

ФІЗИКА

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО<sup>1</sup>, Т. А. ЖУР<sup>2</sup>, И П. БОЯРИНА<sup>2</sup>, О. Л. ЗУБКО<sup>1</sup>, В. И. ЮРИНОК<sup>1</sup>

ТОЧКИ ФОТОЛИБРАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

**Введение.** Актуальность исследования обусловлена необходимостью более точного прогнозирования движения малых тел в Солнечной системе (космических аппаратов и станций, астероидов, метеоритов и т. д.) в связи с интенсивным освоением космоса. Основной задачей данного исследования является получение уравнений движения точек фотолибрации и тел в их окрестностях в ограниченной задаче трех тел при учете светового давления. Если воспользоваться результатами работ [1–5], то можно вывести точные уравнения движения (УД) в ограниченной задаче трех тел, при учете прямого светового (электромагнитного) давления, имеющие следующий вид (движение тел  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  происходит в плоскости  $xOy$ ,  $t$  – время):

$$\frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1), \quad \frac{d^2 \tilde{y}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1); \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1) &= \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1), \\ \frac{d^2 \tilde{y}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) &= \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1), \end{aligned} \right. \tag{3}$$

где  $A_1$  – звезда,  $A_2$  – темное тело,  $A_3$  – пробное тело;  $m_1, m_2, m_3$  – их массы; тильда «~» над координатами тел  $A_i$   $x_i, y_i$  означает, что при учете светового давления (СД)  $A_{12} \neq 0, A_{13} \neq 0$  и решения системы (1)–(3) иные, нежели при отсутствии СД ( $A_{12} = 0, A_{13} = 0$ );  $\tilde{r}_{ij} = \left[ (\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^2 \right]^{1/2}$ ,  $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$  – расстояния между телами  $A_i$  и  $A_j$ . Величины  $A_{12}$  и  $A_{13}$  – редуцирующие массы звезды  $A_1$ , соответствующие телам  $A_2$  и  $A_3$ , имеют следующую структуру:

$$A_{12} = \frac{k_2 \sigma_2 W_1 r_0^2}{\gamma m_2 c}, \quad A_{13} = \frac{k_3 \sigma_3 W_1 r_0^2}{\gamma m_3 c}, \tag{4}$$

где  $k_2, k_3$  – коэффициенты отражения света телами  $A_2$  и  $A_3$ ,  $1 \leq k_2 \leq 2, 1 \leq k_3 \leq 2$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  – площади миделевых сечений тел  $A_2$  и  $A_3$ ;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\gamma$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $W_1$  – звездная постоянная, являющаяся плотностью энергии электромагнитного (светового) излучения звезды  $A_1$ , проходящего за 1 с через 1 см<sup>2</sup> площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии  $r_0$  от нее.

**1. Парусность и ее влияние на редукцию массы звезды.** Введем понятие *парусность* тела. Если тело  $A$  имеет массу  $m$ , миделево сечение  $\sigma$  и коэффициент отражения  $k$ , то *парусностью* тела  $A$  назовем величину

$$\Pi = k \frac{\sigma}{m}. \quad (5)$$

Заметим, что некоторые авторы парусностью называют отношение  $\sigma/m$  (см. напр., [6]), тем самым игнорируется отражательная способность пробного тела, которая может менять парусность в 2 раза ( $1 \leq k \leq 2$ ).

Для тел  $A_2, A_3$  имеем, согласно (5), соответственно парусности  $\Pi_2 = k_2 \sigma_2 / m_2, \Pi_3 = k_3 \sigma_3 / m_3$ , и далее, согласно (4), редуцирующие массы звезды и их отношение:

$$A_{12} = \Pi_2 \frac{W_1 r_0^2}{\gamma c}, A_{13} = \Pi_3 \frac{W_1 r_0^2}{\gamma c}, A_{12} / A_{13} = \Pi_2 / \Pi_3 = \frac{k_2 \sigma_2}{k_3 \sigma_3} \cdot \frac{m_3}{m_2}. \quad (6)$$

В Солнечной системе (С. с.) *солнечная постоянная* имеет значение (см. [7, § 8.3]):

$$W_1 = W_{\odot} = (1366 \pm 4) \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \approx 1,376 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (7)$$

при этом в (6)  $r_0 = 1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$  – среднее расстояние от Земли до Солнца.

