}(Y)}}.$$

Приведем формулы для непосредственного вычисления ковариации в случае дискретных случайных величин

$$\mathbf{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}$$

и

$$\mathbf{cov}(X,Y)$$

в случае случайных величин с плотностями.

Ковариация и коэффициент корреляции характеризуют степень линейной зависимости случайных величин — чем больше абсолютная величина коэффициента корреляции, тем сильнее линейная зависимость между случайными величинами.

Если ковариация (или коэффициент корреляции) двух случайных величин равен нулю, то такие величины называются **некоррелированными**.

7.2. Свойства ковариация

Теорема 3.13 (свойства корреляции)
1) $\mathbf{D}(X\pm Y)=\mathbf{D}(X)\pm 2\mathbf{cov}(X,Y)+\mathbf{D}(Y)$.
2) Если X и Y некоррелированы, то

$$\mathbf{D}(X\pm Y)=\mathbf{D}(X)+\mathbf{D}(Y)\,.$$

3) Если X и Y независимы, то $r(X,Y)=0$.
4) $|r(X,Y)|\leqslant 1$.

Доказательство. 1) Преобразуем выражение

$$(X\pm Y-\mathbf{M}(X\pm Y))^2=((X-\mathbf{M}(X))\pm(Y-\mathbf{M}(Y)))^2=$$

$$=(X-\mathbf{M}(X))^2\pm 2(X-\mathbf{M}(X))(Y-\mathbf{M}(Y))+(Y-\mathbf{M}(Y))^2\,.$$

В силу свойства линейности (свойство 2) в теореме 3.3) математическое ожидание первого и третьего слагаемых справа соответственно равны $\mathbf{D}(X)$ и $\mathbf{D}(Y)$, а математическое ожидание среднего слагаемого равно $\pm 2\mathbf{cov}(X,Y)$.

2) Это свойство сразу следует из определения некоррелированности и свойства 1).

3) Если X и Y независимы, то $X - \mathbf{M}(X)$ и $Y - \mathbf{M}(Y)$ независимы и математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий

$$\mathbf{M}((X - \mathbf{M}(X))(Y - \mathbf{M}(Y))) =$$
$$= \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))\,\mathbf{M}((Y - \mathbf{M}(Y)) = 0,$$

следовательно, $\mathbf{cov}(X,Y) = 0$.

4) Рассмотрим при $t \in \mathbb{R}$ выражение

$$0 \leqslant \mathbf{M}\big((X + tY)^2\big) = \mathbf{M}\big(X^2\big) + 2t\mathbf{M}(XY) + t^2\mathbf{M}\big(Y^2\big)\,.$$

Так как квадратный трехчлен справа неотрицателен, то его дискриминант неположителен:

$$0 \geqslant D = 4\mathbf{M}(XY)^2 - 4\mathbf{M}\big(X^2\big)\,\mathbf{M}\big(Y^2\big)\,.$$

Отсюда следует неравенство

$$|\mathbf{M}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}(X^2)\,\mathbf{M}(Y^2)}$$

(его обычно называют **неравенством Коши–Буняковского–Шварца**). Для завершения доказательства осталось применить это неравенство к случайным величинам $X - \mathbf{M}(X)$ и $Y - \mathbf{M}(Y)$.

Можно показать также, что если $|r(X,Y)| = 1$, то X и Y линейно зависимы в том смысле, что найдутся такие числа a и b, что

$$\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1.$$

§ 8. Закон больших чисел

8.1. Неформальная суть закона больших чисел

Пусть проводится большое число одинаковых независимых случайных экспериментов, в каждом из которых наблюдается значение некоторой случайной величины X с конечным математическим ожиданием $\mathbf{M}(X)$. Тогда среднее арифметическое полученных значений для X при неограниченном возрастании числа экспериментов будет приближаться к математическому ожиданию $\mathbf{M}(X)$. Другими словами, среднее значение независимых одинаково распределенных случайных величин приближается к детерминированной величине и, тем самым, теряет свой случайный характер. В этом состоит смысл фундаментального закона теории вероятностей — закона больших чисел, который мы докажем в этом разделе.

8.2. Неравенство Чебышева

Основную часть доказательства закона больших чисел содержит следующее утверждение.

Теорема 3.14 (неравенство Чебышева) *Пусть X — случайная величина с конечными математическим ожиданием и дисперсией. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}(X)}{\varepsilon^2}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Доказательство проведем для дискретных случайных величин. Сначала установим неравенство

$$\mathbf{P}(X < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{M}(X)}{\varepsilon},$$

где $X \geqslant 0$ — дискретная неотрицательная случайная величина.

В самом деле,

$$\mathbf{M}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k) \geqslant \sum_{k: x_k \geqslant \varepsilon} x_k \mathbf{P}(X = x_k) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon \sum_{k: x_k \geqslant \varepsilon} \mathbf{P}(X = x_k) = \varepsilon \mathbf{P}(X \geqslant \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(X < \varepsilon) = 1 - \mathbf{P}(X \geqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{M}(X)}{\varepsilon}.$$

Применим теперь доказанное неравенство к неотрицательной случайной величине $(X - \mathbf{M}(X))^2$ с ε^2 вместо ε:

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}(X)| < \varepsilon) = \mathbf{P}\left(|X - \mathbf{M}(X)|^2 < \varepsilon^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{\mathbf{M}\left(|X - \mathbf{M}(X)|^2\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\mathbf{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

8.3. Теорема Чебышева

Теорема 3.15 (Чебышева, закон больших чисел) *Пусть $\{X_k\}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, причем математическое ожидание и дисперсия каждой существуют и дисперсии ограничены, то есть существует такое $c >$, что для всех $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{D}(X_k) \leqslant c.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(X_k) \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

тогда по свойству линейности математического ожидания (свойство 2) в теореме 3.3)

$$\mathbf{M}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(X_k)\,.$$

Кроме того, из ограниченности дисперсий, независимости X_k и теоремы 3.12 вытекает, что

$$\mathbf{D}(Y_n) = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}(X_k) \leqslant \frac{c}{n}.$$

Поэтому в силу неравенства Чебышева (3.8)

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(X_k)\right| < \varepsilon\right) =$$

$$= \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{M}(Y_n)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{D}(Y_n) \geqslant 1 - \frac{c}{\varepsilon^2 n} \to 1$$

при $n \to \infty$.

8.4. Частный случай закона больших чисел

В частном случае, когда все X_k имеют одно и то же математическое ожидание, теорему Чебышева можно переформулировать так.

Теорема 3.16 *Если X_k — последовательность попарно независимых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями $\mathbf{M}(X_k) = a$ и ограниченными дисперсиями, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Еще раз подчеркнем, что смысл закона больших чисел состоит в том, что среднее арифметическое большого числа независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины — оно мало рассеяно.

8.5. Сходимость по вероятности

Определение 3.13 *Говорят, что последовательность случайных величин X_n* ***сходится по вероятности*** *к случайной величине X, если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

В таких терминах заключение теоремы 3.16 можно переформулировать так: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ *сходится по вероятности к математическому ожиданию* a.

8.6. Статистическое определение вероятности

На теореме Чебышева основан широко применяемый в математической статистике выборочный метод, о котором пойдет речь ниже. Из закона больших чисел вытекает так называемое "статистическое определение вероятности", которое состоит в следующем.

Пусть проводится последовательность независимых одинаковых случайных экспериментов, в каждом из которых происходит или нет некоторое случайное событие A. Если обозначить через m_n число появлений события A в n экспериментах, то по закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \mathbf{P}(A) \text{ по вероятности}$$

(это и есть "статистическое определение вероятности").

Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность случайных величин

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло в } n\text{-м эксперименте,} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло в } n\text{-м эксперименте.} \end{cases}$$

Легко видеть, что эти случайные величины независимы и

$$\mathbf{M}(X_n) = \mathbf{P}(A)\ , \quad \mathbf{D}(X_n) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)^2 = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\big(\overline{A}\big)\,.$$

Кроме того,

$$\frac{m_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

и наше утверждение вытекает из закона больших чисел.

§ 9. Центральная предельная теорема

9.1. Почему важно изучать нормальные случайные величины

Нормально распределенные случайные величины очень широко распространены на практике. Как дать этому объяснение? Оказывается, справедлив следующий основополагающий принцип: *если случайная величина является суммой большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму мало, то ее распределение близко к нормальному.*

9.2. Подготовка к центральной предельной теореме

Пусть X_k — последовательность попарно независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Определим последовательность случайных величин

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

математические ожидания и дисперсии которых в силу теоремы 3.12 соответственно равны

$$\mathbf{M}(S_n) = A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(X_k)\,, \quad \mathbf{D}(S_n) = \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}(X_k)\,.$$

Образуем теперь новую последовательность случайных величин, нормируя последовательность S_n так, чтобы математические ожидания и дисперсии были одинаковы. Именно для случайных величин

$$\frac{S_n - A_n}{\sigma_n} \tag{3.9}$$

математические ожидания и дисперсии равны соответственно 0 и 1. Подчеркнем, однако, что мы не делаем никаких предположение относительно вида распределения исходных случайных величин и величин (3.9).

Центральная предельная теорема утверждает, что при некотором дополнительном условии функция распределения случайной величины (3.9) близка в определенном смысле к функции распределения стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

9.3. Формулировка основной теоремы

Теорема 3.17 (центральная предельная теорема) *Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями*

$$\mathbf{M}(X_k) = a_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

и дисперсиями

$$\mathbf{D}(X_k) = \sigma_k^2 > 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Предположим еще, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие

$$\frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\Big(|X_k - \mathbf{M}(X_k)|^{2+\delta}\Big) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{3.10}$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - A_n}{\sigma_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\, dt.$$

В левой части последнего равенства находится функция распределения стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$. Поэтому это равенство означает, что случайная величина S_n асимптотически имеет нормальное распределение с математическим ожиданием A_n и дисперсией D_n.

Важно уяснить себе, в чем неформальный смысл условия (3.10) — он состоит в том, что большинство X_k мало рассеяны.

9.4. Случай одинаково распределенных величин

Приведем следствие из центральной предельной теоремы для одинаково распределенных случайных величин — этот случай имеет большое значение для математической статистики.

Теорема 3.18 *Пусть $\{X_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями*

$$\mathbf{M}(X_k) = a, \quad k \in \mathbb{N}$$

и дисперсиями

$$\mathbf{D}(X_k) = \sigma^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Утверждение этой теоремы непосредственно следует из центральной предельной теоремы. Надо только заметить, что в рассматриваемом случае (все случайные величины X_k одинаково распределены и независимы) математическое ожидание и дисперсия случайной величины

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

соответственно равны

$$\mathbf{M}(S_n) = \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a = na$$

и

$$\mathbf{D}(S_n) = \mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2.$$

Глава 4
Основные понятия математической статистики

§ 1. Выборочный метод

Пусть проведены n независимых экспериментов, в каждом из которых наблюдается значение этой некоторой случайной величины X. Обозначим через X_k значение, полученное в k-м эксперименте. Основным предположением математической статистики, позволяющим использовать в качестве метода исследования теорию вероятностей, является следующее.

Естественно априори считать, что X_k — случайная величина, имеющая то же распределение, что и X, и что эти случайные величины независимы.

1.1. Выборка

Итак, пусть проведены n независимых экспериментов, в каждом из которых наблюдается значение этой некоторой случайной величины X. Обозначим через X_k значение, полученное в k-м эксперименте.

Определение 4.1 *Набор $\{X_1, \ldots, X_n\}$ будем называть* ***случайной выборкой****, а n называется* ***объемом*** *выборки.*

Среди чисел $X_1, \ldots, X_n$ могут быть повторяющиеся. Расположим различные значения $X_1, \ldots, X_n$ в возрастающем порядке

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m,$$

и пусть значение x_k наблюдалось n_k раз, тогда объем выборки равен

$$n = \sum_{k=1}^{m} n_k.$$

Число n_k называется **частотой** появления значения x_k в выборке.

1.2. Вариационный ряд в дискретном случае

Определим **вариационный ряд** заданной случайной выборки таблицей

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

Ясно, что вариационный ряд является статистическим аналогом закона распределения случайной величины. Его можно изобразить графически с помощью **полигона распределения** — графика непрерывной функции, линейной на каждом из интервалов (x_{k-1}, x_k) и принимающей значение n_k в точке x_k $(k = 1, \ldots, m)$.

Числа $w_k = \dfrac{n_k}{n}$ называются **относительными частотами** выборки. Таблица

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
w	w_1	w_2	$\ldots$	w_m

называется **статистическим распределением** выборки.

Приведенный способ представления статистических данных применяют в случае дискретных случайных величин.

1.3. Вариационный ряд в непрерывном случае

Для непрерывных случайных величин (или для дискретных случайных величин с большим числом значений) удобнее разбить отрезок $[a, b]$ возможных значений случайной величины на частичные полуинтервалы $\Delta_k = [a_{k-1}, a_k)$, $(k = 1, \ldots, m)$ (Δ_m замкнут также и справа) с помощью некоторой системы точек $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$. Часто разбиение $[a, b]$ производят на равные части, тогда

$$\Delta_k = [a + (k-1)h, a + kh), \quad k = 1, \ldots, m$$

(здесь $h = \frac{b-a}{m}$).

Следует учитывать то, что если длина интервала группировки мала, то влияние случайных колебаний начинает преобладать, так как каждый интервал содержит при этом лишь небольшое число наблюдений; если же длина интервала велика, то скрадываются основные характерные черты распределения.

В качестве частот n_k теперь надо брать количество наблюдаемых ее значений, попавших на каждый из частичных интервалов Δ_k. Вариационный ряд имеет в таком случае вид

X	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_m
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

а статистическое распределение —

X	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_m
w	w_1	w_2	$\ldots$	w_m

В таком случае для графического представления вариационного ряда используют **гистограмму** распределения — графика функции, постоянной на каждом полуинтервале Δ_k, $k = 1, \ldots, m$ и принимающей значение n_k на нем.

§ 2. Эмпирические характеристики случайной величины

Основные характеристики вариационного ряда (функция распределения, математическое ожидание, дисперсия) определяются подобно тому, как это делалось для случайных величин в теории вероятностей, но с заменой термина "вероятность" на "относительная частота".

2.1. Выборочные математическое ожидание и дисперсия

В качестве оценки математического ожидания используется величина

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k,$$

которая называется **выборочным средним**, а для дисперсии — оценка

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{m} n_k (x_k - \overline{X}_n)^2,$$

которая называется **выборочной дисперсией**.[1]

Объяснение тому, что в определении выборочной дисперсии вместо множителя $\frac{1}{n}$ взят $\frac{1}{n-1}$, будет дано ниже.

2.2. Эмпирическая функция распределения

Определение 4.2 *Функция*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k:X_k<x} 1 = \frac{1}{n}\sum_{k:x_k<x} n_k$$

называется ***эмпирической функцией распределения*** *случайной выборки* $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Ее свойства аналогичны свойствам F_X: она является возрастающей (в нестрогом смысле),

$$0 \leqslant F_n(x) \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0. \quad \lim_{x\to+\infty} F_n(x) = 1.$$

Далее, пусть

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$$

[1]Характеристики, используемые для описания вариационного ряда, обычно называются *выборочными.* Часто используется также синоним *эмпирический.*

— характеристическая функция множества A. Тогда

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,x)}(X_k)$$

и $F_n(x)$ является случайной величиной. Эмпирическая функция распределения служит для оценки функции распределения F_X.

2.3. Эмпирический коэффициент корреляции

Случайной выборкой объема n, соответствующей паре случайных величин (X, Y), называется набор из n независимых одинаково распределенных пар случайных величин, (X_k, Y_k) $(k = 1, \dots, n)$, каждая из которых имеет такое же совместное распределение, как и пара (X, Y).

Оценкой для ковариации $\mathbf{cov}(X, Y)$, построенной по этой выборке служит **выборочная ковариация**

$$C_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)(Y_k - \overline{Y}_n).$$

В качестве оценки для коэффициента корреляции используется выборочный коэффициент корреляции

$$R_n = \frac{C_n}{\sqrt{S_n^2(X)S_n^2(Y)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)(Y_k - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \overline{Y}_n)^2}}.$$

Выражения для них легко преобразовать соответственно к виду

$$C_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}X_kY_k - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n\overline{Y}_n$$

$$R_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_kY_k - \overline{X}_n\overline{Y}_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \overline{Y}_n)^2}}$$

2.4. Эмпирическая плотность распределения

Зафиксируем число $h > 0$ и положим[2]

$$x_h = h\left[\frac{x}{h}\right].$$

Эмпирической (выборочной) плотностью распределения, построенной по случайной выборке $\{X_1, \dots, X_n\}$ называется случайная функция

$$f_{n,h}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(x_h, x_h+h)}(X_k)$$

[2] $[a]$ означает целую часть числа a.

Другими словами,

$$f_{n,h}(x) = \frac{\nu_l}{nh}, \quad \text{при} \quad x \in [lh, (l+1)h), \quad l \in \mathbb{Z},$$

где ν_l — число тех значений X_k, которые попадают на интервал $[lh, (l+1)h)$.

Эмпирическая плотность распределения $f_{n,h}$ используется в качестве статистической оценки для плотности распределения f случайной величины X.

§ 3. Предельные свойства эмпирической функции распределения

3.1. Теорема Гливенко

Теорема 4.1 (Гливенко) *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F_X(x)| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доказательство. Мы ограничимся случаем, когда $F = F_X$ непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти набор точек

$$-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = +\infty$$

таким образом, чтобы $F(x_k) - F(x_{k-1}) < \varepsilon$ при $k = 1, \ldots, m$.

Покажем, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| < \max_{0\leqslant k\leqslant m} |F_n(x_k) - F(x_k)| + \varepsilon. \tag{4.1}$$

В самом деле, если $x \in [x_{k-1}, x_k)$, то в силу монотонности функции распределения

$$F_n(x) - F(x) \geqslant F_n(x_k) - F(x_{k+1}) > F_n(x_k) - F(x_k) - \varepsilon.$$

$$F_n(x) - F(x) \leqslant F_n(x_{k+1}) - F(x_k) < F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1}) + \varepsilon,$$

поэтому

$$F_n(x) - F(x) \geqslant F_n(x_k) - F(x_{k+1}) > F_n(x_k) - F(x_k) - \varepsilon. \tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь при фиксированном $x \in \mathbb{R}$ случайные величины $Y_k = \chi_{(-\infty,x)}(X_k)$. Так как X_k независимы и одинаково распределены, то и Y_k также независимы и одинаково распределены, кроме того

$$\mathbf{M}(Y_k) = \mathbf{P}(X_k < x) = F_{X_k}(x) = F(x),$$

и

$$\mathbf{D}(Y_k) = \mathbf{M}\big(Y_k^2\big) - \mathbf{M}(Y_k)^2 = F(x) - F^2(x) \leqslant 1.$$

Отсюда и из закона больших чисел следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} Y_k - F(x)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

следовательно, используя (4.1) и (4.2), получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)| \geqslant 2\varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant m}|F_n(x_k) - F(x_k)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(|F_n(x_k) - F(x_k)| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

Осталось перейти к вероятности противоположного события.

3.2. Теорема Колмогорова

Сформулируем еще один результат, который не только снова показывает, что эмпирическая функция распределения F_n является достаточно хорошей оценкой для функции распределения F_X, но и дает количественную характеристику этого.

Теорема 4.2 *Если функция распределения F_X непрерывна, то для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\sqrt{n}|F_n(x) - F_X(x)| < \varepsilon\big) = \mathcal{K}(\varepsilon),$$

где[3]

$$\mathcal{K}(\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k \exp(-2k^2\varepsilon^2), & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon \leqslant 0 \end{cases}.$$

3.3. Сходимость эмпирической плотности

Теорема 4.3 *Пусть последовательность $\{n_n\}$ такова, что $h_n \to +0$ и $nh_n \to +\infty$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|f_{n,h}(x) - f(x)| < \varepsilon) = 1$$

в каждой точке непрерывности $x \in \mathbb{R}$ плотности f.

[3] $\mathcal{K}$ называется функцией распределения Колмогорова

Глава 5

Теория оценивания

§ 1. Точечное оценивание

Пусть θ — некоторый параметр, характеризующий распределение случайной величины X (например, $\theta = \mathbf{M}(X)$ — математическое ожидание или $\theta = \mathbf{D}(X)$ — дисперсия). Пусть по случайной выборке $\{X_1, \ldots, X_n\}$ построена некоторая случайная величина θ_n, которая будет служить оценкой (приближенным значением) параметра θ.

1.1. Состоятельность и несмещенность оценок

В математической статистике на оценки накладываются обычно некоторые требования. Сейчас некоторые из таких требований будут перечислены.

Определение 5.1 *Оценка θ_n называется **состоятельной** оценкой параметра θ, если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\theta - \theta_n| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Определение 5.2 *Оценка θ_n называется **несмещенной** оценкой для θ, если*

$$\mathbf{M}(\theta_n) = \theta.$$

Определение 5.3 *Если несмещенная оценка θ_n имеет наименьшую дисперсию по сравнению с другими оценками, то она называется **эффективной**.*

1.2. Состоятельность и несмещенность выборочных характеристик

Теорема 5.1 *Выборочные среднее $\overline{X}_n$ и дисперсия S_n^2 являются несмещенными состоятельными оценками математического ожидания $\mathbf{M}(X)$ и дисперсии $\mathbf{D}(X)$ соответственно.*

Доказательство. Из равенств

$$\mathbf{M}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(X) = \mathbf{M}(X)$$

следует несмещенность выборочного среднего. Здесь были использованы линейность математического ожидания и то, что $\mathbf{M}(X_k) = \mathbf{M}(X)$ при всех $k = 1, \ldots, n$.

Несмещенность выборочной дисперсии доказывается сложнее. Пусть для краткости

$$a = \mathbf{M}(X_k)\,, d = \mathbf{D}(X_k)\,.$$

Введем новые случайные величины

$$Y_k = X_k - a,$$

тогда

$$\overline{Y}_n = \overline{X}_n - a.$$

Далее

$$\mathbf{M}\big(Y_k^2\big) = \mathbf{M}\big(X_k^2\big) - 2a\mathbf{M}(X_k) + a^2 =$$
$$= \mathbf{M}\big(X_k^2\big) - a^2 = \mathbf{D}(X_k) = d.$$

Кроме того, так как $\mathbf{M}(Y_k) = 0$, то в силу независимости Y_k

$$\mathbf{M}(Y_k Y_j) = \mathbf{M}(Y_k) \cdot \mathbf{M}(Y_j) = \quad \text{при} \quad k \neq j$$

$$\mathbf{M}\Big(\overline{Y}_n^2\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i Y_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\big(Y_k^2\big) = \frac{dn}{n^2} = \frac{d}{n}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}\big(S_n^2\big) = \mathbf{M}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2\right) =$$

$$= \mathbf{M}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \overline{Y}_n)^2\right) =$$

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - 2\overline{Y}_n\sum_{k=1}^{n} Y_k + n\overline{Y}_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - 2n\overline{Y}_n^2 + n\overline{Y}_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\big(Y_k^2\big) - \frac{n}{n-1}\mathbf{M}\Big(\overline{Y}_n^2\Big) =$$

$$= \frac{nd}{n-1} - \frac{nd}{(n-1)n} = d.$$

Состоятельность $\overline{X}_n$ сразу следует из закона больших чисел.

Состоятельность S_n^2 получается так: аналогично предыдущему

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \overline{X}_n^2\right).$$

Поскольку X_k^2 являются независимыми, то наше утверждение снова следует из закона больших чисел.

Теперь становится ясным, что множитель $\frac{1}{n-1}$ в определении выборочной дисперсии взят вместо множителя $\frac{1}{n}$ для того, чтобы добиться свойства несмещенности оценки S_n^2.

1.3. Асимптотически нормальные оценки

Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — случайная выборка, соответствующая случайной величине X и θ — некоторый параметр, характеризующий распределение этой случайной величины (например, математическое ожидание, дисперсия и т.д.). Пусть по выборке построена некоторая величина θ_n, которая будет служить приближенным значением параметра θ. В таком случае θ_n будем называть статистической оценкой (или просто оценкой) параметра θ.

Определение 5.4 *Оценка θ_n параметра θ случайной величины называется* ***асимтотически нормальной*** *с дисперсией Δ^2, если функция распределения случайной величины $\frac{\sqrt{n}}{\Delta}(\theta_n - \theta)$ сходится при $n \to \infty$ к функции рапределения стандартного нормального закона* $\mathcal{N}(0, 1)$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Теорема 5.2

1) Выборочное среднее $\overline{X}_n$ асимптотически нормально с дисперсией $\Delta^2 = \mathbf{D}(X)$.

2) Выборочная дисперсия S_n^2 асипмтотически нормальна с дисперсией

$$\Delta^2 = \mathbf{M}\big((X - \mathbf{M}(X))^4\big) - \mathbf{D}(X)^2 .$$

Свойства асимптотической нормальности используются при нахождении границ оцениваемого параметра случайной величины.

§ 2. Методы получения точечных оценок

2.1. Метод моментов

2.2. Метод максимального правдоподобия

§ 3. Интервальное оценивание

3.1. Надежность и доверительный интервал

При изучении любого параметра θ случайной величины по статистическим данным мы получаем некоторое приближенное значение θ_n этого параметра. При этом нас интересует, насколько мы можем доверять этому приближенному значению. Поскольку статистические методы основаны на теории вероятностей, то они не могут категорически утверждать, что, скажем, $|\theta_n - \theta| < \delta$, а могут говорить лишь о вероятности того, что это выполнено. В связи с этим появляются понятия надежности и доверительного интервала.

Определение 5.5 *Пусть $\alpha < \beta$ — две случайные величины, определяемые по выборке. Интервал (α, β) называется* ***доверительным интервалом*** *для параметра θ, соответствующим заданной* ***надежности*** *(доверительной вероятности) γ, если*

$$\gamma = \mathbf{P}(\theta \in (\alpha, \beta)) .$$

Ясно, что для заданной надежности γ можно подобрать бесконечно много доверительных интервалов. Часто в качестве доверительного интервала берут $(\theta_n - \delta, \theta_n + \delta)$, где θ_n — оценка параметра θ, а число $\delta > 0$ в таком случае называется **точностью** оценки θ по θ_n.

Рассмотрим далее методы построения доверительных интервалов для основных параметров случайной величины — математического ожидания и дисперсии.

3.2. Математическое ожидание (дисперсия известна)

Так как выборочное среднее $\overline{X}_n$ асимптотически нормально, то

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - a) < x\right) \approx N(x).$$

Тогда для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\overline{X}_n - \frac{x\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_n + \frac{x\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx N(x) - N(-x).$$

Используя равенство $N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\,(x)$ ($\Phi\,(x)$ — функция Лапласа), получаем:

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - a\right| < \frac{x\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\,(x) .$$

Если x_γ определить из равенства $\Phi\,(x_\gamma) = \gamma$ (такое x_γ называется **квантилью порядка** γ), то

$$\left(\overline{X}_n - \frac{x_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{x_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

— доверительный интервал с надежностью, приблизительно равной γ. Для того чтобы приближенные равенства были точными, необходимо, чтобы n было велико. Значение квантили x_γ можно определить по таблицам для функции Лапласа.

3.3. Математическое ожидание (дисперсия неизвестна)

Рассуждая аналогично предыдущему, мы получим тот же доверительный интервал, но теперь надо оценить неизвестную дисперсию σ^2. Для этого воспользуемся тем, что оценка σ^2 через S_n^2 является состоятельной. Это позволяет нам получить доверительный интервал

$$\left(\overline{X}_n - \frac{x_\gamma \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{x_\gamma \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}\right)$$

с надежностью, приблизительно равной γ (x_γ — квантиль порядка γ для функции Лапласа).

