

ПОТОК И ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ ПОЛНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА

Н. С. Петров

УДК 535-7:538.56

*Институт повышения квалификации и переподготовки кадров
по новым направлениям развития техники, технологии и экономики
Белорусского национального технического университета,
220107, Минск, Партизанский просп., 77; e-mail: rectorat@ipk.by*

(Поступила 16 октября 2013)

Получены аналитические выражения для потока и плотности энергии преломленных неоднородных волн, возникающих в условиях полного отражения света на границе раздела двух изотропных сред в общем случае эллиптической поляризации падающего излучения. Установлены зависимости их средних величин от параметров граничащих сред и угла падения. Подробно рассмотрены случаи линейной и круговой поляризации падающей волны. Получено в явном виде общее выражение, связывающее поток и плотность энергии таких волн при произвольной поляризации падающего излучения.

Ключевые слова: неоднородные электромагнитные волны, полное отражение света, поток и плотность энергии неоднородных волн, линейная и круговая поляризация волны, азимут колебаний, электрический и магнитный векторы электромагнитного поля, вектор рефракции.

Analytical expressions for the flow and density of energy of the refractive inhomogeneous waves arising in conditions of total reflection of the light on a border of two isotropic media are obtained supposing the elliptic polarization of the incident radiation. Average values of the flow and density are determined depending on parameters of the boundary media and on the angle of incidence. The linear and circular polarizations of the incident wave are considered in detail. A general expression connecting the flow and density of energy of such waves for an arbitrary polarization of the incident light is obtained in explicit form.

Keywords: inhomogeneous electromagnetic waves, total light reflection, energy flow and energy density of inhomogeneous waves, linear and circular polarization of wave, oscillation azimuth, electrical and magnetic vectors of electromagnetic field, refraction vector.

Введение. Как известно, неоднородными волнами называются затухающие (или усиливающиеся, если речь идет об инверсных средах) плоские электромагнитные волны, у которых плоскости равных фаз и равных амплитуд не параллельны между собой [1]. Такие волны возникают в прозрачных средах при полном внутреннем отражении света и в поглощающих (усиливающих) средах при наклонном падении излучения на них. Свойства неоднородных волн существенны в ряде практически важных случаев, например, при исследовании закономерностей распространения электромагнитных волн в световодах (волноводах), действие которых основано на явлении полного внутреннего отражения. Характерной особенностью неоднородных электромагнитных волн является то, что для них поляризационные кривые, описываемые векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , могут быть разными, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} поляризованы в общем случае по-разному [1]. Важно также отметить, что фазовая скорость распространения таких волн в среде зависит от угла падения излучения.

В последнее время исследования неоднородных волн на границах раздела диэлектрических сред вызывают особый интерес в связи с возможностью создания высокоэффективных тонкопленочных поляризационных делителей световых пучков, а также оптических фильтров и антиотражающих покрытий, отли-

FLOW AND DENSITY OF ENERGY OF INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVES UNDER TOTAL REFLECTION CONDITIONS

N. S. Petrov (*Institute of Improvement of Professional Skill and Retraining of The Staff on New Directions of Development of Engineering, Technology and Economy, 77 Partizansky Prosp., Minsk, 220107, Belarus; e-mail: rectorat@ipk.by*)

чающихся большой угловой апертурой и спектральной шириной (см., например, [1—4]). Важное направление в исследовании неоднородных волн связано с разработкой так называемых всеугловых отражателей [5].

Для расширения возможностей и улучшения характеристик устройств такого рода необходимо исследовать особенности неоднородных волн в условиях, когда падающее излучение является не только линейно поляризованным, но в общем случае и эллиптически поляризованным, включая частный случай круговой поляризации. Несмотря на то что общая теория неоднородных электромагнитных волн была построена еще в 60-е гг. прошлого столетия, исследование поведения таких волн на границах раздела различных сред не утратило своей актуальности. В связи с этим знание свойств и особенностей поведения на границах раздела сред неоднородных электромагнитных волн, в частности их энергетических характеристик, представляет не только теоретический, но и практический интерес.