Если обозначим через  $\Pi_T$  парусность любого тела, то относительно него редуцирующая масса Солнца согласно (6) и (7) находится по формуле

$$A_T = 1,54 \cdot 10^{29} \Pi_T, \Pi_T = k_T \sigma_T / m_T. \quad (8)$$

*Редуцированная масса Солнца* для этого тела  $m_1^*$  тогда равна разности

$$m_1^* = m_{\odot}^* = m_{\odot} - A_T = (2 \cdot 10^{33} - 1,54 \cdot 10^{29} \Pi_T) \text{ г}. \quad (9)$$

Если тело обладает диффузным отражением солнечного излучения, то  $k_T = 13/9 = 1,44$  (см., напр., [6, с. 618]), и окончательно находим согласно (8) и (9), что

$$m_{\odot}^* = (2 \cdot 10^{33} - 2,22 \cdot 10^{29} \sigma_T / m_T) \text{ г}. \quad (10)$$

Ясно, что существует такое отношение  $\sigma_T / m_T$ , при котором  $m_{\odot}^* = 0$ , т. е. солнечное давление и притяжение тела Солнцем уравниваются. Легко подсчитываем, что из  $m_{\odot}^* = 0$  следует  $\sigma_T / m_T \approx 9009 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ . Известно [6, 7], что, например, для ледяного микрометеорита (плотность  $\delta = 0,9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , радиус  $\rho = 10^{-4} \text{ см}$ )  $\Pi_T = k_T \sigma_T / m_T \sim 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ . Также известно [9], что существует множество пробных тел (частиц) в межпланетном пространстве с подобной характеристикой (например, в хвостах комет), для которых согласно (10) могут выполняться неравенства и  $m_{\odot}^* > 0$ , и  $m_{\odot}^* < 0$ . Для упомянутого микрометеорита  $m_{\odot}^* < 0$ , т. е. Солнцем он отталкивается, но телом  $A_2$  – притягивается. Американские спутники-баллоны «Эхо-1», «Эхо-2», «Пагеос», запущенные на околоземную орбиту в 1960-х гг., имели парусность порядка 100, 50, 130  $\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$  соответственно и, следовательно, притягивались Солнцем, но их наблюдаемые траектории заметно отличались от траекторий, рассчитанных по законам ньютоновской небесной механики, не учитывающей светового давления.

Для планет С. с. парусность ничтожно малая. Например, для Юпитера и Земли парусность имеет порядок  $10^{-10} \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ . Поэтому редуцирующая масса Солнца для планет согласно (9) практически совпадает с массой Солнца и траектории планет, рассчитанные без учета и при учете СД, дают при нынешней точности наблюдений одинаковый результат.

Дело коренным образом меняется, когда рассматриваются пробные тела (частицы) с большой парусностью. Их траектории (орбиты) существенно отличаются в С. с. (и любой звездной планетарной системе) от ньютоновских траекторий. Эти отличия могут играть важную роль в астронавигации и вопросах, связанных с космогонией С. с. и любых других планетарных систем.

**2. Интегрирование систем (1)–(3).** В свете вышесказанного члены с  $A_{12}$  в (2) на много порядков меньше членов с  $A_{13}$  в (3). Например, для системы Солнце ( $A_1$ )–Юпитер ( $A_2$ )–спутник-баллон ( $A_3$ )  $A_{12}/A_{13} \sim 10^{-12}$ , а для системы Солнце ( $A_1$ )–Юпитер ( $A_2$ )–микрометеорит ( $A_3$ ) имеем  $A_{12}/A_{13} \sim 10^{-14}$ , т. е. при существующей точности наблюдений можно считать, что  $A_{12} = 0$ . Тогда

система (1), (2) дает известную ньютоновскую систему УД для двух тел  $A_1$  и  $A_2$ , которая точно решается и в полярной системе координат ( $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = x_1 - x_2 = r \cos \varphi$ ,  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = y_1 - y_2 = r \sin \varphi$ ), уравнение относительной орбиты их движения имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}, \quad (11)$$

т. е. является коническим сечением ( $e$  и  $p$  – эксцентриситет и параметр орбиты соответственно).