3.4. Дисперсия при неизвестных параметрах

Можно строить доверительный интервал, как и выше, исходя из асимптотической нормальности дисперсии. Тогда мы приходим к тому, что

$$\left(S_n^2 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{S_n^4 - (S_n^4)}, S_n^2 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{n}}\sqrt{S_n^4 - (S_n^4)}\right)$$

— доверительный интервал для дисперсии σ^2 с надежностью, приблизительно равной γ (x_γ — квантиль порядка γ для функции Лапласа). Здесь

$$S_n^4 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}_n\right)^4$$

— оценка для величины $\mathbf{M}((X - \mathbf{M}(X))^4) - \mathbf{D}(X)^2$.

3.5. Дисперсия нормального распределения

Определение 5.6 *Пусть $Y_1, \ldots, Y_s$ — набор нормальных попарно независимых случайных величин класса $\mathcal{N}(0,1)$. Распределение случайной величины*

$$\chi_s^2 = \sum_{k=1}^{s} Y_k^2$$

называется ***распределением Пирсона*** *(или* ***χ^2-распределением****) с s степенями свободы.*

Плотность этого распределения равна

$$p_s(x) = \left(2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{-1} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{s}{2}-1} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0$$

и равна нулю для отрицательных x.

Если X — нормально распределенная случайная величина с дисперсией σ^2, то случайная величина

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы. Если задана надежность γ, то можно найти числа z_1 и z_2 так, чтобы

$$\mathbf{P}\big(\chi^2 > z_1\big) = \frac{1-\gamma}{2}, \mathbf{P}\big(\chi^2 > z_2\big) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Тогда

$$\gamma = \mathbf{P}\big(\chi^2 > z_1\big) - \mathbf{P}\big(\chi^2 > z_2\big) = \mathbf{P}\left(z_1 < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < z_2\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{z_1} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{z_2}\right)$$

и

$$\left(\frac{(n-1)S_n^2}{z_2}, \frac{(n-1)S_n^2}{z_1}\right)$$

— доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормального распределения с надежностью γ. Числа z_1 и z_2 определяются по таблицам для распределения Пирсона.

§ 4. Метод наименьших квадратов

Пусть $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ — вектор неизвестных параметров, который нужно определить. Однако наблюдается не сам вектор θ, а другой вектор $X = (X_1, \ldots, X_m)$, полученный из θ линейным преобразованием с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m}$. Кроме того, наблюдения осуществляются с некоторыми случайными ошибками $\mathcal{E}_i$, причем $\mathbf{M}(\mathcal{E}_i) = 0$ (это означает, что ошибки не являются систематическими), $\mathbf{D}(\mathcal{E}_i) = \sigma_i^2$ и $\mathbf{M}(\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j) = 0$:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\theta_j + \mathcal{E}_i, \quad i = 1, l \ldots n.$$

Для определения оценок вектора θ рассмотрим квадратичную функцию

$$R(\eta_1, \ldots, \eta_m) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\eta_j\right)^2$$

и определим, при каких значениях η_k математическое ожидание этой случайной величины будет минимальным:

$$\mathbf{M}(R(\eta_1, \ldots, \eta_m)) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}\left(\left(X_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\eta_j\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\left(\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\theta_j - \eta_j) + \mathcal{E}_i\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\theta_j - \eta_j)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2.$$

Это выражение будет минимальным, если первое слагаемое справа равно нулю, в частности, при $\eta_i = \theta_i$, то есть при истинных значениях параметров. Поэтому мы и возьмем в качестве оценок для θ_i такие значения η_i, которые минимизируют функцию $R(\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

Необходимым условием точки минимума функции многих переменных является равенство нулю ее частных производных, то есть

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \eta_k}(\eta_1, \ldots, \eta_m) = -2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\left(X_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\eta_j\right) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}\right)\eta_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}X_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, \ldots, m \end{cases}$$

относительно неизвестных $\eta_1, \ldots \eta_m$. Решение этой системы можно найти либо методом Гаусса исключения неизвестных, либо методом определителей.

§ 5. Простая линейная регрессия

Метод наименьших квадратов можно использовать и для определения коэффициентов θ_1, θ_2 линейной зависимости

$$Y = \theta_2 X + \theta_1$$

между случайными величинами X и Y по их наблюдениям X_i и Y_i $(i = 1, \ldots, n)$ в n экспериментах. Такая модель называется **простой линейной регрессией**.

В качестве оценок η_1 и η_2 для параметров θ_1 и θ_2 возьмем те, которые минимизируют функцию квадратичного отклонения

$$R(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \eta_2 X_i - \eta_1\right)^2.$$

Приравнивая к нулю частные производные этой функции, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \eta_1 n + \eta_2 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \eta_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + \eta_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\eta_2 = \frac{n\sum_{i=1}^n X_iY_i - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n X_i}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} = \frac{C_n(X,Y)}{S_n^2(X)},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \eta_2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{Y}_n - \eta_2 \overline{X}_n.$$

Выражение

$$C_n(X,Y) = n\sum_{i=1}^n X_iY_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i$$

принимают обычно в качестве статистической оценки ковариации.

§ 6. Проверка статистических гипотез

6.1. Статистические гипотезы

Под статистической гипотезой будем понимать любое утверждение о виде или свойствах наблюдаемой случайной величины.

В математической статистике принята следующая терминология: выдвинутую гипотезу называют **нулевой** (или основной) и обозначают H_0. Гипотеза, отрицающая нулевую гипотезу, называется **конкурирующей** или альтернативной и обозначается H_1. Таким образом, на основании статистического анализа можно принять только одну из гипотез H_0 или H_1, отвергая другую.

6.2. Виды ошибок

Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникнуть ошибки, и принято будет неправильное решение. При проверке H_0 могут быть ошибки двух видов.

Ошибка первого рода состоит в том, что H_0 отвергается, в то время, как она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что H_0 принимается, в то время как она неверна.

Для определения лучшего критерия проверки H_0 необходимо среди всех критериев с одной и той же вероятностью ошибки первого рода выбрать тот, для которого вероятность ошибки второго рода минимальна. Допускаемую вероятность ошибки первого рода можно задать заранее, она называется **уровнем значимости** и обозначается α.

6.3. Статистика и область принятия гипотезы

Решение о принятии статистической гипотезы принимается по значению некоторой функции выборки, которая называется **статистикой** и обозначается $\mathcal{C}$.

Множество значений статистики, при которых H_0 принимается, называется **областью принятия гипотезы** или допустимой областью.

Множество значений статистики, при которых H_0 отвергается и принимается H_1, называется **критической областью** и обозначается W.

Статистика $\mathcal{C}$ и критическая область W должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{P}(\mathcal{C} \in W \mid H_0) = \alpha, \quad \mathbf{P}(\mathcal{C} \notin W \mid H_1) \to \min .$$

Ошибки первого и второго рода конкурируют между собой, невозможно сделать их как угодно малыми одновременно.

6.4. Этапы проверки статистической гипотезы

Итак, при проверке статистической гипотезы необходимо выполнить следующее:

1) сформулировать нулевую гипотезу H_0,

2) задать случайную величину $\mathcal{C}$ (статистику), по значениям которой будем судить о возможности принять или отвергнуть H_0, и выбрать уровень значимости α,

3) определить по уровню значимости критическую область W,

4) вычислить по выборке значение статистики $\mathcal{C}$ и определить, принадлежит оно критической области или нет, и на основании этого принять H_0 или H_1.

6.5. Гипотеза о виде распределения

Рассмотрим вопрос проверки статистической гипотезы о виде распределения случайной величины X. На основании каких-то соображений предположим, что $F(x)$ является функцией распределения случайной величины X, и по выборке построим статистическую функцию распределения $F_n(x)$.

Для проверки гипотезы $H_0 = \{F = F_X\}$ применим так называемый χ^2-критерий Пирсона, позволяющий проверить, "хорошо" ли согласуются $F(x)$ и $F_n(x)$.

Вся область изменения случайной величины X разбивается на m полуинтервалов $[a_{k-1}, \quad a_k)$ (которые могут иметь различную длину). По выборке составляем вариационный ряд

X	$[a_0, a_1)$	$[a_1, a_2)$	$\ldots$	$[a_{m-1}, a_m)$
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_m

Если какая-то из частот $n_k \leqslant 5$, то соответствующий интервал объединяют с одним из соседних интервалов. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока все частоты, не будут больше 5. В результате этого мы получим новый вариационный ряд.

По гипотетическому распределению F находим вероятности

$$p_k = F(a_k) - F(a_{k-1}) = \mathbf{P}(X \in [a_{k-1}, \quad a_k))$$

и теоретические частоты $\nu_k = np_k$ (n — объем выборки).

В качестве статистики используем случайную величину

$$Q^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\nu_k - n_k)^2}{\nu_k},$$

которая называется **статистикой Пирсона** и асимптотически имеет χ^2_{m-r-1}-распределение с числом степеней свободы $m - r - 1$, где r — число параметров теоретического распределения $F(x)$, оценки которых вычислялись по выборке (например, для нормального распределения $r = 2$). Для функции распределения Пирсона существуют таблицы, с помощью которых по заданному уровню значимости α можно определить такое число $x_{1-\alpha}$ (квантиль порядка $1 - \alpha$), что $\mathbf{P}\big(\chi^2_{m-r-1} < x_{1-\alpha}\big) = 1 - \alpha$.

6.6. Критерий согласия Пирсона

Определим следующее правило для принятия гипотезы о виде распределения.

Критерий согласия Пирсона (χ^2-критерий). *Если $Q^2 < x_{1-\alpha}$, то принимаем гипотезу H_0, если $Q^2 \geqslant x_{1-\alpha}$, то принимаем гипотезу H_1.*

При таком правиле вероятность отвергнуть гипотезу H_0 при условии, что она верна, равна

$$\mathbf{P}\big(Q^2 \geqslant x_{1-\alpha}\big) = 1 - \mathbf{P}\big(Q^2 < x_{1-\alpha}\big) \approx 1 - \mathbf{P}\big(\chi^2 < x_{1-\alpha}\big) = \alpha.$$

Таким образом, вероятность ошибки первого рода приблизительно равна α. С помощью закона больших чисел можно показать, что вероятность ошибки второго рода стремится к нулю при $n \to \infty$.

Литература

[1] Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — Санкт-Петербург: Лань, 1998.

[2] Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и метаматической статистике. — М.: Высшая школа, 1998.

[3] Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.

[4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1,2. — М.: Мир, 1967.

[5] Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений

Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

Практикум по учебной дисциплине
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Метельский А. В., Чепелев Н.И., Чепелева Т.И.

Минск 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Занятие 1. Элементы комбинаторики

1.1 Задачи для аудиторной работы

1.1.1 В карточке лотереи спортлото 5 из 35 игрок должен зачеркнуть пять чисел. Сколькими способами можно это сделать?

1.1.2 Имеется множество цифр 1; 2; 2; 3; 3; 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из этих цифр?

1.1.3 В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Сколько нужно всего сыграть игр, если каждая команда встретится с остальными командами дважды?

1.1.4 Сколькими способами можно заполнить три одинаковых вакантных должности из 10 кандидатов на эти должности?

1.1.5 В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны случайным образом берется пять шаров. Сколько будет различных комбинаций, состоящих из 3 белых и 2 черных шаров.

1.1.6 На железнодорожной станции имеется 10 путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 состава?

1.1.7 Сколько существует способов выполнения 8 деловых звонков руководителем фирмы?

1.1.8 Из 10 мужчин и 8 женщин выбирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 3 мужчин и 3 женщин. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

1.1.9 Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по два флажка?

1.1.10 Номер автомобиля состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

1.1.11 В урне 6 белых, 6 черных и 4 синих шара. Сколько различных комбинаций, состоящих из одного белого, двух черных и трех синих шаров, можно составить?

1.1.12 В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

1.1.13 Сколькими способами можно расставить десять различных книг на полке, чтобы четыре книги стояли рядом?

1.1.14 Руководство фирмы выбирает из 8 кандидатов три человека на различные должности (все восемь кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

1.2 Задачи для самостоятельной работы

1.2.1 Сколькими способами можно расположить на полке в ряд 6 различных книг?

1.2.2 Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 15 языков бывших союзных республик?

1.2.3 способами можно переставить буквы в слове «КАЗАК»?

1.2.4 Найти число способов, которыми можно выбрать делегацию из 15 человек из группы в 20 человек?

1.2.5 На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1.2.6 Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 10 женщин выбирает делегацию из 4 человек. Скольким способами можно выбрать эту делегацию, чтобы в нее входили 2 женщины и 2 мужчины?

Ответы: **1.1.1** 324632; **1.1.2** 60; **1.1.3** 30; **1.1.4** 120; **1.1.5** 120; **1.1.6** 720; **1.1.7** 40320; **1.1.8** 6720; **1.1.9** 30; **1.1.10** 9000000; **1.1.11** 300; **1.1.12** 11880; **1.1.13** 120960; **1.1.14** 336. **1.2.1** 720; **1.2.2** 210 **1.2.3** 30; **1.2.4** 15504; **1.2.5** 120; **1.2.6** 4725.

Занятие 2. Определения вероятности

2.1 Задачи для аудиторной работы

1.2.1 В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести наудачу взятых деталей, окажется 4 стандартных.

1.2.2 В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимается 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

1.2.3 Телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры телефонного номера различны?

1.2.4 В урне a белых и b черных шаров $(a \geq 2;\ b \geq 2)$. Из урны случайным образом берутся два шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

1.2.5 В конверте из 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу взяли 10 фотографий. Найти вероятность того, что среди них находится нужная фотография.

1.2.6 Найти вероятность угадать три номера в спортлото 5 из 36.

1.2.7 По цели произведено50 выстрелов, причем зарегистрировано 30 попаданий. Найти относительную частоту попадания в цель.

1.2.8 Два студента договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первый студент ждет второго в течении 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что они встретятся.

1.2.9 В правильный треугольник со стороной a вписан круг. В треугольник наугад ставится точка. Какова вероятность того, что это точка попадет в круг.

1.2.10 Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один будет выигрышным?

1.2.11 При стрельбе по мишени относительная частота попаданий равна 0,75. Найти число произведенных выстрелов, если число попаданий равно 75.

1.2.12 На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$, а область g – эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. В области G случайным образом отмечена точка. Какова вероятность того, что эта точка попадет в область g?

1.2.13 Область G ограничена окружностью $x^2+y^2=25$, а область g – этой окружностью и параболой $16x-3y^2=0$. В области G случайным образом поставлена точка. Какова вероятность того, что эта тачка попадет в область g?

1.2.14 В студсовете факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наугад выбирают на конференцию 5 человек. Каково вероятность того, что на конференцию будут выбраны одни третьекурсники?

1.2.15 Регистр калькулятора содержит восемь разрядов. Считая, что появление любой цифры на регистре равновероятно, определить вероятность того, что во всех разрядах регистра стоит одна и та же цифра.

2.2 Задачи для самостоятельной работы

2.2.1 На карточках написаны буквы И, М, К, С, Н. Карточки перемешиваются и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК.

2.2.2 Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для аудиторской проверки случайно выбраны 5 сбербанков. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них окажутся за чертой города?

2.2.3 Для выяснения качества работы бухгалтерии было отобрано для проверки 100 накладных. 98 накладных были оформлены правильно. Какова относительная частота правильно оформленных накладных?

2.2.4 В куб с ребром a вписан шар. Внутри куба случайным образом ставится точка. Какова вероятность того, что точка попадет в шар?

2.2.5 В ящике находится 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Ответы: 2.1.1 0,5; **2. 1.2** 0,1655; **2. 1.3** 0,15129; **2. 1.4** $\frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$; **2. 1.5** 0,1; **2. 1.6** 0,012; **2. 1.7** 0,6; **2. 1.8** $7/16$; **2. 1.9** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; **2. 1.10** $5/9$; **2. 1.11** 100; **2. 1.12** 0,536; **2. 1.13** 0,352; **2. 1.14** $1/143$; **2.1.15** $\left(10^{-7}\right)$. **2.2.1** $1/120$; **2.2.2** 0,848; **2.2.3** 0,98; **2.2.4** $\pi/6$; **2.2.5** $\frac{24}{91}$.

Занятие 3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

3.1 Задачи для аудиторной работы

3.1.1 У сборщика есть 4 окрашенных детали и 6 неокрашенных деталей. Сборщик случайным образом берет одну деталь для сборки, а затем вторую. Какова вероятность того, что первая деталь будет окрашена, а вторая нет.

3.1.2 Вероятности выполнения упражнения для первого и второго спортсменов соответственно равны 0,6 и 0,8. Найти вероятность того, что в одной попытке оба спортсмена выполнят удачно упражнение.

3.1.3 В фирме 550 работников, из них 380 работников имеют высшее образование, 412 работников – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование. Найти вероятность того, что случайно взятый работник имеет высшее или среднее специальное образование.

3.1.4 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7; для второго – 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.

3.1.5 Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятности того, что при пожаре сработает первый, второй и третий сигнализаторы соответственно равны 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один сигнализатор.

3.1.6 Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятности того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего для первого, второго, третьего и четвертого станков соответственно равны 0,3; 0,7; 0,4; 0,6. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из станков не потребует внимания рабочего.

3.1.7 Стрелок делает независимо друг от друга четыре выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах соответственно равны: 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что будут только два попадания в мишень.

3.1.8 Автомобиль проходит при техосмотре три вида проверок. Первую проверку проходит в 90% случаев; вторую – в 80% и третью – в 75%. Найти вероятность того, что автомобиль пройдет техосмотр.

3.1.9 Во время эксплуатации радиатора автомобиля возможны следующие неисправности: подтекает вода; образование большого слоя накипи. Вероятности возникновения этих неисправностей в течение смены соответственно равны 0,2 и 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет хотя бы одна из неисправностей радиатора.

3.1.10 Дана электрическая схема (рис. 1), в которой вероятности отказа узлов $Z_i, i = \overline{1,5}$ за время T соответственно равны 0,2; 0,3; 0,1; 0,3; 0,1. Схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Определить вероятность безотказной работы схемы за время T.

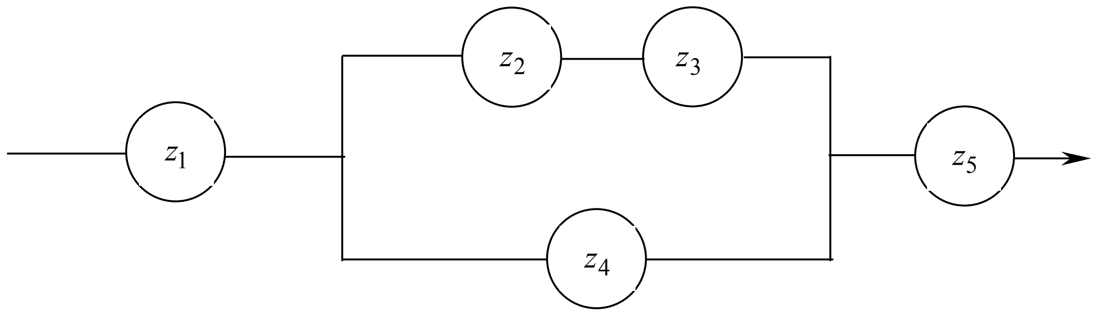

Рисунок 1

3.1.11 Подбрасывается монета три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза.

3.1.12 Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

3.1.13 На 30 одинаковых жетонах написаны числа от 1 до 30. Жетоны помещены в пакеты и перемешаны. Найти вероятность того, что случайно взятый жетон имеет номер, кратный 2 или 3.

3.2 Задачи для самостоятельной работы

3.2.1 Только один из п ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно *k* ключей ($k \le n$) для открывания двери.

3.2.2 Производится три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении ошибка выйдет за пределы допуска, равна 0,1. Найти вероятность того, что не более одного измерения выйдет за предел допуска.

3.2.3 В урне находятся 8 красных и 6 синих шаров. Из урны один за другим извлекаются три шара. Найти вероятность того, что они будут все синие.

3.2.4 Каждое из четырех несовместных событий может произойти в результате опыта соответственно с вероятностями 0,014; 0,011; 0,009; 0,006. Найти вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из указанных событий.

3.2.5 Подброшены монета и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпадет герб, а на кубике – цифра, кратная двум.

3.2.6 Вероятность того, что в трех независимых испытаниях некоторое событие наступит хотя бы один раз, равна 0,875. Найти вероятность появления события в отдельном испытании.

3.2.7 При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Вероятности возникновения брака при каждой операции соответственно равны: 0,05; 0,07; 0,09; 0,04. Найти вероятность изготовления стандартной детали.

Ответы: **3.1.1** 4/15; **3.1.2** 0,48; **3.1.3** 0,79; **3.1.4** 0,94; **3.1.5** 0,994; **3.1.6** 0,0504; **3.1.7** 0,35; **3.1.8** 0,54; **3.1.9** 0,4; **3.1.10** 0,64; **3.1.11** $^3\!/_8$; **3.1.12** 0,991; **3.1.13** 0,67. **3.2.1** $1/n$; **3.2.2** 0,972; **3.2.3** 0,055; **3.2.4** 0,04; **3.2.5** 0,25; **3.2.6** 0,5; **3.2.7** 0,772.

Занятие 4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

4.1 Задачи для аудиторной работы

4.1.1 Станок может работать в двух режимах: рентабельно и нерентабельно. В рентабельном режиме станок работает 80% рабочего времени, в нерентабельном – 20%. Вероятность отказа станка в рентабельном режиме равна 0,1; в нерентабельном режиме – 0,4. Найти вероятность отказа станка.

4.1.2 В цехе, изготавливающем болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно взятый болт будет бракованным.

4.1.3 По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех 1/6 сигналов A искажается и принимается как B, а 1/8 сигналов В искажается и принимается как A. Найти вероятность того, что будет принят сигнал A.

4.1.4 Курс доллара повышается с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма получает прибыль с вероятностью 0,85; а при понижении курса – с вероятностью 0,5. Найти вероятность получения прибыли фирмой.

4.1.5 Два из трех независимо работающих устройств отказали. Найти вероятность того, что отказало первое и второе устройство, если вероятность отказа первого, второго, третьего устройств соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

4.1.6 При хороших метеоусловиях вероятность благополучной посадки самолета равна 0,98, при плохих – 0,8. Для данного аэропорта хорошей считается погода в 80%, а плохой – в 20%. Посадка самолета оказалась благополучной. Какова вероятность того, что она проводилась в плохих метеоусловиях.

4.1.7 Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 35% всех деталей, второй – 40%, третий – всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого – 2%, у второго – 3%, у третьего – 4%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

4.1.8 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

4.1.9 Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Найти вероятность того, что случайно взятый из партии транзистор будет признан дефектным.

4.1.10 Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое выше второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84% деталей отличного качества. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена вторым автоматом.

4.1.11 Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического спада – 0,13. По мнению экспертов, вероятность того, что начнется период экономического роста равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный заем.

4.1.12 В цехе трудятся 3 мастера и 6 их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении детали с вероятностью 0,05; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что изделие изготовил мастер?

4.2 Задачи для самостоятельной работы

4.2.1 Изделие проверяется одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 2/3 всех изделий, второй – 1/3. Вероятность того, что изделие признает стандартным первый контролер равна 0,8, второй – 0,7. При перепроверке изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что изделие проверил второй контролер?

4.2.2 В магазине имеются телевизоры с импортными и отечественными кинескопами в соотношении 2:9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортным кинескопом равна 0,005, с отечественным – 0,001. Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок.

4.2.3 Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1:2:3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1%. Прибор, приобретенный институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что прибор выпустил первый завод?

4.2.4 Число грузовых автомобилей, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомобилей, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться легковая автомашина, равна 0,2, для грузовой автомашины эта вероятность равна 0,1. К бензоколонке для заправки подъехала автомашина. Найти вероятность того, что это грузовая автомашина.

4.2.5 По самолету производится три выстрела независимо друг от друга. Вероятность попадания в самолет при первом выстреле равна 0,5; при втором – 0,6; при третьем – 0,8. Для вывода самолета из строя достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет выйдет из строя.

4.2.6 Строительная конструкция состоит из трех блоков, надежности которых соответственно равны: 0,6; 0,5; 0,3. Для выхода из строя конструкции в целом за время Т достаточно разрушения трех блоков. При двух разрушенных блоках конструкция выходит из строя с вероятностью 0,6; при разрушении одного блока – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что конструкция выйдет из строя за время Т.

Ответы: 4.**1.1** **0,16**; **4.1.2** 0,022; **4.1.3** 0,72; **4.1.4** 0,815; **4.1.5** 0,298; **4.1.6** 0,169; **4.1.7** 0,345; **4.1.8** 6/7; **4.1.9** 0,122; **4.1.10** 0,41; **4.1.11** 0,0715; **4.1.12** 0,1429. 4.**2.1** 0,304; **4.2.2** 0,998; **4.2.3** 0,3; **4.2.4** 3/7; **4.2.5** 0,594; **4.2.6** **0,458**.

Занятие 5. Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли)

5.1 Задачи для аудиторной работы

5.1.1 Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно выбранных в этом месяце 8 дней 3 будут дождливыми?

5.1.2 В цехе находятся четыре однотипных станка, которые работают в течение смены с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в случайно взятый момент времени работает хотя бы один станок.

5.1.3 Всхожесть семян некоторого растения имеет вероятность 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4?

5.1.4 Вероятность банкротства каждой из 6 фирм к концу года равна 0,2. Какова вероятность того, что к концу года обанкротятся не более 2 фирм?

5.1.5 Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит ровно 75 раз?

5.1.6 Электронная система состоит из 28 однотипных блоков, каждый из которых может отказать с вероятностью 0,25. Найти наивероятнейшее число отказов и его вероятность.

5.1.7 По данным отдела технического контроля на 100 металлических брусков, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков не более двух будет с зазубринами?

5.1.8 Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий бракованных будет не более 17?

5.1.9 Вероятность возникновения опасной для работы прибора перегрузки равна 0,4. Определить вероятность выхода из строя прибора в серии из трех испытаний, если при одной опасной перегрузке прибор выходит из строя с вероятностью 0,2; при двух – с вероятностью 0,5; при трех – с вероятностью 0,8.

5.1.10 Контролер проверяет партию из 15 изделий. Вероятность того, что изделие выдержит проверку равна 0,9. Найти наивероятнейшее число изделий, которые выдержат проверку.

5.1.11 Устройство состоит из 500 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента за время t равна 0,002. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) ровно 3 элемента; б) менее трех элементов.

5.1.12 С конвейера в среднем 70% изделий отправляется на экспорт. Сколько изделий нужно взять, чтобы с вероятностью 0,997 отношение относительной частоты изделий, идущих на экспорт, к вероятности 0,7 по модулю не превышало 0,01.

5.1.13 Вероятность того, что в течение часа любой из абонентов позвонит на коммутатор, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

5.1.14 На симпозиум приглашены 75 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0,8. В гостинице для прибывших забронировано 65 мест. Какова вероятность того, что все прибывшие будут поселены в гостинице?

5.1.15 При эпидемии гриппа 40% населения заражены вирусом. В лаборатории работает 24 сотрудника. Какова вероятность того, что 10 из них будут носителями вируса?

5.2 Задачи для самостоятельной работы

5.2.1 Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что план выполнят не менее 6 предприятий.

5.2.2 Вероятность обнаружения упавшего на Землю метеорита равна 0,0001. Какова вероятность того, что из 3000 упавших метеоритов, обнаружено будет не менее 2 метеоритов?

5.2.3 Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) от 1470 до 1500 раз; б) не менее 1470 раз.

5.2.4 Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

5.2.5 При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 1000 опросов число неискренних ответов будет не более 170.

5.2.6 Вероятность приема каждого из 100 независимых сигналов равна 0,75. Найти вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.