В данной работе исследованы закономерности поведения потока и плотности энергии неоднородных преломленных волн, возникающих в условиях полного внутреннего отражения на границе раздела двух изотропных сред, в зависимости от параметров граничащих сред и угла падения в общем случае поляризации падающего излучения. В частности, получены в явном виде аналитические зависимости их средних величин в случае линейно поляризованной волны с произвольным азимутом колебаний, а также в случае круговой поляризации падающего излучения.

Для установления зависимости интенсивности потока и плотности энергии неоднородной волны от параметров граничащих сред и угла падения будем исходить из результатов решения соответствующей граничной задачи для уравнений Максвелла. Представим векторы электрического поля падающей (\mathbf{E}_1), отраженной (\mathbf{E}_1') и прошедшей (\mathbf{E}_2) плоских волн, гармонически зависящих от времени ($\sim e^{-i\omega t}$), в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= (A_1 \mathbf{s} + B_1 [\mathbf{m}_1 \mathbf{s}] / n_1) \exp(i\varphi_1), \\ \mathbf{E}_1' &= (A_1' \mathbf{s} + B_1' [\mathbf{m}_1' \mathbf{s}] / n_1) \exp(i\varphi_1'), \\ \mathbf{E}_2 &= (A_2 \mathbf{s} + B_2 [\mathbf{m}_2 \mathbf{s}] / n_2) \exp(i\varphi_2),\end{aligned}\quad (1)$$

здесь A_1 (B_1), A_1' (B_1') и A_2 (B_2) — перпендикулярная (параллельная) плоскости падения амплитуды указанных волн; \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_1' , \mathbf{m}_2 — векторы рефракции этих волн [1], которые можно представить в виде

$$\mathbf{m}_1 = \xi \mathbf{b} + \eta_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_1' = \xi \mathbf{b} - \eta_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_2 = \xi \mathbf{b} + \eta_2 \mathbf{q}, \quad (2)$$

причем для них имеют место соотношения

$$\mathbf{m}_1^2 = (\mathbf{m}_1')^2 = \xi^2 + \eta_1^2 = n_1^2 = \varepsilon_1, \quad \mathbf{m}_2^2 = \xi^2 + \eta_2^2 = n_2^2 = \varepsilon_2,$$

где $\xi = n_1 \sin \alpha$; $\eta_1 = n_1 \cos \alpha$; $\eta_2 = i\gamma$; $\gamma = (\xi^2 - n_2^2)^{1/2}$; n_1 и n_2 — показатели преломления граничащих сред; α — угол падения, интервал изменения которого ограничен условием $\varepsilon_2 \leq \xi^2 \leq \varepsilon_1$; $\varphi_1 = k \mathbf{m}_1 \mathbf{r}$; $\varphi_1' = k \mathbf{m}_1' \mathbf{r}$; $\varphi_2 = k \mathbf{m}_2 \mathbf{r}$; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$; \mathbf{r} — радиус-вектор; \mathbf{s} , \mathbf{b} и \mathbf{q} — тройка взаимно перпендикулярных ортов (\mathbf{s} — нормаль к плоскости падения, \mathbf{b} — вектор вдоль границы раздела сред, \mathbf{q} — нормаль к границе раздела), $\mathbf{s} = [\mathbf{bq}]$.