Рассмотрим подробно случай *кругового* движения тел  $A_1$  и  $A_2$ , т. е. в (11)  $e = 0$  и  $r = p = r_0 = \text{const}$ . Тогда параметрические уравнения орбит тел  $A_1$  и  $A_2$  можно представить в виде (см., напр., [1] или [3]):

$$A_1(x_1, y_1) \begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{m} r_0 \cos \omega_0 t, \\ y_1 = -\frac{m_2}{m} r_0 \sin \omega_0 t; \end{cases} \quad A_2(x_2, y_2) \begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{m} r_0 \cos \omega_0 t, \\ y_2 = \frac{m_1}{m} r_0 \sin \omega_0 t; \end{cases} \quad \omega_0^2 = \gamma m / r_0^3, \quad m = m_1 + m_2. \quad (12)$$

Система координат  $xOy$  – барицентрическая:  $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$ ,  $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$ ; движение плоское, т. е.  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ ; тела  $A_1$  и  $A_2$  все время находятся на прямой, проходящей через точку  $O$ .

Теперь можно интегрировать систему УД (3) для пробного тела  $A_3$ , заменив в ней  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{x}_2$ ,  $\bar{y}_2$  соответственно на  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Тогда окончательно находим УД для пробного тела  $A_3$  в фотогравитационном поле системы звезда ( $A_1$ ) – темное тело ( $A_2$ ):

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}_3}{dt^2} + \frac{\gamma(m_1 - A_{13})(\bar{x}_3 - x_1)}{[(\bar{x}_3 - x_1)^2 + (\bar{y}_3 - y_1)^2]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 (\bar{x}_3 - x_2)}{[(\bar{x}_3 - x_2)^2 + (\bar{y}_3 - y_2)^2]^{3/2}} = 0, \\ \frac{d^2 \bar{y}_3}{dt^2} + \frac{\gamma(m_1 - A_{13})(\bar{y}_3 - y_1)}{[(\bar{x}_3 - x_1)^2 + (\bar{y}_3 - y_1)^2]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 (\bar{y}_3 - y_2)}{[(\bar{x}_3 - x_2)^2 + (\bar{y}_3 - y_2)^2]^{3/2}} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

### 3. Стационарные решения системы (13).

Если в (13) положить  $A_{13} = 0$ , то придем к ньютоновским УД, которые точно решены в частных случаях Л. Эйлером в 1767 г. [10] и Ж. Лагранжем в 1772 г. [11]: пробное тело  $A_3$  движется по окружности (как и тела  $A_1$ ,  $A_2$ ), находясь на постоянных расстояниях от тел  $A_1$  и  $A_2$ , причем имеется пять возможностей в положении тела  $A_3$  относительно тел  $A_1$  и  $A_2$ . Эти положения тела  $A_3$  по сложившейся традиции называются точками либрации и обозначаются буквами  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$  (рис. 1). Точки  $L_4, L_5$  называются лагранжевыми треугольными точками либрации, а  $L_1, L_2, L_3$  – эйлеровыми коллинеарными точками либрации, так как они находятся на прямой  $A_1 A_2$ . Все точки либрации описывают с угловой скоростью  $\omega_0$  окружности с центром в начале координат  $O$  (центре масс тел  $A_1$  и  $A_2$ ), треугольники  $A_1 A_2 L_4$  и  $A_1 A_2 L_5$  – равносторонние. Координаты треугольных точек либрации  $L_4, L_5$  находятся во вращающейся с угловой скоростью  $\omega_0$  около  $O$  системе координат по формулам:

$$x_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0, \quad y_3^0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_0, \quad z_3 = 0, \quad (14)$$

где верхний знак у  $y_3^0$  соответствует точке либрации  $L_4$ , а нижний – точке  $L_5$ . Пользуясь формулами (12) и (14), легко показать, что все стороны треугольников  $A_1 A_2 L_4$  и  $A_1 A_2 L_5$  равны  $r_0$ . Расстояния точек  $L_1, L_2, L_3$  до тел  $A_1$  и  $A_2$  – разные, но постоянные.