Ответы: 5.1.1 0,2787; **5.1.2** 0,9984; **5.1.3** 0,7373; **5.1.4** 0,901; **5.1.5** 0,05324; **5.1.6** (7; 0,174); **5.1.7** 0,647; **5.1.8** 0,9651; **5.1.9** 0,2816; **5.1.10** 14; **5.1.11 а)** 0,0613; **б)** 0,920; **5.1.12** 18399; **5.1.13** 0,0916**;** **5.1.14** 0,9255**;** **5.1.15** 0,1638. **5.2.1** 0,961; **5.2.2** 0,0369; **5.2.3 а)** 0,4236; **б)** 0,5; **5.2.4** (17,18); **5.2.5** 0,0089; **5.2.6 0,6961**.

Занятие 6. Функция распределения и плотность распределения случайных величин

6.1 Задачи для аудиторной работы

6.1.1 Закон распределения дискретной СВ имеет вид

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти функцию распределения.

6.1.2 Дискретная *СВ* задана законом распределения

x_i	1	4	6	8	9
p_i	0,1	λ	0,4	0,3	0,1

Требуется найти значение параметра λ и записать функцию распределения.

6.1.3 Дана функция распределения СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \sin x, & \text{при } 0<x\le \pi/2;\\ 1, & \text{при } x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти плотность распределения и вероятность попадания в интервал $(0;\pi/6)$.

6.1.4 СВ X имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & |x|>\dfrac{\pi}{2};\\ c\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Требуется найти значение параметра c и записать функцию распределения.

6.1.5 *СВ X* имеет плотность распределения $p(x)=\begin{cases}0, & |x|\ge a;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a.\end{cases}$

Найти функцию распределения.

6.1.6 Два стрелка делают независимо друг от друга по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,4. *СВ X* – число попаданий в мишень. Составить закон распределения и записать функцию распределения *СВ X*.

6.1.7 Дана плотность распределения *СВ X* $p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1;\\ \dfrac{a}{x^2}, & \text{при } x>1.\end{cases}$

Найти: a, $F(x)$, $P(2<x<3)$.

6.1.8 Показать, что функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+3x), & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

является функцией распределения, найти плотность распределения и $P(x>1)$.

6.1.9 Дана плотность распределения *СВ X* $p(x)=\dfrac{c}{1+x^2}$. Требуется найти значения параметра c и записать функцию распределения.

6.1.10 Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3}{2}x^2, & 0<x\le 1;\\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

6.2 Задачи для самостоятельной работы

6.2.1 Закон распределения дискретной СВ имеет вид

x_i	0	3	5	7
p_i	0,15	0,2	0,5	0,15

Составить функцию распределения.

6.2.2 Непрерывная *СВ* задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$

Требуется найти параметр *a* и плотность распределения.

6.2.3 Дана плотность распределения *СВ X* $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Требуется найти: *a*, $F(x)$, $P(-1<X<0{,}5)$.

6.2.4 Дана плотность распределения *СВ X* $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, & x>0.\end{cases}$

Найти: $F(x)$, $P(2<X<3)$.

Ответы: 6.1.3 $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\quad p=\dfrac{1}{2}$;

6.1.4 $c=\dfrac{1}{2}$; $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1), & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.1.5 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$;

6.1.6

x_i	0	1	2

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}3, & 0<x\le 1;\end{cases}$

p_i	0,3	0,5	0,2

6.1.7 $a=1,\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 1-\dfrac{1}{x}, & x>1;\end{cases}\ P(2<X<3)=\dfrac{1}{6}$;

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(3x^2-6x+3), & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}\quad p=0{,}5;$$

6.1.8

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^3}{2}, & 0<x\le 1;\\ 1-\dfrac{(2-x)^3}{2}, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

6.1.9 $c=\dfrac{1}{\pi},\quad F(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}$; **6.1.10**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}15, & 0<x\le 3;\\ 0{,}35, & 3<x\le 5;\\ 0{,}85, & 5<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}\qquad a=\frac{1}{4};\quad p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

6.2.1 **6.2.2**

$$a=3;\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}\quad p=\frac{1}{8};$$

6.2.3 **6.2.4** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x>0\end{cases};\quad p=0{,}1$.

Занятие 7. Числовые характеристики случайных величин

7.1 Задачи для аудиторной работы

7.1.1 Число α-частиц, достигающих счетчика в некотором опыте, является *СВ*, распределенной по закону:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,011	0,007

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.1.2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу взяты 2 детали. *СВ X* равна числу стандартных деталей из 2 взятых. Требуется составить закон распределения *СВ* и вычислить числовые характеристики.

7.1.3. Функция распределения *СВ X* имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ x^3, & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

7.1.4. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение *СВ*, заданной законом распределения

x_i	131	140	160	180
p_i	0,05	0,1	0,25	0,6

7.1.5. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения $p(x) = \begin{cases} e^x, & \text{при } x \le 0; \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.1.6. Непрерывная *СВ* задана плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -c; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & \text{при } -c < x \le c; \\ 0, & \text{при } x > c. \end{cases}$$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

7.1.7. Случайная величина *X* задана плотностью распределения $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 0{,}5x, & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$

Найти начальные и центральные моменты до третьего порядка включительно.

7.1.8. СВ *X* распределена по закону, определенному плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\pi/2; \\ a\cos x, & \text{при } -\pi/2 < x \le \pi/2; \\ 0, & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти значение параметра *a* и вычислить *M*(*X*), *D*(*X*).

7.1.9. Найти математическое ожидание СВ *X*, которая задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -a;\\ \dfrac{(x+a)^2}{2a^2}, & \text{при } -a<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(a-x)^2}{2a^2}, & \text{при } 0<x\le a;\\ 1, & \text{при } x>a.\end{cases}$$

7.2 Задачи для самостоятельной работы

7.2.1. Случайная величина *X* задана законом распределения

x_i	–2	1	3
p_i	0,1	0,7	0,2

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$.

7.2.2. Плотность распределения СВ *X* задана функцией

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{3}{2}x^2, & \text{при } 0<x\le 1;\\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2, & \text{при } 1<x\le 2;\\ 0, & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X)$.

7.2.3. Непрерывная СВ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -2;\\ \dfrac{1}{5}(x+2), & \text{при } -2<x\le 3;\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$.

7.2.4. СВ задана плотностью распределения $p(x)=2x$ в интервале (0; 1), вне этого интервала $p(x)=0$. Найти начальные и центральные моменты до третьего порядка включительно.

7.2.5. Производится 4 независимых испытания прибора. Вероятность того, что прибор выдержит испытание в каждом испытании равна 0,4. СВ *X* – количество испытаний, в которых прибор выдержал испытание. Составить закон распределения и вычислить числовые характеристики СВ.

Ответы: 7.1.1 $M(X)=3{,}868;\quad D(X)=3{,}841;\quad \sigma(X)=1{,}960$;

7.1.2

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

$M(X)=\frac{8}{5}$; $D(X)=0{,}284$

$\sigma(x)=0{,}533$

7.1.3 $M(X)=\frac{3}{4}$; $D(X)=\frac{3}{80}$; **7.1.4** $D(X)=248{,}95$, $\sigma(X)=15{,}78$;

7.1.5 $M(X)=-1$; $D(X)=1$; $\sigma(X)=1$; **7.1.6** $M(X)=0$; $D(X)=\frac{c^2}{2}$;

7.1.7 $M_1=\frac{4}{3}$; $M_2=2$; $M_3=3{,}2$; $\mu_1=0$; $\mu_2=\frac{2}{9}$; $\mu_3=-\frac{8}{135}$;

7.1.8 $a=\frac{1}{2}$; $M(X)=0$; $D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2$; **7.1.9** $M(X)=0$.

7.2.1 $M(X)=1{,}1$; $D(X)=1{,}69$; $\sigma(X)=1{,}3$; **7.2.2** $M(X)=1$, $D(X)=0{,}1$;

7.2.3 $M(X)=\frac{1}{2}$; $D(X)=\frac{25}{12}$; $\sigma(X)=\frac{5\sqrt{3}}{6}$;

7.2.4 $M_1=\frac{2}{3}$; $M_2=\frac{1}{2}$; $M_3=\frac{2}{5}$; $\mu_1=0$; $\mu_2=\frac{1}{18}$; $\mu_3=-\frac{1}{135}$;

7.2.5

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

; $M(X)=1{,}6$; $D(X)=0{,}96$.

Занятие 8. Законы распределения дискретных случайных величин

8.1 Задачи для аудиторной работы

8.1.1 Производится 5 независимых испытаний прибора. Вероятность того, что прибор выдержит испытание равна 0,9 и постоянна для всех испытаний. СВ *X* – количество испытаний, в которых прибор выдержал испытание. Требуется составить закон распределения СВ *X*.

8.1.2 Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002 и постоянна для всех изделий. СВ *X* – число изделий, поврежденных в пути. Требуется вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ.

8.1.3 В партии из 10 изделий имеется 8 изделий высшего сорта. Наудачу отобраны два изделия. СВ *X* – количество изделий высшего сорта из двух отобранных. Требуется составить закон распределения СВ и вычислить *M*(*X*) и *D*(*X*).

8.1.4 Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле равна 0,6. Стрелок стреляет в цель до первого попадания, имея три патрона. СВ *X* – число израсходованных патронов. Требуется составить закон распределения СВ X и вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

8.1.5 Вероятность того, что нужная студенту книга имеется в библиотеке, равна 0,6. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетил студент, чтобы взять нужную книгу. Составить закон распределения СВ X.

8.1.6 У человека, подошедшего к двери, имеется связка из пяти однотипных ключей, из которых только один открывает дверь. Он случайным образом берет ключ и пытается открыть дверь. Если ключ не подходит то постарается открыть дверь следующим ключом т.д. пока ее не откроет. СВ X равна количеству опробованных ключей. Требуется составить закон распределения и вычислить числовые характеристики.

8.1.7 Два баскетболиста делают независимо друг от друга по одному броску по кольцу. Вероятность попадания в кольцо для первого баскетболиста равна 0,6, для второго – 0,7. СВ X – число попаданий в кольцо. Нужно составить закон распределения СВ и вычислить ее числовые характеристики.

8.1.8 В лотерее из 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимости которых равны 100 и 60 у.е. (условных единиц). СВ X – стоимости возможного выигрыша на один билет. Составить закон распределения СВ X и вычислить ее числовые характеристики.

8.2 Задачи для самостоятельной работы

8.2.1 На пути движения автомобиля находятся 4 светофора, которые разрешают движение без остановки с вероятностью 0,5. СВ X – количество светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Составить закон распределения СВ X.

8.2.2 Подбрасываются две монеты. СВ X – количество выпавших гербов. Нужно составить закон распределения СВ X и вычислить $M(X)$, $D(X)$.

8.2.3 Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,1. СВ X – количество элементов, отказавших за время T. Требуется составить закон распределения СВ X.

8.2.4 В партии из 10 деталей 7 стандартных. Из партии наугад берут две детали. СВ X – количество стандартных деталей из случайно взятых. Требуется составить закон распределения СВ X и вычислить ее числовые характеристики.

8.2.5 При массовом производстве шестерен вероятность брака равна 0,001. СВ X – количество бракованных шестерен в партии из 1000 шестерен. Требуется вычислить числовые характеристики СВ.

Ответы: 8.1.1

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	$4{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

8.1.2 $M(X)=1;\ D(X)=1;$

8.1.3

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

$M(X)=1{,}6;\ D(X)=0{,}28$

8.1.4

x_i	1	2	3
p_i	0,6	0,24	0,16

$M(X)=1{,}56;\ D(X)=0{,}5664;$
$\sigma(X)=0{,}753$

8.1.5

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

8.1.6

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

$M(X)=3;\ D(X)=2;$
$\sigma(X)=1{,}41$

8.1.7

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

$M(X)=1{,}3;\ D(X)=0{,}45;\ \sigma(X)=0{,}67$

8.1.8

x_i	0	60	100
p_i	98/100	1/100	1/100

$M(X)=1{,}6;\ D(X)=133{,}44$

8.2.1

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

8.2.2

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

$M(X)=1;\ D(X)=0{,}5$

8.2.3

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

8.2.4

x_i	0	1	2
p_i	1/15	7/15	7/15

$M(X)=1{,}4;\ D(X)=0{,}37;\ \sigma=0{,}608$

8.2.5 $M(X)=1;\ D(X)=1.$

Занятие 9. Законы распределения непрерывных случайных величин

9.1 Задачи для аудиторной работы

9.1.1 СВ X равномерно распределена на $(-5;3)$. Требуется записать плотность и функцию распределения.

9.1.2 Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$ СВ, равномерно распределенной на интервале (2; 8).

9.1.3 Автобусы некоторого маршрута следуют строго по расписанию. Интервал движения равен 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус менее 3 минут.

9.1.4 Непрерывная СВ распределена по показательному закону с плотностью $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 5e^{-5x}, & x>0.\end{cases}$. Найти $M(X); D(X), P(0{,}1<x<0{,}3)$.

9.1.5 Математическое ожидание СВ, распределенной по показательному закону, равно 5. Найти $F(x)$ и $P(X<5)$.

9.1.6 Продолжительность безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda=0{,}03$. Найти вероятность того, что за время $t=100$ ч.: а) прибор откажет; б) прибор не откажет.

9.1.7 Случайная величина X распределена нормально с $a=10$, а вероятность $P(5<X<15)=0{,}8$. Найти вероятность попадания СВ в (9; 10).

9.1.8 Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с $a=375$ г., $\sigma=25$ г.. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет а) от 300 г до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

9.1.9 Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2>d_1$, то его размеры считаются приемлемыми. Если хотя бы одно из условий не выполняется, то шарик считается бракованным. Известно, что диаметр шарика является СВ, распределенной по нормальному закону с $a=\dfrac{d_1+d_2}{2}$ и $\sigma=\dfrac{d_2-d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

9.1.10 Случайная величина распределена нормально с $\sigma=5$. Найти длину интервала симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадает СВ.

9.1.11 Производится измерение размеров детали. Средняя ошибка измерения равна 0,1 мм, среднее квадратическое отклонение ошибки равно 0,5 мм. Найти вероятность того, что отклонение измерения от среднего значения не превосходит по абсолютной величине 0,3.

9.1.12 Производится измерение длины заготовки детали. Длина заготовки есть СВ, подчиненная нормальному закону с $a=20$ см, $\sigma=0{,}5$ см. Найти вероятность того, что две измеренные длины заготовки будут лежать в интервале (19,5; 20,5) в трех измерениях.

9.2 Задачи для самостоятельной работы

9.2.1 СВ X распределена равномерно на интервале (2; 4). Записать $p(x)$, $F(x)$ и вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

9.2.2 Непрерывная СВ X распределена по показательному закону с функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-0,6x}; & x>0.\end{cases}$ Найти вероятность попадания СВ в интервал (2; 5).

9.2.3 Среднее время обслуживания покупателя 20 минут. Чему равна вероятность того, что покупатель простоит в очереди от 20 до 40 минут.

9.2.4 Производится измерение размеров детали без систематических ошибок. Вероятность того, что ошибка измерения по абсолютной величине не превосходит 2 мм, равна 0,8. Найти среднее квадратическое отклонение ошибки измерения.

9.2.5 СВ X – ошибка измерительного прибора, распределена по нормальному закону с $a=0$, $\sigma=3$мм . Найти вероятность того, что в трех независимых измерениях ошибка хотя бы один раз окажется в интервале (0,2; 4).

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -5\\ 0,125; & -5<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5\\ \dfrac{x+5}{8}, & -5<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Ответы: 9.1.1 ;

9.1.2 $(M(X)=5;\ D(X)=3;\ \sigma(X)=1{,}73$; **9.1.3** 0,6;

9.1.4 $M(X)=\dfrac{1}{5};\quad D(X)=\dfrac{1}{25};\quad P(0{,}1<X<0{,}3)=0{,}38$;

9.1.5 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-x/5}, & x>0;\end{cases}$ $P(X<5)=0{,}63$; **9.1.6 а)** 0,95; **б)** 0,05; **9.1.7** 0,1026;

9.1.8 а) 0,976; **б)** 0,9987; **в)** 0,9987; **9.1.9** 0,0456; **9.1.10** 30**;** **9.1.11** 0,4514**;** **9.1.12** 0,44.

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 1/2; & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}\quad M(X)=3;\ D(X)=1/3$$

9.2.1 **9.2.2** 0,251; **9.2.3** 0,23;

9.2.4 1,56; **9.2.5** 0,762.

Занятие 10. Предельные теоремы теории вероятностей

10.1 Задачи для аудиторной работы

10.1.1 Дискретная СВ задана законом распределения

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1

Найти вероятность того, что $\left|X - M(X)\right| < 2$ и оценить эту вероятность с помощью неравенства Чебышева.

10.1.2 Расход технической воды на предприятии составляет 5000 л в день, а среднее квадратическое отклонение этой величины не превышает 100 л. Оценить вероятность того, что расход воды будет заключен от 4500 л до 5500 л.

10.1.3 Выяснить применима ли теорема Чебышева к последовательности СВ, если последовательность имеет распределение

x_n	$-5n$	0	$5n$
p_n	$\dfrac{1}{3n^2}$	$1-\dfrac{2}{3n^2}$	$\dfrac{1}{3n^2}$

10.1.4 Для определения урожайности поля из 200 га взяли выборку из каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия урожайности не превосходит 2 ц. Оценить вероятность того, что отклонение средней урожайности поля от средней рассчитанной по выборке урожайности, не превосходит 0,2 ц.

10.1.5 Сколько раз нужно измерить величину с истинным значением a, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a по абсолютной величине не более чем на 2, если $\sigma < 10$.

10.1.6 Вероятность появления события в отдельном испытании равна 0,6. Применяя теорему Бернулли, определить то число независимых испытаний, начиная с которого $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) > 0{,}97$.

10.1.7 Число телевизоров повышенного качества составляет в среднем 40% общего объема выпуска. Оценить вероятность того, что в партии из 500 доля телевизоров повышенного качества отличается от средней по модулю не более, чем 0,06.

10.1.8 Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по модулю 0,01.

10.1.9 Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято наудачу по одной лампе из ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по модулю меньше чем на 5 ч, если известно, что $\sigma = 7$ *ч*.

10.1.10 Складываются 50 СВ, распределенных по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Записать функцию распределении суммы СВ и найти вероятность попадания суммы СВ в интервал (8; 12).

10.1.11 Номинальное значение диаметра втулки 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешности изготовления, не превосходит 0,001 мм. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более, чем на 0,05 мм.

10.1.12 Электронная система состоит из 45 элементов одинаковой надежности равной 0,95 за время *T*. Найти вероятность того, что доля безотказно работающих элементов в течение времени *T* отличается от 0,95 не более, чем на 0,1.

10.2 Задачи для самостоятельной работы

10.2.1 Дискретная СВ задана законом распределения

x_i	0,3	0,6
p_i	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}2$.

10.2.2 Последовательность СВ $\{X_i\}$ задана законом

x_i	a	$-a$
p_i	$\dfrac{n}{2n+1}$	$\dfrac{n+1}{2n+1}$

Применима ли к этой последовательности СВ теорема Чебышева?

10.2.3 Начиная с какого числа n независимых испытаний, выполняется неравенство $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) > 0{,}97$, если при отдельном испытании $p = 0{,}8$.

10.2.4 По данным ОТК брак при выпуске деталей составляет 2,5%. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 8000 деталей, будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005.

10.2.5 Монета бросается 1000 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты появления герба от вероятности появления герба в отдельном испытании менее, чем на 0,1.

10.2.6 Электростанция обслуживает цепь из 18000 электролампочек. Вероятность включения каждой лампочки равна 0,9. Оценить вероятность того, что число включенных лампочек отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200.

Ответы: 10.1.1 $p = 0{,}85; p \ge 0{,}585$; **10.1.2** $p \ge 24/25$; **10.1.3** применима; **10.1.4** $p > 0{,}75$; **10.1.5** 500; **10.1.6** 801; **10.1.7** $p \ge 0{,}8667$; **10.1.8** $p \ge 0{,}79$; **10.1.9** $p > 0{,}991$;

10.1.10 $F(y)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{y-10}{\sqrt{2}}\right)$; $p=0{,}8414$ **;** **10.1.11** **0,6;** **10.1.12** $p\geq 0{,}8944$. **10.2.1** $p\geq 0{,}64$;

10.2.2 применима; **10.2.3** 534; **10.2.4** $p>0{,}878$ **;** **10.2.5** $p\geq\frac{39}{40}$ **;** **10.2.6** $p\geq 0{,}9595$.

Занятие 11. Двумерные случайные величины. Законы распределения. Условные законы распределения.

11.1 Задачи для аудиторной работы

11.1.1 Дискретная двумерная СВ задана законом распределения

$Y \setminus X$	–1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Требуется найти законы распределения составляющих и условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X=0$.

11.1.2 Дискретная двумерная величина задана законом распределения

$X \setminus Y$	1	2	3	4
10	0,2	0,02	0,01	0
20	0,03	0,3	0,02	0
30	0,02	0,1	0,2	0,1

Найти законы распределения составляющих и условное распределение СВ *Y* при условии *X*=30.

11.1.3 Найти плотность распределения двумерной СВ (*X*; *Y*), если ее функция распределения имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0<\mathrm{x}\leq\frac{\pi}{2},\quad 0<\mathrm{y}\leq\frac{\pi}{2};\\ 0, & +\mathrm{x}\leq 0\ \text{ или }\ \mathrm{y}\leq 0;\\ 1, & \mathrm{x}>\frac{\pi}{2}\ \text{ или }\ \mathrm{y}>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

11.1.4 Дана функция распределения двумерной СВ (*X*; *Y*)

$$F(x;y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right) & \text{при }\ \mathrm{x}\geq 0;\ \mathrm{y}\geq 0\\ 0,\quad x\leq 0 & \text{или }\quad y\leq 0\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента составляющие примут значения $X<2, Y<4$.

11.1.5 Дана плотность распределения двумерной СВ (X; Y)

$$p(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y), & 0\le \mathrm{x}\le \dfrac{\pi}{2},\quad 0\le \mathrm{y}\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \mathrm{x}<0,\ \text{или}\ \ \mathrm{y}<0,\quad \text{или}\quad \mathrm{x}>\dfrac{\pi}{2},\quad \text{или}\quad \mathrm{y}>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения.

11.1.6 Дана плотность распределения двумерной СВ (X; Y)

$$p(x,y)=\begin{cases}C\sin(2x+2y), & 0\le \mathrm{x}\le \dfrac{\pi}{4},\quad 0\le \mathrm{y}\le \dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Определить значение параметра C.

11.1.7 Двумерная СВ (X; Y) задана плотностью распределения

$$p(x;y)=\begin{cases}Ae^{-x-y}, & \mathrm{x}>0;\ \mathrm{y}>0;\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\ \text{или}\ \mathrm{y}\le 0.\end{cases}$$

Требуется найти значение параметра A, плотности распределения составляющих и условные плотности распределения.

11.1.8 Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x;y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Найти функцию распределения.

11.1.9 Двумерная СВ распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат. Найти плотность распределения и плотности распределения составляющих.

11.1.10 Двумерная СВ (X,Y) задана плотностью распределения

$$p(x,y)=\begin{cases}C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2\le R;\\ 0, & x^2+y^2>R.\end{cases}$$

Найти: а) параметр C; б) вероятность попадания СВ (X,Y) в круг радиуса 1 с центром в начале координат, если $R=2$.

11.2 Задачи для самостоятельной работы

11.2.1 Двумерная СВ задана законом распределения

$X \setminus Y$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) законы распределения составляющих; б) условный закон распределения СВ Y при условии, что $X = 5$.

11.2.2 Задана функция распределения двумерной СВ

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, \; x \geq 0, \; y \geq 0; \\ 0, \quad x < 0 \;\text{ или }\; \text{y} < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

11.2.3 Двумерная СВ распределена равномерно внутри треугольника с вершинами $O(0;\,0)$, $A(8;\,0)$, $B(0;\,8)$.. Найти: а) плотность распределения СВ $(X;Y)$; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения.

11.2.4 Плотность распределения вероятностей имеет вид $p(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x \geq 0, \; y \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \;\text{ или }\; \text{y} < 0 \end{cases}$.

Найти вероятность попадания СВ (X,Y) в область, ограниченную прямыми $x = 0;\, y = 0,\, x = 1,\, y = 1$.

11.2.5 Найти плотность распределения двумерной СВ (X,Y), если

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-2x}\right)\left(1 - e^{-3y}\right), & x \geq 0, \; y \geq 0; \\ 0, \quad x < 0, \text{ или } \text{y} < 0. \end{cases}$$

11.2.6 Заданы плотности распределения независимых составляющих двумерной СВ (X,Y)

$$p_1(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad p_2(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}.$$

Найти: а) плотность распределения $(X;Y)$; б) функцию распределения $F(x,y)$.

Ответы: 11.1.1

x_i	–1	0	1
p_i	0,25	0,40	0,35

y_j	0	1
p_j	0,45	0,55

y_j	0	1
$P(y_i/X=0)$	3/8	5/8

11.1.2

x_i	10	20	30
p_i	0,23	0,35	0,42

y_j	1	2	3	4
p_j	0,25	0,42	0,23	0,1

y_j	1	2	3	4
$P(y_i/X=30)$	0,0476	0,2381	0,4762	0,2381

11.1.3 $p(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0<\mathrm{x}\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0<\mathrm{y}\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ **11.1.4** 0,849;

11.1.5 $F(x;y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0\\ \dfrac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin y-\sin x), & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right],\quad y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad y>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$; **11.1.6** $C=2$;

11.1.7 $A=1,\quad p_1(x)=e^{-x},\quad p_2(y)=e^{-y},\quad p(x/y)=e^{-x},\quad p(y/x)=e^{-y}$;

11.1.8 $F(x;y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)$;

11.1.9 $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4ab}, & -a\le\mathrm{x}\le a,-b\le\mathrm{y}\le b;\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$ $p_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x|\le a;\\ 0, & |x|>a;\end{cases}$ $p_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & |y|\le b;\\ 0, & |y|>b.\end{cases}$ **;**

11.1.10 $C=\dfrac{3}{8\pi}$; $p=0{,}5$.

11.2.1

y_j	0,4	0,8
p_j	0,8	0,2

y_j	0,4	0,8
$p(y_j/X=5)$	5/7	2/7

x_i	2	5	8
p_i	0,2	0,42	0,38

11.2.2 $\left(p(x,y)=\begin{cases}3^{-x-y}\ln^2 3, & x>0,\ y>0;\\ 0, & x\le 0 \text{ или } \mathrm{y}\le 0.\end{cases}\right)$; **11.2.3** ; **11.2.4** $\left(\dfrac{(e-1)^2}{2e^2}\right)$**;**

11.2.5 $p(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & x\le 0,\ \text{или}\ \ y\le 0.\end{cases}$; **11.2.6**

$$p(x,y)=\begin{cases}10e^{-5x-2y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & x\le 0\ \ \text{или}\ \ y\le 0.\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-5x}\right)\left(1-e^{-2y}\right), & x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{если}\ \ x\le 0\ \ \text{или}\ \ y\le 0.\end{cases}$$

Занятие 12. Числовые характеристики двумерных случайных величин. Коэффициент корреляции

12.1 Задачи для аудиторной работы

12.1.1 Двумерная СВ задана законом распределения

$Y \setminus X$	1	2	3	4
0	0,07	0,04	0,11	0,11
1	0,08	0,11	0,06	0,08
2	0,09	0,13	0,10	0,02

Вычислить коэффициент корреляции и выяснить зависимы ли составляющие.

12.1.2 Непрерывная двумерная СВ задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x,y)=\begin{cases}c(x+y), & \text{если}\ \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{в противном случае}.\end{cases}$$

Найти: а) параметр c; б) коэффициент корреляции.