Векторы магнитного поля \mathbf{H} соответствующих волн определяются из тех же уравнений Максвелла, которые для немагнитных сред ($\mu = 1$) имеют вид: $\mathbf{H}_i = [\mathbf{m}_i \mathbf{E}_i]$, $i = 1, 1', 2$. Для них с учетом (1) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= (A_1 [\mathbf{m}_1 \mathbf{s}] - n_1 B_1 \mathbf{s}) \exp(i\varphi_1), \\ \mathbf{H}_1' &= (A_1' [\mathbf{m}_1' \mathbf{s}] - n_1 B_1' \mathbf{s}) \exp(i\varphi_1'), \\ \mathbf{H}_2 &= (A_2 [\mathbf{m}_2 \mathbf{s}] - n_2 B_2 \mathbf{s}) \exp(i\varphi_2).\end{aligned}$$

Из условий непрерывности тангенциальных составляющих векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе раздела сред ($z = \mathbf{q} \mathbf{r} = 0$) получаем систему четырех скалярных уравнений для определения амплитуд A_1' (B_1') и A_2 (B_2):

$$\begin{aligned}A_1 + A_1' - A_2 &= 0, \quad \eta_1 A_1 - \eta_1 A_1' - i\gamma A_2 = 0, \\ n_1 B_1 + n_1 B_1' - n_2 B_2 &= 0, \quad n_2 \eta_1 B_1 - n_2 \eta_1 B_1' - i\gamma n_1 B_2 = 0.\end{aligned}$$

Ее решение дает

$$A_1' = r_s A_1, \quad A_2 = \tau_s A_1, \quad B_1' = r_s \frac{\xi^2 - i\eta_1 \gamma}{\xi^2 + i\eta_1 \gamma} B_1, \quad B_2 = \tau_s \frac{n_1 n_2}{\xi^2 + i\eta_1 \gamma} B_1, \quad (3)$$

где $r_s = (\eta_1 - i\gamma)/(\eta_1 + i\gamma)$, $\tau_s = 2\eta_1/(\eta_1 + i\gamma)$, здесь учтено, что $(\eta_1 \pm i\gamma)(\xi^2 \pm i\eta_1 \gamma) = \varepsilon_2 \eta_1 \pm i\varepsilon_1 \gamma$.

Теоретический анализ и основные результаты. Для нахождения связи между потоком (S) и плотностью энергии (W) преломленных неоднородных волн воспользуемся полученными в [1] общими выражениями, которые для их средних величин имеют вид

$$\bar{W} = (1/16\pi)[(\epsilon_2 + |m_2|^2) |E_2|^2 - |m_2 E_2^*|^2], \quad (4)$$

$$\bar{S} = (c/16\pi)\{ |E_2|^2 (m_2 + m_2^*) - [m_2 - m_2^*, [E_2 E_2^*]] \}. \quad (5)$$

Используя (4), выражение для \bar{S} можно преобразовать к виду:

$$\bar{S} = \frac{c}{\epsilon_2 + |m_2|^2} \left\{ \left(\bar{W} + \frac{1}{16\pi} |m_2 E_2^*|^2 \right) (m_2 + m_2^*) - \frac{\epsilon_2 + |m_2|^2}{16\pi} [m_2 - m_2^*, [E_2 E_2^*]] \right\}. \quad (6)$$

Раскрывая входящие в (4), (6) соотношения с учетом (1), (2), получаем

$$\bar{W} = \frac{\xi^2 |\tau_s|^2 (\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 |\kappa_1|^2)}{8\pi(\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2)} |A_1|^2 \exp(-2k\gamma z), \quad (7)$$

$$\bar{S} = (c/\xi) [\bar{W} \mathbf{b} + P s \exp(-2k\gamma z)], \quad (8)$$

где $P = \frac{i\eta_1 \gamma \xi^2 |\tau_s|^2 [\xi^2 (\kappa_1^* - \kappa_1) + i\eta_1 \gamma (\kappa_1 + \kappa_1^*)]}{8\pi(\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2)} |A_1|^2$, $\kappa_1 = B_1/A_1$ — параметр, характеризующий состояние

поляризации падающей волны, причем в общем случае эллиптической поляризации он является комплексной величиной. Для линейной поляризации $\kappa_1 = \kappa_1^* = \text{tg}\chi$, χ — азимут колебаний падающей волны (угол, образованный электрическим вектором волны с плоскостью падения). В случае круговой поляризации $\kappa_1 = \pm i$ [1].