Переход к фотогравитационному полю ( $A_{13} \neq 0$ ) приводит к УД (13), и сразу же возникает вопрос о существовании либрационных решений у системы (13), т. е. представляет интерес следующая

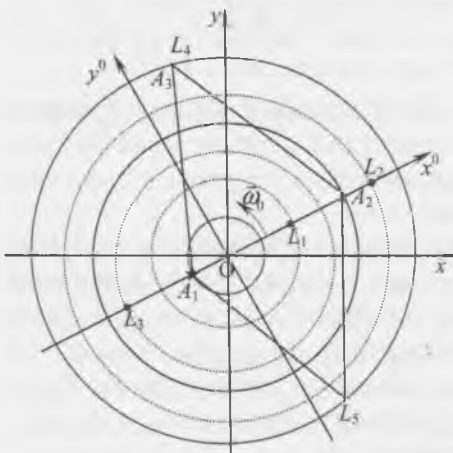


Рис. 1

З а д а ч а. Выяснить, существуют ли точные решения системы (13) вида

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_3^0 \cos \omega_0 t - \bar{y}_3^0 \sin \omega_0 t, \quad \bar{y}_3 = \bar{x}_3^0 \sin \omega_0 t + \bar{y}_3^0 \cos \omega_0 t, \quad (15)$$

где  $\bar{x}_3^0 = \text{const}$ ,  $\bar{y}_3^0 = \text{const}$ , и в случае существования найти их.

Р е ш е н и е. Дважды дифференцируя по  $t$   $\bar{x}_3$ ,  $\bar{y}_3$  из (15), находим:

$$d^2 \bar{x}_3 / dt^2 = -\bar{x}_3^0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t + \bar{y}_3^0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t, \quad d^2 \bar{y}_3 / dt^2 = -\bar{x}_3^0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t - \bar{y}_3^0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (16)$$

Подставив  $x_1, x_2, y_1, y_2$  из (12),  $\bar{x}_3, \bar{y}_3$  из (15) и их вторые производные из (16) в (13), после необходимых преобразований приходим к алгебраической системе уравнений для нахождения неизвестных  $\bar{x}_3^0, \bar{y}_3^0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{x}_3^0 \omega_0^2 + \frac{\gamma m_1^* \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0, \\ \bar{y}_3^0 \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1^* \bar{y}_3^0}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\gamma m_2 \bar{y}_3^0}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\bar{x}_3^0 \omega_0^2 + \frac{\gamma m_1^* \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0, \\ \bar{y}_3^0 \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1^* \bar{y}_3^0}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\gamma m_2 \bar{y}_3^0}{\left[ \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\bar{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

При решении системы (17), (18) рассмотрим два случая.

1. Коллинеарный случай. Он получается при  $\bar{y}_3^0 = 0$ . Тогда (18) обращается в нулевое тождество, а (17) дает уравнение для нахождения  $\bar{x}_3^0$ . Это уравнение после замены  $\omega_0^2$  согласно (12) приводим к виду

$$f(\bar{x}_3^0) = -\bar{x}_3^0 \pm \frac{m_1^* r_0^3}{m \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2} \pm \frac{m_2 r_0^3}{m \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2} = 0, \quad (19)$$

где во втором и третьем членах знак «+» берется при положительных значениях выражений в скобках и знак «-» – при отрицательных значениях. Введенная в (19) функция  $f(\bar{x}_3^0)$  обращается в бесконечность при  $\bar{x}_3^0 = \pm \infty$ ,  $\bar{x}_3^0 = -\frac{m_2}{m} r_0$ ,  $\bar{x}_3^0 = \frac{m_1}{m} r_0$  и имеет конечные значения и непрерывна в трех интервалах при  $m_1^* \neq 0$ :

$$\left( -\infty, -\frac{m_2}{m} r_0 \right), \left( -\frac{m_2}{m} r_0, \frac{m_1}{m} r_0 \right), \left( \frac{m_1}{m} r_0, +\infty \right). \quad (20)$$