12.1.3 Двумерная дискретная СВ задана законом распределения

$Y \setminus X$	0	1	2
0	1/4	0	0
1	1/3	1/6	0
2	1/9	1/9	1/36

Вычислить: $M(X)$, $M(Y)$, $M(X/Y=2)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

12.1.4 Задана плотность распределения двумерной СВ

$$p(x,y)=\begin{cases}2\cos x\cos y, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\ 0\le y\le \dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{вне квадрата}.\end{cases}$$

Найти математические ожидания составляющих.

12.1.5 Случайные величины X и Y независимы и распределены по показательному закону с параметрами $\lambda_1=0{,}1$; $\lambda_2=0{,}4$. Найти плотность распределения двумерной СВ (X,Y) и вычислить $M(XY)$.

12.1.6 СВ (X,Y) распределена равномерно в квадрате $\{S=(x,y)\mid x\in[0;1],\ y\in[0;1]\}$. Показать, что СВ X и Y некоррелированы.

12.1.7 Задан закон распределения СВ (X,Y)

$X \setminus Y$	–2	–1	0	1	2
–1	$1/8$	$1/16$	$1/8$	$1/16$	$1/8$
1	$1/8$	$1/16$	$1/8$	$1/16$	$1/8$

Являются ли коррелированными СВ X и Y?

12.1.8 Дана плотность распределения двумерной СВ $p(x,y) = Axy$, внутри треугольника, ограниченного прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $p(x,y) = 0$ вне этого треугольника. Найти: A, r_{xy}.

12.2 Задачи для самостоятельной работы

12.2.1 Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(x^2 + y^2\right), & |x| \le 1,\ |y| \le 1; \\ 0, & |x| > 1 \text{ или } |y| > 1. \end{cases}$$

Выяснить зависимы ли составляющие X и Y.

12.2.2 Дана плотность распределения двумерной СВ

$$p(x,y) = \begin{cases} a\left(1 - xy^3\right), & |x| \le 1,\ |y| \le 1; \\ 0, & |x| > 1 \text{ или } |y| > 1. \end{cases}$$

Найти a и r_{xy}.

12.2.3 Двумерная СВ (X,Y) имеет закон распределения

$Y \setminus X$	–1	0	1
0	$1/12$	$1/2$	$1/12$
2	$1/12$	$1/6$	$1/12$

Найти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

12.2.4 Двумерная СВ (X,Y) задана законом распределения

$X \setminus Y$	6	5	4	3
0,1	0,2	0,1	0,1	0
0,2	0,1	0,2	0,15	0
0,3	0	0	0,05	0,1

Будут ли зависимы составляющие X и Y?

12.2.5 Дана плотность распределения вероятностей двумерной СВ

$$p(x,y) = \begin{cases} 2\sin(2x + 2y), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy}.

Ответы: **12.1.1** – 0,24; **12.1.2** $C=1$; $r_{xy}=-\frac{1}{11}$;

12.1.3 $M(X)=\frac{1}{3}, M(Y)=1, M(X/Y=2)=\frac{2}{3}, \quad D(X)=\frac{5}{18}, D(Y)=\frac{1}{2}, r_{xy}=0{,}45$;

12.1.4 $M(X)=M(Y)=\frac{\pi-4+4\sqrt{2}}{4}$;

12.1.5 $p(x,y)=\begin{cases}0{,}04e^{-0{,}1x-0{,}4y}, & x>0,\ y>0;\\ 0, & x\le 0 \text{ или } y<0;\end{cases}$ $M(XY)=25$; **12.1.6** ; **12.1.7** да;

12.1.8 $A=24$, $r_{xy}=-\frac{2}{3}$. **12.2.1** да; **: 12.2.2** $a=\frac{1}{4}$;

12.2.3 $M(X)=0, \quad M(Y)=\frac{2}{3}, \quad D(X)=\frac{1}{3}, \quad D(Y)=\frac{8}{9}, \quad r_{xy}=0$; **12.2.4** нет.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Занятие 1. Статистическое распределение. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики выборки

1.1 Задачи для аудиторной работы

1.1.15 Даны измерения отклонений от номинала 50 подшипников в мкм:

-1,752,	-0,291,	-0,933,	-0,450,	0,512
-1,256,	1,701,	0,634,	0,720,	0,490,
1,531,	-0,433,	1,409,	1,730,	-0,266,
-0,058,	0,248,	-0,095,	-1,488,	-0,361,
0,415,	-1,382,	0,129,	-0,361,	-0,087,
-0,329,	0,086,	0,130,	-0,244,	-0,882,
0,318,	-1,087,	0,899,	1,028,	-1,304,
0,349,	-0,293,	-0,883,	-0,056,	0,757,
-0,059,	-0,539,	-0,078	0,229,	0,194,
-1,084,	0,318,	0,367,	-0,992,	0,529.

Построить для данной выборки интервальный статистический ряд.

1.1.16 Измеряется рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов:

178,	160,	150,	183,	155,	153,	167,	186,	163,	155,
157,	175,	170,	166,	159,	173,	182,	167,	171,	169,
179,	165,	156,	179,	158,	171,	175,	173,	164,	172.

Построить интервальный статистический ряд.

1.1.17 По данным выборки, объемом 100, найти эмпирическую функцию и построить полигон частот.

$x_i - x_{i+1}$	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
m_i	6	12	33	22	19	8

1.1.18 Найти эмпирическую функцию распределения и построить полигон частостей по следующим данным.

x_i	1	2	3	4	5
m_i	4	6	16	26	48

1.1.19 Построить гистограмму частот по данным выборки

$x_i - x_{i+1}$	2–7	7–12	12–17	17–22	22–27
m_i	5	10	25	6	4

1.1.20 Построить гистограмму частостей и найти эмпирическую функцию распределения по данным выборки объемом 100.

$x_i - x_{i+1}$	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
m_i	10	14	26	28	14	6	2

1.1.21 Найти числовые характеристики по данным выборки

а)

x_i	1	3	6	26
m_i	8	40	10	2

в)

$x_i - x_{i+1}$	40,1–40,2	40,2–40,3	40,3–40,4	40,4–40,5	40,5–40,6
m_i	7	24	34	26	9

1.1.22 Для проверки оборудования размельчения руды были случайно отобраны и измерены 50 образцов переработанного минерала. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение

0,030;	0,559;	0,407;	2,784;	0,518;	1,185;	1,297;
0,614;	0,171;	0,155;	0,081;	30,02;	3,554;	1,155;
2,664;	1,889;	0,114;	6,038;	7,815;	0,074;	21,370;
0,412;	16,740;	31,820;	0,587;	2,010;	0,558;	0,171;
0,894;	4,545;	0,147;	1,642;	0,827;	0,051;	0,486;
0,889;	0,340;	0,856;	1,581;	1,474;	2,293;	0,063;
1,294;	0,009;	0,114;	1,889;	2,083;	0,138;	2,881;
0,114.						

1.2 Задачи для самостоятельной работы

1.2.7 Составить эмпирическую функцию распределения и построить полигон частостей по данным выборки

x_i	15	16	17	18	19
m_i	1	4	5	6	4

1.2.8 Составить эмпирическую функцию распределения и построить гистограмму частот по данным выборки

$x_i - x_{i+1}$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
m_i	1	2	7	18	12	8	2

1.2.9 Интервал движения поездов в метро составляет 2 минуты. Приведены значения случайной величины X – время ожидания пассажиром поезда. Составить интервальный вариационный ряд и найти среднее время ожидания

0,000;	0,002;	0,007;	0,025;	0,089;	0,312;	1,068;	1,604;	0,014;
0,045;	1,747;	1,677;	0,341;	0,952;	0,645;	1,297;	1,981;	0,214;
1,452;	0,787;	1,654;	0,838;	0,143;	1,317;	0,618;	1,853;	1,555;
0,653;	1,922;	1,653;	0,617;	0,828;	1,413;	1,030;	1,459;	1,483;
1,769;	1,265;	1,669;	0,635;	0,787;	1,004;	0,941;	0,612;	1,200;
1,692;	1,356;	0,908;	1,245;	1,295.				

1.2.10 Вычислить выборочную дисперсию по данным выборки

x_i	340	360	375	380
m_i	20	50	18	12

1.2.11 Вычислить числовые характеристики выборки

$x_i - x_{i+1}$	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
m_i	1	8	10	3	3

Ответы: 1.1.1

$x_i - x_{i+1}$	-1,75 – (-1,25)	-1,25 – (-0,75)	-0,75 – (-0,25)	-0,25 – 0,25	0,25 – 0,75	0,75–1,25	1,25–1,75
m_i	5	8	9	12	9	3	4

1.1.2

$x_i - x_{i+1}$	150-156	156-162	162-168	168-174	174-180	180-186
m_i	5	4	6	7	5	3

1.1.3

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 9;\\ 0{,}06, & 9<x\le 12;\\ 0{,}18, & 12<x\le 15;\\ 0{,}51, & 15<x\le 18;\\ 0{,}73, & 18<x\le 21;\\ 0{,}92, & 21<x\le 24;\\ 1, & x>24.\end{cases};$$

1.1.4;

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}04, & 1<x\le 2;\\ 0{,}1, & 2<x\le 3;\\ 0{,}26, & 3<x\le 4;\\ 0{,}52, & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5\end{cases}$$

1.1.5 ;

1.1.6 $$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 154;\\ 0{,}1, & 154<x\le 158;\\ 0{,}24, & 158<x\le 162;\\ 0{,}5, & 162<x\le 166;\\ 0{,}78, & 166<x\le 170;\\ 0{,}92, & 170<x\le 174;\\ 0{,}98, & 174<x\le 178;\\ 1, & x>178.\end{cases};$$

1.1.7 а) $\bar{x}_в = 4;\quad D_в = 18{,}67;\quad \sigma_в = 4{,}32$;

б) $\bar{x}_в = 40{,}356;\quad D_в = 0{,}011;\quad \sigma_в = 0{,}0105$; **1.1.8** $\bar{x}_в = 3{,}99;\quad D_в = 24{,}25;\quad \sigma_в = 4{,}95$.

1.2.1

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 15;\\ 0{,}05, & 15<x\le 16;\\ 0{,}25, & 16<x\le 17;\\ 0{,}5, & 17<x\le 18;\\ 0{,}8, & 18<x\le 19;\\ 1, & x>19.\end{cases};$$

1.2.2

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 10;\\ 0{,}02, & 10<x\le 20;\\ 0{,}06, & 20<x\le 30;\\ 0{,}20, & 30<x\le 40;\\ 0{,}56, & 40<x\le 50;\\ 0{,}80, & 50<x\le 60;\\ 0{,}96, & 60<x\le 70;\\ 1, & x>70.\end{cases}$$

1.2.3 $\bar{x}_в = 1{,}022.$; **1.2.4** $D_в = 167{,}29$; **1.2.5** $\bar{x}_в = 34{,}6;\quad D_в = 107{,}84;\quad \sigma_в = 10{,}35$.

Занятие 2. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

2.1 Задачи для аудиторной работы

1.2.16По данным выборки найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

$x_i - x_{i+1}$	7,8–8,0	8,0–8,2	8,2–8,4	8,4–8,6	8,6–8,8	8,8–9,0
m_i	5	20	80	95	40	10

1.2.17Найти несмещенную оценку для дисперсии по данным выборки

x_i	102	104	108
m_i	2	3	5

1.2.18 По данным выборки найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

а) Положительные отклонения от номинального размера в партии деталей (в мкм):

17;	21;	8;	20;	23;	18;	22;	20;	17;	12;
20;	11;	9;	19;	20;	9;	19;	17;	21;	13;
17;	22;	22;	10;	20;	20;	15;	19;	20;	20;
13;	21;	21;	9;	14;	11;	19;	18;	23;	19.

б) Время реакции (в секундах)

8,5;	7,1;	6,7;	6,2;	2,9;	4,4;	6,0;	5,8;	5,4;
8,2;	6,9;	6,5;	6,1;	3,8;	6,0;	6,0;	5,6;	5,3;
7,7;	6,8;	6,5;	6,1;	4,2;	4,7;	5,6;	5,4;	5,3;
7,4;	6,7;	6,4;	6,1;	4,5;	6,0;	5,8;	5,6;	5,1.

1.2.19 Даны результаты наблюдений за сроком службы 100 однотипных станков до выхода за пределы норм точности

$x_i - x_{i+1}$	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
m_i	9	24	35	22	10

Найти несмещенную оценку для дисперсии срока службы.

1.2.20 Приведены результаты измерения диаметра втулок, обрабатываемых автоматом

$x_i - x_{i+1}$	20,00–20,04	20,04–20,08	20,08–20,12	20,12–20,16	20,16–20,20
m_i	8	18	45	20	9

Найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.

2.2 Задачи для самостоятельной работы

2.2.6 Даны отклонения напряжений от номинала (мВ):

$x_i - x_{i+1}$	0,00–0,02	0,02–0,04	0,04–0,06	0,06–0,08	0,08–0,10	0,10–0,12	0,12–0,14	0,14–0,16
m_i	9	15	29	35	32	19	8	3

Найти оценки для математического ожидания и дисперсии.

2.2.7 Даны урожайности ржи на различных участках поля

Урожайность, ц/га	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24	24–27
Количество участков	6	12	33	22	19	8

Найти оценку для средней урожайности всего поля.

2.2.8 По данной выборки найти оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

Ответы: **2.1.1** $\bar{x}_в = 8{,}44$; $D_и = 0{,}042$; **2.1.2** $D_и = 6{,}93$; **2.1.3** а) $\bar{x}_в = 17{,}06$; $D_и = 18{,}53$; б) $\bar{x}_в = 5{,}9$; $D_и = 1{,}4$; **2.1.4** $D_и = 30{,}14$; **2.1.5** $\bar{x}_в = 20{,}1016$; $D_и = 0{,}002$. **2.2.1** $\bar{x}_в = 0{,}073$; $D_и = 0{,}0012$; **2.2.2** $\bar{x}_в = 18{,}3$; **2.2.3** $\bar{x}_в = 16{,}46$; $D_и = 4{,}92$.

Занятие 3. Интервальные оценки

3.1 Задачи для аудиторной работы

3.1.14 Для определения привеса рыбы за год в одном из рыбхозов проводились выборочные исследования. Разводимые в пруду карпы взвешивались и отпускались обратно. Результаты 100 таких измерений показали, что годовой привес рыбы в среднем составил 200 г, а дисперсия – 320 г. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для годового привеса рыбы ΔP.

3.1.15 Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерения $\sigma = 40\text{м}$ проведено пять различных измерений расстояния. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки истинного расстояния, если среднее всех проведенных измерений $\bar{x}_в = 2000\ \text{м}$.

3.1.16 Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения ламп в выборке равна 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для продолжительности горения ламп всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40\ ч$.

3.1.17 Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной СВ равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1{,}5$.

3.1.18 По данным выборки найти доверительный интервал, с надежностью 0,99 накрывающий среднее квадратическое отклонение.

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

3.1.19 Из генеральной совокупности СВ, распределенной по нормальному закону, выбрано 100 значений СВ. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95.

$x_i - x_{i+1}$	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
m_i	17	40	32	8	3

3.1.20 С целью определения средней суммы Q вкладов в банке произведена выборка

Сумма, млн.руб.	10-30	30-50	50-70	70-90	90-110	110-130
m_i	1	3	10	30	60	7

Найти границы среднего вклада с надежностью 0,95.

3.2 Задачи для самостоятельной работы

3.2.8 Станок-автомат штампует валики. По выборке объемом 100 вычислены выборочная средняя $\bar{x}_в = 12{,}5$ и $s = 2{,}1$. Найти с надежностью 0,95 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

3.2.9 Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a по выборочной средней равна $\bar{x}_в = 0{,}3$, если $\sigma = 1{,}2$.

3.2.10 Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки:

а)

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

б)

$x_i - x_{i+1}$	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	67-70	70-74	74-78	78-82	82-86
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

Ответы: 3.1.1 $196{,}49 < \Delta P < 203{,}51$; **3.1.2** $1964{,}94 < a < 2035{,}06$; **3.1.3** $992{,}16 < a < 1007{,}84$; **3.1.4** $n = 179$; **3.1.5** $0{,}077 < \sigma < 0{,}183$; **3.1.6** $134{,}17 < a < 141{,}8; 16{,}94 < \sigma < 22{,}4$; **3.1.7** $86{,}45 < Q < 93{,}34$. **3.2.1** $12{,}08 < a < 12{,}92; 1{,}84 < \sigma < 2{,}44$; **3.2.2** $n = 81$; **3.2.3** а) $16{,}02 < a < 16{,}91; 1{,}46 < \sigma < 2{,}11$; **б)** $65{,}99 < a < 70{,}24; 6{,}84 < \sigma < 9{,}86$.

Занятие 4. Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова

4.1 Задачи для аудиторной работы

4.1.13 Используя критерий Пирсона, при уровне значимости установить случайно или значимо расхождение между теоретическими и эмпирическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении СВ.

а) $\alpha = 0{,}01$

m_i	8	16	40	72	36	18	10
m_i'	6	18	36	76	39	18	7

б) $\alpha = 0{,}05$

m_i	5	10	20	8	7
m_i'	6	14	18	7	5

4.1.14 Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении совокупности с данными выборки.

а)

$x_i - x_{i-1}$	-20-(-10)	-10-0	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
m_i	20	47	80	89	40	16	8

б)

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
m_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

4.1.15 Наблюдения за межремонтными интервалами T (в месяцах) работы зерноуборочного комплекса дали результаты:

0,000;	0,001;	0,003;	0,012;	0,044;	0,156;	0,534;
0,802;	0,007	0,822;	0,873;	0,838;	0,170;	0,476;
0,322;	0,648;	0,991;	0,107;	0,726;	0,393;	0,827
0,419;	0,071;	0,659;	0,309;	0,927;	0,778;	0,327;
0,961;	0,826;	0,308;	0,414;	0,707;	0,515;	0,729;
0,742;	0,884;	0,632;	0,835;	0,318;	0,394;	0,502;
0,471;	0,306;	0,600;	0,846;	0,678;	0,454;	0,623;
0,648.						

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ с помощью критерия Колмогорова гипотезу о показательном распределении совокупности.

4.1.16 Даны результаты измерения 1000 деталей

$x_i - x_{i+1}$	97,75-98,25	98,25-98,75	98,75-99,25	99,25-99,75	99,75-100,25	100,25-100,75	100,75-101,25	101,25-101,75	101,75-102,25	102,25-102,75
m_i	21	47	87	158	181	201	142	97	41	25

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить с помощью критерия Колмогорова согласуются ли данные выборки с гипотезой о нормальном распределении.

4.2 Задачи для самостоятельной работы

4.2.7 Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими (m_i) и теоретическими частотами (m_i'), которые вычислены в предположении, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

m_i	14	18	32	70	20	36	10
m_i'	10	24	34	80	18	22	12

4.2.8 Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении совокупности с данным выборки.

$x_i - x_{i+1}$	6-16	16-26	26-36	36-46	46-56	56-66	66-76	76-86
m_i	8	7	16	35	15	8	6	5

4.2.9 При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью критерия Колмогорова проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении СВ с данными выборки.

$x_i - x_{i-1}$	-20-(-10)	-10-0	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
m_i	20	47	80	89	40	16	8

Ответы: 4.1.1 **а)** случайно; б) случайно; **4.1.2 а)** согласуется; **б)** согласуется; **4.1.3** согласуется; **4.1.4** согласуются. 4.**2.1** значимо; **4.2.2** не согласуется; **4.2.3** согласуется.

Занятие 5. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства. Проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции

5.1 Задачи для аудиторной работы

5.1.16 Определить тесноту связи и значимость общего веса X (г) растения и веса Y (г) его семян на основании данных

x_i	40	50	60	70	80	90	100
y_i	20	25	28	30	35	40	45

5.1.17 Для исследования влияния объема капиталовложений X (млрд. руб.) на полученную годичную прибыль Y (млрд. руб.) была собрана статистика по 20 крупным предприятиям, которая сведена в корреляционную таблицу.

$X \mid Y$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	n_x
1,5-2,5	1					1
2,5-3,5	2	5	2			9
3,5-4,5		3	3	2		8
4,5-5,5					2	2
n_y	3	8	5	2	2	20

Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

5.1.18 По выборке объема n=100, извлеченной из двумерной нормальной совокупности (X, Y) вычислить выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности.

$X \mid Y$	10	15	20	25	30	35	n_x
35	5	1					6
45		6	2				8
55			5	40	5		50
65			2	8	7		17
75				4	7	8	19
n_y	5	7	9	52	19	8	100

5.1.19 Определить тесноту связи между себестоимостью продукции Y (тыс. руб.) и количеством выпускаемой продукции X (тыс. штук) по данным 7 предприятий.

X	2	3	4	5	6	7	8
Y	2	1,9	2,2	2,4	2,3	2,5	2,5

Выяснить значимость выборочного коэффициента корреляции при α=0,05.

5.1.20 Для выяснения зависимости урожайности сельхозкультур от почвенной влаги были исследованы 20 одинаковых участков земли в пойме реки (X – расстояние участка от реки; Y – урожайность)

$Y \mid X$	0,4	0,8	1,0	1,2	1,8	2,0	n_y
3,0	2	3					5
3,5		4	2	1			7
4,5			1	2	2		5
5,0					2	1	3
n_x	2	7	3	3	4	1	20

Вычислить выборочный коэффициент корреляции.

5.2 Задачи для самостоятельной работы

5.2.7 При отладке токарного станка были измерены погрешности обработки X (мкм) для разных диаметров обрабатываемых деталей Y (см)

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Y	3	3	4	4	4	5	5	5	6	8

Найти выборочный коэффициент корреляции между X и Y и определить его значимость при α=0,05.

5.2.8 Для изучения надежности машин был собран статистический материал зависимости времени непрерывной работы Y (в месяцах) и количества предшествующих ремонтов X

X | Y	0	1	2	3	n_x
2-6			1	2	3
6-10		1	3	1	5
10-14	1	2	1		4
14-18	2	1	1		4
18-22	1	3			4
n_y	4	7	6	3	20

Вычислить $r_в$ и установить тесноту связи при α=0,05.

5.2.9 По данным корреляционной таблицы вычислить $r_в$.

X | Y	5	10	15	20	n_x
10	2				2
20	5	4	4		13
30	3	8	3	3	17
40		3	6	6	15
50			2	1	3
n_y	10	15	15	10	50

Ответы: 5.1.1 $r_в = 0{,}995;\ T_{набл} = 22{,}28;$ значим; **5.1.2** $r_в$=0,782;

5.1.3 $r_в = 0{,}818;\ T_{набл} = 14{,}08;\ r \neq 0$; **5.1.4** $r_в = 0{,}925;\ T_{набл} = 5{,}44;$ значим; **5.1.5** $r_в$=0,871. **5.2.1** $r_в = 0{,}921;\ T_{набл} = 6{,}68;$ значим; **5.2.2** $r_в = -0{,}812;\ T_{набл} = 5{,}9;$ значим.

Занятие 6. Линейная регрессия. Определение параметров линейной регрессии

6.1 Задачи для аудиторной работы

6.1.1 Найти выборочное уравнение регрессии Y на X по данным, приведенным в корреляционной таблице

X | Y	5	10	15	20	25	30	35	40	n_x
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_y	5	5	8	11	8	6	5	2	50

6.1.2. Для исследования зависимости годового объема производства Y от основных фондов X получены статистические данные по 20 предприятиям

$X \mid Y$	12,5	17,5	22,5	27,5	n_x
20-21	1				1
21-22		2			2
22-23		1	2		3
23-24			3	3	6
24-25				8	8
n_y	1	3	5	11	20

Составить выборочное уравнение регрессии Y на X.

6.1.3 По данным измерениям двух переменных величин

x_i	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y_i	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

найти уравнение линейной регрессии Y на X.

6.1.4 В таблице приводятся данные о распаде 10 г радиоактивного вещества, где t – время (в месяцах), X – количество (г) оставшегося вещества в момент t.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	8,45	7,67	5,08	3,63	3,46	2,43	1,91	1,17	0,98	0,81	0,76	0,72

Составить уравнение линейной регрессии X на t.

6.2 Задачи для самостоятельной работы

6.2.1 В таблице приведены данные о связи между ценой на нефть X (ден. ед.) и индексом нефтяных компаний Y (усл. ед.)

X	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5
Y	1,5	1,5	1,6	1,7	1,9	1,9

Составить уравнение прямой регрессии Y на X.

6.2.2 Найти выборочные уравнения прямых регрессии Y на X и X на Y по данным, приведенным в корреляционной таблице.

$Y \mid X$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	50

Ответы: 6.1.1 $\overline{y}_x = 0{,}4x - 38{,}8$; **6.1.2** $\overline{y}_x = 3{,}523x - 58{,}44$; **6.1.3** $\overline{y}_x = 12{,}25 + 0{,}8x$;

6.2.1 $\overline{y}_x = 0{,}189x - 0{,}677$; **6.2.2** $\overline{y_x} = 1{,}92x + 100{,}9$; $\overline{x_y} = 0{,}42y - 38{,}3$.

Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

Материалы для текущей и итоговой аттестации
по учебной дисциплине
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Габасова О.Р., Зубко О. Л., Катковская И. Н.,
Метельский А. В., Чепелев Н.И., Чепелева Т.И.

Минск 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задачи 1-30

1. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что при пожаре сработает первое, второе и третье устройства соответственно равны 0,9; 0,7; 0,85. Какова вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы одно устройство.

2. Для подготовки к экзамену студент должен изучить 50 теоретических вопросов и научиться решать 30 типов задач. Студент, идя на экзамен, выучил 40 теоретических вопросов и научился решать 25 типов задач. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена достаточно ответить на любые два задания из билета, содержащего два теоретических вопроса и задачу.

3. Детали проходят четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой, второй, третьей и четвертой операциях соответственно равны 0,005; 0,01; 0,015; 0,02. Найти вероятность того, что после четырех операций будет получена стандартная деталь.

4. У сборщика 10 деталей, из них первого сорта 6, второго – 4. Какова вероятность того, что из 5 одновременно взятых деталей 3 окажутся первого сорта и 2 – второго сорта?

5. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности выхода из строя за время T первого, второго, третьего блоков соответственно равны 0,1; 0,05; 0,01. Каждый блок необходим для работы прибора в целом. Какова вероятность того, что за время T прибор выйдет из строя?

6. В ящике 15 деталей, среди которых 12 окрашенных. Сборщик случайным образом извлекает 5 деталей. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей 3 будут окрашенными?

7. В мастерской работают два мотора независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый мотор не потребует внимания мастера равно 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены только один мотор потребует внимания мастера.

8. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первосортным, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 80% небракованной продукции удовлетворяют требованиям первого сорта.

9. Устройство содержит три независимо работающих блока. Вероятности отказов блоков соответственно равны 0,15; 0,2; 0,1. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один из блоков.

10. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0,01. Для второго и третьего исследователей эти вероятности равны 0,02 и 0,015. Найти вероятность того, что ошибка будет допущена при измерении не более, чем одним исследователем.

11. В контейнере 17 изделий, из них 10 изделий первого сорта, 4 изделия – 2–ого сорта и 3 изделия – 3–ого сорта. Рабочий случайным образом берет 6 изделий. Какова вероятность того, что среди взятых изделий первого сорта окажется 3 изделия, второго – 2 изделия, третьего – 1 изделие?

12. В течение года три фирмы имеют возможность обанкротиться независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,02; 0,05; 0,04. Какова вероятность того, что в конце года все фирмы будут функционировать?

13. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по четырем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 80% – по второму, 75% – по третьему и 95% – по четвертому. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст сессию?

14. Устройство состоит из четырех элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Какова вероятность того, что включенными будут неизношенные элементы?

15. В электрическую цепь включено последовательно три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

16. Из партии для контроля отбирают 3 изделия. Известно, что в партии содержится 20 изделий, из которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди отобранных все изделия годные.

17. На фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет высшее или среднее образование или то и другое?