Как видно из (3), для преломленной неоднородной волны

$$\kappa_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{n_1 n_2}{\xi^2 + i\eta_1 \gamma} \kappa_1. \quad (9)$$

Следовательно, при линейной поляризации падающей волны (κ_1 вещественно) преломленная волна в общем случае будет эллиптически поляризованной.

Необходимо отметить, что в [1] достаточно подробно исследованы условия, при которых возможна линейная и круговая поляризация преломленной волны. В обоих случаях падающая волна оказывается эллиптически поляризованной. В [1], в частности, определены параметры эллипса поляризации такой волны в случае круговой поляризации преломленной волны (отношение полуосей эллипса и ориентация большой оси эллипса относительно плоскости падения). Там же получено выражение, связывающее поток и плотность энергии неоднородной волны (заметим, что его легко получить из приведенного ниже общего выражения (10) при условии $\kappa_2 = \pm i$). Выражение для связи полного потока и плотности энергии в случае линейной поляризации преломленной волны в [1] не приведено.

Учитывая сказанное, дальнейший анализ выражений (7), (8) проведем для двух практически важных случаев линейной и круговой поляризации падающей волны, так как на опыте, как правило, имеют дело с этими наиболее часто встречающимися состояниями поляризации падающего излучения. Для упрощения вычислительных процедур выполним предварительно некоторые преобразования выражений (7), (8). Прежде всего исключим в выражении для \bar{S} с помощью (7) амплитуду падающей волны ($|A_1|^2$). Тогда его можно представить в виде

$$\bar{S} = \bar{W} v (\mathbf{b} - Q \mathbf{s}), \quad (10)$$

где $v = c/\xi$ — фазовая скорость неоднородной волны,

$$Q = \frac{-i\eta_1 \gamma [\xi^2 (\kappa_1^* - \kappa_1) + i\eta_1 \gamma (\kappa_1^* + \kappa_1)]}{\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 |\kappa_1|^2}. \quad (11)$$

С учетом того что амплитуда падающей волны $|A_1|^2$ в общем случае эллиптической поляризации связана с плотностью энергии в первой среде соотношением

$$\bar{W} = (\epsilon_1/\pi 8)(1 + |\kappa_1|^2) |A_1|^2,$$

выражение для \bar{W} принимает вид

$$\bar{W} = \frac{\xi^2 |\tau_s|^2 (\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 |\kappa_1|^2)}{\epsilon_1 (\xi^4 + \eta_1^2 \gamma^2) (1 + |\kappa_1|^2)} |\bar{W}_1| \exp(-2k\gamma z).$$

Таким образом, получены общие выражения, определяющие зависимости потока \bar{S} и плотности энергии \bar{W} преломленных неоднородных волн от показателей преломления граничащих сред n_1 , n_2 и угла па-

дения α , пригодные при любой поляризации падающего излучения, и установлена в явном виде связь между ними.

Анализ выражения (10) показывает, что, во-первых, нормальная к границе раздела сред составляющая среднего по времени потока энергии \bar{S} во второй среде отсутствует ($\bar{S}_q = 0$), т. е. действительно имеет место явление полного отражения света. Во-вторых, наряду с продольной составляющей потока \bar{S} (вдоль границы раздела сред) в общем случае поляризации падающей волны при полном отражении появляется так называемая боковая составляющая потока энергии во второй среде (Q). Из (10) также следует, что при изменении знака κ_1 на противоположный ($\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$), т. е. при изменении разности фаз между параллельной и перпендикулярной плоскости падения компонентами электрического вектора падающей волны на $\pm\pi$, направление боковой составляющей потока \bar{S} меняется на обратное ($Q \rightarrow -Q$).