Если же  $m_1^* = 0$ , то будем иметь только два таких интервала:

$$\left( -\infty, \frac{m_1}{m} r_0 \right), \left( \frac{m_1}{m} r_0, +\infty \right). \quad (21)$$

Находим производную

$$\frac{df(\bar{x}_3^0)}{d\bar{x}_3^0} = -1 \mp 2 \frac{m_1^*}{m} r_0^3 \left( \bar{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^{-3} \mp 2 \frac{m_2}{m} r_0^3 \left( \bar{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^{-3}, \quad (22)$$

необходимую для исследования свойств функции  $f(\bar{x}_3^0)$ , которые существенно отличаются в случаях а)  $m_1^* > 0$ , б)  $m_1^* = 0$ , в)  $m_1^* < 0$ .

а) Убеждаемся в том, что при  $m_1^* > 0$  производная во всех трех интервалах (20) существует и отрицательна, что говорит о монотонном убывании  $f(\bar{x}_3^0)$  в каждом из этих интервалов. Кроме того, вблизи левого конца каждого из этих интервалов  $f(\bar{x}_3^0) > 0$ , а вблизи правого конца  $f(\bar{x}_3^0) < 0$ . Отсюда следует, что в каждом интервале существует единственная точка фототлибрации для

пробного тела  $A_3$ , положение которой зависит не только от  $m_1$  и  $m_2$ , но и от  $A_{13}$ , так как входящая в (19) и (22) величина  $m_1^* = m_1 - A_{13}$ .

Итак, доказано, что существуют три коллинеарные точки фотолибрации  $L_1^*, L_2^*, L_3^*$  при заданном  $A_{13}$  из промежутка  $0 \leq A_{13} < m_1$ .

Далее приходим к выводу, что на прямой  $A_1A_2$  существуют три отрезка, заполненные точками фотолибрации для разных пробных тел. Эти отрезки назовем *отрезками фотолибрации*. Без учета светового давления отрезки фотолибрации вырождаются в точки либрации  $L_1, L_2, L_3$ , абсциссы которых находятся известными методами (см., напр., [2, 12]). При учете светового давления ( $A_{13} \neq 0$ ) уравнение (19) можно решать теми же методами или, следуя духу времени, решение уравнения можно искать с помощью компьютерных программ, например Mathematica или Mathcad.

б) Исследования уравнения (19) в случае  $m_1^* = 0$ , т. е.  $A_{13} = m_1$ , показывает, что существует одна точка фотолибрации во втором интервале из (21), а именно точка  $L_2^*$ , а две точки фотолибрации  $L_1^*$  и  $L_3^*$  сливаются в одну точку  $A_1$ , т. е. звезда является двойной точкой фотолибрации.

в) Случай  $m_1^* < 0$ , т. е.  $A_{13} > m_1$ , исследуется аналогично случаю а)  $m_1^* > 0$ : имеем три интервала непрерывности функции  $f(\tilde{x}_3^0)$  (20) и производной (22), но второй член в (19) и (22) изменил знак. Поэтому в первом и втором интервалах (20) график функции  $f(\tilde{x}_3^0)$  не пересекает ось  $Ox^0$ , т. е. в этих интервалах уравнение (19) не имеет решений и, следовательно, нет точек фотолибрации  $L_1^*$  и  $L_3^*$ . В третьем интервале (20) уравнение (19) имеет одно решение, т. е. существует одна точка фотолибрации  $L_2^*$ . Меняя значения  $A_{13}$  в интервале  $m_1 < A_{13} < +\infty$ , получим отрезок коллинеарных точек фотолибрации  $L_2^*$ , лежащий на оси  $Ox^0$  справа от тела  $A_2$  (рис. 2).