18. В ремонтную мастерскую поступило 8 телевизоров, из них 5 нуждается в общей регулировке. Мастер случайным образом берет для ремонта четыре телевизора. Какова вероятность того, что из выбранных телевизоров 3 нуждаются в общей регулировке?

19. Из группы туристов, отправляющихся за границу, 60% владеют английским языком, 40% – французским и 10% – обоими языками. Найти вероятность того, что наугад взятый турист будет нуждаться в переводчике.

20. В читальном зале 10 учебников по теории вероятности, из которых 4 в твердом переплете. Библиотекарь берет один за другим два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

21. Вероятность того, что студент выполнит без ошибок лабораторную работу по физике, равна 0,7, а по химии – 0,8. Какова вероятность того, что он выполнит без ошибок: а) обе лабораторные работы; б) только одну из них; в) хотя бы одну лабораторную работу?

22. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

23. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

24. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

25. Для студента второго курса вероятность решить правильно задачу № 1 из типового расчета равна 0,8, а задачу № 2 – 0,7. Какова вероятность того, что: а) студент правильно решит обе задачи; б) решит неправильно хотя бы одну из задач; в) решит верно только одну из задач?

26. Две фотомодели снимаются для журнала мод, первая – с вероятностью 0,9, вторая – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что в следующем номере журнала появятся снимки: а) обеих девушек; б) только первой; в) хотя бы одной из них?

27. Вероятность того, что наугад выбранный компьютер работает со сбоем, равна 0,2. Оператор включил два компьютера. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них будет работать без сбоев; б) оба компьютера будут исправны.

28. Два скрипача участвуют в конкурсе. Вероятность стать лауреатом конкурса для первого музыканта равна 0,7, для второго – 0,6. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них станет лауреатом; б) лауреатами станут оба скрипача?

29. Автомеханик находит неисправность генератора автомобиля с вероятностью 0,8, карбюратора – 0,9. Какова вероятность того, что при очередной поломке автомобиля: а) он обнаружит хотя бы одну из поломок; б) не обнаружит неисправностей генератора и карбюратора?

30. Два баскетболиста делают по одному броску мячом по корзине. Для первого спортсмена вероятность попадания равна 0,7, для второго – 0,9. Какова вероятность того, что в корзину попадут: а) оба игрока; б) хотя бы один из них; в) попадет только первый спортсмен?

Задачи 31-60

31. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

32. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

33. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

34. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M. эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

35. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 % и третьего – 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % – со второго и 50 % – с третьего?

36. У стоматолога три вида пломбирующего материала: цемент (50 %), амальгама (30 %) и пластмасса (20 %). Условия лечения таковы, что вероятность выпадения пломбы, сделанной из цемента, в течение первого года после лечения равна 0,5, пломбы из амальгамы – 0,6, из пластмассы – 0,4. У пациента пломба выпала через неделю. Из какого материала вероятнее всего она была сделана, если врач взял тот пломбирующий материал, что оказался под рукой?

37. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим осуществляется в 80 % всего времени полета, режим перегрузки – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Найти вероятность отказа прибора за время полета.

38. Для участия в математической олимпиаде среди студентов университета из группы № 1 выбрано 4 студента, из группы № 2 – 6 и из группы № 3 – 5. Вероятность того, что студент попадет в команду факультета, для этих групп соответственно равна 0,9, 0,8 и 0,5. Наугад выбранный студент в итоге попал в команду. В какой из групп вероятнее всего он учится?

39. На склад поступают диваны с трех мебельных фабрик. Первая и третья фабрики изготавливают одинаковое количество продукции, а вторая – вдвое больше. Вероятность для первой, второй и третьей фабрики сделать бракованный диван равна 0,15, 0,05 и 0,1 соответственно. Какова вероятность того, что диван, купленный наудачу, качественный?

40. Экзаменационные работы по математике с вероятностью 0,2, 0,3 и 0,5 попадают на проверку к одному из трех экзаменаторов, каждый из которых может пропустить (не заметить) ошибку студента с вероятностью 0,01, 0, 02 и 0,015 соответственно. Наугад выбранная работа (из числа проверенных) оказалась правильно аттестованной. Какова вероятность, что эту работу проверял третий преподаватель?

41. С первого станка на сборку поступает 30%, со второго – 40%, с третьего – 30% общего количества деталей. Среди деталей, изготовленных на первом станке, имеется 2% брака, на втором – 3%, на третьем – 1% брака. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь стандартная.

42. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 55% общего количества изделий, второй – 45%. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9; а вторым – 0,85. Стандартное изделие при проверке признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

43. Партия электролампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% – вторым, на 40% – третьим. Вероятности выпуска брака первым, вторым и третьим заводом соответственно равны 0,01; 0,02; 0,05. Найти вероятность того, что случайно взятая лампочка окажется бракованной.

44. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Объем продукции первого завода в четыре раза больше объема продукции второго. Вероятность брака на первом заводе 0,05; на втором – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что деталь изготовлена первым заводом?

45. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

46. В цехе работает 15 станков. Из них 10 станков марки A, 3 – марки B и 2 – марки C. Вероятности выпуска стандартной детали на этих станках соответственно равны 0,85; 0,8; 0,9. При проверке деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она выпущена на станке марки C.

47. Среди студентов факультета – 35% составляют первокурсники, 30% студентов учатся на втором курсе, на 3–м и 4–м курсах их соответственно 20% и 15%. Среди студентов первого курса сдали сессию на отлично 3%, среди второкурсников – 4,5%, среди третьекурсников – 7%, а среди студентов 4 курса – 10%. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он учится на третьем курсе?

48. На сборку поступают детали с 2–х автоматов. Первый автомат дает в среднем 2% брака, второй – 1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 5000 деталей, со второго – 3000 деталей.

49. В двух ящиках имеются однотипные детали. В первом ящике 20 деталей, из них две бракованные, во втором – 30, из них 5 бракованных. Наугад взятая деталь из случайно выбранного ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она взята из первого ящика.

50. Аппаратура в 80% случаях работает в нормальном режиме и в 20% – в аварийном. Вероятность сбоя в нормальном режиме равна 0,05; в аварийном – 0,5. Найти вероятность сбоя аппаратуры.

51. На наблюдательной станции установлены три радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели первым локатором равна 0,86; вторым – 0,7; третьим – 0,9. Оператор случайным образом включает один из локаторов и обнаруживает цель. Какова вероятность того, что был включен второй локатор?

52. Вероятность, что выпущенная деталь окажется годной, равна 0,96. Деталь подвергается упрощенной схеме контроля, которая для годных деталей дает положительный результат с вероятностью 0,95, а для деталей с отклонениями – с вероятностью 0,08. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, является годным?

53. Производится три независимых выстрела по самолету. Вероятность попадания в самолет при каждом выстреле равна 0,3. Самолет сбивается при одном попадании с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – 0,5; при трех – 0,9. В результате трех выстрелов самолет сбит. Какова вероятность того, что было два попадания?

54. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,25; 0,25; 0,5. Вероятности того, что радиолампа проработает гарантийный срок для первой, второй и третьей партий соответственно равны 0,9; 0,8; 0,85. Найти вероятность того, что наугад взятая электролампа выдержит гарантийный срок.

55. В торговую сеть поступают однотипные изделия, выпущенные тремя фабриками. Первая фабрика выпускает 30% общего количества изделий, вторая – 50%, третья – 20%. Продукция первой фабрики содержит 0,5% брака, второй – 2%, третьей – 1%. Какова вероятность того, что купленное изделие не будет бракованным?

56. Деталь производится одним из трех автоматов. Производительность первого автомата в два раза больше производительности второго автомата, а производительность третьего автомата в полтора раза больше производительности второго автомата. Брак первого, второго и третьего автоматов составляет соответственно 1%, 2%. 4%. Какова вероятность выпуска стандартной детали?

57. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40% общего количества приборов. Вероятности выхода из строя прибора в течение гарантийного срока, собранного из высококачественных деталей, равна 0,03; собранного из деталей обычного качества – 0,1. Прибор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что прибор собирался из обычных деталей?

58. На трех автоматических линиях изготавливаются однотипные детали. Вследствие разладки станков возможен выпуск бракованной продукции первой линией с вероятностью 0,01; второй – 0,015; третьей –0,02. Первая линия выпускает 30% общего количества деталей, вторая –20%, третья – 50%. Найти вероятность выпуска брака.

59. Партия микросхем содержит 10% брака. Проверка микросхем такова, что с вероятностью 0,98 обнаруживается дефект (если он есть) и с вероятностью 0,03 стандартная микросхема признается бракованной. Какова вероятность того, что на самом деле микросхема стандартна?

60. Две из трех независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья лампы, если вероятности отказа первой, второй и третьей ламп соответственно равны 0,1; 0,3; 0,4.

Задачи 61-90

61. В телевизионной студии 4 камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее двух камер.

62. Рабочий обслуживает 8 однотипных станков. Вероятность того, что в течение времени T станок потребует внимания рабочего, равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение времени T не менее 7 станков потребуют внимания рабочего.

63. В течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 5 % телевизоров. Какова вероятность того, что в партии из 100 телевизоров выдержат гарантийный срок не менее 60 телевизоров.

64. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,98. Какова вероятность того, что из 100 больных, подвергшихся новому лечению, выздоровевших будет не менее 95.

65. Завод отправил на базу 5000 лампочек. Вероятность повреждения лампочки при перевозке равна 0,0002. Найти вероятность того, что при перевозке поврежденными окажутся 3 лампочки.

66. Вероятность того, что прибор не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 приборов более одного не выдержат испытание.

67. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,2. Какова вероятность того, что сообщение из 6 символов содержит не более одного искаженного символа.

68. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение часа равна 0,0005. Какова вероятность того, что в течение часа нить оборвется на 3 веретенах.

69. В комнате 5 электрических лампочек, каждая из которых перегорает в течение года с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее двух электролампочек.

70. Вероятность сбоя в АТС при каждом вызове равна 0,0002. Определить вероятность того, что при 5000 вызовов произойдет не более двух сбоев.

71. По данным отдела технического контроля на 100 металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из семи случайно взятых брусков не более двух окажутся с дефектом?

72. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Вероятность звонка абонента в течение часа равна 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа поступят звонки не более, чем от трех абонентов?

73. В 30% случаев страховая компания выплачивает по договору страховку. Найти вероятность того, что по истечении срока 10 договоров компания уплатит страховку в трех случаях.

74. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены каждого узла равна 0,8. Причем работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Найти вероятность того, что в течение смены прибор выйдет из строя.

75. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская контора предлагает 100 акций этой компании. Какова вероятность того, что будет продано не менее 85 акций?

76. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более двух изделий?

77. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,15. Какова вероятность того, что из 10 приборов при испытании откажут не более 2 из них?

78. Агрегат состоит из 21 блока. Вероятность того, что за время T произвольный блок испытывает лишь допустимые деформации, равна 0,8. Найти вероятность того, что за время T испытывают такие деформации от 18 до 20 блоков.

79. На склад поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 наудачу взятых изделий, не менее 80 окажутся высшего сорта.

80. При установившемся технологическом процессе 70% всего числа изделий выпускается высшего сорта. Отдел технического контроля испытывает 200 изделий. Найти вероятность того, что изделий высшего сорта окажется в пределах от 140 до 180.

81. Инженерное сооружение состоит из семи узлов, вероятность разрушения каждого из которых 0,2. Сооружение считается разрушенным, если разрушено не менее трех узлов. Какова вероятность разрушения сооружения?

82. Книга из 500 страниц имеет 40 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более одной опечатки?

83. В магазин вошло десять покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя равна 0,3.

84. Среди 100 изготавливаемых микросхем в среднем одна бракованная. Найти вероятность того, что в партии из 1000 микросхем будет не более двух бракованных.

85. В цехе 80 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 60 до 70 станков?

86. При массовом производстве шестерен вероятность брака 0,001. Какова вероятность того, что из 500 шестерен не более трех окажутся бракованными?

87. В ходе аудиторской проверки компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Найти вероятность того, что он обнаружит не более одного счета с ошибкой, если ошибки содержат в среднем 3% счетов.

88. Сборник содержит 400 задач с ответами. В каждом ответе вероятность ошибки 0,01. Какова вероятность того, что в сборнике не более двух задач с ошибочными ответами?

89. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что месячный план выполняет не менее шести предприятий.

90. При передаче текстовой информации слова кодируются в символы. Вероятность искажения каждого символа при передаче равна 0,009. При искажении двух и более символов слово не поддается дешифровке. Найти вероятность того, что слово, содержащее 10 символов, будет принято правильно.

Задачи 91-120

Для данной случайной величины X: 1) составить закон распределения СВ, 2) найти математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X), 3) найти функцию распределения F(x).

91. В партии из шести изделий имеются два бракованных. Наудачу взято три изделия. СВ X – количество стандартных изделий среди трех взятых изделий.

92. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ X – количество заготовок, оставшихся после изготовления первой стандартной детали.

93. Прибор состоит из трех узлов. Вероятности выхода узлов из строя в течение времени T соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2. СВ X – число отказавших узлов в течение времени T.

94. Вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,2. СВ X – число телевизоров не выдержавших гарантийный срок из четырех приобретенных телевизоров.

95. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. СВ X – число израсходованных патронов.

96. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятности попадания в цель при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

97. В партии 10% деталей нестандартных. Наудачу взяты четыре детали. СВ X – число нестандартных деталей из 4 взятых.

98. Сигнальное устройство состоит из трех независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,2. СВ X – число отказавших элементов.

99. В партии из 10 изделий содержится три бракованных. Наудачу отобраны два изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

100. Вероятность изготовления стандартного изделия при установившемся технологическом процессе постоянна и равна 0,9. Для проверки качества изделия берутся и проверяются одно за другим 4 изделия. Если обнаруживается бракованное изделие, то бракуют всю партию. СВ X – число изделий, проверяемых ОТК из каждой партии.

101. Установлены три независимо работающих сигнализатора, которые срабатывают при пожаре с вероятностями 0,8; 0,7; 0,9. СВ X – количество сигнализаторов, сработавших при пожаре.

102. Баскетболист делает три броска в кольцо. Вероятности попадания в кольцо при первом, втором и третьем броске соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. СВ X – количество попаданий в кольцо.

103. Стрелок делает три выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна 0,16. СВ X – число попаданий.

104. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания в мишень для первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,5; 0,6; 0,6. СВ X – количество попаданий в мишень.

105. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностями 0,1; 0,05; 0,15. СВ X – количество блоков, вышедших из строя за время T.

106. В партии из 6 изделий – 3 бракованных. Случайным образом взяты 3 изделия из партии. СВ X – количество бракованных изделий среди трех взятых.

107. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностью 0,1. СВ X – количество блоков, которые вышли из строя за время T.

108. В партии деталей – 5 % брака. Наудачу из партии взято 3 детали. СВ X – количество бракованных деталей из взятых.

109. Монету подбрасывают 5 раз. СВ X – количество появлений герба.

110. В партии из 5 изделий одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и проверяют. СВ X – количество проверенных изделий.

111. Вероятность приема каждого из 4 сигналов равна 0,6. СВ X – число принятых сигналов.

112. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение. СВ X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

113. На участке имеется 5 однотипных станков, работающих независимо друг от друга. Коэффициент использования для каждого станка равен 0,8. СВ X – число работающих станков.

114. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,6. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент, чтобы взять нужную ему книгу.

115. Два стрелка делают независимо друг от друга по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6; для второго – 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

116. Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, выбраны случайно 3 изделия. СВ X – число бракованных изделий среди выбранных.

117. Батарея состоит из 4 орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для 1, 2, 3 и 4 орудий соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,75. СВ X – количество попаданий при одном залпе батареи.

118. Срок службы шестерен коробки передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятности отказа каждого фактора соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. СВ X – число отказавших факторов в одном испытании.

119. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что в течение часа 1, 2, 3 и 4 станки потребуют внимания рабочего, соответственно равны 0,2; 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – число станков, потребовавших внимания рабочего.

120. В пятиблочном радиоприемнике (все блоки различные) перегорел один блок. Для устранения неисправности наудачу взятый блок заменяется исправным блоком, после чего проверяется работа приемника. СВ X – число замененных блоков.

Задачи 121-150

Для заданной плотности распределения вероятности *p(x)* требуется 1) определить значение параметра *a*, 2) найти функцию распределения *F(x)*, 3) найти математическое ожидание *M(X)* и дисперсию *D(X)*, 4) построить графики плотности *p(x)* и функции распределения *F(x)*.

121. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 10,\\ 0, & x>10.\end{cases}$

122. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

123. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

124. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

125. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

126. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

127. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

128. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^2, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

129. $$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ a\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

130. $$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

131. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

132. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

133. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

134. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2), & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

135. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

136. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

137. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2)^2, & -2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

138. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

139. $$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

140. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

141. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

142. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2)^2, & -2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

143. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^4, & 3<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

144. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^2, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

145. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^3, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

146. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^4, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

147. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^3, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

148. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

149. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

150. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^3, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

Задачи 151-180

Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием *a* и средним квадратическим отклонением σ. Требуется 1) записать плотность $p(x)$ и функцию распределения $F(x)$, 2) найти $P(\alpha \le X \le \beta)$, 3) найти $P(|X-a|<\delta)$.

№ задачи	a	σ	α	β	δ
151	2,8	0,6	2,1	3,0	1,8
152	3,5	1,2	2,2	4,2	2,1
153	1,5	0,5	2,1	3,0	0,9
154	2,8	0,8	2,5	3,5	1,2
155	10	3	6	13	7,5
156	4	1,5	3	7	2,8
157	5	3	3,5	7	5,1
158	3	2	2	6	4,8
159	4,1	3,5	2	7	4,5
160	3,6	5,1	1,5	5,6	8,2
161	6,2	4,3	5	10	6,4
162	4,7	2,8	1,2	7,3	4,9
163	5,6	2,9	3,0	9,1	5,4
164	8,5	4,7	5,2	10,2	6,3
165	9,4	5,6	4,2	12,5	7,0
166	2,5	4,1	2,7	5,2	5,4
167	7,2	3,5	4,1	10,8	5,5
168	7,8	6,2	3,0	12,9	8,4
169	4,3	5,1	1,6	9,8	9,2
170	10,5	7,1	7,2	15,4	10,1
171	3,5	0,5	4,0	4,5	0,7
172	5,0	1,5	4,5	6,0	1,2
173	4,5	1,0	5,5	6,0	0,6
174	2,3	0,7	3,0	3,6	0,5
175	1,5	2,0	1,5	2,5	1,5
176	3,2	1,5	4,0	5,5	2,3
177	3,0	2,1	5,5	6,0	2,5
178	0,7	2,4	4,0	5,1	2,0
179	1,4	3,1	2,6	3,8	2,7
180	4,3	2,7	2,3	4,9	4,1

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В задачах 1–20 дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины *X*. Требуется 1) построить полигон и

гистограмму относительных частот СВ *X*, 2) по виду полигона и гистограммы сделать предварительный выбор закона распределения, 3) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и исправленное среднее квадратическое отклонение *s*, 4) записать гипотетичную функцию распределения и плотность распределения, 5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$, 6) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

1. Даны результаты испытания стойкости 200 удлиненных сверл диаметра 4 мм (в часах):

x_i стойкость сверла	3–3,2	3,2–3,4	3,4–3,6	3,6–3,8	3,8–4
частота m_i	16	50	70	44	20

2. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм^2):

x_i прочность	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

3. Даны результаты исследования на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм^2):

x_i предел прочности (в кг/мм^2)	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	25	36	22	9

4. Даны результаты содержания фосфора (6%) в 100 чугунных образцах:

x_i содержание фосфора	0,1–0,2	0,2–0,3	0,3–0,4	0,4–0,5	0,5–0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

5. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

x_i стойкость (в часах)	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

6. Даны данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей автоколонны (в сотнях км):

x_i (сотни км)	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	2,8–3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

7. С автомата, обрабатывающего втулки, диаметра d = 40 мм взята выборка изделий объемом 100. Результаты измерения диаметров втулок приведены в таблице:

x_i диаметр (в мм)	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

8. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Контроль механического состояния автомобиля после возвращения в гараж»:

x_i трудоемкость (в мин.)	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

9. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «ремонт валика водяного насоса автомобиля»:

x_i трудоемкость (в мин.)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	17	47	70	46	20

10. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (в часах):

x_i стойкость (в час)	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
частота m_i	8	21	43	21	7

11. Даны сведения о расходе воды, используемой цехом для технических нужд в течение 100 дней (в куб.м):

x_i расход (в м^3)	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
частота m_i	7	25	36	22	10

12. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей (в км):

x_i среднесуточный пробег	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220
частота m_i	9	21	40	18	12

13. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля БелАЗ при средних скоростях:

x_i температура (в градусах)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65

частота m_i	8	17	46	18	11

14. Даны размеры внутреннего диаметра гайки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

15. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

x_i диаметр (в мм)	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27
частота m_i	10	19	38	21	12

16. Даны результаты измерения диаметра валика, обработанного одношпиндельным автоматом:

x_i диаметр (в мм)	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,05–20,10	20,10–20,15
частота m_i	6	15	27	32	14	6

17. Даны результаты исследования грануляции партии порошка (в мкм):

x_i грануляция (в мкм)	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
частота m_i	7	23	35	26	9

18. Даны результаты наблюдений за сроком службы 150 однотипных станков до выхода за пределы норм (в месяцах двухсменной работы):

x_i срок (в месяцах)	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
частота m_i	15	27	61	29	18

19. Даны результаты измерения толщины (в см) 100 слюдяных прокладок:

x_i толщина (в см)	0,20–0,26	0,26–0,32	0,32–0,38	0,38–0,44	0,44–0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

20. Даны диаметры 100 валиков после шлифовки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	20,0–20,1	20,1–20,2	20,2–20,3	20,3–20,4	20,4–20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

В задачах 21-40 приводятся результаты наблюдений над случайными величинами *X* и *Y*. Используя эти экспериментальные данные, необходимо 1) построить корреляционное поле, 2) подобрать математическую модель регрессионной зависимости *Y* от *X* (рекомендуется использовать модель линейной регрессии), 3) оценить параметры *a* и *b*

модельного уравнения регрессии методом наименьших квадратов, 4) записать эмпирическое уравнение регрессии *Y* на *X*.

21. СВ X и СВ Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4
y_i, см	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8

22. СВ X – величина напряжения стального бруса; СВ Y – величина нагрузки при сжатии стального бруса.

x_i, Кн	5	10	20	40	60
y_i, МПа	51,33	78,00	144,3	263,6	375,2

23. СВ X – углубление резца; СВ Y – удельная энергия.

x_i	4	8	10	14	16	20	19	23
y_i	41	50	81	104	120	139	154	180

24. СВ X, СВ Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y_i, см	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	5,0	4,4	3,9

25. СВ X – электрическое сопротивление молибдена; СВ Y – температура.

x_i, см	61,97	57,32	52,70	47,92	37,72	32,09	28,09
y_i, □К	2289	2132	1988	1830	1489	1286	1178

26. СВ X – электровооруженность труда на одного рабочего; СВ Y – выпуск продукции на одного рабочего.

x_i, кВт.ч	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
y_i, тыс. руб.	4,3	4,8	5,0	5,7	6,5	7,0	7,5	8,1

27. СВ X – температура; СВ Y – сопротивление медного термометра.

x_i, □С	0	10	20	30	40	50	60	70
y_i, Ом	0,533	0,552	0,574	0,596	0,619	0,645	0,687	0,690

28. СВ X – масса детали; СВ Y – время, затрачиваемое на закрепление детали на токарном станке.

x_i, кг	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7
y_i, с	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0

29. СВ X – плотность брикетов из карбонильного железного порошка; СВ Y – предел прочности на стане двух таких брикетов.

x_i , %	75	76	77	80	82	85	88	90
y_i, ГПа	2,1	2,0	2,5	2,4	3,6	4,0	4,1	5,0

30. СВ X – скорость движения автомобиля ЗИЛ-130; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	10	15	20	25	30	35	40	45
y_i, м	1,8	2,7	2,5	4,5	4,4	6,3	6,5	6,5

31. СВ X – скорость движения автомобиля ВАЗ-2301; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	31	30	42	40	55	48	64	59
y_i, м	2,0	2,6	3,9	5,2	7,0	6,2	7,5	8,6

32. СВ X – давление гелия; СВ Y – объем одного моля гелия.

x_i, $\cdot 10^8$, Па	3,0	3,6	4,0	4,5	5,2	5,6	6,0	6,4
y_i, $\cdot 10^{-2}$, м^3	1,98	1,92	1,93	1,81	1,83	1,70	1,73	1,68

33. СВ X – масса груза, подвешенного на эластичном шнуре; СВ Y – удлинение этого шнура.

x_i, кг	0,05	0,07	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,250
y_i, см	0,005	0,052	0,012	0,016	0,017	0,025	0,027	0,034

34. СВ X – температура при прессовании болтов из стекловолокнита; СВ Y – предел их прочности.

x_i, □С	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65
y_i, $\cdot 10^8$, Па	10,8	10,2	9,2	8,9	8,3	8,3	8,0	7,3

35. СВ X – ударная вязкость инструментальных быстрорежущих сталей; СВ Y – коэффициент их обрабатываемости.

x_i, $\cdot 10^{-3}$, Дж / м^2	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
y_i,	0,6	0,62	0,64	0,67	0,69	0,73	0,75	0,8

36. СВ X – стаж работы; СВ Y – среднегодовое перевыполнение нормы.

x_i, год	2	3	4	5	6	7
y_i, %	6	6	7	8	9	10

37. СВ X – отклонение размеров валиков от номинала при черновой обработке; СВ Y – при чистовой обработке.

x_i, мкм	–30	–25	–20	–15	–10	–5	0
y_i, мкм	–8	–4	0	2	4	8	12

38. СВ X – скорость движения автомобиля БелАЗ; СВ Y – температура смазочного масла в двигателе этого автомобиля.

x_i, км/ч	20	25	30	35	40	45	50	55
y_i, □C	43,5	43,9	44,2	45,0	46,0	46,9	47,5	49,0

39. СВ X – скорость резания; СВ Y – площадь поперечного сечения стружки при обработке.

x_i, м/мин	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2
y_i, мм^2	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0

40. СВ X – температура; СВ Y – коэффициент трения в подшипнике.

x_i, □C	60	70	80	90	100	110	120
y_i,	0,0148	0,0124	0,0102	0,0085	0,0071	0,0059	0,0051