Факт наличия боковой составляющей потока энергии в отражающей среде в условиях полного отражения света (и обусловленное этим боковое давление света) впервые был установлен Ф. Н. Федоровым [1], однако в явном виде выражение для нее получено в предположении линейной (круговой) поляризации только преломленной волны. Поэтому более подробно рассмотрим поведение полного потока энергии \bar{S} неоднородной волны в двух названных выше практически важных случаях линейной и круговой поляризации падающей волны. В этих случаях выражение для него существенно упрощается. В частности, для линейной поляризации следует положить $\kappa_1 = \kappa_1^* = \text{tg}\chi$. Тогда параметр Q , определяющий величину боковой составляющей полного потока \bar{S} , описывается выражением

$$Q = \frac{2n_1(\varepsilon_1 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - \varepsilon_2)\kappa_1}{\xi^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \kappa_1^2)} \quad (12)$$

(при этом учтено $\xi^4 + \eta_1^2\gamma^2 = \xi^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1\varepsilon_2$). Отсюда видно, что только в двух крайних случаях $\kappa_1 = 0$ ($\chi = 0$) и $\kappa_1 = \infty$ ($\chi = \pi/2$) боковая составляющая потока \bar{S} отсутствует ($Q = 0$). Кроме того, выражение для нее обращается в нуль при $\xi^2 = \varepsilon_1 \sin^2 \alpha = \varepsilon_2$, т. е. при предельном угле падения $\alpha = \alpha_0$, и при $\xi^2 = \varepsilon_1$ ($\alpha \rightarrow \pi/2$) — при скользющем падении. Следовательно, при изменении χ в интервале $0 \leq \chi \leq \pi/2$ и ξ^2 в интервале $\varepsilon_2 \leq \xi^2 \leq \varepsilon_1$ должен существовать экстремум (max) функции $Q(\chi, \xi^2)$. Действительно, легко убедиться, что экстремум Q по κ_1 имеет место при условии

$$\kappa_1 = \text{tg}\chi = \sqrt{\frac{\xi^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2} - 1}. \quad (13)$$

Таким образом, максимальная величина полного потока энергии \bar{S} (10) в случае линейной поляризации падающей волны достигается при условии (13) и равна

$$S = |\bar{S}| = \bar{W}\nu(1 + Q^2)^{1/2},$$

где Q определяется согласно (12) с учетом (13). На рис. 1 представлены соответствующие зависимости параметра Q от азимута колебаний χ при заданном ξ^2 для двух значений n_1 ($n_2 = 1$ — граница с воздухом).

Для векторной скорости распространения полного потока энергии в этом случае имеем

$$\mathbf{u} = |\bar{S}|/w = \nu(\mathbf{b} - Q\mathbf{s}).$$

Очевидно, что при условии (13) она также достигает своего максимума.

Что касается экстремума (max) Q по ξ^2 , то при произвольном азимуте колебаний χ его нахождение сводится к решению довольно громоздкого биквадратного уравнения вида

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\xi^4 + \varepsilon_2[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_1(1 - \kappa^2)]\xi^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2[\varepsilon_1 + (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)\kappa_1^2] = 0. \quad (14)$$

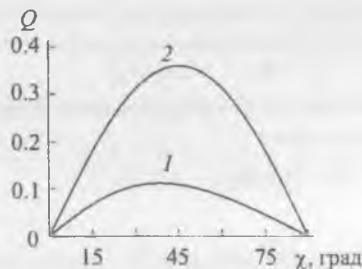


Рис. 1. Зависимость боковой составляющей потока энергии Q неоднородной преломленной волны от азимута колебаний χ падающей волны при заданном ξ^2 ($\alpha = 45^\circ$) для $n_1 = 1.50$ (1) и 1.74 (2), $n_2 = 1$

Поэтому для упрощения расчетов рассмотрим наиболее простой случай $\kappa_1 = 1$ ($\chi = \pi/4$). Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\xi^4 + \varepsilon_2 \xi^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\xi^2 = (\varepsilon_2 / 2) \left(-1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon_1 / \varepsilon_2} \right).$$