2. Треугольный случай. В этом случае  $\tilde{y}_3^0 \neq 0$  и уравнение (18) не исчезает. Возьмем следующую комбинацию уравнений (17) и (18): (17) умножим на  $\tilde{y}_3^0$ , а (18) – на  $\tilde{x}_3^0$  и полученные выражения сложим. Тогда придем к следующему уравнению:

$$\frac{m_1^*}{\left[ \left( \tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = \frac{m_1}{\left[ \left( \tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}}. \quad (23)$$

Из (23) сразу же следует, что  $m_1^* > 0$  и, следовательно,  $0 \leq A_{13} < m_1$ .

Заменив в уравнении (18)  $\omega_0^2$  его выражением из (12) и сократив (18) на  $\tilde{y}_3^0$ , придем к уравнению

$$\frac{m}{r_0^3} - \frac{m_1^*}{\left[ \left( \tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} - \frac{m_2}{\left[ \left( \tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0. \quad (24)$$

Сложив почленно уравнения (23) и (24), получаем уравнение

$$\left[ \left( \tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2} = r_0^3, \quad (25)$$

подстановка левой части которого в (23) приводит к уравнению

$$\left[ \left( \tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2} = \frac{m_1^*}{m_1} r_0^3. \quad (26)$$

Возведя обе части уравнений (25) и (26) в степень 2/3, приходим к системе

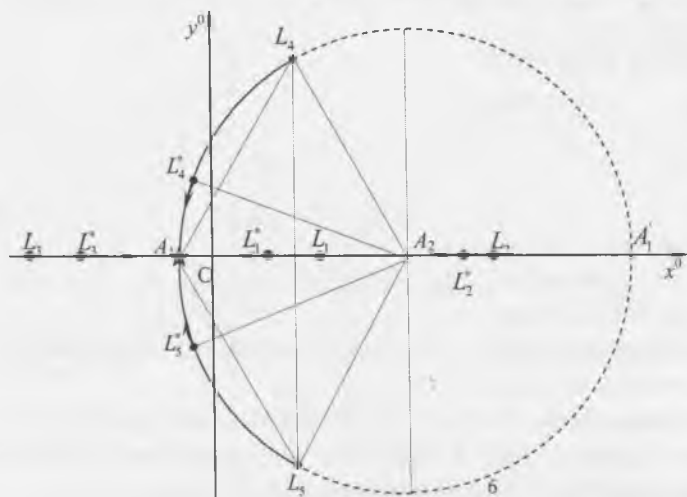


Рис. 2

$$\begin{cases} \left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0\right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = r_0^2, \\ \left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0\right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = \left(\frac{m_1^*}{m_1}\right)^{2/3} r_0^2, \end{cases} \quad (27)$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{x}_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{m_1^*}{m_1}\right)^{2/3} \right] r_0, \quad \tilde{y}_3^0 = \pm \left(\frac{m_1^*}{m_1}\right)^{1/3} \cdot r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1^*}{m_1}\right)^{2/3}}. \quad (28)$$

Решая систему (27) при  $A_{13} = 0$ , т. е. при  $m_1^* = m_1$ , приходим к решению (14); решение (28) также переходит в (14).

Таким образом, для конкретного пробного тела ( $A_{13}$  задано) существуют две симметричные треугольные точки фотолибрации. Для разных пробных тел параметр  $A_{13}$  может быть разным и поэтому треугольные точки фотолибрации также будут разными. Это означает, что на равенства (28) можно смотреть как на параметрические уравнения линий ( $A_{13}$  – параметр), состоящих из треугольных точек фотолибрации  $L_4^*$ ,  $L_5^*$ . Эти линии будем называть *линиями треугольных точек фотолибрации*.