ТЕСТЫ

«Теория вероятностей»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	1) 10; 2) 20; 3) 60; 4) 25; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует пароль. Известно, что пароль состоит из четырех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 различных букв и 10 различных цифр?	1) 28350; 2) 453600; 3) 5130; 4) 675; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?	1) $1/60$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/120$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 3 банана, 2 киви и 5 апельсинов. Из вазы взяли 4 фрукта. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 1 банан, 1 киви и 2 апельсина.	1) $2/7$; 2) $1/14$; 3) $1/28$; 4) $1/112$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания делит клиентов по классам риска: I класс (малый риск), II класс (средний), III класс (большой риск). Среди клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) 0,035; 2) 0,03; 3) 0,012; 4) 0,024; 5) другой ответ.
6.	Получивший денежное вознаграждение, застрахованный из задачи №5 относится к группе малого риска?	1) $1/3$; 2) $8/15$; 3) $3/10$; 4) $1/6$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене не будут проданы 5 пакетов.	1) 0,096; 2) 0,066; 3) 0,036; 4) 0,086; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 500$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 400$; 4) $M(X) = 398$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $e^{-4/3}$; 4) $e^{-3/4}$; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a = 25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40).	1) 0,09; 2) 0,01; 3) 0,099; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	1) 5; 2) 120; 3) 60; 4) 24; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует авторизации. Известно, что пароль состоит из трех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 различных букв и 10 различных цифр?	2) 810; 2) 165; 3) 64800; 4) 5400; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 5 до 1)?	1) $1/120$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/60$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 4 банана, 4 киви и 6 апельсинов. Из вазы взяли 5 фруктов. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 2 банана, 1 киви и 2 апельсина.	1) $0,001$; 2) $0,28$; 3) $0,012$; 4) $0,18$; 5) другой ответ.
5.	В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.	1) $0,1725$; 2) $0,8275$; 3) $0,1735$; 4) $0,8265$; 5) другой ответ.
6.	Приобретенное изделие из задания №5, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно было поставлено третьей фирмой.	1) $0,493$; 2) $0,507$; 3) $0,607$; 4) $0,393$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано менее 2 пакетов.	1) 0,664; 2) 0,564; 3) 0,436; 4) 0,456; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 350$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 300$; 4) $M(X) = 400$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a = 35. Вероятность попадания X в интервал (20; 25) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (45; 50)?	1) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) среди ответов 1–4 правильного нет.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут поторяться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8?	1) 625; 2) 125; 3) 3125; 4) 120;5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 7 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	1) 5040; 2) 1440; 3) 64800; 4) 2520; 5) другой ответ.
3.	Слово составлено из семи карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова «событие»?	1) $1/120$; 2) $1/5!$; 3) $1/6!$; 4) $1/7!$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся три юноши и одна девушка?	1) $0,01$; 2) $0,162$; 3) $0,142$; 4) $0,568$; 5) другой ответ.
5.	Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия.	1) 9%; 2) $4,8\%$; 3) $7,82\%$; 4) $92,36\%$; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, из задания №5 бракованное?	1) 0,0022; 2) 0,9998; 3) 0,0002; 4) 0,9978; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано более 2 пакетов.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,436; 4) 0,4562; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти дисперсию этой случайной величины.	1) $D(X) = 0,4$; 2) $D(X) = 3,6$; 3) $D(X) = 0,36$; 4) $D(X) = 0,09$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a = 45. Вероятность попадания X в интервал (30; 35) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (55; 60).	2) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут поторяться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 0?	1) 500; 2) 125; 3) 625; 4) 120;5) другой ответ.
2.	Сколькими способами можно рассадить в ряд 7 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	1) 120; 2) 5040; 3) 720; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	Теща Кисы Воробьянинова зашила фамильные бриллианты в один из двенадцати одинаковых стульев. Два из них в последствии остались в Старгороде, а десять стульев отправились в Москву. Какова вероятность отыскать бриллианты в одном из двух стульев, оставшихся в Старгороде?	1) $1/2$; 2) $1/6$; 3) $1/12$; 4) $1/10$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся два юноша и две девушки?	1) 0,0119; 2) 0,9881; 3) 0,6265; 4) 0,3735; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер от рака легких.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,6; 4) 0,06; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал более 10 сигарет в день?	1) 0,0022; 2) 0,824; 3) 0,176; 4) 0,9978; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из всех вопросов два и задает их студенту. Какова вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,0625; 4) 0,9375; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при трех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X)$ = 0,4; 2) $M(X)$ = 0,09; 3) $M(X)$ = 0,3; 4) $M(X)$ = 2,7; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $1-e^{-4/3}$; 4) $e^{-4/3}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах Х с параметрами a = 173 и σ^2 = 36, найти доли костюмов 4-го роста (176 – 182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	1) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 78,53%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе не поторяются) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 6, 0?	1) 500; 2) 96; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	1) 720; 2) 1440; 3) 240; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	В городе работают 20 офисов различных банков. Бабуля выбирает один из этих банков наугад и открывает в нем вклад на 100 000 рублей. Известно, что во время кризиса 6 банков разорились, и вкладчики этих банков потеряли все свои деньги. Какова вероятность того, что бабуля не потеряет свой вклад?	1) 0,7; 2) 0,3; 3) 0,0006; 4) 0,007; 5) другой ответ.
4.	При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.	1) 0,144; 2) 0,096; 3) 0,856; 4) 0,904; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве $M_1=13$, $M_2=12$, и $M_3=17$ штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,172; 4) 0,828; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5, проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1) 0,283; 2) 0,341; 3) 0,376; 4) 0,624; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из вех вопросов три и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,016; 4) 0,624; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 2{,}06$; 2) $M(X) = 1{,}94$; 3) $M(X) = 0{,}9991$; 4) $M(X) = 2{,}7$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит 4 вызова.	1) $\frac{2}{3}e^{-3}$; 2) $\frac{2}{3}e^{-6}$; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X с параметрами $a = 173$ и $\sigma^2 = 36$, найти доли костюмов 3-го роста (170 – 176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	1) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 80,85%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 6

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?	1) 680; 2) 4080; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	1) 24; 2) 720; 3) 144; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	За одну 12-часовую смену рабочий изготавливает на станке с числовым программным управлением 600 деталей. Из-за дефекта режущего инструмента на станке получено 9 бракованных деталей. В конце рабочего дня мастер цеха берет одну деталь наугад и проверяет ее. Какова вероятность, что ему попадется именно бракованная деталь?	1) $0,0017$; 2) $0,985$; 3) $0,005$; 4) $0,015$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки белые?	1) $2/3$; 2) $1/3$; 3) $2/21$; 4) $19/21$; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1=13, M_2=12, и M_3=17 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель не проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,172$; 4) $0,828$; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5 не проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1) 0,163; 2) 0,46; 3) 0,3; 4) 0,54; 5) другой ответ
7.	Вероятность появления события A по крайней мере один раз в 5-ти независимых испытаниях равна 0,9. Какова вероятность появления события A в одном испытании, если при каждом испытании она одинаковая?	1) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,37; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти дисперсию этой случайной величины.	1) $D(X) = 2{,}06$; 2) $D(X) = 0{,}9991$; 3) $D(X) = 1{,}94$; 4) $D(X) = 2{,}7$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит ни одного вызова.	1) e^{-6}; 2) e^{-3}; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.1. Найти вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед.	1) 0,5; 2) 1; 3) 0,4332; 4) 0,9332; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 7

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться – каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?	1)6; 2) 24; 3) 36; 4) 4; 5) другой ответ.
2.	В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Студент 1-го курса хочет купить 3 цветка для своей одногруппницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?	1)33; 2) 816; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.	1) 0,4; 2) 0,3; 3) 0,6; 4) 0,15; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки разного цвета?	1) $5/21$; 2) $10/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный не получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,03; 4) 0,97; 5) другой ответ.
6.	Застрахованный из задачи №5 не получил денежное вознаграждение. Найти вероятность того, что он относится к группе большого риска?	1) 0,016; 2) 0,46; 3) 0,19; 4) 0,81; 5) другой ответ
7.	Вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать не меньше 75 и не больше 90.	1)0,8882; 2) 0,4938; 3) 0,3944; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1)$M(X) = 2{,}06$; 2)$M(X) = 0{,}96$; 3) $M(X) = 2{,}4$; 4) $M(X) = 1{,}6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит два вызова.	1)$18e^{-6}$; 2)$18e^{-3}$; 3)$54e^{-3}$; 4)$54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% – выше 90 ден. ед. Найти математическое ожидание цены ценной бумаги.	1)80; 2) 98; 3) 81,2; 4) 83,45; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 8

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколькими способами можно покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски не ограничено, а каждую елку красим только в один цвет?	1) 10; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?	1) 306; 2) 153; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В сборнике билетов по биологии всего **25** билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.	1) $0,92$; 2) $0,08$; 3) $0,6$; 4) $0,15$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки одного цвета?	1) $5/21$; 2) $11/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер не от рака легких.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,66$; 4) $0,34$; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал менее 10 сигарет в день?	1) 1/11; 2) 10/11; 3) 3/17; 4) 4/17: 5) другой ответ
7.	Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?	1) 0,531; 2) 0,354; 3) 0,02; 4) 0,98; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.	1) $\sigma(X) = 2{,}06$; 2) $\sigma(X) = 0{,}98$; 3) $\sigma(X) = 0{,}96$; 4) $\sigma(X) = 1{,}6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит пять вызовов.	1) $18e^{-6}$; 2) $18e^{-3}$; 3) $64,8e^{-6}$; 4) $64,8e^{-3}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции не ниже 15,4 ден. ед.	1) 0,228; 2) 0,097; 3) 0,9772; 4) 0,0228; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 9

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных (буквы в слове не повторяются), можно образовать из букв слова *уравнение*?	1) 306; 2) 153; 3) 72; 4) 6; 5) другой ответ.
3.	Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинами известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вовочке достанется пазл с животным.	1) 0,92; 2) 0,08; 3) 0,6; 4) 0,15; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) 3/7; 2) 6/7; 3) 1/7; 4) 4/7; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,385; 4) 0,615; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки с оптическим прицелом.	1) 0,614: 2) 0,386; 3) 0,2; 4) 0,8; 5) другой ответ
7.	Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет равно 48.	1) 0,3683; 2) 0,4; 3) 0,054; 4) 0,07366; 5) другой ответ.
8.	Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0{,}8$; 2) $M(X) = 0{,}2$; 3) $M(X) = 0{,}64$; 4) $M(X) = 3{,}2$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.	1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции находится в пределах от 14,9 до 15,3 ден. ед.	1) 0,4332; 2) 0,6247; 3) 0,1915; 4) 0,2417; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 10

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 10; 5) другой ответ.
2.	Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова *перестановка* при условии, что слова начинаются с буквы *п* и оканчиваются буквой *а*?	1) $1/2\cdot 10!$; 2) $10!$; 3) $3\cdot 11!$; 4) $12!$; 5) другой ответ.
3.	В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Китая.	1) $2/5$; 2) $1/4$ 3) $7/20$; 4) $3/4$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 3 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) $48/91$; 2) $43/91$; 3) $24/91$; 4) $67/91$; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок не поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) $0,385$; 2) $0,615$; 3) $0,035$; 4) $0,349$; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 не поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки без оптического прицела.	1) 0,89; 2) 0,11; 3) 0,092; 4) 0,908; 5) другой ответ
7.	В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая.	1) 9; 2) 10; 3) 100; 4) 90; 5) другой ответ.
8.	Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0,45$; 2) $M(X) = 4,5$; 3) $M(X) = 0,5$; 4) $M(X) = 0,95$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты.	1) $0,5$; 2) $0,75$; 3) $0,25$; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.	1) (14,2; 15,8); 2) (14,9; 15,1); 3) (14,8; 15,2); 4) (14,4; 15,6); 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 11

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	2) 10; 2) 20; 3) 60; 4) 25; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует авторизации. Известно, что пароль состоит из четырех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 разных букв и 10 разных цифр?	3) 28350; 2) 453600; 3) 5130; 4) 675; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?	1) $1/60$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/120$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 3 банана, 2 киви и 5 апельсинов. Из вазы взяли 4 фрукта. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 1 банан, 1 киви и 2 апельсина.	1) $2/7$; 2) $1/14$; 3) $1/28$; 4) $1/112$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) 0,035; 2) 0,03; 3) 0,012; 4) 0,024; 5) другой ответ.
6.	Получивший денежное вознаграждение, застрахованный из задачи №5 относится к группе малого риска?	1) $1/3$; 2) $8/15$; 3) $3/10$; 4) $1/6$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене не будут проданы 5 пакетов.	2) 0,096; 2) 0,066; 3) 0,036; 4) 0,086; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	2) $M(X) = 500$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 400$; 4) $M(X) = 398$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $e^{-4/3}$; 4) $e^{-3/4}$; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40).	2) 0,09; 2) 0,01; 3) 0,099; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 12

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	2) 5; 2) 120; 3) 60; 4) 24; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует авторизации. Известно, что пароль состоит из трех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 различных букв и 10 различных цифр?	4) 810; 2) 165; 3) 64800; 4) 5400; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 5 до 1)?	1) $1/120$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/60$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 4 банана, 4 киви и 6 апельсинов. Из вазы взяли 5 фруктов. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 2 банана, 1 киви и 2 апельсина.	1) $0,001$; 2) $0,28$; 3) $0,012$; 4) $0,18$; 5) другой ответ.
5.	В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.	1) $0,1725$; 2) $0,8275$; 3) $0,1735$; 4) $0,8265$; 5) другой ответ.
6.	Приобретенное изделие из задания №5, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно было поставлено третьей фирмой.	1) $0,493$; 2) $0,507$; 3) $0,607$; 4) $0,393$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано менее 2 пакетов.	2) 0,664; 2) 0,564; 3) 0,436; 4) 0,456; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	2) $M(X) = 350$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 300$; 4) $M(X) = 400$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a = 35. Вероятность попадания X в интервал (20; 25) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (45; 50)?	1) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) среди ответов 1–4 правильного нет.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 13

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут потоляться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8?	2) 625; 2) 125; 3) 3125; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 7 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	2) 5040; 2) 1440; 3) 64800; 4) 2520; 5) другой ответ.
3.	Слово составлено из семи карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова «событие»?	1) $1/120$; 2) $1/5!$; 3) $1/6!$; 4) $1/7!$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся три юноши и одна девушка?	1) 0,01; 2) 0,162; 3) 0,142; 4) 0,568; 5) другой ответ.
5.	Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия.	1) 9%; 2) 4,8%; 3) 7,82%; 4) 92,36%; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, из задания №5 бракованное?	1) 0,0022; 2) 0,9998; 3) 0,0002; 4) 0,9978; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано более 2 пакетов.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,436; 4) 0,4562; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти дисперсию этой случайной величины.	3) $D(X) = 0,4$; 2) $D(X) = 3,6$; 3) $D(X) = 0,36$; 4) $D(X) = 0,09$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина *X* имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 45$. Вероятность попадания *X* в интервал (30; 35) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания *X* в интервал (55; 60).	4) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 14

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут поторяться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 0?	1) 500; 2) 125; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 7 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	1) 120; 2) 5040; 3) 720; 4) 840;5) другой ответ.
3.	Теща Кисы Воробьянинова зашила фамильные бриллианты в один из двенадцати одинаковых стульев. Два из них в последствии остались в Старгороде, а десять стульев отправились в Москву. Какова вероятность отыскать бриллианты в одном из двух стульев, оставшихся в Старгороде?	1) $1/2$; 2) $1/6$; 3) $1/12$; 4) $1/10$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся два юноша и две девушки?	1) 0,0119; 2) 0,9881; 3) 0,6265; 4) 0,3735; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер от рака легких.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,6; 4) 0,06; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал более 10 сигарет в день?	1) 0,022; 2) 0,824; 3) 0,176; 4) 0,9978; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из всех вопросов два и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,0625; 4) 0,9375; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при трех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0,4$; 2) $M(X) = 0,09$; 3) $M(X) = 0,3$; 4) $M(X) = 2,7$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $1-e^{-4/3}$; 4) $e^{-4/3}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X с параметрами $a = 173$ и $\sigma^2 = 36$, найти доли костюмов 4-го роста (176 – 182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	2) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 78,53%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 15

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе не поторяются) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 6, 0?	2) 500; 2) 96; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	2) 720; 2) 1440; 3) 240; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	В городе работают 20 офисов различных банков. Бабуля выбирает один из этих банков наугад и открывает в нем вклад на 100 000 рублей. Известно, что во время кризиса 6 банков разорились, и вкладчики этих банков потеряли все свои деньги. Какова вероятность того, что бабуля не потеряет свой вклад?	1) 0,7; 2) 0,3; 3) 0,0006; 4) 0,007; 5) другой ответ.
4.	При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.	1) 0,144; 2) 0,096; 3) 0,856; 4) 0,904; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1=13, M_2=12, и M_3=17 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,172; 4) 0,828; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5, проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1) 0,283; 2) 0,341; 3) 0,376; 4) 0,624; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из вех вопросов три и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,016; 4) 0,624; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X)$ = 2,06; 2) $M(X)$ = 1,94; 3) $M(X)$ = 0,9991; 4) $M(X)$ = 2,7; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит 4 вызова.	1) $\frac{2}{3}e^{-3}$; 2) $\frac{2}{3}e^{-6}$; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X с параметрами a = 173 и σ^2 = 36, найти доли костюмов 3-го роста (170 – 176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	2) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 80,85%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 16

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?	2) 680; 2) 4080; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	2) 24; 2) 720; 3) 144; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	За одну 12-часовую смену рабочий изготавливает на станке с числовым программным управлением 600 деталей. Из-за дефекта режущего инструмента на станке получено 9 бракованных деталей. В конце рабочего дня мастер цеха берет одну деталь наугад и проверяет ее. Какова вероятность, что ему попадется именно бракованная деталь?	1) 0,0017; 2) 0,985; 3) 0,005; 4) 0,015; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки белые?	1) $2/3$; 2) $1/3$; 3) $2/21$; 4) $19/21$; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1=13, M_2=12, и M_3=17 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель не проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,172; 4) 0,828; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5 не проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1) 0,163; 2) 0,46; 3) 0,3; 4) 0,54; 5) другой ответ
7.	Вероятность появления события A по крайней мере один раз в 5-ти независимых испытаниях равна 0,9. Какова вероятность появления события A в одном испытании, если при каждом испытании она одинаковая?	2) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,37; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти дисперсию этой случайной величины.	3) $D(X)$ = 2,06; 4) $D(X)$ = 0,9991; 3) $D(X)$ = 1,94; 4) $D(X)$ = 2,7; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит ни одного вызова.	1) e^{-6}; 2) e^{-3}; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.1. Найти вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед.	2) 0,5; 2) 1; 3) 0,4332; 4) 0,9332; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 17

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться – каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?	1)6; 2) 24; 3) 36; 4) 4; 5) другой ответ.
2.	В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Студент 1-го курса хочет купить 3 цветка для своей одногруппницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?	1)33; 2) 816; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.	1) 0,4; 2) 0,3; 3) 0,6; 4) 0,15; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки разного цвета?	1) $5/21$; 2) $10/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный не получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,03; 4) 0,97; 5) другой ответ.
6.	Застрахованный из задачи №5 не получил денежное вознаграждение. Найти вероятность того, что он относится к группе большого риска?	1) 0,016; 2) 0,46; 3) 0,19; 4) 0,81; 5) другой ответ
7.	Вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать не меньше 75 и не больше 90.	1)0,8882; 2) 0,4938; 3) 0,3944; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1)$M(X) = 2{,}06$; 2)$M(X) = 0{,}96$; 3) $M(X) = 2{,}4$; 4) $M(X) = 1{,}6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит два вызова.	1)$18e^{-6}$; 2)$18e^{-3}$; 3)$54e^{-3}$; 4)$54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% – выше 90 ден. ед. Найти математическое ожидание цены ценной бумаги.	1)80; 2) 98; 3) 81,2; 4) 83,45; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 18

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколькими способами можно покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски не ограничено, а каждую елку красим только в один цвет?	1) 10; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?	1) 306; 2) 153; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В сборнике билетов по биологии всего **25** билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.	1) $0,92$; 2) $0,08$; 3) $0,6$; 4) $0,15$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки одного цвета?	1) $5/21$; 2) $11/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер не от рака легких.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,66$; 4) $0,34$; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал менее 10 сигарет в день?	1) 1/11: 2) 10/11: 3) 3/17: 4) 14/17$ 5) другой ответ
7.	Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?	1) 0,531; 2) 0,354; 3) 0,02; 4) 0,98; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.	1) $\sigma(X) = 2,06$; 2) $\sigma (X) = 0,98$; 3) $\sigma (X) = 0,96$; 4) $\sigma (X) = 1,6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит пять вызовов.	1) $18e^{-6}$; 2) $18e^{-3}$; 3) $64,8e^{-6}$; 4) $64,8e^{-3}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции не ниже 15,4 ден. ед.	1) 0,228; 2) 0,097; 3) 0,9772; 4) 0,0228; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 19

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных (буквы в слове не повторяются), можно образовать из букв слова *уравнение*?	1) 306; 2) 153; 3) 72; 4) 6; 5) другой ответ.
3.	Родительский комитет закупил **30** пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них **12** с картинами известных художников и **18** с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вовочке достанется пазл с животным.	1) 0,92; 2) 0,08; 3) 0,6; 4) 0,15; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) $3/7$; 2) $6/7$; 3) $1/7$; 4) $4/7$; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,385; 4) 0,615; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки с оптическим прицелом.	1) 0,614; 2) 0,386; 3) 0,2; 4) 0,8; 5) другой ответ
7.	Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет равно 48.	1) 0,3683; 2) 0,4; 3) 0,054; 4) 0,07366; 5) другой ответ.
8.	Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0,8$; 2) $M(X) = 0,2$; 3) $M(X) = 0,64$; 4) $M(X) = 3,2$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.	1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции находится в пределах от 14,9 до 15,3 ден. ед.	1) 0,4332; 2) 0,6247; 3) 0,1915; 4) 0,2417; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 20

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 10; 5) другой ответ.
2.	Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова *перестановка* при условии, что слова начинаются с буквы *п* и оканчиваются буквой *а*?	1) $1/2\cdot 10!$; 2) $10!$; 3) $3\cdot 11!$; 4) $12!$; 5) другой ответ.
3.	В чемпионате по гимнастике участвуют ***20*** спортсменок: ***8*** из России, ***7*** из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Китая.	1) $2/5$; 2) $1/4$ 3) $7/20$; 4) $3/4$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 3 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) $48/91$; 2) $43/91$; 3) $24/91$; 4) $67/91$; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок не поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) $0,385$; 2) $0,615$; 3) $0,035$; 4) $0,349$; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 не поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки без оптического прицела.	1) 0,89; 2) 0,11; 3) 0,092; 4) 0,908; 5) другой ответ
7.	В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая.	1) 9; 2) 10; 3) 100; 4) 90; 5) другой ответ.
8.	Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0{,}45$; 2) $M(X) = 4{,}5$; 3) $M(X) = 0{,}5$; 4) $M(X) = 0{,}95$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты.	1) $0,5$; 2) $0,75$; 3) $0,25$; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.	1) (14,2; 15,8); 2) (14,9; 15,1); 3) (14,8; 15,2); 4) (14,4; 15,6); 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 21

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	3) 10; 2) 20; 3) 60; 4) 25; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует авторизации. Известно, что пароль состоит из четырех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 различных букв и 10 различных цифр?	5) 28350; 2) 453600; 3) 5130; 4) 675; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?	1) $1/60$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/120$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 3 банана, 2 киви и 5 апельсинов. Из вазы взяли 4 фрукта. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 1 банан, 1 киви и 2 апельсина.	1) $2/7$; 2) $1/14$; 3) $1/28$; 4) $1/112$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) $0,035$; 2) $0,03$; 3) $0,012$; 4) $0,024$; 5) другой ответ.
6.	Получивший денежное вознаграждение, застрахованный из задачи №5 относится к группе малого риска?	1) $1/3$; 2) $8/15$; 3) $3/10$; 4) $1/6$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене не будут проданы 5 пакетов.	1) 0,096; 2) 0,066; 3) 0,036; 4) 0,086; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 500$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 400$; 4) $M(X) = 398$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $e^{-4/3}$; 4) $e^{-3/4}$; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40).	1) 0,09; 2) 0,01; 3) 0,099; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 22

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8, из которых ни одна не повторяется?	1) 5; 2) 120; 3) 60; 4) 24; 5) другой ответ.
2.	Компьютерная программа требует авторизации. Известно, что пароль состоит из трех цифр и двух букв, ни цифры, ни буквы не повторяются. Сколько различных вариантов пароля можно составить из 10 различных букв и 10 различных цифр?	1) 810; 2) 165; 3) 64800; 4) 5400; 5) другой ответ.
3.	Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 5 до 1)?	1) $1/120$; 2) $1/30$; 3) $1/25$; 4) $1/60$; 5) другой ответ.
4.	В вазе 4 банана, 4 киви и 6 апельсинов. Из вазы взяли 5 фруктов. Вычислить вероятность того, что из вазы взяли 2 банана, 1 киви и 2 апельсина.	1) $0,001$; 2) $0,28$; 3) $0,012$; 4) $0,18$; 5) другой ответ.
5.	В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.	1) $0,1725$; 2) $0,8275$; 3) $0,1735$; 4) $0,8265$; 5) другой ответ.
6.	Приобретенное изделие из задания №5, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно было поставлено третьей фирмой.	1) $0,493$; 2) $0,507$; 3) $0,607$; 4) $0,393$; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано менее 2 пакетов.	1) 0,664; 2) 0,564; 3) 0,436; 4) 0,456; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 350$; 2) $M(X) = 450$; 3) $M(X) = 300$; 4) $M(X) = 400$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a = 35. Вероятность попадания X в интервал (20; 25) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (45; 50)?	1) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 23

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут поторяться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 8?	1) 625; 2) 125; 3) 3125; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 7 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	1) 5040; 2) 1440; 3) 64800; 4) 2520; 5) другой ответ.
3.	Слово составлено из семи карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова «событие»?	1) $1/120$; 2) $1/5!$; 3) $1/6!$; 4) $1/7!$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся три юноши и одна девушка?	1) $0,01$; 2) $0,162$; 3) $0,142$; 4) $0,568$; 5) другой ответ.
5.	Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия.	1) 9%; 2) $4,8\%$; 3) $7,82\%$; 4) $92,36\%$; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, из задания №5 бракованное?	1) 0,0022; 2) 0,9998; 3) 0,0002; 4) 0,9978; 5) другой ответ.
7.	В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано более 2 пакетов.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,436; 4) 0,4562; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при четырех сделанных покупках. Найти дисперсию этой случайной величины.	1) $D(X) = 0,4$; 2) $D(X) = 3,6$; 3) $D(X) = 0,36$; 4) $D(X) = 0,09$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 30 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{-2}$; 2) e^{-2}; 3) $e^{-1/2}$; 4) e^{-450}; 5) другой ответ.
10.	Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 45$. Вероятность попадания X в интервал (30; 35) равна 0,09. Чему равна вероятность попадания X в интервал (55; 60).	1) 0,099; 2) 0,01; 3) 0,09; 4) 0,081; 5) другой ответ

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 24

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе могут поторяться) можно записать с помощью цифр 1, 3, 4, 7, 0?	1)500; 2) 125; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 7 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	1) 120; 2) 5040; 3) 720; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	Теща Кисы Воробьянинова зашила фамильные бриллианты в один из двенадцати одинаковых стульев. Два из них в последствии остались в Старгороде, а десять стульев отправились в Москву. Какова вероятность отыскать бриллианты в одном из двух стульев, оставшихся в Старгороде?	1) $1/2$; 2) $1/6$; 3) $1/12$; 4) $1/10$; 5) другой ответ.
4.	Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются четыре билета, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся два юноша и две девушки?	1) 0,0119; 2) 0,9881; 3) 0,6265; 4) 0,3735; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер от рака легких.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,6; 4) 0,06; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал более 10 сигарет в день?	1) 0,0022; 2) 0,824; 3) 0,176; 4) 0,9978; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из всех вопросов два и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,2618; 3) 0,0625; 4) 0,9375; 5) другой ответ.
8.	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при трех сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0{,}4$; 2) $M(X) = 0{,}09$; 3) $M(X) = 0{,}3$; 4) $M(X) = 2{,}7$; 5) другой ответ.
9.	Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X,* распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не более 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней.	1) $1-e^{3/4}$; 2) e^{-300}; 3) $1-e^{-4/3}$; 4) $e^{-4/3}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X с параметрами $a = 173$ и $\sigma^2 = 36$, найти доли костюмов 4-го роста (176 – 182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	1) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 78,53%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 25