При этом выражение для Q (12) преобразуется к виду

$$Q = \frac{2n_1(\varepsilon_1 - \xi^2)^{1/2}(\xi^2 - \varepsilon_2)}{\xi^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Характерные зависимости параметра Q от ξ^2 для $\chi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ приведены на рис. 2. Видно, что максимум Q тем больше, чем выше показатель преломления первой среды n_1 , и возрастает с уменьшением азимута колебаний χ . При этом положения максимумов с уменьшением χ смещаются в сторону меньших значений ξ^2 . Соответствующие графики функции $|\bar{u}|/v = (1 + Q^2)^{1/2}$, определяющей скорость движения потока энергии неоднородной волны в зависимости от ξ^2 , в этом случае идентичны представленным на рис. 2, б с той лишь разницей, что величина самих максимумов при этом возрастает, положение же их не меняется.

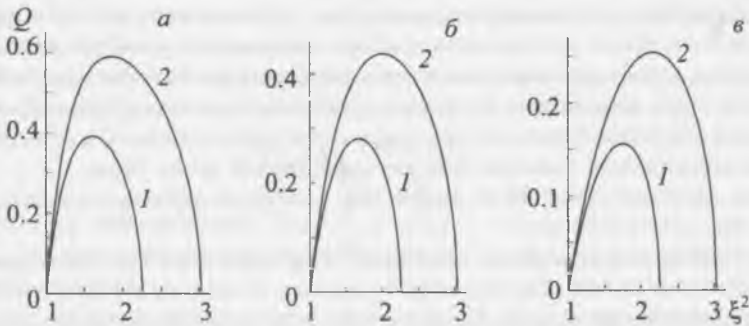


Рис. 2. Зависимость Q от ξ^2 для $\chi = 30^\circ$ (а), 45° (б) и 60° (в), $n_1 = 1.50$ (1) и 1.74 (2), $n_2 = 1$

Рассмотрим второй важный случай круговой поляризации падающей волны ($\kappa_1 = \pm i$). Тогда выражение (11) принимает вид

$$Q = \mp \frac{[\varepsilon_1(\xi^2 - \varepsilon_2)]^{1/2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

При этом полная векторная скорость потока энергии во второй среде

$$\bar{\mathbf{u}} = v \left\{ \mathbf{b} \pm \frac{2[\varepsilon_1(\xi^2 - \varepsilon_2)]^{1/2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \mathbf{s} \right\}.$$

Отсюда следует

$$u = |\bar{\mathbf{u}}| = v \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon_1^2(\xi^2 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}}.$$

Как видно, в случае круговой поляризации падающей волны скорость потока энергии преломленной неоднородной волны равна ее фазовой скорости ($v = c/\xi$) только при предельном угле падения ($\xi^2 = \varepsilon_2$). Во всех других случаях она возрастает с увеличением угла падения $\alpha \geq \alpha_0$, достигая максимума при $\xi^2 = \varepsilon_1$.

Заключение. Изложенные теоретические результаты могут быть использованы при расчетах различного рода волоконно-оптических устройств. Они представляют также интерес в плане дальнейших теоретических исследований закономерностей поведения неоднородных волн на границах раздела оптически разных сред, в частности на границах с анизотропными средами.

[1] Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред, Москва, УРСС (2004), 22, 70, 78—80, 119—126

[2] L. Li, J. A. Dobrowolski. Appl. Opt., 39 (2000) 2754—2771

[3] А. Ярив, П. Юх. Оптические волны в кристаллах, Москва, Мир (1987)

[4] L. Li, J. A. Dobrowolski. Appl. Opt., 35 (1996) 2221—2225

[5] J. M. Bennett. In "Handbook of Optics", Ed. M. Bass, II, New York, McGraw-Hill (1995) 3.1—3.70

[6] Y. Fink, J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos, E. L. Thomas. Science, 282 (1998) 1679—1682