По определению  $A_{13} \geq 0$ , но из (28) следует, что  $A_{13}$  должно быть ограничено сверху условием  $1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1^*}{m_1}\right)^{2/3} \geq 0$ , из которого получаем область изменения  $A_{13}$ :  $0 \leq A_{13} \leq 9m_1$ . Но ранее имели  $0 \leq A_{13} < m_1$ . Поэтому окончательно областью изменения  $A_{13}$  будет

$$0 \leq A_{13} < m_1. \quad (29)$$

Нетрудно показать, что при условии (29) уравнения (28) определяют две дуги окружности

$$\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0\right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = r_0^2, \quad (30)$$

имеющей центр в точке  $A_2$  и радиус  $r_0$ , но в силу ограничения (29) дуга окружности (30) точкой фотолибрации  $L_4^*$  с ростом  $A_{13}$  проходит против хода часовой стрелки от точки  $L_4$  до  $A_1$ , а  $L_5^*$  – по ходу часовой стрелки от точки  $L_5$  до  $A_1$ , не включая  $A_1$ . Треугольники  $A_1 A_2 L_4^*$  и  $A_1 A_2 L_5^*$  – равнобедренные (см. рис. 2).

Итак, задача решена: доказано, что система (13) имеет точные решения (15), соответствующие пяти видам точек фотолибрации.

**4. Числовые оценки и обсуждение полученных результатов.** Проведем некоторые численные расчеты в случае коллинеарных точек фотолибрации  $L_1^*$ ,  $L_2^*$ ,  $L_3^*$  для систем Солнце–Юпитер–пробное тело и Солнце–Земля–пробное тело и сведем их в две таблицы, приняв в уравнении (19) соответственно  $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$  г,  $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$  г,  $r_0 = 7,78 \cdot 10^{13}$  см, и  $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$  г,  $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$  г,  $r_0 = 7,78 \cdot 10^{13}$  см (табл. 1 и 2).

В табл. 1 и 2 случай  $A_{13} \rightarrow \infty$  не реален и рассматривается формально математически для того, чтобы подчеркнуть тенденцию стремления  $L_2^*$  справа к телу  $A_2$  при увеличении  $A_{13}$ .

Из уравнения (19) легко находим значение  $A_{13}$ , при котором  $\tilde{x}_3^0 = 0$  (точка фотолибрации  $L_1^*$  находится в центре масс  $O$  тел  $A_1$  и  $A_2$ ):

$$A_{13} = m_1 \left(1 - m_2^3 / m_1^3\right). \quad (31)$$

При  $m_1 = m_2$  из (31) получаем  $A_{13} = 0$ . Это означает, что только в случае равенства масс звезды  $A_1$  и темного тела  $A_2$  их центр масс  $O$ , находящийся посередине отрезка  $A_1 A_2$ , является коллинеарной точкой либрации  $L_1$ . Во всех остальных случаях ( $m_1 > m_2$ ) центр масс  $O$  является коллинеарной точкой фотолибрации  $L_1^*$ , получаемой из (19) при значении  $A_{13}$  из (31).

Таблица 1. Для системы тел СЮПТ

$A_{13}, \Gamma$	$\bar{x}_i^0 / 10^{13} \text{ см}$		
	$L_1^*$	$L_2^*$	$L_3^*$
0	7,2456	8,3238	-7,7832
$0,1m_1$	7,1358	8,2518	-7,5149
$0,3m_1$	6,7527	8,1549	-6,9115
$0,5m_1$	6,114	8,0951	-6,1789
$0,7m_1$	5,1780	8,0550	-5,2126
$0,9m_1$	3,5958	8,0261	-3,6163
$m_1$	$-7,7722 \cdot 10^{-3}$	8,0145	-0,00777
$1,1m_1$	-	8,0043	-
$1,5m_1$	-	7,9730	-
$2m_1$	-	7,9471	-
$4m_1$	-	7,8964	-
$9m_1$	-	7,8550	-
$20m_1$	-	7,8276	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	-	7,7722	-

Таблица 2. Для системы тел СЗПТ

$A_{13}, \Gamma$	$\bar{x}_i^0 / 10^{13} \text{ см}$		
	$L_1^*$	$L_2^*$	$L_3^*$
0	1,4752	1,5049	-1,4900
$0,1m_1$	1,4374	1,4976	-1,4386
$0,3m_1$	1,3229	1,4946	-1,3230
$0,5m_1$	1,1826	1,4936	-1,1826
$0,7m_1$	0,9974	1,4931	-0,9975
$0,9m_1$	0,6916	1,4927	-0,6916
$m_1$	$-0,4455 \cdot 10^{-5}$	1,4926	$-0,4455 \cdot 10^{-5}$
$1,1m_1$	-	1,4924	-
$1,5m_1$	-	1,4921	-
$2m_1$	-	1,4918	-
$4m_1$	-	1,4913	-
$9m_1$	-	1,4908	-
$20m_1$	-	1,4906	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	-	1,4900	-