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколько различных четырехзначных чисел (цифры в числе не поторяются) можно записать с помощью цифр 1,3,4,6, 0?	1) 500; 2) 96; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы два определенных человека сидели рядом?	1) 720; 2) 1440; 3) 240; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	В городе работают 20 офисов различных банков. Бабуля выбирает один из этих банков наугад и открывает в нем вклад на 100 000 рублей. Известно, что во время кризиса 6 банков разорились, и вкладчики этих банков потеряли все свои деньги. Какова вероятность того, что бабуля не потеряет свой вклад?	1) 0,7; 2) 0,3; 3) 0,0006; 4) 0,007; 5) другой ответ.
4.	При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.	1) 0,144; 2) 0,096; 3) 0,856; 4) 0,904; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве M_1=13, M_2=12, и M_3=17 штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) 0,34; 2) 0,66; 3) 0,172; 4) 0,828; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5, проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1) 0,283; 2) 0,341; 3) 0,376; 4) 0,624; 5) другой ответ
7.	В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студент знает ответ. Преподаватель выбирает из вех вопросов три и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.	1) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,016; 4) 0,624; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X)$ = 2,06; 2) $M(X)$ = 1,94; 3) $M(X)$ = 0,9991; 4) $M(X)$ = 2,7; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит 4 вызова.	1) $\frac{2}{3}e^{-3}$; 2) $\frac{2}{3}e^{-6}$; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величинах X с параметрами a = 173 и σ^2 = 36, найти доли костюмов 3-го роста (170 – 176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.	1) 21,47%; 2) 19,15%; 3) 43,32%; 4) 80,85%; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 26

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?	1) 680; 2) 4080; 3) 625; 4) 120; 5) другой ответ.
2.	Сколько существует способов рассадить в ряд 6 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом?	1) 24; 2) 720; 3) 144; 4) 840; 5) другой ответ.
3.	За одну 12-часовую смену рабочий изготавливает на станке с числовым программным управлением 600 деталей. Из-за дефекта режущего инструмента на станке получено 9 бракованных деталей. В конце рабочего дня мастер цеха берет одну деталь наугад и проверяет ее. Какова вероятность, что ему попадется именно бракованная деталь?	1) $0,0017$; 2) $0,985$; 3) $0,005$; 4) $0,015$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки белые?	1) $2/3$; 2) $1/3$; 3) $2/21$; 4) $19/21$; 5) другой ответ.
5.	В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов соответственно в количестве $M_1=13$, $M_2=12$, и $M_3=17$ штук, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями соответственно 0,91, 0,82, и 0,77. Рабочий берет случайно один электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный электродвигатель не проработает безотказно до конца гарантийного срока.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,172$; 4) $0,828$; 5) другой ответ.
6.	Смонтированный электродвигатель из задачи №5 не проработал безотказно до конца гарантийного срока. Найти вероятность того, что он изготовлен на третьем заводе.	1)).163; 2) 0,46; 3) 0,3; 4) 0,54; 5) другой ответ
7.	Вероятность появления события A по крайней мере один раз в 5-ти независимых испытаниях равна 0,9. Какова вероятность появления события A в одном испытании, если при каждом испытании она одинаковая?	1) 0,7382; 2) 0,984; 3) 0,37; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X – числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти дисперсию этой случайной величины.	1) $D(X) = 2,06$; 2) $D(X) = 0,9991$; 3) $D(X) = 1,94$; 4) $D(X) = 2,7$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит ни одного вызова.	1) e^{-6}; 2) e^{-3}; 3) $54e^{-3}$; 4) $54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед.1. Найти вероятность того, что цена акции не выше 15,3 ден. ед.	1) 0,5; 2) 1; 3) 0,4332; 4) 0,9332; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 27

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться – каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?	1)6; 2) 24; 3) 36; 4) 4; 5) другой ответ.
2.	В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Студент 1-го курса хочет купить 3 цветка для своей девушки, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?	1)33; 2) 816; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.	1) $0,4$; 2) $0,3$; 3) $0,6$; 4) $0,15$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки разного цвета?	1) $5/21$; 2) $10/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный не получит денежное вознаграждение за период страхования.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,03$; 4) $0,97$; 5) другой ответ.
6.	Застрахованный из задачи №5 не получил денежное вознаграждение. Найти вероятность того, что он относится к группе большого риска?	1) 0,016; 2) 0,46; 3) 0,19; 4) 0,81; 5) другой ответ
7.	Вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать не меньше 75 и не больше 90.	1)0,8882; 2) 0,4938; 3) 0,3944; 4) 0,71; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1)$M(X) = 2{,}06$; 2)$M(X) = 0{,}96$; 3) $M(X) = 2{,}4$; 4) $M(X) = 1{,}6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит два вызова.	1)$18e^{-6}$; 2)$18e^{-3}$; 3)$54e^{-3}$; 4)$54e^{-6}$; 5) другой ответ.
10.	Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% – выше 90 ден. ед. Найти математическое ожидание цены ценной бумаги.	1)80; 2) 98; 3) 81,2; 4) 83,45; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 28

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Сколькими способами можно покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски не ограничено, а каждую елку красим только в один цвет?	1) 10; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?	1) 306; 2) 153; 3) 455; 4) 1271; 5) другой ответ.
3.	В сборнике билетов по биологии всего **25** билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.	1) $0,92$; 2) $0,08$; 3) $0,6$; 4) $0,15$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки одного цвета?	1) $5/21$; 2) $11/21$; 3) $1/7$; 4) $4/21$; 5) другой ответ.
5.	По статистике 70 % курильщиков выкуривают более 10 сигарет в день. Для них вероятность умереть от рака легких составляет 0,4, а для остальных курильщиков она равна 0,2. Какова вероятность того, что курильщик умер не от рака легких.	1) $0,17$; 2) $0,83$; 3) $0,66$; 4) $0,34$; 5) другой ответ.
6.	Какова вероятность того, что умерший из задачи №5 выкуривал менее 10 сигарет в день?	1) 1/11: 2) 10/11: 3) 3/17: 4) 14/17: 5) другой ответ
7.	Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятий не более двух в течение года прекратят свою деятельность?	1) 0,531; 2) 0,354; 3) 0,02; 4) 0,98; 5) другой ответ.
8.	В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.	1) $\sigma(X) = 2,06$; 2) $\sigma(X) = 0,98$; 3) $\sigma(X) = 0,96$; 4) $\sigma(X) = 1,6$; 5) другой ответ.
9.	Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит пять вызовов.	1) $18e^{-6}$; 2) $18e^{-3}$; 3) $64,8e^{-6}$; 4) $64,8e^{-3}$; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции не ниже 15,4 ден. ед.	1) 0,228; 2) 0,097; 3) 0,9772; 4) 0,0228; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»
Вариант 29

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 243; 5) другой ответ.
2.	Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных (буквы в слове не повторяются), можно образовать из букв слова *уравнение*?	1) 306; 2) 153; 3) 72; 4) 6; 5) другой ответ.
3.	Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинами известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вовочке достанется пазл с животным.	1) 0,92; 2) 0,08; 3) 0,6; 4) 0,15; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) $3/7$; 2) $6/7$; 3) $1/7$; 4) $4/7$; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) 0,17; 2) 0,83; 3) 0,385; 4) 0,615; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки с оптическим прицелом.	1) 0,614; 2) 0,386; 3) 0,2; 4) 0,8; 5) другой ответ
7.	Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет равно 48.	1) 0,3683; 2) 0,4; 3) 0,054; 4) 0,07366; 5) другой ответ.
8.	Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0{,}8$; 2) $M(X) = 0{,}2$; 3) $M(X) = 0{,}64$; 4) $M(X) = 3{,}2$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.	1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции находится в пределах от 14,9 до 15,3 ден. ед.	1) 0,4332; 2) 0,6247; 3) 0,1915; 4) 0,2417; 5) другой ответ.

ТЕСТ «Теория вероятностей»

Вариант 30

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Имеется набор из 5 ручек разных цветов. Сколькими способами можно выбрать 3 ручки для обводки чертежа?	1) 20; 2) 24; 3) 60; 4) 10; 5) другой ответ.
2.	Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова *перестановка* при условии, что слова начинаются с буквы *п* и оканчиваются буквой *а*?	1) $1/2\cdot 10!$; 2) $10!$; 3) $3\cdot 11!$; 4) $12!$; 5) другой ответ.
3.	В чемпионате по гимнастике участвуют ***20*** спортсменок: ***8*** из России, ***7*** из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Китая.	1) $2/5$; 2) $1/4$ 3) $7/20$; 4) $3/4$; 5) другой ответ.
4.	В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают сразу 3 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки красные?	1) $48/91$; 2) $43/91$; 3) $24/91$; 4) $67/91$; 5) другой ответ.
5.	В пирамиде стоят 11 винтовок, их них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 87/100, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью 52/100. Найти вероятность того, что стрелок не поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.	1) $0,385$; 2) $0,615$; 3) $0,035$; 4) $0,349$; 5) другой ответ.
6.	Стрелок из задания №5 не поразил мишень. Найти вероятность того, что он стрелял из винтовки без оптического прицела.	1) 0,89; 2) 0,11; 3) 0,092; 4) 0,908; 5) другой ответ
7.	В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая.	1) 9; 2) 10; 3) 100; 4) 90; 5) другой ответ.
8.	Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание этой случайной величины.	1) $M(X) = 0,45$; 2) $M(X) = 4,5$; 3) $M(X) = 0,5$; 4) $M(X) = 0,95$; 5) другой ответ.
9.	Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше минуты.	1) $0,5$; 2) $0,75$; 3) $0,25$; 4) 1; 5) другой ответ.
10.	Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.	1) (14,2; 15,8); 2) (14,9; 15,1); 3) (14,8; 15,2); 4) (14,4; 15,6); 5) другой ответ.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1) Одна комбинация чисел отличается от другой либо цифрой, либо позицией в числе. Так как из пяти цифр, представленных для составления чисел нет нуля, и по условию ни одна цифра не повторяется, то количество трехзначных чисел, равно числу размещений из пяти по три, т.е.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \Rightarrow A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 .$$

Ответ: 3.

2) Поскольку ни цифры, ни буквы в пароле не повторяются и мы имеем 10 неповторяющихся цифр и 10 неповторяющихся букв, то количество комбинаций составления пароля будем искать из следующих соображений:

событие A ={выбор двух букв из десяти данных для составления пароля}. Количество различных способов наступления данного события: $n_1 = A_{10}^2$ (количество размещений без повторений двух элементов из десяти);

событие B ={выбор четырех цифр из десяти данных для составления пароля}. Количество различных способов наступления данного события: $n_2 = A_{10}^4$ (количество размещений без повторений двух элементов из десяти).

В данном случае мы имеем дело с произведением событий, тогда количество различных вариантов пароля будет:

$$n = n_1 \cdot n_2 = A_{10}^2 \cdot A_{10}^4 = \frac{10!}{8!} \cdot \frac{10!}{6!} = 9 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 453600 .$$

Ответ: 2.

3) Пусть событие A={книги стоят слева направо в порядке нумерации томов}. Тогда вероятность наступления события A равно отношению числа благоприятных исходов к числу все возможных исходов:

$$p(A) = \frac{k}{n} .$$

Количество все возможных исходов, n, равно числу перестановок всех книг, т.е. $n = 5!$. Количество благоприятных исходов, в данном случае, равно $k = 1$, т.к. существует только один способ расстановки книг так, чтобы расстановка удовлетворяла условию задачи. Значит, $p(A) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

Ответ: 4.

4) Пусть событие A={из вазы взяли 1 банан, 1 киви, 2 апельсина}. Тогда вероятность наступления события A равно отношению числа благоприятных исходов к числу все возможных исходов:

$$p(A) = \frac{k}{n} .$$

Подсчитаем количество все возможных исходов n. Всего в вазе $3 + 2 + 5 = 10$ фруктов, так как неважно в каком порядке будут извлечены фрукты из вазы, то количество способов вытащить 4 фрукта из 10 имеющихся будет равно:

$$n = C_m^k = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} \Rightarrow n = C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$ (количество сочетаний 4 элементов из 10).

Подсчитаем число m благоприятных исходов:

$k_1 = C_3^1 = \frac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ – количество способов выбрать 1 банан из 3 бананов, находящихся в вазе (количество сочетаний 1 элемента из 3).

$k_2 = C_2^1 = \dfrac{2!}{(2-1)!\cdot 1!} = \dfrac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$ – количество способов выбрать 1 киви из 2 киви, находящихся в вазе (количество сочетаний 1 элемента из 2).

$k_3 = C_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!\cdot 2!} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = 10$ – количество способов выбрать 2 апельсина из 5 апельсинов, находящихся в вазе (количество сочетаний 1 элемента из 3).

Так как в данном случае мы имеем дело с произведением событий, то окончательно количество благоприятных исходов будет равно: $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$.

Значит, вероятность наступления события A равна: $p(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{60}{210} = \dfrac{2}{7}$.

Ответ: 1.

5) Пусть событие A = {застрахованный получит денежное вознаграждение}. Данное событие может произойти совместно с одной из гипотез:

H_1={застрахованный находится в I классе риска};

H_2={застрахованный находится в II классе риска};

H_3={застрахованный находится в III классе риска}.

Вероятности наступления гипотез согласно условию:

$P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_3) = 0{,}2$.

Пусть события:

A/H_1 = {застрахованный, получивший денежное вознаграждение, находится в I классе риска};

A/H_2 = {застрахованный, получивший денежное вознаграждение, находится в II классе риска};

A/H_3 = {застрахованный, получивший денежное вознаграждение, находится в III классе риска}.

Из условия: $P(A/H_1) = 0{,}01$; $P(A/H_2) = 0{,}03$; $P(A/H_3) = 0{,}08$

Используя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P(A/H_i) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}5\cdot 0{,}01 + 0{,}3\cdot 0{,}03 + 0{,}2\cdot 0{,}08 = 0{,}005 + 0{,}009 + 0{,}016 = 0{,}03$$

Ответ: 2.

6) Пусть событие A = {застрахованный получит денежное вознаграждение}. Найдем вероятность наступления гипотезы H_1 (см. №5) при условии, что событие A уже произошло, используя формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}01}{0{,}03} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: 5.

7) Вероятность того, что не будут проданы 5 пакетов акций по первоначально заявленной цене равна вероятности того, что будут проданы9 – 5 = 4 пакетов акций. Тогда:

p = 0,2 – вероятность продажи одного пакета акций по первоначально заявленной цене;

$q = 1 - p = 0{,}8$ – вероятность не продажи одного пакета акций по первоначально заявленной цене;

$n = 9$ – количество всех пакетов;

$k = 4$ – количество проданных пакетов.

Значит, вероятность $P_n(k)$ того, что из n пакетов акций будет продано по первоначально заявленной цене k пакетов, определяется с помощью формулы Бернулли:

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. В нашем случае:

$$P_9(4)=C_9^4\cdot(0,2)^4\cdot(0,8)^{9-4}=\frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!}\cdot\frac{2^4}{10^4}\cdot\frac{8^5}{10^5}=0,066.$$

Ответ: 4.

8) Пусть случайная величина X (СВX) – размер выигрыша при 5 сделанных покупках.

$p=\frac{1}{10}=0,1$ – вероятность выигрыша при 1 сделанной покупке, $q=1-p=0,9$ – вероятность проигрыша при 1 сделанной покупке.При 5 сделанных покупках возможны следующие результаты:

1) ни одно выигрыша и вероятность такого события равна:

$$P_5(0)=C_5^0\cdot p^0\cdot q^5=\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot(0,1)^0\cdot(0,9)^5=[0!=1]=(0,9)^5=0,59049;$$

2) 1 выигрыш и вероятность такого события равна:

$$P_5(1)=C_5^1\cdot p^1\cdot q^4=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot(0,1)^1\cdot(0,9)^4=5\cdot 0,1\cdot(0,9)^4=0,32805;$$

3) 2 выигрыша и вероятность такого события равна:

$$P_5(2)=C_5^2\cdot p^2\cdot q^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot(0,1)^2\cdot(0,9)^3=10\cdot(0,1)^2\cdot(0,9)^3=0,0729;$$

4) 3 выигрыша и вероятность такого события равна:

$$P_5(3)=C_5^3\cdot p^3\cdot q^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot(0,1)^3\cdot(0,9)^2=10\cdot(0,1)^3\cdot(0,9)^2=0,0081;$$

5) 4 выигрыша и вероятность такого события равна:

$$P_5(4)=C_5^4\cdot p^4\cdot q^1=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot(0,1)^4\cdot(0,9)^1=5\cdot(0,1)^4\cdot(0,9)^1=0,00045;$$

6) 5 выигрышей и вероятность такого события равна:

$$P_5(5)=C_5^5\cdot p^5\cdot q^0=\frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot(0,1)^5\cdot(0,9)^0=(0,1)^5=0,00001;$$

Получаем закон распределения в виде следующей таблицы:

x_i	0	1000	2000	3000	4000	5000
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Находим математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i\cdot p_i=0\cdot 0,59049+1000\cdot 0,32805+2000\cdot 0,0729+3000\cdot 0,0081+$$

$$+4000\cdot 0,00045+5000\cdot 0,00001=500.$$

Ответ: 1.

9) Время ремонта телевизора подчиняется показательному закону распределения. Напомним, что показательное распределение имеет плотность распределения:

$$p(x)=\begin{cases}\alpha\cdot e^{-\alpha x},\ x>0,\\ 0,\ x\le 0.\end{cases}$$

α – параметр распределения, причем математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{\alpha}$. Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x},\ x>0,\\ 0,\ x\le 0.\end{cases}$$

В условии задачи дано среднее время ремонта телевизора равное 15 дней, т.е. задано математическое ожидание, тогда $M(x)=15\Rightarrow\frac{1}{\alpha}=15\Rightarrow\alpha=\frac{1}{15}$. Тогда вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней будет равна:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(0 \leq X < 20) = 1 - \left(F(20) - F(0)\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 20} - 1 + e^{-\frac{1}{15}\cdot 0}\right) = e^{-\frac{1}{15}\cdot 20} = e^{-4/3}$$

Ответ: 3.

10) Известно, что для нормального закона распределения верно равенство:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В нашем случае $a = 25$, тогда

$$P(10 \leq X \leq 15) = \Phi\left(\frac{15-25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-25}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sigma}\right) = \left[\Phi(-x) = -\Phi(x)\right] =$$

$$= -\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) = 0,09$$

$$P(35 \leq X \leq 40) = \Phi\left(\frac{40-25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{35-25}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right).$$

Очевидно, что вероятность попадания СВX в интервал (10; 15) равна вероятности попадания в интервал (35; 40), тогда $P(35 \leq X \leq 40) = 0,09$.

Ответ: 5.

ОТВЕТЫ

Вариант	Задания									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	3	2	4	1	2	4	2	1	3	1
2	2	3	1	4	1	2	3	4	2	3
3	1	2	4	3	4	1	2	3	1	3
4	1	3	3	4	1	2	4	3	3	1
5	2	3	1	2	4	3	2	1	4	2
6	2	3	4	3	1	4	3	2	1	4
7	1	4	3	2	4	3	1	4	1	2
8	4	2	1	2	3	1	4	2	3	4
9	1	3	3	1	4	2	3	1	3	2
10	4	1	2	3	1	4	2	2	1	4
11	3	2	4	1	2	4	2	1	3	1
12	2	3	1	4	1	2	3	4	2	3
13	1	2	4	3	4	1	2	3	1	3
14	1	3	3	4	1	2	4	3	3	1
15	2	3	1	2	4	3	2	1	4	2
16	2	3	4	3	1	4	3	2	1	4
17	1	4	3	2	4	3	1	4	1	2
18	4	2	1	2	3	1	4	2	3	4
19	1	3	3	1	4	2	3	1	3	2
20	4	1	2	3	1	4	2	2	1	4
21	3	2	4	1	2	4	2	1	3	1
22	2	3	1	4	1	2	3	4	2	3
23	1	2	4	3	4	1	2	3	1	3
24	1	3	3	4	1	2	4	3	3	1
25	2	3	1	2	4	3	2	1	4	2
26	2	3	4	3	1	4	3	2	1	4
27	1	4	3	2	4	3	1	4	1	2
28	4	2	1	2	3	1	4	2	3	4
29	1	3	3	1	4	2	3	1	3	2
30	4	1	2	3	1	4	2	2	1	4

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Правила выбора номера варианта

Вариант задания совпадает с двумя последними цифрами шифра зачетной книжки. Если номер шифра больше тридцати, следует от него отнимать тридцать до тех пор, пока не получится число, меньшее или равное тридцати. Это и будет номер варианта. Например, шифр содержит две последние цифры 76, номер варианта будет 76-30-30=16. Шестнадцатый вариант задания содержит задачи с номерами: 16, 46, 76, 106, 136, 166, 196. Если шифр варианта 00, то студент выполняет 30 вариант.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что при пожаре сработает первое, второе и третье устройства соответственно равны 0,9; 0,7; 0,85. Какова вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы одно устройство.

2. Для подготовки к экзамену студент должен изучить 50 теоретических вопросов и научиться решать 30 типов задач. Студент, идя на экзамен, выучил 40 теоретических вопросов и научился решать 25 типов задач. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена достаточно ответить на любые два задания из билета, содержащего два теоретических вопроса и задачу.

1. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что при пожаре сработает первое, второе и третье устройства соответственно равны 0,9; 0,7; 0,85. Какова вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы одно устройство.

2. Для подготовки к экзамену студент должен изучить 50 теоретических вопросов и научиться решать 30 типов задач. Студент, идя на экзамен, выучил 40 теоретических вопросов и научился решать 25 типов задач. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена достаточно ответить на любые два задания из билета, содержащего два теоретических вопроса и задачу.

3. Детали проходят четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой, второй, третьей и четвертой операциях соответственно равны 0,005; 0,01; 0,015; 0,02. Найти вероятность того, что после четырех операций будет получена стандартная деталь.

4. У сборщика 10 деталей, из них первого сорта 6, второго – 4. Какова вероятность того, что из 5 одновременно взятых деталей 3 окажутся первого сорта и 2 – второго сорта?

5. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности выхода из строя за время T первого, второго, третьего блоков соответственно равны 0,1; 0,05; 0,01. Каждый блок необходим для работы прибора в целом. Какова вероятность того, что за время T прибор выйдет из строя?

6. В ящике 15 деталей, среди которых 12 окрашенных. Сборщик случайным образом извлекает 5 деталей. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей 3 будут окрашенными?

7. В мастерской работают два мотора независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый мотор не потребует внимания мастера равно 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены только один мотор потребует внимания мастера.

8. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первосортным, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 80% небракованной продукции удовлетворяют требованиям первого сорта.

9. Устройство содержит три независимо работающих блока. Вероятности отказов блоков соответственно равны 0,15; 0,2; 0,1. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один из блоков.

10. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора равна 0,01. Для второго и третьего исследователей эти вероятности равны 0,02 и 0,015. Найти вероятность того, что ошибка будет допущена при измерении не более, чем одним исследователем.

11. В контейнере 17 изделий, из них 10 изделий первого сорта, 4 изделия – 2–ого сорта и 3 изделия – 3–ого сорта. Рабочий случайным образом берет 6 изделий. Какова вероятность того, что среди взятых изделий первого сорта окажется 3 изделия, второго – 2 изделия, третьего – 1 изделие?

12. В течение года три фирмы имеют возможность обанкротиться независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,02; 0,05; 0,04. Какова вероятность того, что в конце года все фирмы будут функционировать?

13. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по четырем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 80% – по второму, 75% – по третьему и 95% – по четвертому. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст сессию?

14. Устройство состоит из четырех элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Какова вероятность того, что включенными будут неизношенные элементы?

15. В электрическую цепь включено последовательно три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

16. Из партии для контроля отбирают 3 изделия. Известно, что в партии содержится 20 изделий, из которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди отобранных все изделия годные.

17. На фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование.

Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет высшее или среднее образование или то и другое?

18. В ремонтную мастерскую поступило 8 телевизоров, из них 5 нуждается в общей регулировке. Мастер случайным образом берет для ремонта четыре телевизора. Какова вероятность того, что из выбранных телевизоров 3 нуждаются в общей регулировке?

19. Из группы туристов, отправляющихся за границу, 60% владеют английским языком, 40% – французским и 10% – обоими языками. Найти вероятность того, что наугад взятый турист будет нуждаться в переводчике.

20. В читальном зале 10 учебников по теории вероятности, из которых 4 в твердом переплете. Библиотекарь берет один за другим два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

21. Вероятность того, что студент выполнит без ошибок лабораторную работу по физике, равна 0,7, а по химии – 0,8. Какова вероятность того, что он выполнит без ошибок: а) обе лабораторные работы; б) только одну из них; в) хотя бы одну лабораторную работу?

22. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

23. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

24. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

25. Для студента второго курса вероятность решить правильно задачу № 1 из типового расчета равна 0,8, а задачу № 2 – 0,7. Какова вероятность того, что: а) студент правильно решит обе задачи; б) решит неправильно хотя бы одну из задач; в) решит верно только одну из задач?

26. Две фотомодели снимаются для журнала мод, первая – с вероятностью 0,9, вторая – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что в следующем номере журнала появятся снимки: а) обеих девушек; б) только первой; в) хотя бы одной из них?

27. Вероятность того, что наугад выбранный компьютер работает со сбоем, равна 0,2. Оператор включил два компьютера. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них будет работать без сбоев; б) оба компьютера будут исправны.

28. Два скрипача участвуют в конкурсе. Вероятность стать лауреатом конкурса для первого музыканта равна 0,7, для второго – 0,6. Какова вероятность того, что: а) хотя бы один из них станет лауреатом; б) лауреатами станут оба скрипача?

29. Автомеханик находит неисправность генератора автомобиля с вероятностью 0,8, карбюратора – 0,9. Какова вероятность того, что при очередной поломке автомобиля: а) он обнаружит хотя бы одну из поломок; б) не обнаружит неисправностей генератора и карбюратора?

30. Два баскетболиста делают по одному броску мячом по корзине. Для первого спортсмена вероятность попадания равна 0,7, для второго – 0,9. Какова вероятность того, что в корзину попадут: а) оба игрока; б) хотя бы один из них; в) попадет только первый спортсмен?

31. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

32. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

33. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

34. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M. эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

35. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 % и третьего – 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % – со второго и 50 % – с третьего?

36. У стоматолога три вида пломбирующего материала: цемент (50 %), амальгама (30 %) и пластмасса (20 %). Условия лечения таковы, что вероятность выпадения пломбы, сделанной из цемента, в течение первого года после лечения равна 0,5, пломбы из амальгамы – 0,6, из пластмассы – 0,4. У пациента пломба выпала через неделю. Из какого материала вероятнее всего она была сделана, если врач взял тот пломбирующий материал, что оказался под рукой?

37. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим осуществляется в 80 % всего времени полета, режим перегрузки – в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Найти вероятность отказа прибора за время полета.

38. Для участия в математической олимпиаде среди студентов университета из группы № 1 выбрано 4 студента, из группы № 2 – 6 и из группы № 3 – 5. Вероятность того, что студент попадет в команду факультета, для этих групп соответственно равна 0,9, 0,8 и 0,5. Наугад выбранный студент в итоге попал в команду. В какой из групп вероятнее всего он учится?

39. На склад поступают диваны с трех мебельных фабрик. Первая и третья фабрики изготавливают одинаковое количество продукции, а вторая – вдвое больше. Вероятность для первой, второй и третьей фабрики сделать бракованный диван равна 0,15, 0,05 и 0,1 соответственно. Какова вероятность того, что диван, купленный наудачу, качественный?

40. Экзаменационные работы по математике с вероятностью 0,2, 0,3 и 0,5 попадают на проверку к одному из трех экзаменаторов, каждый из которых может пропустить (не заметить) ошибку студента с вероятностью 0,01, 0, 02 и 0,015 соответственно. Наугад выбранная работа (из числа проверенных) оказалась правильно аттестованной. Какова вероятность, что эту работу проверял третий преподаватель?

