УДК 621.3

Применение уравнений состояния для расчета зависимых начальных условий

Горошко В. И.
Белорусский национальный технический университет

Для расчета динамических режимов в электрических цепях, автоматических системах, энергетических сетях широкое распространение получил метод переменных состояния. Этот метод предполагает построение системы дифференциальных уравнений первого порядка (нормальная форма), в которой переменные охватывают все энергоопределяющие величины системы. Для электрических цепей такими величинами являются все независимые индуктивные токи и напряжения емкостей:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}(t)\,, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – вектор-столбец переменных состояния, размерностью $n\times 1$;

$\mathbf{v}(t)$ – вектор-столбец источников; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы.

Если нас интересуют не все переменные состояния, а требуется рассчитать только одну (выходную) переменную, то систему (1) можно свести к одному дифференциальному уравнению высокого порядка относительно требуемой переменной:

$$\det(p\mathbf{1}-\mathbf{A})\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{1}-\mathbf{A})_{\text{пр}}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}(p)\,. \qquad (2)$$

где $(p\mathbf{1}-\mathbf{A})_{\text{пр}}$ – присоединенная матрица, $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

Система (2) является совокупностью независимых дифференциальных уравнений высокого порядка n. Остается не тривиальная проблема поиска всех начальных условий $x_i(0), x_i^{(1)}(0), x_i^{(2)}(0), \dots x_i^{(n-1)}(0)$ для переменной $x_i(t)$. Покажем, что существует регулярное решение этой проблемы.

Система (1) требует знания только независимых начальных значений, т.е. значений $\mathbf{x}(0)$. Эти значения нужно рассчитать или измерить. Подставив значения $\mathbf{x}(0)$ в систему (1) при $t = 0$, получим начальные значения первых производных:

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}(0)\,. \qquad (3)$$

Дифференцируя (1) и подставляя в полученное уравнение при $t = 0$ величины $\mathbf{x}'(0)$, получим

$$\mathbf{x}''(0) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}'(0) + \mathbf{B}\cdot\mathbf{v}'(0)\,.$$

Повторяем процедуру вплоть до порядка $n - 1$.

Таким образом, разработан рекуррентный алгоритм расчета всех начальных условий для ОДУ n-го порядка.