Итак, согласно уравнению (19) и таблицам 1 и 2, коллинеарные точки фотолибрации при увеличении  $A_{13}$  в области  $0 \leq A_{13} < +\infty$  ведут себя следующим образом. Точка  $L_1^*$  справа, а точка  $L_3^*$  слева приближаются к звезде  $A_1$  при  $A_{13} \rightarrow m_1$  и сливаются с  $A_1$  при  $A_{13} = m_1$  (см. рис. 2). При  $A_{13} > m_1$  точек фотолибрации  $L_1^*$  и  $L_3^*$  не существует. Точка фотолибрации  $L_2^*$  при всех  $A_{13}$  из области  $0 \leq A_{13} < +\infty$  существует и стремится к темному телу  $A_2$  справа при увеличении  $A_{13}$  (см. табл. 1, 2 и рис. 2). Таким образом, самой близкой слева к телу  $A_2$  является коллинеарная точка либрации  $L_1$ , а самой дальней справа от тела  $A_2$  является коллинеарная точка либрации  $L_2$  (см. рис. 2).

Поведение треугольных точек фотолибрации  $L_4^*$  и  $L_5^*$  легко усматривается из их параметрических уравнений (28) и области изменения параметра  $A_{13}$  (29) (см. текст, сопутствующий уравнениям (28)–(30)).

Все рассмотренные ситуации относятся к вращающейся системе координат  $x^0Oy^0$ . В неподвижной системе координат  $xOy$  (см. рис. 1) все точки фотолибрации движутся с угловой скоростью  $\omega_0$  по окружностям соответствующего радиуса с центром в центре масс  $O$  тел  $A_1$  и  $A_2$ .

**Заключение.** Проведенное исследование в рамках задачи трех тел показывает, что учет прямого светового давления приводит к появлению новых закономерностей движения, отсутствующих в ньютоновской небесной механике. Но на движение тел в фотогравитационном поле действуют также возмущающие силы, обязанные своим существованием эффектам специальной и общей теории относительности: продольный и поперечный эффекты Доплера, лоренцево сокращение площади, увеличение массы движущегося тела, абберация света, кривизна пространства-времени. Учитывая эти возмущающие силы, мы сделаем несколько шагов к реальной картине движения тел. В задаче двух тел подобные исследования по проблеме движения уже осуществлены белорусскими учеными (см. [4, 5, 13–15]). В задачах трех тел учет упомянутых возмущающих сил будет проведен в следующих работах авторов.

## Литература

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
3. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979. Гл. 4.
4. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 77–83.
5. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 89–95.

6. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М., 2011.
7. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
8. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошина. М., 1976.
9. Фесенков В. Г. Солнце и Солнечная система: избр. тр. М., 1976. С. 118, 191.
10. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. Т. 11. P. 144–151.
11. Lagrange J. Essais sur le probleme des trois corps. Paris, 1772.
12. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964.
13. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 4. С. 93–97.
14. Рябушко А. П., Зубко О. Л., Жур Т. А., Боярина И. П. // Новейшие достижения европейской науки-2012: материалы 8-й Междунар. науч.-практ. конф. София, 2012. Т. 18. С. 30–38.
15. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. и др. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 85–91.

*A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR, I. R. BOYARINA, O. L. ZUBKO, V. I. YURINOK*

## PHOTOLIBRATION POINTS IN CELESTIAL MECHANICS

### Summary

Taking into account the star light pressure it is proved that for a star-dark body-test body system in the bounded planar circular problem of three bodies there exist a countless number of photolibration points filling up three segments of the straight line passing through the star and the dark body (collinear case) or those points filling up the two circular arcs passing through the Lagrangian libration points  $L_4, L_5$  (triangular case).