41. С первого станка на сборку поступает 30%, со второго – 40%, с третьего – 30% общего количества деталей. Среди деталей, изготовленных на первом станке, имеется 2% брака, на втором – 3%, на третьем – 1% брака. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь стандартная.

42. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 55% общего количества изделий, второй – 45%. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9; а вторым – 0,85. Стандартное изделие при проверке признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

43. Партия электролампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% – вторым, на 40% – третьим. Вероятности выпуска брака первым, вторым и третьим заводом соответственно равны 0,01; 0,02; 0,05. Найти вероятность того, что случайно взятая лампочка окажется бракованной.

44. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Объем продукции первого завода в четыре раза больше объема продукции второго. Вероятность брака на первом заводе 0,05; на втором – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что деталь изготовлена первым заводом?

45. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

46. В цехе работает 15 станков. Из них 10 станков марки A, 3 – марки B и 2 – марки C. Вероятности выпуска стандартной детали на этих станках соответственно равны 0,85; 0,8; 0,9. При проверке деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она выпущена на станке марки C.

47. Среди студентов факультета – 35% составляют первокурсники, 30% студентов учатся на втором курсе, на 3–м и 4–м курсах их соответственно 20% и 15%. Среди студентов первого курса сдали сессию на отлично 3%, среди второкурсников – 4,5%, среди третьекурсников – 7%, а среди студентов 4 курса – 10%. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он учится на третьем курсе?

48. На сборку поступают детали с 2–х автоматов. Первый автомат дает в среднем 2% брака, второй – 1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 5000 деталей, со второго – 3000 деталей.

49. В двух ящиках имеются однотипные детали. В первом ящике 20 деталей, из них две бракованные, во втором – 30, из них 5 бракованных. Наугад взятая деталь из случайно выбранного ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она взята из первого ящика.

50. Аппаратура в 80% случаях работает в нормальном режиме и в 20% – в аварийном. Вероятность сбоя в нормальном режиме равна 0,05; в аварийном – 0,5. Найти вероятность сбоя аппаратуры.

51. На наблюдательной станции установлены три радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели первым локатором равна 0,86; вторым – 0,7; третьим – 0,9. Оператор случайным образом включает один из локаторов и обнаруживает цель. Какова вероятность того, что был включен второй локатор?

52. Вероятность, что выпущенная деталь окажется годной, равна 0,96. Деталь подвергается упрощенной схеме контроля, которая для годных деталей дает положительный результат с вероятностью 0,95, а для деталей с отклонениями – с вероятностью 0,08. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, является годным?

53. Производится три независимых выстрела по самолету. Вероятность попадания в самолет при каждом выстреле равна 0,3. Самолет сбивается при одном попадании с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – 0,5; при трех – 0,9. В результате трех выстрелов самолет сбит. Какова вероятность того, что было два попадания?

54. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,25; 0,25; 0,5. Вероятности того, что радиолампа проработает гарантийный срок для первой, второй и третьей партий соответственно равны 0,9; 0,8; 0,85. Найти вероятность того, что наугад взятая электролампа выдержит гарантийный срок.

55. В торговую сеть поступают однотипные изделия, выпущенные тремя фабриками. Первая фабрика выпускает 30% общего количества изделий, вторая – 50%, третья – 20%. Продукция первой фабрики содержит 0,5% брака, второй – 2%, третьей – 1%. Какова вероятность того, что купленное изделие не будет бракованным?

56. Деталь производится одним из трех автоматов. Производительность первого автомата в два раза больше производительности второго автомата, а производительность третьего автомата в полтора раза больше производительности второго автомата. Брак первого, второго и третьего автоматов составляет соответственно 1%, 2%. 4%. Какова вероятность выпуска стандартной детали?

57. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40% общего количества приборов. Вероятности выхода из строя прибора в течение гарантийного срока, собранного из высококачественных деталей, равна 0,03; собранного из деталей обычного качества – 0,1. Прибор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что прибор собирался из обычных деталей?

58. На трех автоматических линиях изготавливаются однотипные детали. Вследствие разладки станков возможен выпуск бракованной продукции первой линией с вероятностью 0,01; второй – 0,015; третьей –0,02. Первая линия выпускает 30% общего количества деталей, вторая –20%, третья – 50%. Найти вероятность выпуска брака.

59. Партия микросхем содержит 10% брака. Проверка микросхем такова, что с вероятностью 0,98 обнаруживается дефект (если он есть) и с вероятностью 0,03 стандартная микросхема признается бракованной. Какова вероятность того, что на самом деле микросхема стандартна?

60. Две из трех независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья лампы, если вероятности отказа первой, второй и третьей ламп соответственно равны 0,1; 0,3; 0,4.

61. В телевизионной студии 4 камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее двух камер.

62. Рабочий обслуживает 8 однотипных станков. Вероятность того, что в течение времени T станок потребует внимания рабочего, равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение времени T не менее 7 станков потребуют внимания рабочего.

63. В течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 5 % телевизоров. Какова вероятность того, что в партии из 100 телевизоров выдержат гарантийный срок не менее 60 телевизоров.

64. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,98. Какова вероятность того, что из 100 больных, подвергшихся новому лечению, выздоровевших будет не менее 95.

65. Завод отправил на базу 5000 лампочек. Вероятность повреждения лампочки при перевозке равна 0,0002. Найти вероятность того, что при перевозке поврежденными окажутся 3 лампочки.

66. Вероятность того, что прибор не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 приборов более одного не выдержат испытание.

67. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,2. Какова вероятность того, что сообщение из 6 символов содержит не более одного искаженного символа.

68. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение часа равна 0,0005. Какова вероятность того, что в течение часа нить оборвется на 3 веретенах.

69. В комнате 5 электрических лампочек, каждая из которых перегорает в течение года с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее двух электролампочек.

70. Вероятность сбоя в АТС при каждом вызове равна 0,0002. Определить вероятность того, что при 5000 вызовов произойдет не более двух сбоев.

71. По данным отдела технического контроля на 100 металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из семи случайно взятых брусков не более двух окажутся с дефектом?

72. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Вероятность звонка абонента в течение часа равна 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа поступят звонки не более, чем от трех абонентов?

73. В 30% случаев страховая компания выплачивает по договору страховку. Найти вероятность того, что по истечении срока 10 договоров компания уплатит страховку в трех случаях.

74. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены каждого узла равна 0,8. Причем работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Найти вероятность того, что в течение смены прибор выйдет из строя.

75. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская контора предлагает 100 акций этой компании. Какова вероятность того, что будет продано не менее 85 акций?

76. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более двух изделий?

77. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,15. Какова вероятность того, что из 10 приборов при испытании откажут не более 2 из них?

78. Агрегат состоит из 21 блока. Вероятность того, что за время T произвольный блок испытывает лишь допустимые деформации, равна 0,8. Найти вероятность того, что за время T испытывают такие деформации от 18 до 20 блоков.

79. На склад поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 наудачу взятых изделий, не менее 80 окажутся высшего сорта.

80. При установившемся технологическом процессе 70% всего числа изделий выпускается высшего сорта. Отдел технического контроля испытывает 200 изделий. Найти вероятность того, что изделий высшего сорта окажется в пределах от 140 до 180.

81. Инженерное сооружение состоит из семи узлов, вероятность разрушения каждого из которых 0,2. Сооружение считается разрушенным, если разрушено не менее трех узлов. Какова вероятность разрушения сооружения?

82. Книга из 500 страниц имеет 40 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более одной опечатки?

83. В магазин вошло десять покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя равна 0,3.

84. Среди 100 изготавливаемых микросхем в среднем одна бракованная. Найти вероятность того, что в партии из 1000 микросхем будет не более двух бракованных.

85. В цехе 80 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 60 до 70 станков?

86. При массовом производстве шестерен вероятность брака 0,001. Какова вероятность того, что из 500 шестерен не более трех окажутся бракованными?

87. В ходе аудиторской проверки компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Найти вероятность того, что он обнаружит не более одного счета с ошибкой, если ошибки содержат в среднем 3% счетов.

88. Сборник содержит 400 задач с ответами. В каждом ответе вероятность ошибки 0,01. Какова вероятность того, что в сборнике не более двух задач с ошибочными ответами?

89. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что месячный план выполняет не менее шести предприятий.

90. При передаче текстовой информации слова кодируются в символы. Вероятность искажения каждого символа при передаче равна 0,009. При искажении двух и более символов слово не поддается дешифровке. Найти вероятность того, что слово, содержащее 10 символов, будет принято правильно.

В задачах 91-120 требуется для данной СВ X 1) составить закон распределения СВ, 2) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, 3) найти функцию распределения $F(x)$.

91. В партии из шести изделий имеются два бракованных. Наудачу взято три изделия. СВ X – количество стандартных изделий среди трех взятых изделий.

92. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ X – количество заготовок, оставшихся после изготовления первой стандартной детали.

93. Прибор состоит из трех узлов. Вероятности выхода узлов из строя в течение времени T соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2. СВ X – число отказавших узлов в течение времени T.

94. Вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,2. СВ X – число телевизоров не выдержавших гарантийный срок из четырех приобретенных телевизоров.

95. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. СВ X – число израсходованных патронов.

96. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятности попадания в цель при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

97. В партии 10% деталей нестандартных. Наудачу взяты четыре детали. СВ X – число нестандартных деталей из 4 взятых.

98. Сигнальное устройство состоит из трех независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,2. СВ X – число отказавших элементов.

99. В партии из 10 изделий содержится три бракованных. Наудачу отобраны два изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

100. Вероятность изготовления стандартного изделия при установившемся технологическом процессе постоянна и равна 0,9. Для проверки качества изделия берутся и проверяются одно за другим 4 изделия. Если обнаруживается бракованное изделие, то бракуют всю партию. СВ X – число изделий, проверяемых ОТК из каждой партии.

101. Установлены три независимо работающих сигнализатора, которые срабатывают при пожаре с вероятностями 0,8; 0,7; 0,9. СВ X – количество сигнализаторов, сработавших при пожаре.

102. Баскетболист делает три броска в кольцо. Вероятности попадания в кольцо при первом, втором и третьем броске соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7. СВ X – количество попаданий в кольцо.

103. Стрелок делает три выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна 0,16. СВ X – число попаданий.

104. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности попадания в мишень для первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,5; 0,6; 0,6. СВ X – количество попаданий в мишень.

105. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностями 0,1; 0,05; 0,15. СВ X – количество блоков, вышедших из строя за время T.

106. В партии из 6 изделий – 3 бракованных. Случайным образом взяты 3 изделия из партии. СВ X – количество бракованных изделий среди трех взятых.

107. Устройство состоит из трех блоков, которые выходят из строя за время T с вероятностью 0,1. СВ X – количество блоков, которые вышли из строя за время T.

108. В партии деталей – 5 % брака. Наудачу из партии взято 3 детали. СВ X – количество бракованных деталей из взятых.

109. Монету подбрасывают 5 раз. СВ X – количество появлений герба.

110. В партии из 5 изделий одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и проверяют. СВ X – количество проверенных изделий.

111. Вероятность приема каждого из 4 сигналов равна 0,6. СВ X – число принятых сигналов.

112. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение. СВ X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

113. На участке имеется 5 однотипных станков, работающих независимо друг от друга. Коэффициент использования для каждого станка равен 0,8. СВ X – число работающих станков.

114. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,6. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент, чтобы взять нужную ему книгу.

115. Два стрелка делают независимо друг от друга по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6; для второго – 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

116. Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, выбраны случайно 3 изделия. СВ X – число бракованных изделий среди выбранных.

117. Батарея состоит из 4 орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для 1, 2, 3 и 4 орудий соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,75. СВ X – количество попаданий при одном залпе батареи.

118. Срок службы шестерен коробки передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятности отказа каждого фактора соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. СВ X – число отказавших факторов в одном испытании.

119. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что в течение часа 1, 2, 3 и 4 станки потребуют внимания рабочего соответственно равны 0,2; 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – число станков, потребовавших внимания рабочего.

120. В пятиблочном радиоприемнике (все блоки различные) перегорел один блок. Для устранения неисправности наудачу взятый блок заменяется исправным блоком, после чего проверяется работа приемника. СВ X – число замененных блоков.

В задачах 121 – 150 дана плотность распределения вероятности *p(x)*. Требуется: 1) определить значение параметра *a*; 2) найти функцию распределения *F(x)*, 3) найти математическое ожидание *M(X)* и дисперсию *D(X)*, 4) построить графики *p(x)* и *F(x)*.

121. $p(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 10, \\ 0, & x > 10. \end{cases}$

122. $p(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ ax, & 1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$

123. $p(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^3, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

124. $p(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ a(x-1), & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

125. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

126. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

127. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

128. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^2, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

129. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ a\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

130. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

131. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

132. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

133. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

134. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2), & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

135. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

136. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

137. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2)^2, & -2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

138. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

139. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

140. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

141. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

142. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(x+2)^2, & -2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

143. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ a(x-3)^4, & 3<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

144. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^2, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

145. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^3, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

146. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^4, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

147. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(x+3)^3, & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

148. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^3, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

149. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^2, & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

150. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^3, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

В задачах 151-180 СВ *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием *a* и средним квадратическим отклонением σ. Требуется 1) записать $p(x)$, $F(x)$, 2) найти $P(\alpha \le X \le \beta)$,3) 3) найти $P(|X-a|<\delta)$.

№ задачи	a	σ	α	β	δ
151	2,8	0,6	2,1	3,0	1,8
152	3,5	1,2	2,2	4,2	2,1
153	1,5	0,5	2,1	3,0	0,9
154	2,8	0,8	2,5	3,5	1,2
155	10	3	6	13	7,5
156	4	1,5	3	7	2,8
157	5	3	3,5	7	5,1
158	3	2	2	6	4,8
159	4,1	3,5	2	7	4,5
160	3,6	5,1	1,5	5,6	8,2
161	6,2	4,3	5	10	6,4
162	4,7	2,8	1,2	7,3	4,9
163	5,6	2,9	3,0	9,1	5,4
164	8,5	4,7	5,2	10,2	6,3
165	9,4	5,6	4,2	12,5	7,0
166	2,5	4,1	2,7	5,2	5,4
167	7,2	3,5	4,1	10,8	5,5

168	7,8	6,2	3,0	12,9	8,4
169	4,3	5,1	1,6	9,8	9,2
170	10,5	7,1	7,2	15,4	10,1
171	3,5	0,5	4,0	4,5	0,7
172	5,0	1,5	4,5	6,0	1,2
173	4,5	1,0	5,5	6,0	0,6
174	2,3	0,7	3,0	3,6	0,5
175	1,5	2,0	1,5	2,5	1,5
176	3,2	1,5	4,0	5,5	2,3
177	3,0	2,1	5,5	6,0	2,5
178	0,7	2,4	4,0	5,1	2,0
179	1,4	3,1	2,6	3,8	2,7
180	4,3	2,7	2,3	4,9	4,1

В задачах 181–210 дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины *X*. Требуется 1) построить полигон и гистограмму частостей (относительных частот) СВ *X*, 2) по виду полигона и гистограммы и, исходя из механизма образования СВ, сделать предварительный выбор закона распределения, 3) вычислить выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение *s*, 4) записать гипотетическую функцию распределения и плотность распределения, 5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$, 6) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

181. Даны результаты испытания стойкости 200 удлиненных сверл диаметра 4 мм (в часах):

x_i стойкость сверла	3–3,2	3,2–3,4	3,4–3,6	3,6–3,8	3,8–4
частота m_i	16	50	70	44	20

182. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм^2):

x_i прочность	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

183. Даны результаты исследования на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм^2):

x_i предел прочности (в кг/мм^2)	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	25	36	22	9

184. Даны результаты содержания фосфора (6%) в 100 чугунных образцах:

x_i содержание фосфора	0,1–0,2	0,2–0,3	0,3–0,4	0,4–0,5	0,5–0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

185. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

x_i стойкость (в часах)	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

186. Даны данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей автоколонны (в сотнях км):

x_i (сотни км)	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	2,8–3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

187. С автомата обрабатывающего втулки диаметра d = 40+0,2 мм взята выработка изделий объемом 100. Результаты измерения диаметров втулок приведены в таблице:

x_i диаметр (в мм)	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

188. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Контроль механического состояния автомобиля после возвращения в гараж»:

x_i трудоемкость (в мин.)	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

189. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «ремонт валика водяного насоса автомобиля»:

x_i трудоемкость (в мин.)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	17	47	70	46	20

190. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (в часах):

x_i стойкость (в час)	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
частота m_i	8	21	43	21	7

191. Даны сведения о расходе воды, используемой цехом для технических нужд в течение 100 дней (в куб.м.):

x_i расход (в м^3)	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
частота m_i	7	25	36	22	10

192. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей (в км):

x_i среднесуточный пробег	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220
частота m_i	9	21	40	18	12

193. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля БелАЗ при средних скоростях:

x_i температура (в градусах)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65
частота m_i	8	17	46	18	11

194. Даны размеры внутреннего диаметра гайки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

195. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

x_i диаметр	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27

(в мм)					
частота m_i	10	19	38	21	12

196. Даны результаты измерения диаметра валика, обработанного одношпиндельным автоматом:

x_i диаметр (в мм)	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,00–20,05	20,05–20,10
частота m_i	6	15	27	32	14	6

197. Даны результаты исследования грануляции партии порошка (в мкм):

x_i грануляция (в мкм)	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
частота m_i	7	23	35	26	9

198. Даны результаты наблюдений за сроком службы 150 однотипных станков до выхода за пределы норм (в месяцах двухсменной работы):

x_i срок (в месяцах)	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
частота m_i	15	27	61	29	18

199. Даны результаты измерения толщины (в см) 100 слюдяных прокладок:

x_i толщина (см)	0,20–0,26	0,26–0,32	0,32–0,38	0,38–0,44	0,44–0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

200. Даны диаметры 100 валиков после шлифовки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	20,0–20,1	20,1–20,2	20,2–20,3	20,3–20,4	20,4–20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

201. Даны сведения о расходе воды для технических нужд за 100 дней

Расход воды, м^3	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
частота m_i	9	23	36	24	8

202. Даны результаты испытания на разрыв 100 образцов

Предел прочности	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	23	37	25	7

203. Даны сведения о среднесуточном пробеге 100 автомобилей

Пробег, км	150–170	170–190	190–210	210–230	230–250
частота m_i	10	24	34	25	7

204. Даны диаметры втулок после шлифовки

Диаметр, мм	40,1–40,2	40,2–40,3	40,3–40,4	40,4–40,5	40,5–40,6
частота m_i	9	26	34	24	7

205. Дана трудоемкость операции

трудоемкость, мин.	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
частота m_i	8	15	54	16	7

206. Даны температуры масла в двигателе при средних скоростях

Температура, t□C	40–42	42–44	44–46	46–48	8–50
частота m_i	10	22	35	25	78

207. Даны отклонения диаметров валиков от номинала

Отклонение, мкм	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
частота m_i	6	24	42	20	8

208. Даны результаты измерения диаметров втулок

Диаметр, мм	9,74–9,76	9,76–9,78	9,78–9,80	9,80–9,82	9,82–9,84
частота m_i	6	14	48	24	8

209. Даны результаты испытания стойкости фрез

Стойкость, ч.	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5	42,5–47,5
частота m_i	6	21	44	22	7

210. Даны результаты стойкости 100 сверл

Стойкость, ч.	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	21	45	21	6

Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

Вспомогательный раздел по учебной дисциплине

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Габасова О.Р., Зубко О. Л., Катковская И. Н.,
Метельский А. В., Чепелев Н.И., Чепелева Т.И.

Минск 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Предметом теории вероятностей является математический анализ случайных явлений — эмпирических феноменов, которые (при заданном «комплексе условий») могут быть охарактеризованы тем, что

– для них отсутствует детерминистическая регулярность (наблюдения над ними не всегда приводят к одним и тем же исходам)

и в то же самое время

– они обладают некоторой статистической регулярностью (проявляющейся в статистической устойчивости частот).

Первоначальный курс теории вероятностей и математической статистики должен удовлетворять двум условиям. С одной стороны, он должен помогать развитию теоретико-вероятностной интуиции, т. е. умения строить математические модели, правильно отражающие те или иные стороны реальных случайных явлений. При этом надо иметь в виду, что теория вероятностей и математическая статистика тесно связаны с различными приложениями, с некоторыми из которых выпускникам технических университетов с большой вероятностью придется столкнуться в своей работе. С другой стороны, теория вероятностей должна развиваться как математическая наука, построенная на точных определениях и аксиомах.

Целью дисциплины является ознакомление с основными понятиями и методами теории вероятностей и способами использования этих методов при обработке статистических данных, возникающих на практике при решении конкретных прикладных задач.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционные занятия

NN п/п	Наименование тем и содержание занятий	Объем, час
1	2	3
	Теория вероятностей	
1.	Случайные события. Классическое, геометрическое, статистическое, аксиоматическое определения вероятности	2
2.	Алгебра событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий	2
3.	Формула полной вероятности. Формула Байеса. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли	2
4.	Предельные теоремы Муавра-Лапласа, Пуассона. Наивероятнейшее число наступления события	2
5.	Дискретные и непрерывные случайные величины. Функции распределения и их свойства	2

6.	Математическое ожидание и дисперсия случайных величин и их свойства.	2
7.	Типичные законы распределения: биномиальный, пуассоновский, равномерный, показательный	2
8.	Нормальный закон распределения. Числовые характеристики, связь интегральной функции распределения с функцией Лапласа, вероятность попадания значений в заданный интеграл, правило трех сигм	2
9	Начальные и центральные моменты, их связь между собой. Асимметрия и эксцесс. Двумерные случайные величины. Интегральная и дифференциальная функции распределений	2
10.	Двумерные случайные величины. Числовые характеристики. Зависимые случайные величины. Корреляционный момент и коэффициент корреляции	2
11.	Законы больших чисел. Неравенства Маркова, Чебышева. Теоремы Чебышева, Бернулли. Центральная предельная теорема Ляпунова	2
	Элементы математической статистики	
12.	Генеральная совокупность объектов. Выборка и способы ее организации. Вариационный ряд. Эмпирическое распределение. Полигон и гистограмма	1
13.	Точечные оценки параметров распределения по выборке. Понятие об эффективности, состоятельности и несмещенности оценок. Метод моментов, метод максимального правдоподобия	2
14.	Понятие о доверительных интервалах для математического ожидания и дисперсии. Дополнительные распределения, используемые при статистической обработке	2
15.	Статистическая проверка гипотез. Критерий согласия Пирсона и его применение. Критерий Колмогорова	2
16.	Функциональные и статистические зависимости. Линии регрессии. Нахождение параметров выборочного уравнения линейной регрессии	2
17.	Влияние выборочного коэффициента корреляции на тесноту связи. Понятие о корреляционном отношении	1
18.	Определение параметров регрессионной математической модели по экспериментальным данным. Метод наименьших квадратов	2
	Итого:	34

Практические занятия

NN п/п	Наименование тем и содержание занятий	Объем, час
1	2	3
	Теория вероятностей	
1.	Элементы комбинаторики	2
2.	Решение задач на определение вероятности	2

3.	Теорема сложения и умножения вероятностей	2
4.	Формула полной вероятности. Формула Байеса	2
5.	Схема повторных независимых испытаний	2
6.	Функция распределения. Плотность распределения. Числовые характеристики	2
7.	Закон распределения дискретных СВ	2
8.	Закон распределения непрерывных СВ	2
9.	Двумерные СВ. Функция распределения. Условные законы распределения	2
10.	Числовые характеристики двумерных СВ. Вычисление коэффициента корреляции	2
11.	Решение задач на предельные теоремы	2
12.	Контрольная работа (рекомендуется)	2
	Элементы математической статистики	
13.	Полигон, гистограмма, эмпирическая функция распределения	1
14.	Числовые характеристики выборки	2
15.	Вычисления точечных характеристик. Определение доверительных интервалов	2
16.	Критерий согласия x^2	2
17.	λ – критерий Колмогорова	1
18.	Вычисления выборочного коэффициента корреляции. Прямая регрессии	2
	Итого:	34

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Теория вероятностей

1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

2. Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности.

3. Свойства вероятности.

4. Теорема сложения вероятностей.

5. Теорема умножения вероятностей.

6. Формула полной вероятности.

7. Формулы Байеса.

8. Схема повторных независимых испытаний. Формула Бернулли.

9. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

10. Формула Пуассона.

11. Случайные величины (СВ). Функция распределения и ее свойства.

12. Непрерывные и дискретные СВ. Плотность распределения вероятностей и ее свойства.

13. Математическое ожидание и его свойства.

14. Дисперсия и ее свойства.

15. Биномиальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия СВ, распределенной по биномиальному закону.

16. Распределение Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия.

17. Равномерный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

18. Показательный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

19. Нормальный закон распределения. Функция и плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

20. Вероятность попадания нормально распределенной СВ в интервал. Вероятность отклонения СВ от математического ожидания по модулю. Правило трех сигм.

21. Двумерные СВ. Закон распределения. Условный закон распределения.

22. Числовые характеристики двумерных СВ. Условное математическое ожидание и условная дисперсия.

23. Корреляционный момент и его свойства.

24. Коэффициент корреляции и его свойства.

25. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

26. Теорема Чебышева.

27. Теорема Бернулли.

28. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Математическая статистика

1. Выборочная совокупность. Вариационный ряд.

2. Полигон и гистограмма.

3. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

4. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.

5. Оценки параметров распределения. Точечные оценки и требования, предъявляемые к ним.

6. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсии.

7. Интервальные оценки. Доверительный интервал.

8. Распределение Стьюдента.

9. Распределение Пирсона.

10. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной СВ (случайной величине) при известном среднем квадратическом отклонении.

11. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной СВ при неизвестном среднем квадратическом отклонении.

12. Построение доверительного интервала для среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ.

13. Понятие о статистических гипотезах и критериях согласия.

14. Критерий согласия Пирсона χ^2.

15. Критерий согласия Колмогорова.

16. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.

17. Уравнение регрессии. Линейная регрессия. Определение коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов.

18. Нелинейная регрессия. Определение параметров нелинейной регрессии.

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – Санкт-Петербург, Лань, 1998.
2. Гайшун Л.Н., Игнатьева Г.К., Велько О.А. Теория вероятностей. – Минск: МПУ, 2002.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2005.
4. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей. – Мн.:
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Оникс, 2005.
6. Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Решение задач с техническим содержанием по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. Справочное пособие. – Мн.: БНТУ, 2011.
7. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: ч. 4. – Мн.: Выш. шк., 2009.
8. Чепелев Н.И. и др. Математическая статистика. Сборник задач для аудиторной и самостоятельной работы студентов. – Мн.: БНТУ, 2010.
9. Чепелева Т.И. и др. Теория вероятностей. Сборник для аудиторной и самостоятельной работы студентов. – Мн.: БНТУ, 2008.

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1j74	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0734	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6,	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	1,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2764	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблица 3

Значения функции $\chi^2_{\alpha;\nu}$; $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$

$\nu \setminus \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,683	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23.542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,312	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица 4

Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha;\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \ge t_{\alpha;\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha;\nu}}^{\infty} S(t,\nu)dt = \alpha$.

$\nu \setminus \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	32,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3.747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0.258	0,536	0,866	1.341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3.922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,7j6	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	7,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1.965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица 5

Значения функции $t_{\gamma;n}$: $\bar{x}_в - t_{\gamma;n}\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_{\gamma;n}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 6

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $q_1 s < \sigma < q_2 s$

$n-1 \setminus \gamma$	0,99		0,98		0,95		0,00	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279

Продолжение таблицы 6

$n-1\backslash\gamma$	0,99		0,98		0,95		0,00	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1.09

Таблица 7

Критические значения распределения Колмогорова $P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950